Künstliche Intelligenz selbst gemacht

Ein neuronales Netz mit Python entwickeln

Notationen im neuronalen Netz

x_i i-ter Eintrag im Inputvektor des Trainingsdatensatzes

$a_j^{(l)}$ Aktivierung des j-ten Neurons im Layer l

$b_j^{(l)}$ Bias des j-ten Neurons im Layer l zum Links-Rechts-Shift der Aktivierungsfunktion

$w_{jk}^{(l)}$ Gewicht vom k-ten Neuron im Layer $l-1$ zum j-ten Neuron im Layer l

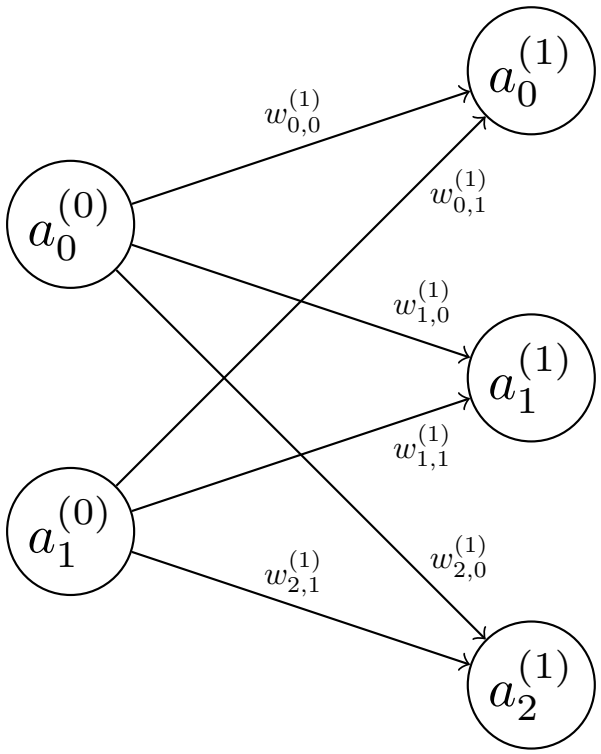
$z_j^{(l)}$ Gewichtete Summe aller eingehenden Neuronenaktivierungen im j-ten Neuron im Layer l

$\sigma^{(l)}$ Aktivierungsfunktion im Layer l

y_i i-ter Eintrag im erwarteten Outputvektor des Trainingsdatensatzes

Aktivierungsfunktionen

Name	$f(x)$	$f'(x)$ **(1. Ableitung)**
Rectified Linear Unit	$ReLU(x) = \begin{cases} x & \text{wenn } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$ReLU'(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
Sigmoid	$\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$	$\sigma'(x) = \sigma(x) \cdot (1 - \sigma(x))$



$$
\begin{aligned}
A^{(1)} &= \sigma^{(1)}\left(Z^{(1)}\right) \\
&= \sigma^{(1)}\left(W^{(1)}A^{(0)}\right) \\
&= \sigma^{(1)}\left[\begin{pmatrix} w_{0,0}^{(1)} & w_{0,1}^{(1)} \\ w_{1,0}^{(1)} & w_{1,1}^{(1)} \\ w_{2,0}^{(1)} & w_{2,1}^{(1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0^{(0)} \\ a_1^{(0)} \end{pmatrix}\right]
\end{aligned}
$$

Kostenfunktion bei Regression

Squared Error Loss: $C = (A^{(l)} - Y)^2$

Ableitung:

$$\frac{\partial C}{\partial w_{jk}^{(l)}} = \frac{\partial C}{\partial a_j^{(l)}} \frac{\partial a_j^{(l)}}{\partial z_j^{(l)}} \frac{\partial z_j^{(l)}}{\partial w_{jk}^{(l)}} \quad (1)$$

$$\frac{\partial z_j^{(l)}}{\partial w_{jk}^{(l)}} = \frac{\partial w_{jk}^{(l)} a_k^{(l-1)}}{\partial w_{jk}^{(l)}} = a_k^{(l-1)} \quad (2)$$

$$\frac{\partial a_j^{(l)}}{\partial z_j^{(l)}} = \sigma^{(l)'}(z_j^{(l)}) \quad (3)$$

$$\frac{\partial C}{\partial a_j^{(l)}} = 2\left(a_j^{(l)} - y_j\right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial C}{\partial a_j^{(l)}} = \sum_{i=0}^{n^{(l+1)}-1} \left(\frac{\partial C}{\partial a_i^{(l+1)}} \frac{\partial a_i^{(l+1)}}{\partial z_i^{(l+1)}} w_{ij}^{(l+1)} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial C}{\partial w_{jk}^{(l)}} = \frac{\partial C}{\partial a_j^{(l)}} \frac{\partial a_j^{(l)}}{\partial z_j^{(l)}} \cdot a_k^{(l-1)} = \delta_j^{(l)} \cdot a_k^{(l-1)} \quad (6)$$

$$\delta_j^{(l)} = \begin{cases} 2\left(a_j^{(l)} - y_j\right) \cdot \sigma^{(l)'}\left(z_j^{(l)}\right) & \text{für den Output-Layer} \\ \left(\sum_{i=0}^{n^{(l+1)}-1} \delta_i^{(l+1)} w_{ij}^{(l+1)} \right) \cdot \sigma^{(l)'}\left(z_j^{(l)}\right) & \text{für innere Layer} \end{cases} \quad (7)$$

Anpassung der Gewichte

$$\Delta w_{jk}^{(l)} = -\eta \cdot \frac{\partial C}{\partial w_{jk}^{(l)}} = -\eta \cdot \delta_j^{(l)} \cdot a_k^{(l-1)} \quad (8)$$

Softmax und Cross-Entropy Loss

Softmax:

$$\text{softmax}\left(z_i^{(l)}\right) = \frac{e^{z_i^{(l)}}}{\sum_{j=0}^{n^{(l)}-1} e^{z_j^{(l)}}} \qquad \text{softmax}^*\left(z_i^{(l)}\right) = \frac{e^{z_i^{(l)} - \max\left(Z^{(l)}\right)}}{\sum_{j=0}^{n^{(l)}-1} e^{z_j^{(l)} - \max\left(Z^{(l)}\right)}}$$

Cross-Entropy Loss:

$$C = -\sum_{i=0}^{n^{(l)}-1} y_i \cdot \ln\left(a_i^{(l)}\right)$$

Ableitung:

$$\frac{\partial s_i^{(l)}}{\partial z_j^{(l)}} = s_i^{(l)} \cdot \frac{\partial}{\partial z_j^{(l)}} \ln\left(s_i^{(l)}\right) \qquad \text{I}$$

$$\frac{\partial z_i^{(l)}}{\partial z_j^{(l)}} = 1_{\{i=j\}} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{II}$$

$$\frac{\partial s_i^{(l)}}{\partial z_j^{(l)}} = s_i^{(l)} \cdot \left(1_{\{i=j\}} - s_j^{(l)}\right) \qquad \text{III}$$

$$\frac{\partial C}{\partial z_j^{(l)}} = s_j^{(l)} - y_j \qquad \text{IV}$$

$$\frac{\partial C}{\partial w_{jk}^{(l)}} = \left(s_j^{(l)} - y_j\right) \cdot a_k^{(l-1)} \qquad \text{V}$$