Gleichungen umformen und lösen

1. Löse die Gleichung $2x+3=9$. **Lösung:** $x=3$
2. Gegeben ist die Gleichung $y=2x^2+5$.
   a) Stelle die Gleichung nach x um. **Lösung:** $x=\pm\sqrt{\frac{y-5}{2}}$

   b) Für welche y ist die Gleichung definiert? **Lösung:** $y\geq 5$

Grundlegendes Verständnis von Funktionen

1. Gegeben ist die Funktion $f(x)=3x+2$.
   a) Berechne $f(0)$, $f(1)$ und $f(-2)$. **Lösung:** $f(0)=2,\ f(1)=5,\ f(-2)=-4$
   b) Welche Steigung hat die Funktion? **Lösung:** $m=3$
2. Wo schneidet die Funktion $f(x)=x^2-4$ die x- und wo die y-Achse?
   Lösung: x-Achse bei $x=2$ und $x=-2$, y-Achse bei $y=-4$.
3. Bestimme die Gleichung der linearen Funktion $f(x)$, die durch die Punkte $P\,(-4,6)$ und $Q\,(6,1)$ verläuft.
   Lösung: $f(x)=mx+n\ \rightarrow\ P$ und Q einsetzen ergibt: $6=-4m+n$ (I) und $1=6m+n$ (II)
   Umstellen von (I) nach n und Einsetzen in (II) ergibt: $1=6m+6+4m\rightarrow m=-\frac{1}{2}$
   Einsetzen von $m=-\frac{1}{2}$ in (I) oder (II) ergibt: $n=4$ und damit: $f(x)=-\frac{1}{2}x+4$

Terme umformen

1. Vereinfache folgende Terme.
   a) $x^3\cdot x^2$ **Lösung:** x^5
   b) $\frac{x^5}{x^2}$ **Lösung:** x^3
   c) $\left(x^2\right)^3$ **Lösung:** x^6
   d) $2(x+3)-4(x-1)$
   Lösung: $2x+6-(4x-4)=2x+6-4x+4$
   $=-2x+10$
   e) $\frac{x^2+2x}{x}$ **Lösung:** $\frac{x(x+2)}{x}=x+2$
   f) $\frac{2x^2+4x}{2x}$ **Lösung:** $\frac{2x(x+2)}{2x}=x+2$
   g) $(2x+5)^2$ **Lösung:** $4x^2+20x+25$
   h) $\frac{x^2-9}{x-3}$ **Lösung:** $\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=x+3$

Grundlagen der Differentialrechnung

1. Nenne Beispiele aus dem alltäglichen Leben, bei denen die Änderungsrate einer Größe betrachtet wird.
   Lösung: Preis $\rightarrow$ Inflation/Deflation, Position $\rightarrow$ Geschwindigkeit $\rightarrow$ Beschleunigung
2. Bilde mithilfe des Differenzenquotienten die Ableitung von $f(x)=3x^2-4$.
   Lösung:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2-4-(3x^2-4)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3(x^2+2xh+h^2)-4-3x^2+4}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6xh+3h^2-4-3x^2+4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6xh+3h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(6x+3h)}{h}=\lim_{h\to 0}6x+3h=6x$$

3. Bilde die Ableitungen folgender Funktionen:
   a) $f(x) = -4x^3$ **Lösung:** $f'(x) = -12x^2$
   b) $g(x) = x^3 + 2x$ **Lösung:** $g'(x) = 3x^2 + 2$
   c) $h(x) = 4x^5 + 3x^3 - 6x^2 - 3$ **Lösung:** $h'(x) = 20x^4 + 9x^2 - 12x$
   d) $i(x) = 5$ **Lösung:** $i'(x) = 0$
   e) $j(x) = \left(x^3\right)^2$ **Lösung:** $j'(x) = 6x^5$

Ketten- und Produktregel

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \left(x^3 + 1\right)^2$.
   a) Bilde die Ableitung $f'(x)$ mithilfe der Kettenregel.
   Lösung: $f(x) = u(v(x));\quad v(x) = x^3 + 1;\quad u(v) = v^2$
   $\to f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) = 2\left(x^3 + 1\right) \cdot 3x^2 = \left(2x^3 + 2\right) \cdot 3x^2 = 6x^5 + 6x^2$
   b) Multipliziere den Funktionsterm mit der binomischen Formel aus und bilde dann die Ableitung $f'(x)$ nach klassischen Polynomregeln.
   Lösung: $f(x) = \left(x^3 + 1\right)^2 = x^6 + 2x^3 + 1 \quad \to \quad f'(x) = 6x^5 + 6x^2$
2. Bilde mithilfe der Kettenregel die Ableitungen folgender Funktionen.
   a) $f(x) = (3x + 1)^2$ **Lösung:** $f'(x) = 2\,(3x + 1) \cdot 3 = 6\,(3x + 1) = 18x + 6$
   b) $f(x) = \left(x^2 - 3\right)^7$ **Lösung:** $f'(x) = 7\left(x^2 - 3\right) \cdot 2x = 14x\left(x^2 - 3\right) = 14x^3 - 42x$
   c) $f(x) = e^{x^2}$ **Lösung:** $f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x$
   d) $f(x) = \ln(3x + 2)$ **Lösung:** $f'(x) = \dfrac{1}{3x + 2} \cdot 3 = \dfrac{3}{3x + 2}$
   e) $f(x) = \ln\left(x^2 - 4x\right)$ **Lösung:** $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4x} \cdot (2x - 4) = \dfrac{2x - 4}{x^2 - 4x}$
   f) $f(x) = \left(e^{2x} + 1\right)^3$
   Lösung: „Mehrfachkette" $f(g(h(x)))$ mit $g(x) = e^{2x} + 1$ und $h(x) = 2x$
   $$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}g(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}h(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x} \;\to\; \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = 3\left(e^{2x} + 1\right)^2 \cdot e^{2x} \cdot 2 = 6e^{2x}\left(e^{2x} + 1\right)^2$$
3. Bilde mithilfe der Produktregel die Ableitungen folgender Funktionen.
   a) $f(x) = x(x + 3)$ **Lösung:** $f'(x) = x \cdot 1 + 1 \cdot (x + 3) = 2x + 3$
   b) $f(x) = x \cdot e^x$ **Lösung:** $f'(x) = x \cdot e^x + 1 \cdot e^x = e^x(x + 1)$
   c) $f(x) = (2x - 1)(x + 4)$
   Lösung: $f'(x) = (2x - 1) \cdot 1 + 2 \cdot (x + 4) = 2x - 1 + 2x + 8 = 4x + 7$
   d) $f(x) = (x^2 + 2)(x - 1)$
   Lösung: $f'(x) = (x^2 + 2) \cdot 1 + 2x \cdot (x - 1) = x^2 + 2 + 2x^2 - 2x = 3x^2 - 2x + 2$
   e) $f(x) = (x^2 + 1)(x - 3)$
   Lösung: $f'(x) = (x^2 + 1) \cdot 1 + 2x \cdot (x - 3) = x^2 + 1 + 2x^2 - 6x = 3x^2 - 6x + 1$
   f) $f(x) = x^3 \cdot \left(2x^2 + x - 4\right)$
   Lösung: $f'(x) = x^3 \cdot (4x + 1) + 3x^2 \cdot \left(2x^2 + x - 4\right) = 4x^4 + x^3 + 6x^4 + 3x^3 - 12x^2 = 10x^4 + 4x^3 - 12x^2$

Kombination und Anwendung

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

   a) Bestimme die Ableitung $f'(x)$. **Lösung:** $f'(x) = 2x - 6$

   b) Bestimme den Tiefpunkt von $f(x)$.

   Lösung: Nullstelle von $f'(x)$: $0 = 2x - 6 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = 3$

   Einsetzen von $x = 3$ in $f(x)$: $f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = 9 - 18 + 8 = -1 \rightarrow$ Tiefpunkt bei $T(3, -1)$

2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

   a) Bestimme die Ableitung $f'(x)$. **Lösung:** $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

   b) Berechne die Funktionsgleichung der Tangente an $f(x)$ an der Stelle $x = 2$.

   Lösung: Gesucht: $t(x) = mx + n$. Dabei gilt: $m = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = 12 - 24 + 9 = -3$

   $t(x)$ muss durch den Punkt $(2, f(2))$ verlaufen, wobei: $f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 1 = 8 - 24 + 18 - 1 = 1$

   Aus $t(x) = mx + n$ folgt: $1 = -3 \cdot 2 + n = -6 + n \;\rightarrow\; n = 7 \;\rightarrow\; t(x) = -3x + 7$