

# Projektarbeit Geoinformatik 2022

## Interpolation

TU Bergakademie Freiberg  
Institut für Geophysik und Geoinformatik

Annemarie Bär  
Bjarne Jacobsen  
Lena Zimmermann

# Interpolation

Interpolation ist das Abschätzen von Werten in den Bereichen zwischen gemessenen Datenpunkten. Dabei sind die Werte vom Ort bzw. dem euklidischen Abstand, also dem Radius zum Messwert abhängig. Verschiedene Interpolations-Funktionen verwenden unterschiedliche Methoden der Gewichtung.

## Radiale Basisfunktion

Die Interpolation mittels der radialen Basisfunktionen (RBF) ist eine eindimensionale, nicht gitterbasierte, exakte Interpolationsmethode. Das bedeutet, dass alle Messpunkte in der interpolierten Oberfläche enthalten sind. Ziel dieser Interpolationsmethode ist es, mit den Funktionen die Oberfläche weitestgehend zu glätten. Dafür gibt es fünf verschiedene radiale Basisfunktionen mit je verschiedenen Formen, die entsprechend zu unterschiedlichen Interpolationsflächen führen. Dabei wird die Fläche glatter, je öfter differentierbar die verwendete Funktion ist.

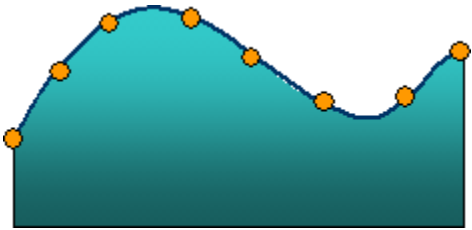
Name	$\phi(r)$
Thin Plate Splines	$r^2 \log r$
Multiquadrics	$\sqrt{1 + r^2}$
Inverse Multiquadrics	$(1 + r^2)^{-1/2}$
Gaußglocke	$\exp(-r^2)$
Wendlandfunktion	$(1 - r)_+^4 (1 + 4r)$

Abb. 1: Die verschiedenen Funktionen, Seite 8<sup>[1]</sup>, 7.10.2022, 15:09

Die Interpolation mittels RBFs ist bildlich vorstellbar, als würde eine Gummimatte in das vermessene Gelände gelegt werden, sodass diese sich an die Höhe der Messwerte anpasst und die Bereiche dazwischen ausgleicht. Die Genauigkeit der errechneten Werte zwischen den bemessenen Punkten werden mittels Kreuzvalidierung bestimmt. Dazu wird die Interpolation mit Testdaten durchgeführt und der zu erwartende Fehler Vorhersage abgeschätzt. Die Beispielwerte und ihre Fehler werden nun untereinander verglichen und die Genauigkeit wird berechnet. <sup>[2]</sup>

Ziel der Interpolation ist es, die insgesamte Oberflächenwölbung der entstehende Fläche zu minimieren, also eine hohe Glättung zu erzielen.

Die RBFs bieten dabei Vorteile gegenüber der globalen oder lokalen Polynomeninterpolation, da aufgrund der Eigenschaft der Exaktheit die interpolierte Fläche die tatsächlichen Messwerte enthält. Im Gegensatz zu den inversen und distanzgewichteten Profilen sagen die Basisfunktionen auch Werte über bzw. unter den gemessenen Werten voraus:



*Abb. 2: Interpolation mittels RBF, 21.9.2022, 10:37*

# Umsetzung

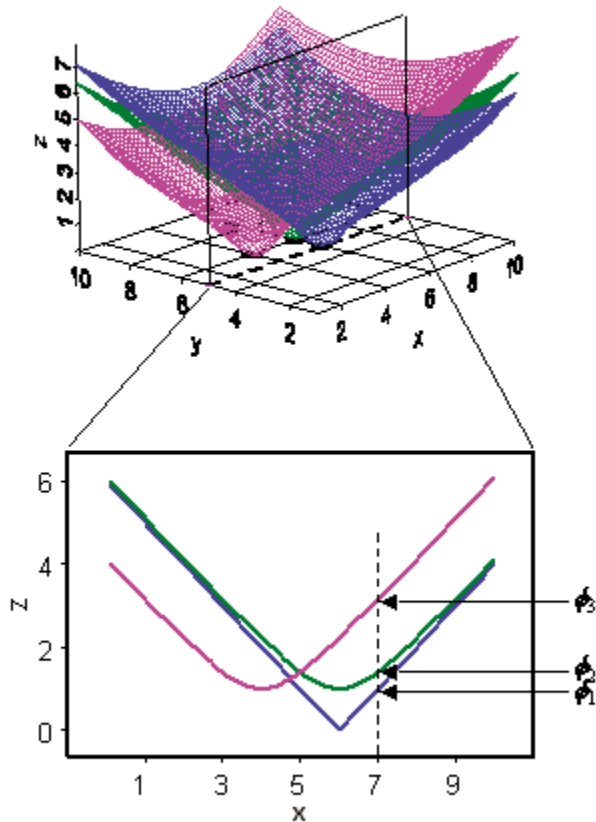


Abb. 3: Spezieller Fall der multiquadratischen RBF, 21.9.2022, 10:36

Während der Interpolation wird über jedem Punkt eine der fünf Basisfunktionen gebildet.

Die Funktion ändert sich mit Abstand von einem gemessenen Punkt, da die "Funktionswerte nur vom euklidischen Abstand der Argumente abhängig sind"<sup>[3]</sup>.

Die Vorhersage der Werte wird durch die gewichteten Durchschnittswerte zwischen den Werten, die die RBFs an der zu interpolierenden Stelle annehmen, (siehe Abb. 3) gebildet. Die durch die verschiedenen Funktionen gegebenen Werte werden gemittelt und gewichtet um einen Wert für die Interpolation der Oberfläche zu erhalten.

Die Gewichtungen der Werte ergeben sich durch Verschiebung der Vorhersage an einen Punkt mit gemessenem Wert. Wird eine Vorhersage an einen Punkt mit gemessenen Werten

verschoben, stimmt die RBF an dieser Stelle, da ihr ein Messwert als Ausgangswert der Funktion zugrunde liegt. Das führt zu so vielen Gleichungen, wie es gemessene Werte gibt. Sie enthalten unbekannte Gewichte. Das entstandene Gleichungssystem kann damit eindeutig gelöst werden und sorgt für genaue Vorhersagen im gesamten Oberflächenbereich. Die Lösbarkeit und Eindeutigkeit sind stark abhängig von der Wahl der Basisfunktion und dem Parameter zur Glättung. Gegebenenfalls werden mit den unterschiedlichen Funktionen stark verschiedene Ergebnisse erreicht.

Um eine möglichst ebene Oberfläche zu erhalten, enthalten alle RBFs einen Parameter, der die Glätte der Oberfläche repräsentiert. Für diesen gilt allgemein: 'Je höher der Parameterwert, desto glatter ist die Karte'. Nur bei der inversen, multiquadratischen Basisfunktion gilt das Gegenteil. Ein niedriger Parameterwert führt hier zu einer glatteren Oberfläche.

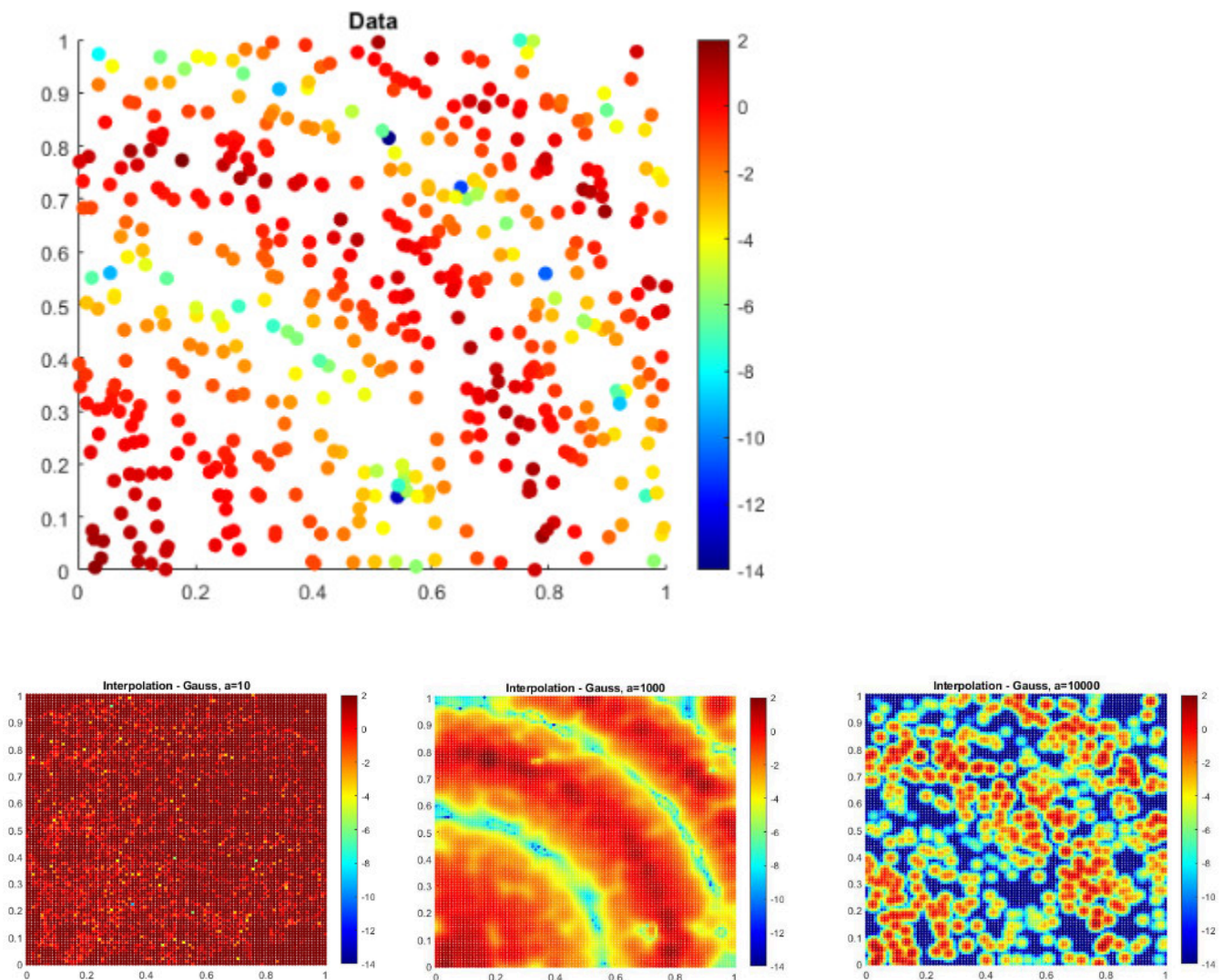


Abb. 4: Interpolation mittels verschiedener Parameter, wie in der Vorlesung 6, Folie 5.

# Vorteile und Anwendung

Ein Vorteil der RBFs ergibt sich aus der Gitterfreiheit der Interpolation. Gitterbasierter Methoden liegt immer ein Raster oder eine Triangulierung zugrunde. Das schränkt die Verwendung mit bestimmten Datensätzen ein oder erhöht die Vorarbeit in Form der Triangulierung. Numerisch sind die RBFs so formuliert, dass man aus ihnen intuitive Eigenschaften ablesen kann, zum Beispiel das Abfallen einer Funktion.

Ein weiterer Vorteil ist, dass RBFs den zu interpolierenden Raum von den gegebenen Datenpunkten abhängig machen. Verändern sich die Messpunkte, verändert sich auch das Gebiet, welches interpoliert werden soll. Das ist essentiell um im multivariaten Raum zu interpolieren. [\[1:1\]](#)

In der Glättung der Oberfläche liegt auch ein Nachteil. Enthält das tatsächliche, bemessene Gebiet einen stark lokal begrenzten Extrempunkt, so wird dieser in der interpolierten Fläche geglättet und unter Umständen sind Maximalwert und lokale Begrenzung nicht mehr zu erkennen. Aus diesem Grund ist die Interpolation mittels radialer Basisfunktionen nicht geeignet für starke Variationen in kurzen Abständen in der Messumgebung oder falls die gemessenen Daten (stark) fehlerbehaftet sind.

Verwendet werden die RBFs zum Glätten leicht variierender Oberflächen, wie beispielsweise Geländeprofile. Außerdem finden sie Verwendung in der angewandten Mathematik oder in den Neurowissenschaften. [\[1:2\]](#) Es wird angenommen, dass unser Gehirn Reize analog zur Interpolation mit RBFs darstellt. Die Vermutung basiert darauf, dass Neuronenantworten in den primären sensorischen Arealen, ähnlich der Interpolation, abstandabhängig sind [\[4\]](#).

## Splines

Splines sind stark mit den radialen Basisfunktionen verwandt. Sie sind auch nicht-gitterbasiert. Die Werte werden mittels mathematischer Funktionen bestimmt. Die Oberfläche wird geglättet und verläuft durch die Messpunkte. Splines sind aufgrund ihrer Recheneigenschaften sehr beliebt. Bei den RBFs ist wie bei den Splines ein kubisches Polynom die Basis für die Interpolation. Trotzdem sind nicht alle RBFs Splines. [\[5\]](#)

# Kriging

Kriging ist ein Interpolationsverfahren der Geostatistik. Es werden Werte an Positionen, an denen keine Messdaten vorliegen, mithilfe der umliegenden Datenpunkte angenähert. Dabei wird die räumliche Varianz berücksichtigt, welche aus einem Semivariogramm ermittelt werden kann. "Für einen gesuchten Wert werden dabei die Gewichte der in die Berechnung einfließenden Messwerte so bestimmt, dass die Schätzfehlervarianz möglichst gering ist."<sup>[6]</sup> Mit den Gewichten kann eine Vorhersage über einen nicht gemessenen Ort abgeleitet werden. Dafür wird mit folgender Formel die gewichtete Summe der Daten gebildet:

$$\hat{Z}(s_0) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Z(s_i)$$

dabei gilt:<sup>[7]</sup>

$Z(s_i)$  - gemessener Wert am i-ten Ort

$\lambda_i$  - unbekannte Gewichtung für den am i-ten Ort gemessenen Wert

$s_0$  - vorhergesagter Ort

$N$  - Anzahl der gemessenen Werte

Die Gewichtungen sind abhängig vom an die Messpunkte angepassten Modell, der Entfernung zur vorhergesagten Position und den räumlichen Beziehungen unter den umliegenden Datenpunkten. Mithilfe der Kriging-Interpolationsmethode kann in zwei Schritten eine vorhergesagte Oberflächenkarte erstellt werden. Der erste Schritt ist das Erstellen des Variogrammes, um die räumliche Autokorrelation der Datenpunkte abzuschätzen. Es wird dabei vorausgesetzt, dass die gesamte Oberfläche statistisch homogen ist, sodass an jedem Ort das gleiche Variationsmuster vorliegt. Der zweite Schritt ist das Vorhersagen der unbekannten Werte. Dafür gibt es unterschiedliche Methoden: Beim "Ordinary"-Kriging wird angenommen, dass der konstante Mittelwert unbekannt ist, während beim "Universal"-Kriging von einem vorrangigen Trend in den Daten ausgegangen wird (z.B. eine vorherrschende Windrichtung).

## Variogramme

Variogramme werden in der Geostatistik verwendet und sind die Grundlage für die Interpolationsmethode Kriging. Mithilfe von Variogrammen können Aussagen über die räumlichen Beziehungen von benachbarten Datenpunkten und deren Ähnlichkeit in Abhängigkeit von der

Entfernung getroffen werden.

Aus Datenpunkten werden Paare gebildet und deren Werte miteinander verglichen, dafür wird die quadrierte Differenz gebildet, halbiert und in Abhängigkeit von der Distanz  $h$  der beiden Punkte dargestellt, damit erhält man eine Variogrammwolke. Es wird Stationarität vorausgesetzt, das heißt, dass die Werte nur von der Entfernung der Punkte und nicht von ihrer räumlichen Position abhängen.

Alle diese Werte  $\frac{(Z(x+h)-Z(x))^2}{2}$  [8] für den gleichen Abstand werden summiert und durch die Anzahl der Punktpaare dieser Distanz geteilt. Dadurch ergibt sich die Semivarianz der Messwerte in Abhängigkeit der Entfernung:

$$\gamma(h) = \frac{1}{N_h} \sum_{x_i - x_j = h} \frac{(Z(x_i) - Z(x_j))^2}{2}$$

dabei gilt:

$N_h$  - Anzahl der Punktpaare derselben Distanz

$h$  - Distanz der Punkte

$(x_i, x_j)$  - Punktpaare

$Z$  - Messwerte

Dieser Zusammenhang wird im empirischen bzw. experimentellen Variogramm dargestellt. Meist wird dafür die x-Achse zur Vereinfachung in mehrere Intervalle ("Lags") zerlegt, sodass die Mittelwerte innerhalb dieser berechnet werden. Dabei ist das Grundprinzip der Geographie zu erkennen: Nähere Punktpaare sind sich ähnlicher und werden sich mit zunehmender Distanz immer unähnlicher.

Danach wird ein theoretisches Modell erstellt. Dafür wird eine Kurvenfunktion durch das empirische Variogramm gelegt. Dieser Prozess ähnelt einer Regressionsanalyse. Häufig auftretende Formen sind kreisförmige, sphärische, lineare, exponentiale und gaußsche Variogramme (siehe Abb. 5). [9] Dabei ist nicht immer jede Funktion zulässig, da nicht alle Formen zu den Daten passen. Beim sphärischen Modell nimmt die räumliche Autokorrelation beispielsweise bis zu einer bestimmten Entfernung ab, über die hinaus die Autokorrelation 0 ist. Beim exponentialen Modell dagegen nimmt die Autokorrelation exponentiell zu und ist nur bei unendlicher Entfernung aufgehoben.



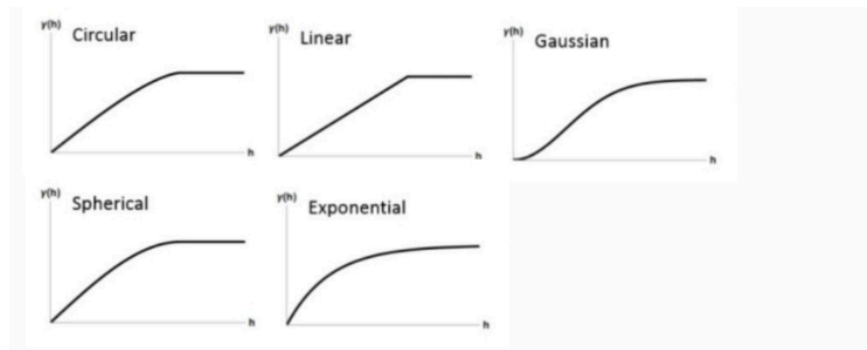


Abb. 5: <https://pro.arcgis.com/de/pro-app/latest/tool-reference/3d-analyst/how-kriging-works.htm>

Das ausgewählte Modell hat Einfluss auf die Vorhersage der unbekannten Werte beim Kriging. Je steiler die Kurve in der Nähe des Ursprungs ansteigt, desto stärker ist der Einfluss der nächsten Nachbarn auf die Vorhersage, sodass die ausgegebene Oberfläche weniger glatt ist.

Außer bei linearen Variogrammen, nähert sich die Kurve meist einem Grenzwert an. Dieser wird *Partial Sill* (Schwellenwert) genannt. Er ergibt sich aus *Sill* minus *Nugget*. Die Entfernung zwischen  $x = 0$  und dem  $x$ -Wert, an dem die  $y$ -Werte 95% des *Partial Sills* erreichen, wird als *Range* bezeichnet.<sup>[10]</sup> Ab dieser Distanz  $h$  ist keine autokorrelative Beziehung der Messwerte mehr feststellbar.<sup>[11]</sup> Im Idealfall müsste der  $y$ -Wert bei  $x = 0$  Null sein, da dort der Abstand der zu vergleichenden Punkte Null ist (die zwei Punkte sind identisch) und damit die Messwerte gleich sein müssten. Dies ist im Variogramm oft nicht der Fall, der  $y$ -Wert, an dem die Kurve die  $y$ -Achse schneidet, wird *Nugget* genannt und gibt an, wie stark die Daten rauschen. Dieser *Nugget-Effekt* beruht auf Fehlern der Messgeräte und räumlichen Schwankungen bei Entfernungen, die kleiner als das Abtastintervall sind.

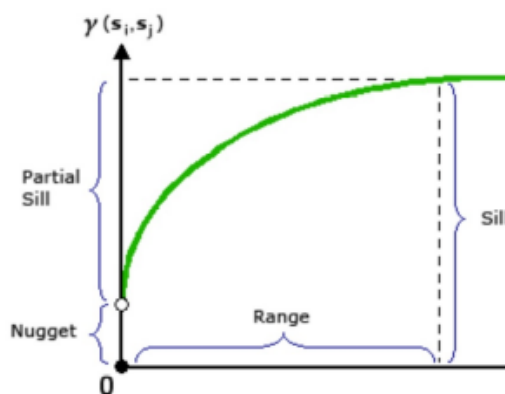


Abb. 6: <https://pro.arcgis.com/de/pro-app/latest/tool-reference/3d-analyst/how-kriging-works.htm>

# Implementierung

## Anmerkungen

Die Skripte sollen entsprechend ihrer Nummerierung der Reihenfolge nach ausgeführt werden. In Skript eins kann aus einer der Datenquellen gewählt und nur der jeweilige Unterabschnitt ausgeführt werden.

- *implementations1* zum Erzeugen eines Datensatzes
- *implementations2* zur Variogrammberechnung
- *implementations3* zur Berechnung der Variogrammfunktion

## Datenquelle

Als Datenquelle dient die in Matlab eingebaute Peaks-Funktion, auf die eine geeignete Ebene addiert wird. Die Peaks-Funktion "lebt" im quadratischen Bereich  $\Omega = \{-3:3, -3:3\}$ . Die Funktion wird an 100 zufällig ausgewählten Datenpunkten (Gleichverteilung) im Bereich  $\Omega$  ausgewertet. Es ergibt sich eine Matrix der Form 100 x 3 mit den Datenpunkten als Zeilen und x, y und z als Spalten. Anschließend wird der Bereich  $\Omega$  mit dem Eckpunkt (-3,-3) auf die Null geschoben und auf eine Größe von 50 x 50 Flächeneinheiten skaliert. Das heißt  $\Omega$  deckt jetzt den Bereich  $\{0:50, 0:50\}$  ab. Eine beispielhafte Lage der Datenpunkte (x,y) kann dem untenstehenden Plot entnommen werden. Die Messwertdaten werden in der 3 x n Matrix `data` gespeichert. Sie enthält die Spalten `x`, `y` und dem Messwert `z`.

Es wurde die Möglichkeit geschaffen, die Datenquelle und die Lage der "Messpunkte" darzustellen.

beispielhafte Lage der Datenpunkte

*Abb. 7: Peaks-Funktion und beispielhafte Lage der Datenpunkte*

Außerdem wurde die Möglichkeit geschaffen, Bilder zu laden und als Datenquelle zu verwenden. Diese können dann entweder als Graustufen-Bild oder als einzelner Farbkanal des Bildes weiterverarbeitet werden. Anschließend werden in den Bereich des Bildes zufällige "Messpunkte" gelegt.

# Variogramm

Im zweiten Skript wird aus der Datenmatrix für jede Punktkombination der örtliche Abstand und die Varianz berechnet und in einer 2 x n Matrix `distance_variance` gespeichert. Die erste Spalte enthält den Abstand, die Zweite die quadrierte Abweichung im Messwert. Aus dieser Matrix erhält man den Plot der Variogrammwolke.

Der Bereich in dem die Abstände der Einträge der `distance_variance` Matrix liegen wird in 50 Unterintervalle aufgeteilt. Die Einträge werden in diese Intervalle kategorisiert und über jedem Intervall ein Mittelwert der Varianz berechnet. Die erhaltenen Werte werden in der 2 x n Matrix `middleVariance` gespeichert. Die erste Spalte enthält die obere Grenze des Intervalls. Die untere Grenze ist die obere des vorhergehenden bzw die null. Die obere Grenze gehört nicht zum Intervall.

Daraus lässt sich das Semivariogramm plotten. Dieses enthält die halbierte Varianz - daher semi - in Abhängigkeit des Abstands.

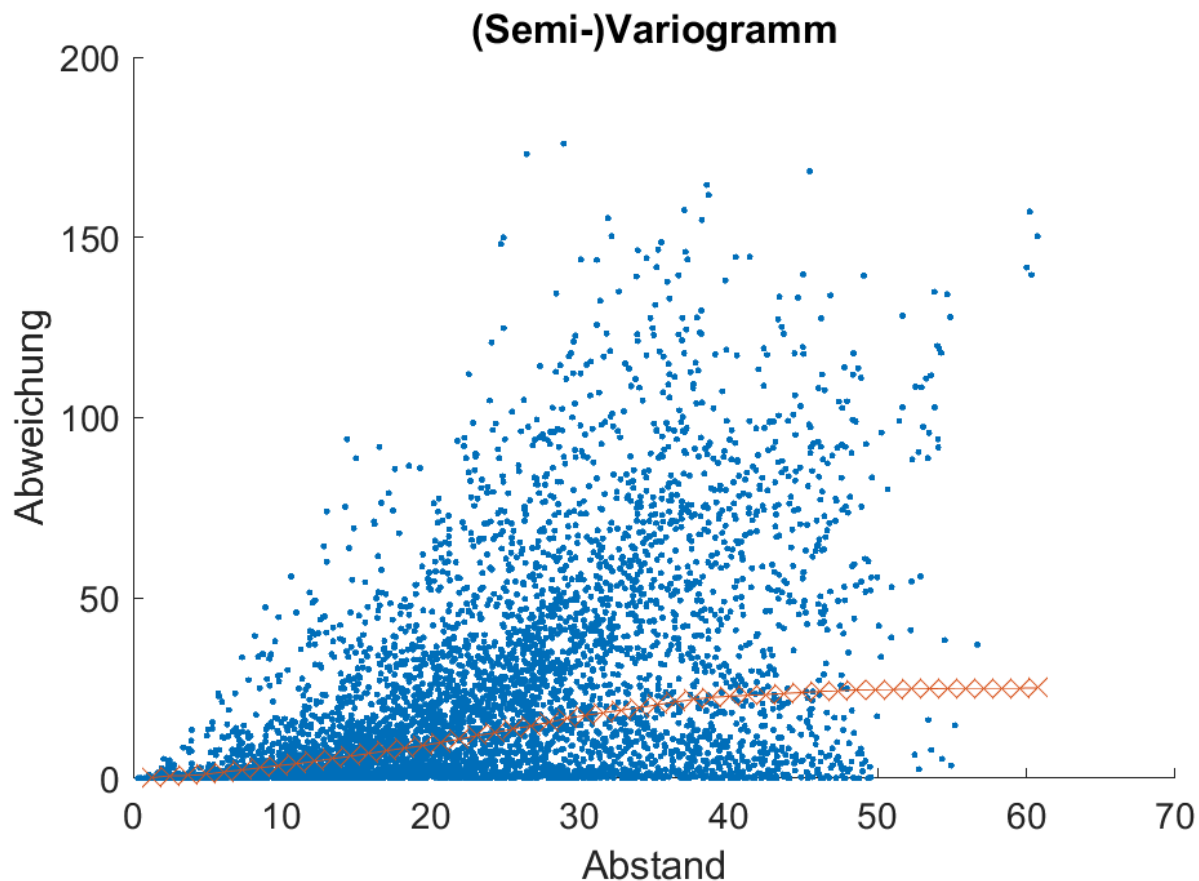


Abb. 8: Semivariogrammwolke

# Variogrammfunktion

Im dritten Skript wird versucht eine Gauss'sche oder Exponentielle Variogrammfunktion an die erhaltenen Werte anzupassen. Die Parameter sind **A** für den *range*, **B** für das *nugget* und **C** für den *sill*. Die erhaltene Variogrammfunktion sieht für die Daten aus Quelle eins (Peaks function) in etwa folgendermaßen aus:

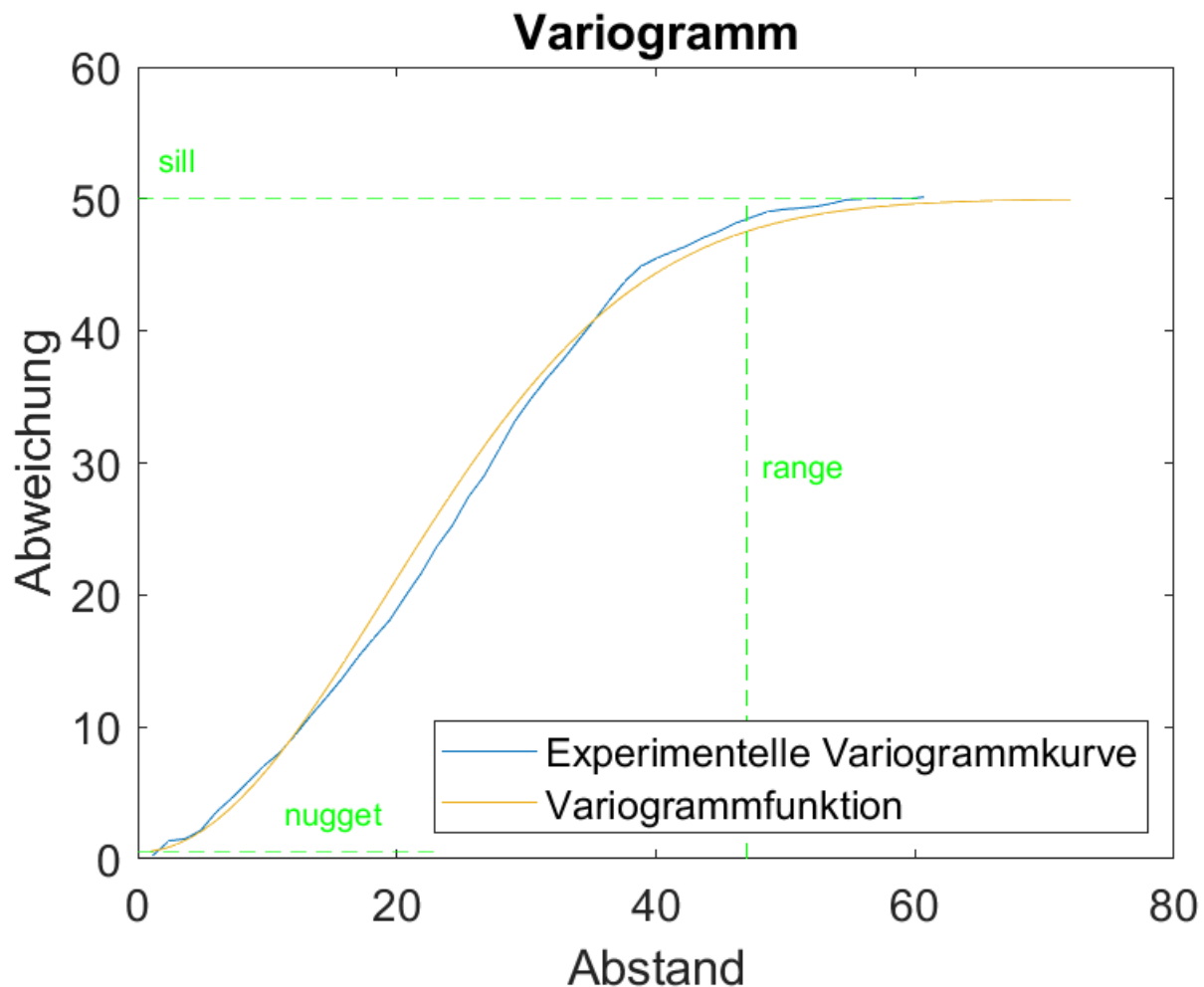


Abb. 9: Gauss'sche Variogrammfunktion mit  $A=47$ ;  $B=0.5$ ;  $C=50$

## Quellen:

<https://desktop.arcgis.com/de/arcmap/10.4/extensions/geostatistical-analyst/how-radial-basis-functions-work.htm> 27.7.2022, 17:30

Vorlesungsfolien Einführung in die Geoinformatik Nummer 5 und 6, sowie Notizen dazu

- 
1. <https://num.math.uni-goettingen.de/picap/pdf/E562.pdf> 22.9.2022, 11:51 ↩ ↩ ↩
  2. <https://datamines.de/cross-validation/> 22.9.2022, 17:36 ↩
  3. Zitat: <https://num.math.uni-goettingen.de/picap/pdf/E562.pdf> Seite 8, Zeile 4f. ↩
  4. <https://www.spektrum.de/lexikon/neurowissenschaft/radiales-basisfunktionen-netzwerk/10668> 22.9.2022, 10:03 ↩
  5. [https://desktop.arcgis.com/de/arcmap/10.7/tools/spatial-analyst-toolbox/comparing-interpolation-methods.htm#ESRI\\_SECTION1\\_44CF7274A3FE455DB9D528308BB8001D](https://desktop.arcgis.com/de/arcmap/10.7/tools/spatial-analyst-toolbox/comparing-interpolation-methods.htm#ESRI_SECTION1_44CF7274A3FE455DB9D528308BB8001D) 22.9.2022, 12:21 ↩
  6. <https://www.geothermie.de/bibliothek/lexikon-der-geothermie/k/kriging.html>, 03.10.2022, 15:02 ↩
  7. <https://pro.arcgis.com/de/pro-app/latest/tool-reference/3d-analyst/how-kriging-works.htm>, 03.10.2022, 15:31 ↩
  8. [http://www.gitta.info/ContiSpatVar/de/html/Interpolatio\\_learningObject3.html](http://www.gitta.info/ContiSpatVar/de/html/Interpolatio_learningObject3.html), 01.08.2022, 11:42 ↩
  9. <https://de.wikipedia.org/wiki/Semivariogramm>, 01.08.2022, 12:01 ↩
  10. <https://www.geo.fu-berlin.de/en/v/soga/Geodata-analysis/geostatistics/Geostatistical-Interpolation/Modeling-the-Semivariogram/index.html>, 12.10.2022, 20:05 ↩
  11. <https://www.spektrum.de/lexikon/geographie/variogramm/8520>, 01.08.2022, 12:34 ↩