

# Модель гармонических колебаний

---

Гань Чжаолун

8 марта, 2024, Москва, Россия

Российский Университет Дружбы Народов

## Цели и задачи работы

---

## Цель лабораторной работы

Изучить динамику популяций хищников и жертв на основе модели "хищник–жертва", представленной системой дифференциальных уравнений, и исследовать стационарные состояния системы.

## Задание к лабораторной работе

1. Построить решение уравнения гармонического осциллятора без затухания
2. Записать уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора с затуханием, построить его решение. Построить фазовый портрет гармонических колебаний с затуханием.
3. Записать уравнение колебаний гармонического осциллятора, если на систему действует внешняя сила, построить его решение. Построить фазовый портрет колебаний с действием внешней силы.

# Теоретические сведения

---

Модель "хищник–жертва", также известная как модель Лотки–Вольтерры, используется для описания динамики двух взаимосвязанных популяций, где одна служит пищей для другой. Модель основывается на нескольких ключевых предположениях:

1. Численность жертв ( $x$ ) увеличивается экспоненциально в отсутствие хищников.
2. Численность хищников ( $y$ ) уменьшается экспоненциально в отсутствие жертв.
3. Взаимодействие между хищниками и жертвами приводит к уменьшению численности жертв и увеличению численности хищников.

# Рассмотренная Система Дифференциальных Уравнений

Система дифференциальных уравнений для модели "хищник–жертва" была представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 0.71x - 0.072xy \\ \frac{dy}{dt} &= -0.73y + 0.074xy\end{aligned}$$

где **x** и **y** обозначают численность жертв и хищников соответственно. Коэффициенты в уравнениях отражают скорость роста и убыли популяций, а также влияние взаимодействия между ними.

Для численного решения системы были заданы начальные условия:  $x_0 = 8, y_0 = 21$ . Решение системы позволило построить графики зависимости численности хищников от численности жертв, а также изменения численности каждого вида во времени. Эти графики демонстрируют характерные колебания численности популяций, которые являются отличительной чертой динамики системы "хищник-жертва".



## Отображение выходного результата

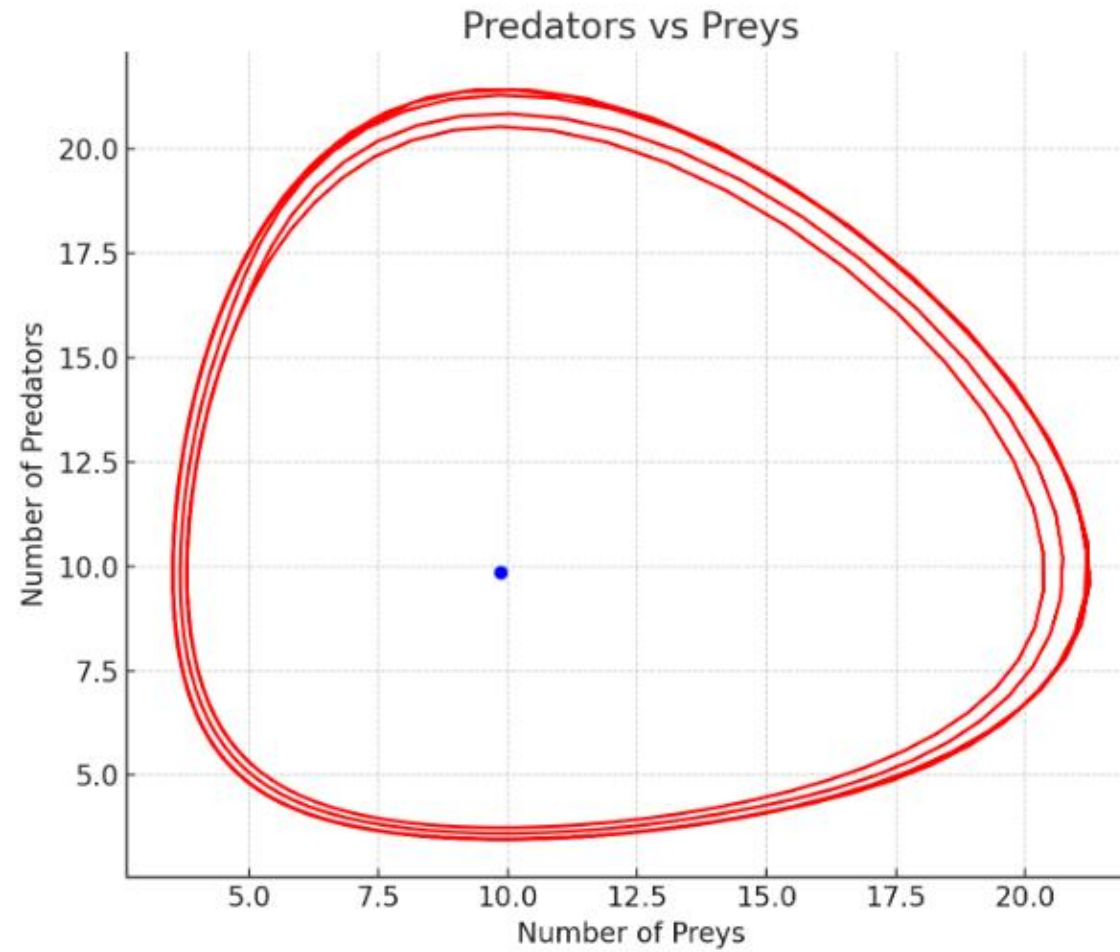
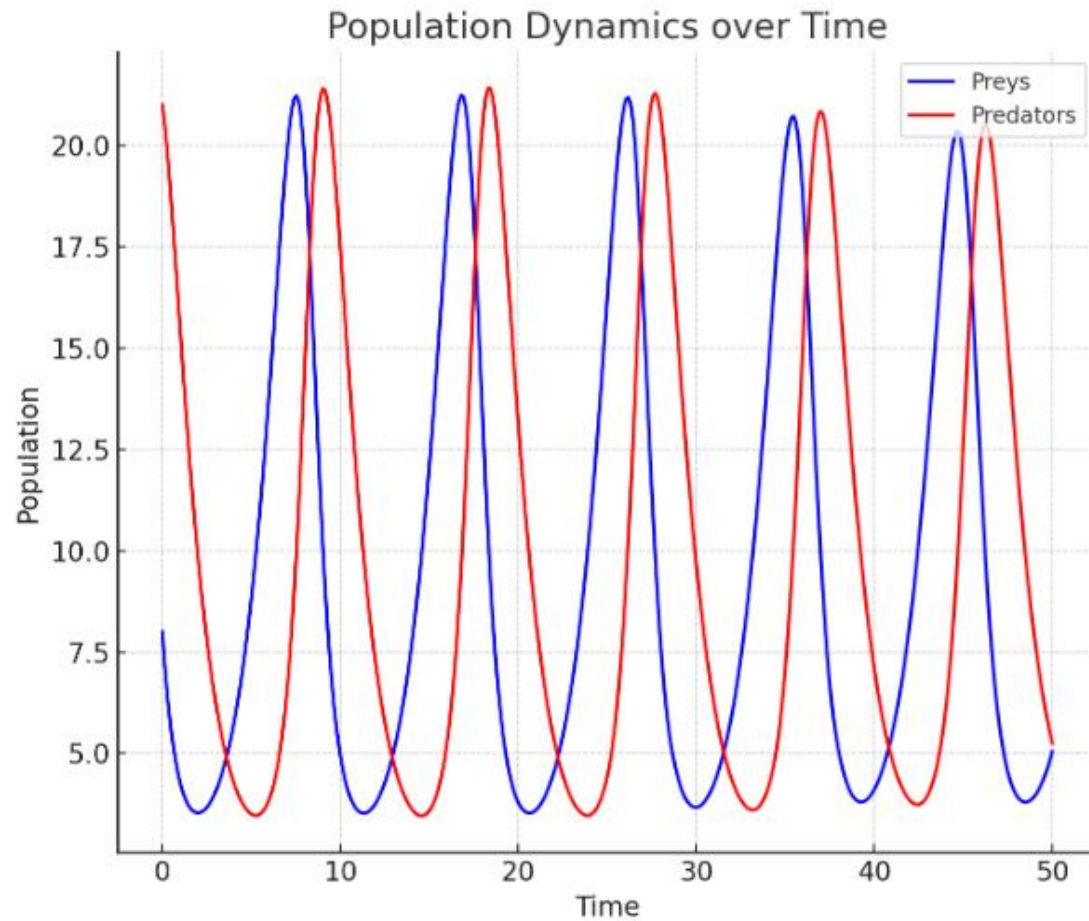


График зависимости численности хищников от численности жертв

## Отображение выходного результата



Графики изменения численности хищников и жертв со временем

Было найдено стационарное состояние системы, при котором численность популяций остается неизменной. Для данной системы уравнений стационарное состояние было определено как:

$$x = \frac{0.73}{0.074} \approx 9.86$$

$$y = \frac{0.71}{0.072} \approx 9.86$$

Это указывает на равновесие между популяциями хищников и жертв при данных параметрах модели.

Модель "хищник–жертва" предоставляет ценное понимание динамики взаимодействия между хищными и жертвенными популяциями. Численное решение и анализ данной системы дифференциальных уравнений демонстрируют, как взаимодействие между популяциями приводит к колебаниям и

устанавливает условия для возможного равновесия. Найденное стационарное состояние подтверждает теоретическое предположение о существовании точки равновесия в модели "хищник–жертва", где численности обеих популяций остаются постоянными при отсутствии внешних воздействий.

Лабораторная работа подчеркивает важность математического моделирования в экологии и биологии для понимания сложных процессов, происходящих в природе. Результаты моделирования не только подтверждают теоретические предположения о динамике популяций, но и могут служить основой для разработки стратегий управления и сохранения видов, включая меры по контролю численности хищников или поддержанию популяций жертв на устойчивом уровне.