Отчет по лабораторной работе №5

Модель гармонических колебаний - вариант 19

Гань Чжаолун

Содержание

1 Цель работы

Изучить динамику популяций хищников и жертв на основе модели "хищник-жертва", представленной системой дифференциальных уравнений, и исследовать стационарные состояния системы.

2 Задание

1. Построить решение уравнения гармонического осциллятора без затухания
2. Записать уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора с затуханием, построить его решение. Построить фазовый портрет гармонических колебаний с затуханием.
3. Записать уравнение колебаний гармонического осциллятора, если на систему действует внешняя сила, построить его решение. Построить фазовый портрет колебаний с действием внешней силы.

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Теоретические сведения

3.1.1 Основные Понятия и Предположения Модели

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - **модель Лотки-Вольтерры**. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на

занимаемой территории)

2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает

3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными

4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается

5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t)$$
$$\frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) \qquad (1)$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a

описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c

- естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность

взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству

жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает

популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены -bxy

и dxy в правой части уравнения).

Модель "хищник-жертва", также известная как модель Лотки-Вольтерры, используется для описания динамики двух взаимосвязанных популяций, где одна служит пищей для другой. Модель основывается на нескольких ключевых предположениях:

1. Численность жертв (x) увеличивается экспоненциально в отсутствие хи щников.

   (1) Численность хищников (y) уменьшается экспоненциально в отсутс твие жертв.

   (2) Взаимодействие между хищниками и жертвами приводит к умень шению численности жертв и увеличению численности хищников.

3.1.2 Рассмотренная Система Дифференциальных Уравнений

Система дифференциальных уравнений для модели "хищник-жертва" бы ла представлена в следующем виде:

$$\frac{dx}{dt} = 0.71x - 0.072xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -0.73y + 0.074xy$$

где **x** и **y** обозначают численность жертв и хищников соответственно. Коэффи циенты в уравнениях отражают скорость роста и убыли популяций, а также вл ияние взаимодействия между ними.

3.1.3 Начальные Условия и Результаты Моделирования

Для численного решения системы были заданы начальные условия: x(0) = 8, y(0) = 21. Решение системы позволило построить графики зависимости чи сленности хищников от численности жертв, а также изменения численности к аждого вида во времени. Эти графики демонстрируют характерные колебания численности популяций, которые являются отличительной чертой динамики системы "хищник-жертва".

3.1.4Стационарное Состояние Системы

Было найдено стационарное состояние системы, при котором численность по пуляций остается неизменной. Для данной системы уравнений стационарное состояние было определено как:

$$x = \frac{0.73}{0.074} \approx 9.86$$

$$y = \frac{0.71}{0.072} \approx 9.86$$

Это указывает на равновесие между популяциями хищников и жертв при данн ых параметрах модели.

3.2 Задача

Для модели «хищник-жертва»:

$$\frac{dx}{dt} = 0.71x - 0.072x(t)y(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -0.73y + 0.074x(t)y(t)$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_o = 8, y_o = 21$. Найдите стационарное состояние системы. Найдите стационарное состояние системы.

Решение

Используя начальные условия $x_o = 8, y_o = 21$, было проведено численное решение системы дифференциальных уравнений. Для визуализации результатов были построены следующие графики: зависимость численности хищников от численности жертв и изменение численности каждого вида со временем.

Код на Python для решения задачи и построения графиков(Figure 3.1

):

```python
from scipy.integrate import solve_ivp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Определение функции системы дифференциальных уравнений
def predator_prey_system(t, z):
    x, y = z
    dxdt = 0.71*x - 0.072*x*y
    dydt = -0.73*y + 0.074*x*y
    return [dxdt, dydt]

# Начальные условия
x0 = 8
y0 = 21
z0 = [x0, y0]

# Временной интервал интегрирования
t = np.linspace(0, 50, 400)

# Решение системы дифференциальных уравнений
solution = solve_ivp(predator_prey_system, [0, 50], z0, t_eval=t)

# Вычисление стационарного состояния
x_stationary = 0.73 / 0.074
y_stationary = 0.71 / 0.072

# Построение графиков
plt.figure(figsize=(14, 6))

# График зависимости численности хищников от численности жертв
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(solution.y[0], solution.y[1], 'r-')
plt.plot(x_stationary, y_stationary, 'bo') # Стационарное состояние
plt.xlabel('Number of Preys')
plt.ylabel('Number of Predators')
plt.title('Predators vs Preys')

# Графики изменения численности хищников и жертв со временем
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.plot(t, solution.y[0], 'b-', label='Preys')
plt.plot(t, solution.y[1], 'r-', label='Predators')
plt.xlabel('Time')
plt.ylabel('Population')
plt.legend()
plt.title('Population Dynamics over Time')

plt.tight_layout()
plt.show()

x_stationary, y_stationary
```

Figure 3.1:Код на Python для решения задачи и построения графиков

На основе решения системы дифференциальных уравнений для модели "хи щник-жертва", мы построили два графика:

1. График зависимости численности хищников от численности жертв пок азывает взаимосвязь между популяциями хищников и жертв. На этом графике также отмечена точка стационарного состояния системы (синим цвето м).(Figure 3.2)

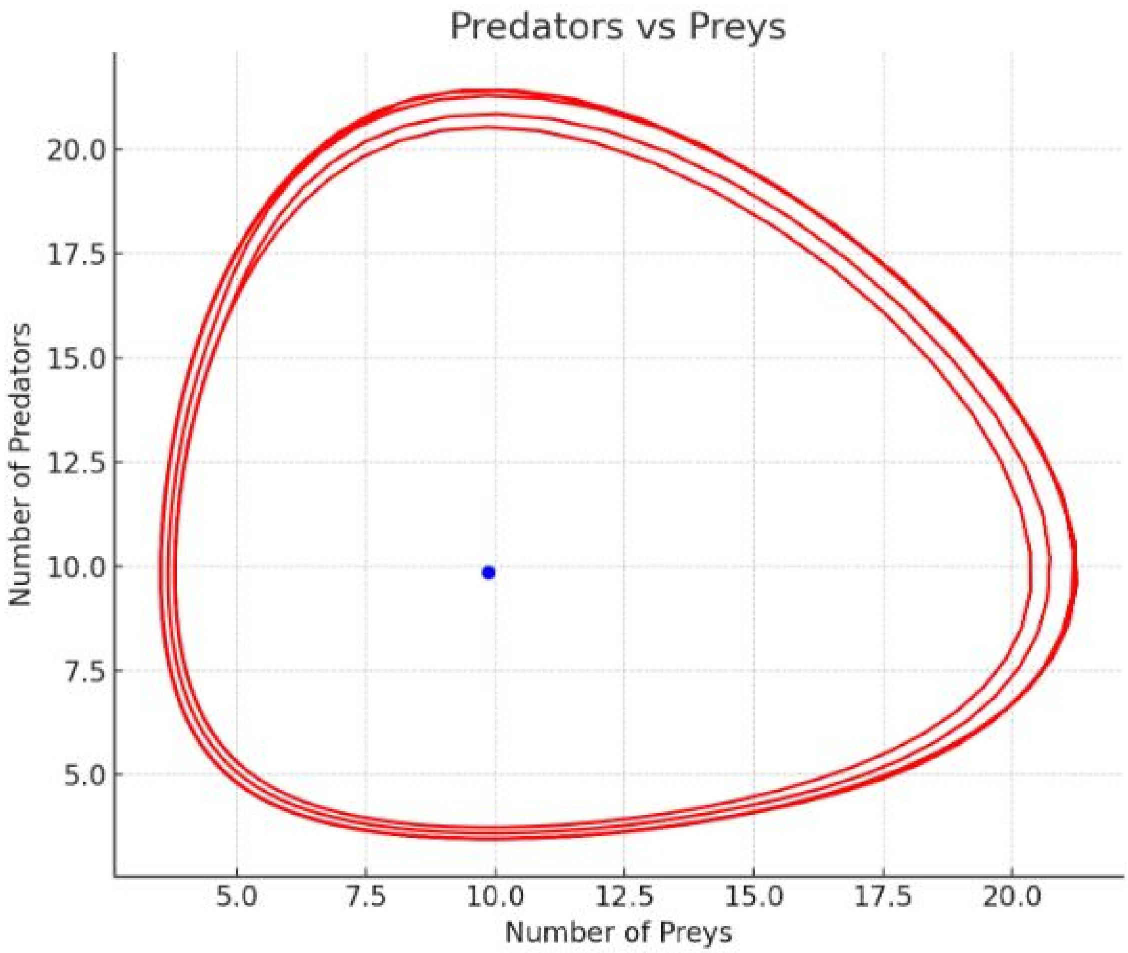

Figure 3.2: График зависимости численности хищников от численности жертв

2. Графики изменения численности хищников и жертв со временем иллюстрируют динамику популяций в течение времени. Из этих графиков видно, как численность хищников и жертв колеблется, что характерно для моделей "хищник-жертва".(Figure 3.3)

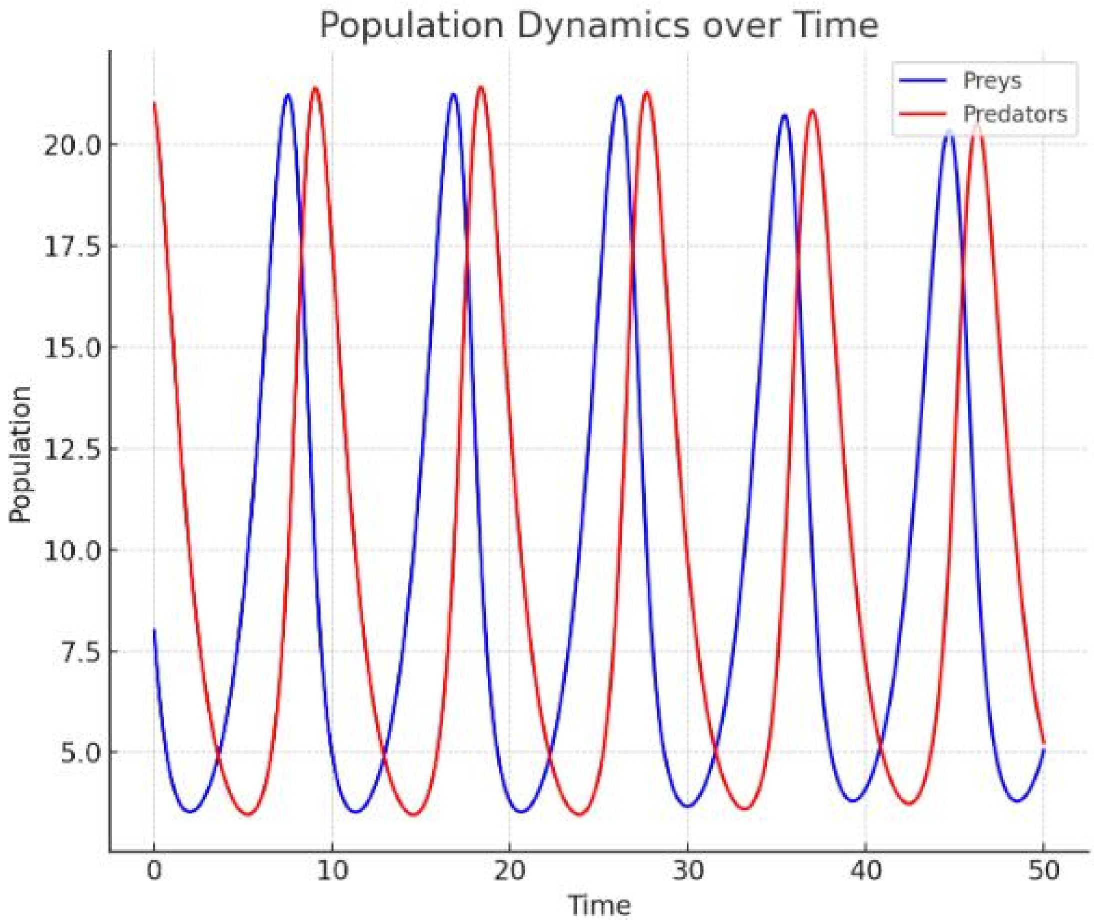

Figure 3.3: Графики изменения численности хищников и жертв со временем

Стационарное состояние системы, найденное аналитически, составляет примерно $x \approx 9.86$ (численность жертв) и $y \approx 9.86$ (численность хищников). Это состояние соответствует точке, в которой численность популяций не из меняется со временем, и система находится в равновесии.

4 Выводы

Исследование модели "хищник-жертва" показало, как взаимодействие между двумя популяциями может привести к сложным динамическим паттер нам, включая периодические колебания численности обеих групп. Стационар ное состояние системы, найденное в ходе работы, демонстрирует баланс межд у популяциями хищников и жертв, при котором их численность остается неиз менной.

Список литературы

1. Лотка А.Дж., Вольтерра В. Модели взаимодействия популяций хищник-жертва. - М.: Наука, 1978.
2. Строгач, С. Нелинейная динамика и хаос. - М.: Издательство Института Компьютерных Исследований, 2003.
3. Мюррей, Дж. Математическая биология. - М.: Мир, 1980.