Модель гармонических колебаний

Гань Чжаолун

14 марта, 2024, Москва, Россия

Российский Университет Дружбы Народов

Цели и задачи работы

Цель лабораторной работы

Изучение динамики эпидемии в изолированной популяции с использованием модели SIR (восприимчивые–инфицированные–выздоровевшие) и анализ влияния начальных условий на протекание и исход эпидемии.

Задание к лабораторной работе

1. Моделирование динамики эпидемии при различных начальных условиях.

2. Построение графиков изменения числа особей в каждой из трех групп (S, I, R).

Теоретические сведения

Основные Понятия и Предположения Модели

Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа – это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через . Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их . А третья группа, обозначающаяся через – это здоровые особи с иммунитетом к болезни. До того, как число заболевших не превышает критического значения , считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда , тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Основные Понятия и Предположения Модели

Таким образом, скорость изменения числа меняется по следующему закону:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S & ,\text{если} I(t) > I^* \\ 0 & ,\text{если} I(t) \le I^* \end{cases}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится. Т.е.:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I & ,\text{если} I(t) > I^* \\ -\beta I & ,\text{если} I(t) \le I^* \end{cases}$$

Основные Понятия и Предположения Модели

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни):

$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

Постоянные пропорциональности – это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно. Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени нет особей с иммунитетом к болезни , а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей и соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: $I(0) \leq I^*$ и $I(0) > I^*$

Рассмотренная Система Дифференциальных Уравнений

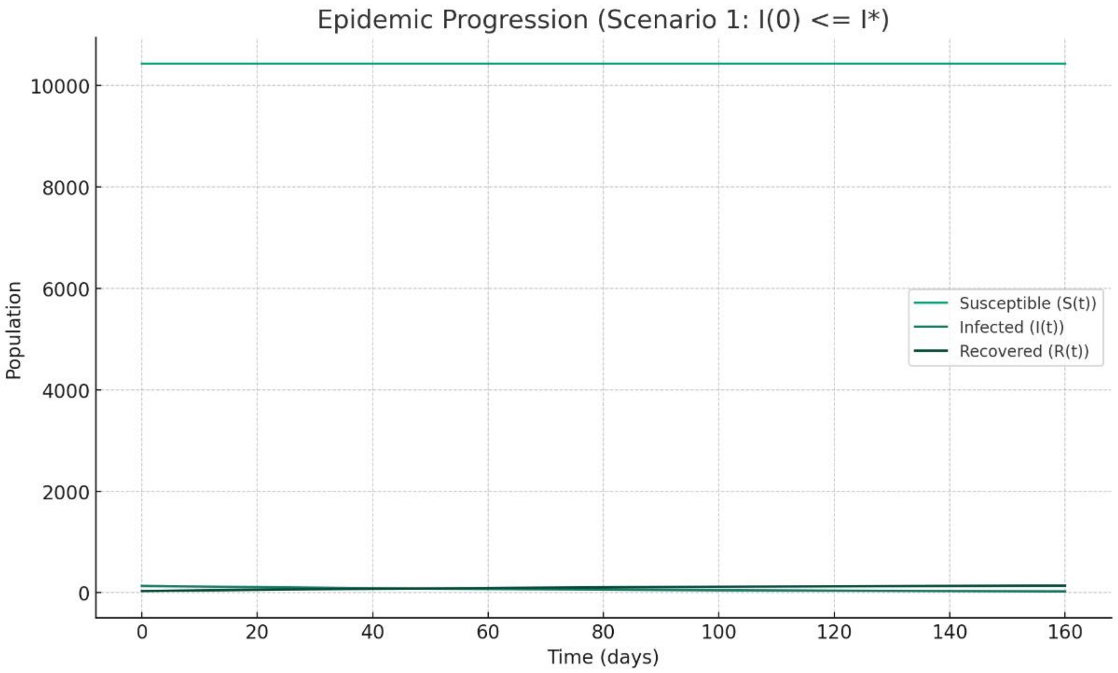
Моделирование эпидемии проводилось с использованием уравнений, описывающих изменение численности групп S, I и R в зависимости от времени. Параметры модели: коэффициент заражения (α) и коэффициент выздоровления (β).

Начальные Условия и Результаты Моделирования

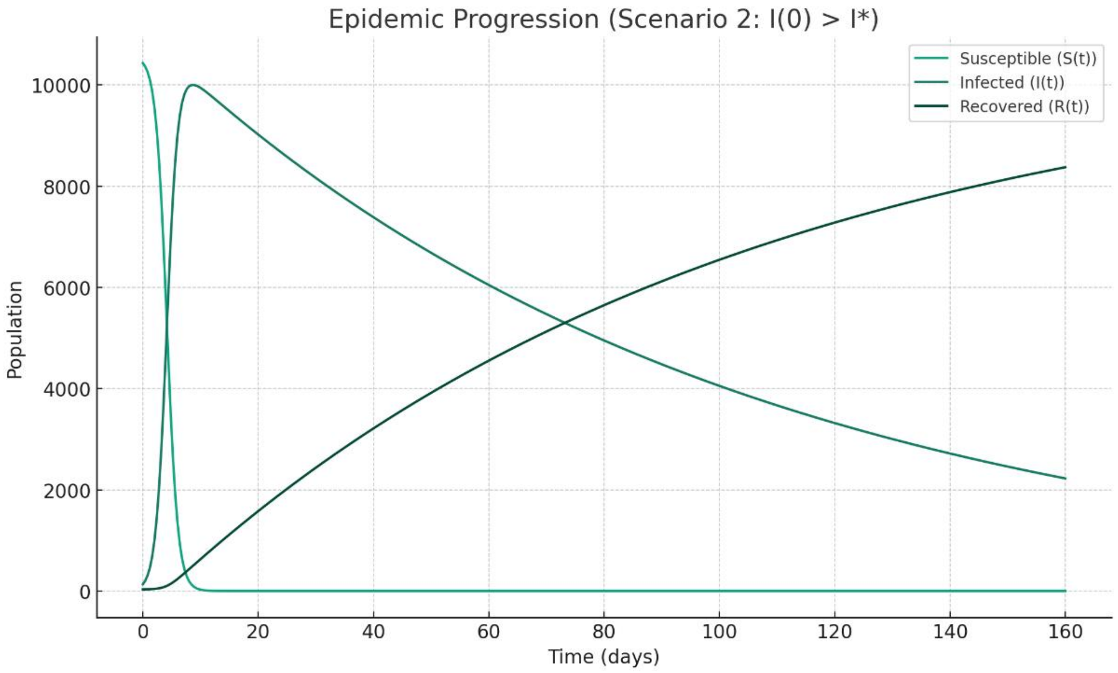
Исходные данные: общая численность популяции $N=10600$, число инфицированных $I(0)=133$, число выздоровевших $R(0)=33$. С использованием этих данных было проведено моделирование эпидемии для двух сценариев:

$$I(0) \le I^* \quad \text{и} \quad I(0) > I^*$$

Сценарий 1


Epidemic Progression (Scenario 1: I(0) <= I*)
Population
Time (days)
Susceptible (S(t))
Infected (I(t))
Recovered (R(t))
0
2000
4000
6000
8000
10000
0
20
40
60
80
100
120
140
160

Сценарий 2



Epidemic Progression (Scenario 2: I(0) > I*)
Susceptible (S(t))
Infected (I(t))
Recovered (R(t))
Population
Time (days)
0
2000
4000
6000
8000
10000
0
20
40
60
80
100
120
140
160

Были построены графики
(Figure 3.2: Сценарий 1) и (Figure 3.3: Сценарий 1) , иллюстрирующие динамику изменения численности групп S, I и R во времени для обоих сценариев. Анализ графиков показывает, как различные начальные условия влияют на протекание эпидемии.

Выводы

Моделирование эпидемии на основе модели SIR позволило исследовать динамику заболеваемости в изолированной популяции.Было установлено, что начальное количество инфицированных существенно влияет на скорость распространения и общую продолжительность эпидемии.Результаты моделирования могут быть использованы для планирования мер по контролю и предотвращению эпидемий в реальных условиях.