

## 基于鲁棒主成分分析的人脸子空间重构方法

江明阳, 封举富

(北京大学信息科学技术学院机器感知与智能教育部重点实验室 北京 100871)

(jiangmy@cis.pku.edu.cn)

**摘 要:** 子空间方法是人脸识别中的经典方法,其基本假设是人脸图像处于高维图像空间的低维子空间中.但是,由于光照变化、阴影、遮挡、局部镜面反射、图像噪声等因素的影响,使得子空间假设难以满足.为此,提出一种基于鲁棒主成分分析的人脸子空间重构方法.该方法将人脸图像数据矩阵表示为满足子空间假设的低秩矩阵和表征光照变化、阴影、遮挡、局部镜面反射、图像噪声等因素的误差矩阵之和,利用鲁棒主成分分析法求解低秩矩阵和误差矩阵.实验结果表明,文中方法能够有效地重构人脸图像的低维子空间.

**关键词:** 人脸识别;子空间重构;鲁棒主成分分析

**中图法分类号:** TP391.4

## Robust Principal Component Analysis for Face Subspace Recovery

Jiang Mingyang and Feng Jufu

(Key Laboratory of Machine Perception (Ministry of Education), School of Electronics Engineering and Computer Science, Peking University, Beijing 100871)

**Abstract:** Subspace method is one of the classical methods in face recognition, which assumes that face images lie in a low-rank subspace. However, due to illumination variation, shadows, occlusion, specularities and corruption, real face images seldom reveal such low-rank structure. We propose a face subspace recovery method based on the Robust Principal Component Analysis. The face image matrix is modeled as the sum of a low-rank matrix and a deviation matrix, in which the low-rank matrix reveals the ideal subspace structure and the deviation matrix accounts for the illumination variation, shadows, occlusion, specularities and corruption. By using the robust principal component analysis, the low-rank matrix and deviation matrix can be recovered efficiently. The experimental results show that this method is efficient in recovering the low-rank face subspaces.

**Key words:** face recognition; subspace recovery; robust principal component analysis

人脸识别是计算机视觉和模式识别领域的热点问题<sup>[1-3]</sup>.子空间方法是一类经典的人脸识别方法,其代表性工作如 Eigenface<sup>[4]</sup>和 Fisherface<sup>[5]</sup>.这些方法的出发点均来自对人脸图像的子空间分析<sup>[6]</sup>:人脸图像在无阴影、无遮挡、正脸对齐、光照满足朗勃反射等理想条件下,处于高维图像空间中的一个低维子空间中.进一步,每个个体的人脸图像处于上

述人脸子空间中的更低维子空间中,文献[1]称这些子空间为特定人脸子空间,并指出不同个体对应的特定人脸子空间是显著不同的.基于上述结论,大量子空间人脸识别算法试图利用特定人脸子空间之间的差异构建识别算法,代表性的工作如最近邻子空间法<sup>[7]</sup>、稀疏表示法<sup>[8]</sup>等.

但是在很多实际应用中,人脸图像往往包含光照

收稿日期:2011-09-15;修回日期:2012-03-16.基金项目:国家“九七三”重点基础研究发展计划项目(2011CB302400).江明阳(1984—),男,博士研究生,主要研究方向为模式识别、图像处理;封举富(1967—),男,博士,教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究方向为图像处理、模式识别、机器学习.

变化、阴影、遮挡、人脸表面局部的镜面反射等,使得人脸子空间的前提假设不成立. 如何从存在上述误差项<sup>①</sup>的实际人脸图像中重构出特定人脸子空间,是提高子空间人脸识别算法鲁棒性的关键问题. 传统的降维方法,如主成分分析(principle component analysis, PCA),只能在误差项为小尺度高斯噪声下达到最优,且无法自适应地确定人脸子空间的维数,很难有效地处理实际人脸图像的子空间重构问题.

为此,本文提出一种基于鲁棒主成分分析的人脸子空间重构方法. 该方法将特定个体的人脸图像数据矩阵表示为低秩矩阵和误差矩阵之和,并利用鲁棒主成分分析<sup>[9-10]</sup>从人脸图像数据矩阵中分离出表征理想子空间的低秩矩阵,达到人脸子空间重构的目的. 将本文方法应用于 2 种典型的子空间人脸识别算法——最近邻子空间法和稀疏表示法中的实验结果表明,该方法能够有效地重构出低维人脸子空间,使得子空间人脸识别算法更加鲁棒.

## 1 本文方法

本节将人脸子空间重构问题转化为从人脸图像数据矩阵中分离出低秩矩阵及误差矩阵的问题.

假设个体  $i$  共有  $n_i$  幅人脸图像,将这些图像对应的数据向量顺次排列,组成人脸图像数据矩阵  $\mathbf{D}_i \in \mathbb{R}^{m \times n_i}$ ;其中  $m$  为每幅图像的特征维数.

在理想的子空间假设下, $\mathbf{D}_i$  应是低秩的. 但在实际中,由于光照变化、阴影、遮挡、人脸局部的镜面反射等误差项的存在,使得  $\mathbf{D}_i$  往往表现出满秩的结构. 记误差矩阵为  $\mathbf{E}_i \in \mathbb{R}^{m \times n_i}$ ,则实际的人脸图像数据矩阵可表示为

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{A}_i + \mathbf{E}_i \quad (1)$$

其中, $\mathbf{A}_i$  表示满足理想低维子空间假设的人脸图像数据矩阵,因此其是低秩矩阵; $\mathbf{E}_i$  表示违背子空间假设的误差矩阵. 假设误差只存在于图像空间的少量维度中,则误差相对于图像空间是稀疏的. 因此式(1)即表示实际的人脸图像数据矩阵  $\mathbf{D}_i$  可被分解为低秩矩阵  $\mathbf{A}_i$  和稀疏误差矩阵  $\mathbf{E}_i$  之和的形式. 利用拉格朗日法,人脸子空间重构问题可表示为

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{A}_i, \mathbf{E}_i} & \text{rank}(\mathbf{A}_i) + \lambda \|\mathbf{E}_i\|_0 \\ \text{s. t.} & \mathbf{D}_i = \mathbf{A}_i + \mathbf{E}_i \end{cases} \quad (2)$$

其中, $\|\cdot\|_0$  表示  $l_0$  范数,即矩阵的非零元素个数; $\lambda$  是低秩性和稀疏性之间的权衡参数.

然而,由于矩阵的秩及  $l_0$  范数的离散性,式(2)对应的优化问题是 NP 难问题. 近年来,在凸优化领域的突破性进展<sup>[9-10]</sup>论证了上述问题可以通过将矩阵的秩用核范数(定义为矩阵的奇异值之和)替代,将  $l_0$  范数用  $l_1$  范数(定义为矩阵所有元素的绝对值之和)替代来近似求解

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{A}_i, \mathbf{E}_i} & \|\mathbf{A}_i\|_* + \lambda \|\mathbf{E}_i\|_1 \\ \text{s. t.} & \mathbf{D}_i = \mathbf{A}_i + \mathbf{E}_i \end{cases} \quad (3)$$

式(3)可归为文献[9-10]中提出的鲁棒主成分分析问题,其中  $\|\cdot\|_*$ ,  $\|\cdot\|_1$  分别表示矩阵的核范数和  $l_1$  范数. 文献[9-10]中的理论结果揭示了:1)参数  $\lambda$  的最优取值为  $\lambda = 1/\sqrt{\max(m, n_i)}$ ;2)在一定的条件下,式(2)(3)具有相同的最优解,式(3)的最优解可以精确地从  $\mathbf{D}_i$  中分离出低秩矩阵  $\mathbf{A}_i$  和误差矩阵  $\mathbf{E}_i$ . 本文在实验中采用对偶法<sup>[11]</sup>对式(3)进行求解<sup>②</sup>.

在子空间人脸识别中,若有  $k$  个不同个体,则分别对每个个体  $i(i=1, 2, \dots, k)$  对应的人脸图像数据矩阵  $\mathbf{D}_i$  求解式(3)所示的优化问题,以重构每类人脸图像张成的特定人脸子空间. 这些特定人脸子空间可应用于子空间人脸识别算法中去,以提高算法的鲁棒性.

## 2 实验及结果分析

为了验证本文方法的有效性,首先给出应用该方法进行人脸子空间重构的实验结果;然后将该方法应用到典型的子空间人脸识别算法——最近邻子空间法和稀疏表示法中,并给出实验结果.

### 2.1 人脸子空间重构实验

实验采用扩展的 Yale B 人脸数据库<sup>[12]</sup>进行实验,该数据库包含 38 个个体,共计 2414 幅正面人脸图像,每个个体有约 64 幅  $192 \times 168$  大小的、采自不同光照条件的人脸图像. 将每幅人脸图像对应的灰度数据张成一个向量,并将同一个体的 64 个向量组成矩阵,即得到人脸图像数据矩阵  $\mathbf{D}_i \in \mathbb{R}^{32256 \times 64}$ . 利用对偶法,取参数  $\lambda = 1/\sqrt{\max(32256, 64)}$  求解式(3). 对原始图像应用本文方法作子空间重构后得到的 4 幅人脸图像如图 1 所示. 原始图像和子空间图像

① 本文中,真实人脸数据中违背低维子空间假设的部分统称为误差项. 人脸图像中光照变化、阴影、遮挡、镜面反射等均是误差项的实际表现形式

② [http://perception.csl.uiuc.edu/matrix-rank/sample\\_code.html](http://perception.csl.uiuc.edu/matrix-rank/sample_code.html)

对应的人脸图像数据矩阵和低秩矩阵的秩均在图像下方标明.可以看出,原始人脸图像数据矩阵均是满秩的(秩为64),说明实际图像并不满足子空间假设.

通过本文方法重构子空间后,人脸图像中的阴影、镜面反射等误差项均被有效去除,使得人脸图像能够在低维子空间下进行表达.

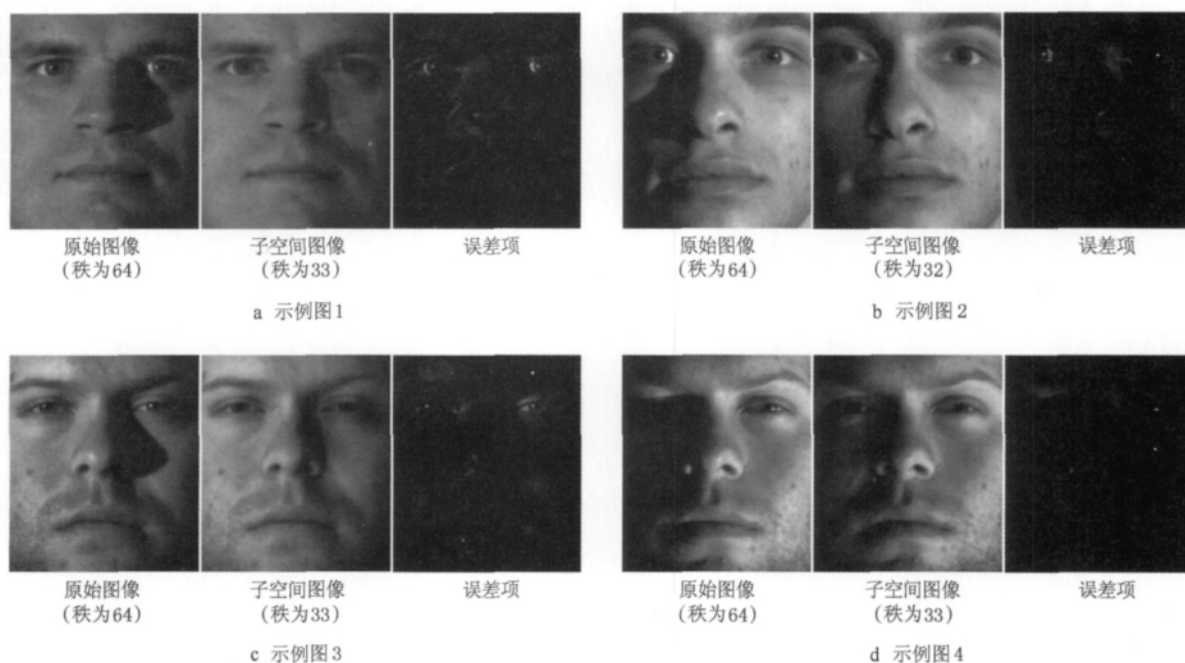


图1 人脸子空间重构结果

下面考虑更一般的情形:人脸图像中的一部分像素被噪声破坏.考虑均匀分布噪声和高斯噪声2种噪声形式,将图像中的像素点按固定比例分别用 $[0, y_{\max}]$ 均匀分布噪声和信噪比为1:1的高斯噪声替代,以构造噪声图像(其中 $y_{\max}$ 为该幅人脸图像中的最大灰度值).这些噪声不满足理想子空间假设的前提条件,是典型的误差项表现形式.在本实验中,

噪声比例由10%逐步上升至50%.

图2,3所示分别给出了本文方法对均匀分布噪声图像和高斯噪声图像进行子空间重构的结果,可以看出,本文方法能够有效地将低秩项与误差项分离.即使噪声比例达到50%,本文方法仍能较好地分离出误差项,使得重构后得到的子空间人脸图像质量较原图像有明显提升.

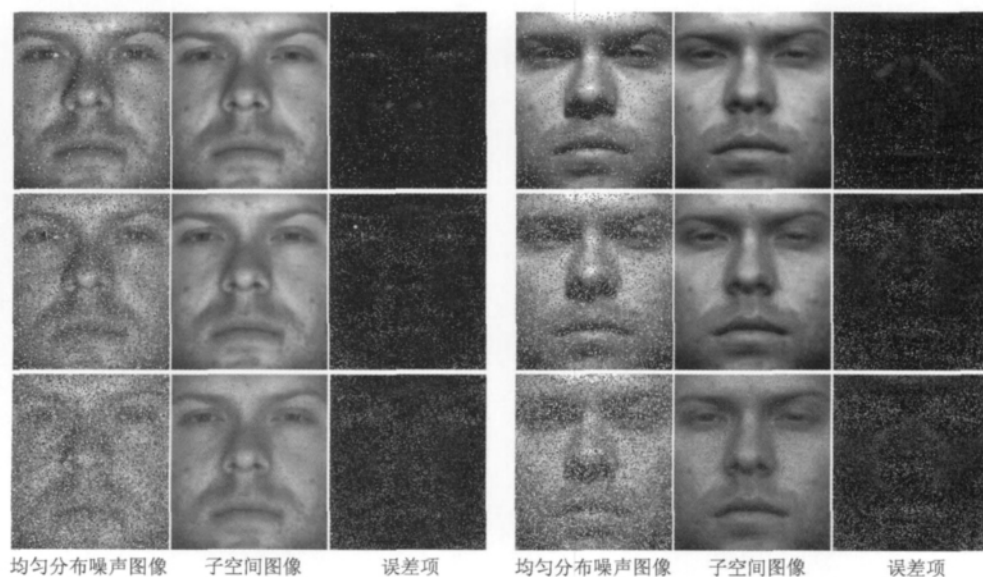


图2 均匀分布噪声人脸图像及子空间重构结果

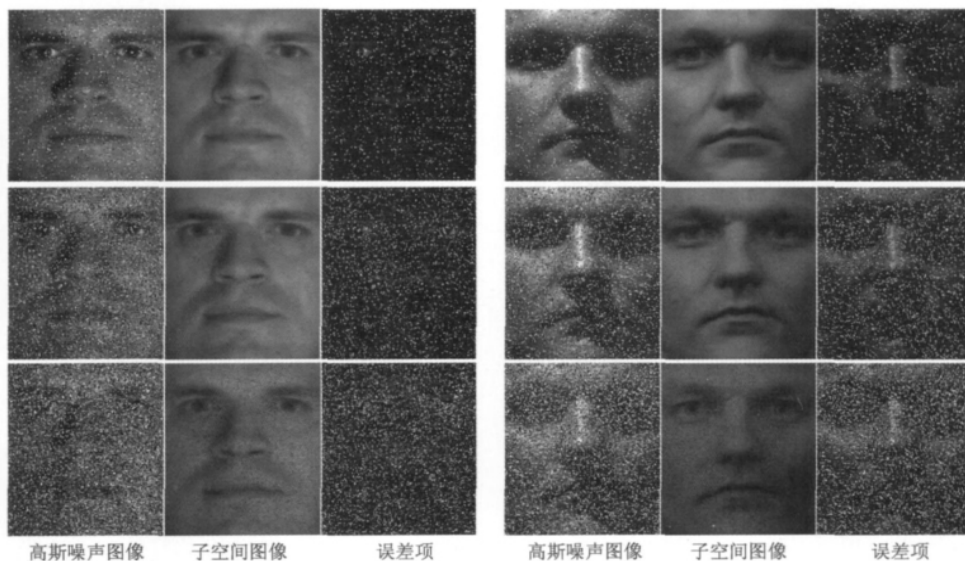


图3 高斯噪声人脸图像及子空间重构结果

## 2.2 鲁棒的子空间人脸识别

现有的子空间人脸识别算法均假设训练样本是满足子空间假设的,研究当测试样本包含噪声等误差项时算法的鲁棒性问题.本文考虑更加一般的情形:当训练样本及测试样本均包含违背子空间假设的误差项时,人脸识别算法的鲁棒性问题<sup>[13]</sup>.自然的想法是本文方法可嵌入到现有的子空间人脸识别算法中去,重构不同个体的特定人脸子空间,从而使得算法更加鲁棒.我们将本文方法应用于最近邻子空间法和稀疏表示法这2种经典的子空间人脸识别算法,以提升算法的鲁棒性.

对于最近邻子空间法<sup>[7]</sup>,首先对每类的训练样本分别应用本文方法作子空间重构处理,使得训练样本满足子空间假设.记重构后的每类人脸训练样本矩阵为  $A_i \in \mathbb{R}^{m \times n_i}$  ( $i=1,2,\dots,k$ ),其中  $k$  为总类别数.依照文献<sup>[7]</sup>中的算法,对于测试样本  $y \in \mathbb{R}^m$ ,如果它属于某个子空间,则其可被该子空间内的训练样本线性表示为  $y = A_i x_i$ ,  $i \in \{1,2,\dots,k\}$ ,表示系数  $x_i$  根据最小均方误差法确定

$$\hat{x}_i = (A_i^T A_i)^{-1} A_i^T y.$$

则向量  $\hat{y}_i = A_i \hat{x}_i$  可视为测试样本  $y$  在第  $i$  个子空间中的投影.最近邻子空间法根据重构误差最小原则确定样本所属类别,即

$$\arg \min_i d_i(y) = \|y - \hat{y}_i\|_2.$$

对于稀疏表示法<sup>[8]</sup>,首先对每类的训练样本分别应用本文方法作子空间重构,使得训练样本满足子空间假设.将处理后的每类人脸样本矩阵拼接在一起

得到过完备字典  $A \in \mathbb{R}^{m \times n_i}; A = [A_1 | A_2 | \dots | A_k]$ .

对于测试样本  $y \in \mathbb{R}^m$ ,稀疏表示法求解线性方程组  $y = Ax + e$ ,其中  $e$  为误差项.在独立子空间假设下, $y$  只能被与它处在相同子空间中的训练样本线性表示,因此表示系数  $x$  应是稀疏的.文献<sup>[8]</sup>对线性方程组作稀疏限制,并通过求解  $l_1$  最小化问题来近似求解:  $\min_{x,e} \|x\|_1 + \|e\|_1, s. t. y = Ax + e$ .测试样本的类别根据重构误差最小化原则确定.

本实验使用 Yale B 人脸数据库<sup>[12]</sup>中的子集 1, 2 作为训练样本,子集 3 作为测试样本.对训练样本和测试样本按照 10%~80% 的比例添加均匀分布噪声.由于稀疏表示法中  $l_1$  优化问题的计算效率较低,本文将图像下采样至  $64 \times 56$  进行实验.我们在实验中对比了原始最近邻子空间法、用 PCA 做预处理后的最近邻子空间法、本文方法做预处理后的最近邻子空间法,以及稀疏表示法、PCA 做预处理后

表1 最近邻子空间法在不同噪声比例下的识别率对比 %

噪声比例	最近邻子空间	PCA+最近邻子空间	本文+最近邻子空间
0	100	100	100
10	98.02	97.80	100
20	89.67	88.79	100
30	75.17	75.17	98.46
40	64.18	62.86	92.75
50	53.63	53.41	64.18
60	38.02	37.36	53.63
70	23.96	23.52	19.12
80	10.11	9.67	11.21

的稀疏表示法、本文方法做预处理后的稀疏表示法之间的识别结果,如表1,2所示。

表2 稀疏表示法在不同噪声比例下的识别率对比 %

噪声比例	稀疏表示法	PCA+稀疏表示法	本文+稀疏表示法
0	100	100	100
10	99.78	99.78	100
20	98.46	99.36	100
30	95.39	97.36	100
40	86.37	93.63	99.12
50	71.87	79.12	90.54
60	46.81	57.58	57.58
70	23.07	28.13	35.60
80	5.93	9.01	11.21

从实验结果可以看出,本文方法嵌入上述2种子空间人脸识别算法后能够明显提升算法的鲁棒性,并且显著优于基于传统的PCA方法。当噪声比例上升至50%时,仍能取得不错的识别率。算法鲁棒性提升的原因在于利用本文方法对训练样本做子空间重构处理后,得到了满足子空间假设的训练样本。当噪声比例超过70%时,采用本文方法并不能得到更好的结果,这是由于噪声比例过高,无法满足误差项的稀疏假设造成的。

另外,对比表1,2可以看出,稀疏表示法的鲁棒性强于最近邻子空间法。这是由于稀疏表示法通过 $e$ 项表示测试样本中的误差项,使得算法本身对测试样本包含的误差项比较鲁棒。因此,稀疏表示法在嵌入本文方法后,能够更好地处理训练样本和测试样本均包含误差项的一般情况。

### 3 结 语

本文提出了一种基于鲁棒主成分分析的人脸子空间重构方法,能够有效地去除人脸图像中的阴影、遮挡、镜面反射等违背子空间假设的误差项,使得重构后得到的人脸图像满足子空间假设。实验结果表明,嵌入本文方法后,子空间人脸识别算法在训练图像和测试图像均包含误差项的一般情况下鲁棒性有明显提升。

### 参考文献 (References):

[1] Wang L W, Wang X, Feng J F. Intrapersonal subspace analysis with application to adaptive Bayesian face recognition [J]. Pattern Recognition, 2005, 38(4): 617-621

[2] Zhao Song, Zhang Zhijian, Zhang Peiren. Enhanced CCA and its applications in feature fusion of face recognition [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2009, 21(3): 394-399 (in Chinese)  
(赵松, 张志坚, 张培仁. 增强的典型相关分析及其在人脸识别特征融合中的应用[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2009, 21(3): 394-399)

[3] Huo Hongwen, Feng Jufu. Image recognition algorithm based on multiclass online boosting [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2011, 23(7): 1194-1199 (in Chinese)  
(霍红文, 封举富. 基于多类在线 Boosting 的图像识别算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2011, 23(7): 1194-1199)

[4] Turk M A, Pentland A P. Face recognition using eigenfaces [C] //Proceedings of IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 1991: 586-591

[5] Belhumeur P N, Hespanha J P, Kriegman D J. Eigenfaces vs. fisherfaces: recognition using class specific linear projection [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1997, 19(7): 711-720

[6] Basri R, Jacobs D. Lambertian reflectance and linear subspaces [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2003, 25(2): 218-233

[7] Naseem I, Togneri R, Bennamoun M. Linear regression for face recognition [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2010, 32(11): 2106-2112

[8] Wright J, Yang A Y, Ganesh A, et al. Robust face recognition via sparse representation [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2009, 31(2): 210-227

[9] Wright J, Ganesh A, Rao S, et al. Robust principal component analysis: exact recovery of corrupted low-rank matrices by convex optimization [OL]. [2011-09-15]. <http://perception.csl.uiuc.edu/matrix-rank/files/nips2009.pdf>

[10] Candes E J, Li X D, Ma Y, et al. Robust principal component analysis? [J]. Journal of the ACM, 2011, 58(3): Article No. 11

[11] Lin Z C, Ganesh A, Wright J, et al. Fast convex optimization algorithms for exact recovery of a corrupted low-rank matrix [D]. Urbana: University of Illinois and Urbana-Champaign. Department of Electrical and Computer Engineering, 2009

[12] Georgiades A S, Belhumeur P N, Kriegman D J. From few to many: illumination cone models for face recognition under variable lighting and pose [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2001, 23(6): 643-660

[13] Jiang M Y, Feng J F. Robust low-rank subspace recovery and face image denoising for face recognition [C] //Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2011: 3033-3036