

- 在学习位运算之前应该知道十进制如何转二进制，二进制如何转十进制。这里说明下简单的计算方式

- 十进制 33 可以看成是  $32 + 1$ ，并且 33 应该是六位二进制的（因为 33 近似 32，而 32 是 2 的五次方，所以是六位），那么十进制 33 就是 100001，只要是 2 的次方，那么就是 1 否则都为 0
- 那么二进制 100001 同理，首位是  $2^5$ ，末位是  $2^0$ ，相加得出 33

### 1. 左移 <<

```
10 << 1 // -> 20
```

左移就是将二进制全部往左移动，10 在二进制中表示为 1010，左移一位后变成 10100，转换为十进制也就是 20，所以基本可以把左移看成以下公式  $a * (2 \wedge b)$

### 2. 算数右移 >>

```
10 >> 1 // -> 5
```

算数右移就是将二进制全部往右移动并去除多余的右边，10 在二进制中表示为 1010，右移一位后变成 101，转换为十进制也就是 5，所以基本可以把右移看成以下公式  $\text{int } v = a / (2 \wedge b)$

右移很好用，比如可以用在二分算法中取中间值

```
13 >> 1 // -> 6
```

## 3. 按位操作

### 3.1 按位与

每一位都为 1，结果才为 1

```
8 & 7 // -> 0
// 1000 & 0111 -> 0000 -> 0
```

### 3.2 按位或

其中一位为 1，结果就是 1

```
8 | 7 // -> 15
// 1000 | 0111 -> 1111 -> 15
```

### 3.3 按位异或

每一位都不同，结果才为 1

```
8 ^ 7 // -> 15
8 ^ 8 // -> 0
// 1000 ^ 0111 -> 1111 -> 15
// 1000 ^ 1000 -> 0000 -> 0
```

js

- 从以上代码中可以发现按位异或就是不进位加法
- 面试题：两个数不使用四则运算得出和

这道题中可以按位异或，因为按位异或就是不进位加法， $8 \wedge 8 = 0$  如果进位了，就是 16 了，所以我们只需要将两个数进行异或操作，然后进位。那么也就是说两个二进制都是 1 的位置，左边应该有一个进位 1，所以可以得出以下公式  $a + b = (a \wedge b) + ((a \& b) \ll 1)$ ，然后通过迭代的方式模拟加法

js

```
function sum(a, b) {
  if (a == 0) return b
  if (b == 0) return a
  let newA = a ^ b
  let newB = (a & b) << 1
  return sum(newA, newB)
}
```

## 36.2 排序

以下两个函数是排序中会用到的通用函数，就不一一写了

```
function checkArray(array) {  
    if ( !array) return  
}  
function swap(array, left, right) {  
    let rightValue = array[right]  
    array[right] = array[left]  
    array[left] = rightValue  
}
```

js

### 36.2.1 冒泡排序

冒泡排序的原理如下，从第一个元素开始，把当前元素和下一个索引元素进行比较。如果当前元素大，那么就交换位置，重复操作直到比较到最后一个元素，那么此时最后一个元素就是该数组中最大的数。下一轮重复以上操作，但是此时最后一个元素已经是最大数了，所以不需要再比较最后一个元素，只需要比较到 `length - 1` 的位置。

以下是实现该算法的代码

```
function bubble(array) {  
    checkArray(array);  
    for (let i = array.length - 1; i > 0; i--) {  
        // 从 0 到 `length - 1` 遍历  
        for (let j = 0; j < i; j++) {  
            if (array[j] > array[j + 1]) swap(array, j, j + 1)  
        }  
    }  
    return array;  
}
```

js

该算法的操作次数是一个等差数列  $n + (n - 1) + (n - 2) + 1$ ，去掉常数项以后得出时间复杂度是  $O(n * n)$

### 36.2.2 插入排序

插入排序的原理如下。第一个元素默认是已排序元素，取出下一个元素和当前元素比较，如果当前元素大就交换位置。那么此时第一个元素就是当前的最小数，所以下次取出操作从第三个元素开始，向前对比，重复之前的操作

以下是实现该算法的代码

```
function insertion(array) {  
  checkArray(array);  
  for (let i = 1; i < array.length; i++) {  
    for (let j = i - 1; j >= 0 && array[j] > array[j + 1]; j--)  
      swap(array, j, j + 1);  
  }  
  return array;  
}
```

js

该算法的操作次数是一个等差数列  $n + (n - 1) + (n - 2) + 1$ ，去掉常数项以后得出时间复杂度是  $O(n * n)$

### 36.2.3 选择排序

选择排序的原理如下。遍历数组，设置最小值的索引为 0，如果取出的值比当前最小值小，就替换最小值索引，遍历完成后，将第一个元素和最小值索引上的值交换。如上操作后，第一个元素就是数组中的最小值，下次遍历就可以从索引 1 开始重复上述操作

以下是实现该算法的代码

```
function selection(array) {  
  checkArray(array);  
  for (let i = 0; i < array.length - 1; i++) {  
    let minIndex = i;  
    for (let j = i + 1; j < array.length; j++) {  
      minIndex = array[j] < array[minIndex] ? j : minIndex;  
    }  
    swap(array, i, minIndex);  
  }  
  return array;  
}
```

该算法的操作次数是一个等差数列  $n + (n - 1) + (n - 2) + 1$ ，去掉常数项以后得出时间复杂度是  $O(n * n)$

#### 36.2.4 归并排序

归并排序的原理如下。递归的将数组两两分开直到最多包含两个元素，然后将数组排序合并，最终合并为排序好的数组。假设我有一组数组  $[3, 1, 2, 8, 9, 7, 6]$ ，中间数索引是 3，先排序数组  $[3, 1, 2, 8]$ 。在这个左边数组上，继续拆分直到变成数组包含两个元素（如果数组长度是奇数的话，会有一个拆分数组只包含一个元素）。然后排序数组  $[3, 1]$  和  $[2, 8]$ ，然后再排序数组  $[1, 3, 2, 8]$ ，这样左边数组就排序完成，然后按照以上思路排序右边数组，最后将数组  $[1, 2, 3, 8]$  和  $[6, 7, 9]$  排序

以下是实现该算法的代码

```
function sort(array) {  
  checkArray(array);  
  mergeSort(array, 0, array.length - 1);  
  return array;  
}  
  
function mergeSort(array, left, right) {  
  // 左右索引相同说明已经只有一个数  
  if (left === right) return;  
  // 等同于 `left + (right - left) / 2`  
  let mid = left + (right - left) / 2;  
  mergeSort(array, left, mid);  
  mergeSort(array, mid + 1, right);  
  merge(array, left, mid, right);  
}
```

```

// 相比 `(left + right) / 2` 来说更加安全，不会溢出
// 使用位运算是因为位运算比四则运算快
let mid = parseInt(left + ((right - left) >> 1));
mergeSort(array, left, mid);
mergeSort(array, mid + 1, right);

let help = [];
let i = 0;
let p1 = left;
let p2 = mid + 1;
while (p1 <= mid && p2 <= right) {
    help[i++] = array[p1] < array[p2] ? array[p1++] : array[p2++];
}
while (p1 <= mid) {
    help[i++] = array[p1++];
}
while (p2 <= right) {
    help[i++] = array[p2++];
}
for (let i = 0; i < help.length; i++) {
    array[left + i] = help[i];
}
return array;
}

```

以上算法使用了递归的思想。递归的本质就是压栈，每递归执行一次函数，就将该函数的信息（比如参数，内部的变量，执行到的行数）压栈，直到遇到终止条件，然后出栈并继续执行函数。对于以上递归函数的调用轨迹如下

```

mergeSort(data, 0, 6) // mid = 3
  mergeSort(data, 0, 3) // mid = 1
    mergeSort(data, 0, 1) // mid = 0
      mergeSort(data, 0, 0) // 遇到终止，回退到上一步
      mergeSort(data, 1, 1) // 遇到终止，回退到上一步
      // 排序 p1 = 0, p2 = mid + 1 = 1
      // 回退到 `mergeSort(data, 0, 3)` 执行下一个递归
    mergeSort(2, 3) // mid = 2
      mergeSort(3, 3) // 遇到终止，回退到上一步
      // 排序 p1 = 2, p2 = mid + 1 = 3
      // 回退到 `mergeSort(data, 0, 3)` 执行合并逻辑
      // 排序 p1 = 0, p2 = mid + 1 = 2
      // 执行完毕回退
      // 左边数组排序完毕，右边也是如上轨迹

```

js

该算法的操作次数是可以这样计算：递归了两次，每次数据量是数组的一半，并且最后把整个数组迭代了一次，所以得出表达式  $2T(N / 2) + T(N)$

(  $T$  代表时间，  $N$  代表数据量)。根据该表达式可以套用 该公式 得出时间复杂度为  $O(N * \log N)$

### 36.2.5 快排

快排的原理如下。随机选取一个数组中的值作为基准值，从左至右取值与基准值对比大小。比基准值小的放数组左边，大的放右边，对比完成后将基准值和第一个比基准值大的值交换位置。然后将数组以基准值的位置分为两部分，继续递归以上操作

以下是实现该算法的代码

```
function sort(array) {  
  checkArray(array);  
  quickSort(array, 0, array.length - 1);  
  return array;  
}  
  
function quickSort(array, left, right) {  
  if (left < right) {  
    swap(array, , right)  
    // 随机取值，然后和末尾交换，这样做比固定取一个位置的复杂度略低  
    let indexs = part(array, parseInt(Math.random() * (right - left + 1)) +  
    quickSort(array, left, indexs [0]);  
    quickSort(array, indexs [1] + 1, right);  
  }  
}  
  
function part(array, left, right) {  
  let less = left - 1;  
  let more = right;  
  while (left < more) {  
    if (array[left] < array[right]) {  
      // 当前值比基准值小，`less` 和 `left` 都加一  
      ++less;  
      ++left;  
    } else if (array[left] > array[right]) {  
      // 当前值比基准值大，将当前值和右边的值交换
```

js

```
// 并且不改变 `left`, 因为当前换过来的值还没有判断过大小
swap(array, --more, left);
} else {
    // 和基准值相同, 只移动下标
    left++;
}
}
// 将基准值和比基准值大的第一个值交换位置
// 这样数组就变成 `[比基准值小, 基准值, 比基准值大]`
swap(array, right, more);
return [less, more];
}
```

该算法的复杂度和归并排序是相同的, 但是额外空间复杂度比归并排序少, 只需  $O(\log N)$ , 并且相比归并排序来说, 所需的常数时间也更少

## 面试题

Sort Colors: 该题目来自 LeetCode, 题目需要我们将 `[2,0,2,1,1,0]` 排序成 `[0,0,1,1,2,2]`, 这个问题就可以使用三路快排的思想。

## 以下是代码实现

```
var sortColors = function(nums) {
    let left = -1;
    let right = nums.length;
    let i = 0;
    // 下标如果遇到 right, 说明已经排序完成
    while (i < right) {
        if (nums[i] == 0) {
            swap(nums, i++, ++left);
        } else if (nums[i] == 1) {
            i++;
        } else {
            swap(nums, i, --right);
        }
    }
};
```

js



Kth Largest Element in an Array: 该题目来自 LeetCode, 题目需要找出数组中第 K 大的元素, 这问题也可以使用快排的思路。并且因为是找出第 K 大元素, 所以在分离数组的过程中, 可以找出需要的元素在哪边, 然后只需要排序相应的一边数组就好。

以下是代码实现

```
var findKthLargest = function(nums, k) {  
    let l = 0  
    let r = nums.length - 1  
    // 得出第 K 大元素的索引位置  
    k = nums.length - k  
    while (l < r) {  
        // 分离数组后获得比基准树大的第一个元素索引  
        let index = part(nums, l, r)  
        // 判断该索引和 k 的大小  
        if (index < k) {  
            l = index + 1  
        } else if (index > k) {  
            r = index - 1  
        } else {  
            break  
        }  
    }  
    return nums [k]  
};  
function part(array, left, right) {  
    let less = left - 1;  
    let more = right;  
    while (left < more) {  
        if (array[left] < array[right]) {  
            ++less;  
            ++left;  
        } else if (array[left] > array[right]) {  
            swap(array, --more, left);  
        } else {  
            left++;  
        }  
    }  
    swap(array, right, more);  
    return more;  
}
```

js

### 36.2.6 堆排序

堆排序利用了二叉堆的特性来做， 二叉堆通常用数组表示， 并且二叉堆是一颗完全二叉树（所有叶节点（最底层的节点）都是从左往右顺序排序， 并且其他层的节点都是满的）。二叉堆又分为大根堆与小根堆

- 大根堆是某个节点的所有子节点的值都比他小
- 小根堆是某个节点的所有子节点的值都比他大

堆排序的原理就是组成一个大根堆或者小根堆。以小根堆为例，某个节点的左边子节点索引是  $i * 2 + 1$ ， 右边是  $i * 2 + 2$ ， 父节点是  $(i - 1) / 2$

1. 首先遍历数组， 判断该节点的父节点是否比他小， 如果小就交换位置并继续判断， 直到他的父节点比他大
2. 重新以上操作 1， 直到数组首位是最大值
3. 然后将首位和末尾交换位置并将数组长度减一， 表示数组末尾已是最大值， 不需要再比较大小
4. 对比左右节点哪个大， 然后记住大的节点的索引并且和父节点对比大小， 如果子节点大就交换位置
5. 重复以上操作 3 - 4 直到整个数组都是大根堆。

以下是实现该算法的代码

```
function heap(array) {  
  checkArray(array);  
  // 将最大值交换到首位  
  for (let i = 0; i < array.length; i++) {  
    heapInsert(array, i);  
  }  
  let size = array.length;  
  // 交换首位和末尾  
  swap(array, 0, --size);  
  while (size > 0) {  
    heapify(array, 0, size);  
    swap(array, 0, --size);  
  }  
}
```

js

```

    return array;
}

function heapInsert(array, index) {
    // 如果当前节点比父节点大，就交换
    while (array[index] > array[parseInt((index - 1) / 2)]) {
        swap(array, index, parseInt((index - 1) / 2));
        // 将索引变成父节点
        index = parseInt((index - 1) / 2);
    }
}

function heapify(array, index, size) {
    let left = index * 2 + 1;
    while (left < size) {
        // 判断左右节点大小
        let largest =
            left + 1 < size && array[left] < array[left + 1] ? left + 1 : left;
        // 判断子节点和父节点大小
        largest = array[index] < array[largest] ? largest : index;
        if (largest === index) break;
        swap(array, index, largest);
        index = largest;
        left = index * 2 + 1;
    }
}

```

- 以上代码实现了小根堆， 如果实现大根堆， 只需要把节点对比反一下就好。
- 该算法的复杂度是  $O(\log N)$

## 36.3 链表

### 反转单向链表

该题目来自 LeetCode， 题目需要将一个单向链表反转。思路很简单，使用三个变量分别表示当前节点和当前节点的前后节点， 虽然这题很简单，但是却是一道面试常考题

以下是实现该算法的代码

```

var reverseList = function(head) {
    // 判断下变量边界问题
    if (!head || !head.next) return head

```

js

```
// 初始设置为空， 因为第一个节点反转后就是尾部，尾部节点指向 null
let pre = null
let current = head
let next
// 判断当前节点是否为空
// 不为空就先获取当前节点的下一节点
// 然后把当前节点的 next 设为上一个节点
// 然后把 current 设为下一个节点， pre 设为当前节点
while(current) {
    next = current.next
    current.next = pre
    pre = current
    current = next
}
return pre
};
```

## 36.4 树

二叉树的先序， 中序， 后序遍历

- 先序遍历表示先访问根节点， 然后访问左节点， 最后访问右节点。
- 中序遍历表示先访问左节点， 然后访问根节点， 最后访问右节点。
- 后序遍历表示先访问左节点， 然后访问右节点， 最后访问根节点。

递归实现

递归实现相当简单， 代码如下

```
function TreeNode(val) {
    this.val = val;
    this.left = this.right = null;
}
var traversal = function(root) {
    if (root) {
        // 先序
        console.log(root);
        traversal(root.left);
        // 中序
        console.log(root);
        traversal(root.right);
        // 后序
        console.log(root);
    }
}
```

js

```
}  
};
```

对于递归的实现来说，只需要理解每个节点都会被访问三次就明白为什么这样实现了。

## 非递归实现

非递归实现使用了栈的结构，通过栈的先进后出模拟递归实现。

以下是先序遍历代码实现

```
function pre(root) {  
  if (root) {  
    let stack = [];  
    // 先将根节点 push  
    stack.push(root);  
    // 判断栈中是否为空  
    while (stack.length > 0) {  
      // 弹出栈顶元素  
      root = stack.pop();  
      console.log(root);  
      // 因为先序遍历是先左后右，栈是先进后出结构  
      // 所以先 push 右边再 push 左边  
      if (root.right) {  
        stack.push(root.right);  
      }  
      if (root.left) {  
        stack.push(root.left);  
      }  
    }  
  }  
}
```

js

以下是中序遍历代码实现

```
function mid(root) {  
  if (root) {  
    let stack = [];  
    // 中序遍历是先左再根最后右  
    // 所以首先应该先把最左边节点遍历到底依次 push 进栈
```

js



```

// 当左边没有节点时，就打印栈顶元素，然后寻找右节点
// 对于最左边的叶节点来说，可以把它看成是两个 null 节点的父节点
// 左边打印不出东西就把父节点拿出来打印，然后再看右节点
while (stack.length > 0 || root) {
  if (root) {
    stack.push(root);
    root = root.left;
  } else {
    root = stack.pop();
    console.log(root);
    root = root.right;
  }
}
}
}
}

```

以下是后序遍历代码实现，该代码使用了两个栈来实现遍历，相比一个栈的遍历来说要容易理解很多

```

function pos(root) {
  if (root) {
    let stack1 = [];
    let stack2 = [];
    // 后序遍历是先左再右最后根
    // 所以对于一个栈来说，应该先 push 根节点
    // 然后 push 右节点，最后 push 左节点
    stack1.push(root);
    while (stack1.length > 0) {
      root = stack1.pop();
      stack2.push(root);
      if (root.left) {
        stack1.push(root.left);
      }
      if (root.right) {
        stack1.push(root.right);
      }
    }
    while (stack2.length > 0) {
      console.log(s2.pop());
    }
  }
}
}

```

js

## 中序遍历的前驱后继节点

实现这个算法的前提是节点有一个 `parent` 的指针指向父节点，根节点指向 `null`。

如图所示，该树的中序遍历结果是 `4, 2, 5, 1, 6, 3, 7`

### 前驱节点

对于节点 2 来说，他的前驱节点就是 4，按照中序遍历原则，可以得出以下结论

1. 如果选取的节点的左节点不为空，就找该左节点最右的节点。对于节点 1 来说，他有左节点 2，那么节点 2 的最右节点就是 5
2. 如果左节点为空，且目标节点是父节点的右节点，那么前驱节点为父节点。对于节点 5 来说，没有左节点，且是节点 2 的右节点，所以节点 2 是前驱节点
3. 如果左节点为空，且目标节点是父节点的左节点，向上寻找到第一个是父节点的右节点的节点。对于节点 6 来说，没有左节点，且是节点 3 的左节点，所以向上寻找到节点 1，发现节点 3 是节点 1 的右节点，所以节点 1 是节点 6 的前驱节点

以下是算法实现

```
function predecessor(node) {  
  if (!node) return  
  // 结论 1  
  if (node.left) {  
    return getRight(node.left)  
  } else {  
    let parent = node.parent  
    // 结论 2 3 的判断  
    while(parent && parent.right === node) {  
      node = parent  
      parent = node.parent  
    }  
    return parent  
  }  
}  
  
function getRight(node) {
```

js



```
    if ( !node) return
    node = node.right
    while(node) node = node.right
    return node
}
```

## 后继节点

- 对于节点 2 来说，他的后继节点就是 5，按照中序遍历原则，可以得出以下结论
  1. 如果有右节点，就找到该右节点的最左节点。对于节点 1 来说，他有右节点 3，那么节点 3 的最左节点就是 6
  2. 如果没有右节点，就向上遍历直到找到一个节点是父节点的左节点。对于节点 5 来说，没有右节点，就向上寻找到节点 2，该节点是父节点 1 的左节点，所以节点 1 是后继节点

## 以下是算法实现

```
function successor( node) {
    if ( !node) return
    // 结论 1
    if (node.right) {
        return getLeft(node.right)
    } else {
        // 结论 2
        let parent = node.parent
        // 判断 parent 为空
        while(parent && parent.left === node) {
            node = parent
            parent = node.parent
        }
        return parent
    }
}

function getLeft(node) {
    if ( !node) return
    node = node.left
    while(node) node = node.left
    return node
}
```

js

## 树的深度

树的最大深度：该题目来自 Leetcode，题目要求求出一颗二叉树的最大深度

以下是算法实现

```
var maxDepth = function(root) {  
    if (!root) return 0  
    return Math.max(maxDepth(root.left), maxDepth(root.right)) + 1  
};
```

js

对于该递归函数可以这样理解：一旦没有找到节点就会返回 0，每弹出一递归函数就会加一，树有三层就会得到3。

## 36.5 动态规划

- 动态规划背后的基本思想非常简单。就是将一个问题拆分为子问题，一般来说这些子问题都是非常相似的，那么我们可以通过只解决一次每个子问题来达到减少计算量的目的。
- 一旦得出每个子问题的解，就存储该结果以便下次使用。

斐波那契数列

斐波那契数列就是从 0 和 1 开始，后面的数都是前两个数之和

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89....

那么显而易见，我们可以通过递归的方式来完成求解斐波那契数列

```
function fib(n) {  
    if (n < 2 && n >= 0) return n  
    return fib(n - 1) + fib(n - 2)  
}  
fib(10)
```

js

以上代码已经可以完美的解决问题。但是以上解法却存在很严重的性能问题，当  $n$  越大的时候，需要的时间是指数增长的，这时候就可以通过动态规划来解决这个问题。

动态规划的本质其实就是 两点

- 自底向上分解子问题
- 通过变量存储已经计算过的 解

根据上面两点，我们的斐波那契数列的动态规划思路也就出来了

- 斐波那契数列从 0 和 1 开始，那么这就是这个子问题的最底层
- 通过数组来存储每一位所对应的斐波那契数列 的值

```
function fib(n) {  
  let array = new Array(n + 1).fill(null)  
  array[0] = 0  
  array[1] = 1  
  for (let i = 2; i <= n; i++) {  
    array[i] = array[i - 1] + array[i - 2]  
  }  
  return array[n]  
}  
fib(10)
```

0 - 1背包问题

该问题可以描述为：给定一组物品，每种物品都有自己的重量和价格， 在限定的总重量内， 我们如何选择，才能使得物品的总价格最高。每个问题只能放入至多一次。

假设我们有以下物品

| 物品 ID / 重量 | 价值 |  |
|------------|----|--|
| 1          | 3  |  |
| 2          | 7  |  |
| 3          | 12 |  |

- 对于一个总容量为 5 的背包来说， 我们可以放入重量 2 和 3 的物品来达到背包内的物品总价值最高。
- 对于这个问题来说， 子问题就两个， 分别是放物品和不放物品， 可以通过以下表格来理解子问题