工程数学（本）形成性考核作业 4

综合练习书面作业（线性代数部分）

一、解答题（每小题 10 分，共 80 分）

1. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$， $B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，已知 $XA=B$，求 X .

解：因为 XA=B

所以 $X=BA^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -4\\ 8 & -5\\ 4 & -2\end{bmatrix}$

2. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ -3 & 5 & 6\end{bmatrix}$，解矩阵方程 $AX=B'$

解：因为

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -7 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 5 & -3 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 7 & -4 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

所以得 $A^{-1}=\begin{bmatrix}5 & -3 & 2\\ 7 & -4 & 2\\ -3 & 2 & -1\end{bmatrix}$

由 $AX=B'$

得 $X=A^{-1}B'=\begin{bmatrix}5 & -3 & 2\\ 7 & -4 & 2\\ -3 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 5\\ 3 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13 & -18\\ 16 & -29\\ -7 & 13\end{bmatrix}$

3．解矩阵方程 $AX-X=B$，其中 $A=\begin{bmatrix}4&5\\5&9\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$.

解：由 $AX-X=B$ 得（A−E）X=B

即 $\begin{bmatrix}3&5\\5&8\end{bmatrix}\mathrm{X}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ 所以 $\mathrm{X}=\begin{bmatrix}3&5\\5&8\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8&5\\5&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&4\\-4&-2\end{bmatrix}$

4. 求齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1-x_2+3x_3-x_4=0\\2x_1-x_2-x_3+4x_4=0\\x_1-4x_3+5x_4=0\end{cases}$ 的通解.

解：由已知，有 $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&-1&3&-1\\2&-1&-1&4\\1&-4&5&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&3&-1\\0&1&-7&6\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-4&1\\0&1&-7&6\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

得 x3,x4 为自由未知数，

令 x3=1,x4=0，可得解向量 $\mathrm{X}_1=\begin{bmatrix}4\\7\\1\\0\end{bmatrix}$ 令 x3=0,x4=1，可得解向量 $\mathrm{X}_2=\begin{bmatrix}5\\6\\0\\-1\end{bmatrix}$

故该齐次线性方程组的通解为 $\mathrm{k}_1\begin{bmatrix}4\\7\\1\\0\end{bmatrix}+\mathrm{k}_2\begin{bmatrix}5\\6\\0\\-1\end{bmatrix}$（其中 k_1，k_2 为任意常数）

5．求齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1-3x_2+x_3-2x_4=0\\-5x_1+x_2-2x_3+3x_4=0\\-x_1-11x_2+2x_3-5x_4=0\\3x_1+5x_2+4x_4=0\end{cases}$ 的通解.

解：由已知，有 $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&-3&1&-2\\-5&1&-2&3\\-1&-1&2&-3\\3&5&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-3&1&-2\\0&14&-3&7\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

可得解向量$X=\begin{bmatrix}4\\7\\1\\0\end{bmatrix}$故该齐次线性方程组的通解为$k\begin{bmatrix}4\\7\\1\\0\end{bmatrix}$（k 为任意常数）

6. 当λ取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0\\4x_1+5x_2+\lambda x_3=0\\3x_1+7x_2+2x_3=0\end{cases}$$

有非零解？在有非零解的情况下求方程组的通解.

解：由已知，有$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\4&5&\lambda\\3&7&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\0&0&\lambda-7\end{bmatrix}$，

当γ（A）<3 时有非零解，所以λ-7=0 即λ=7 时有非零解，

由$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$可得解向量$X=\begin{bmatrix}-3\\1\\1\end{bmatrix}$

故该齐次线性方程组的通解为$kX=k\begin{bmatrix}-3\\1\\1\end{bmatrix}$（k 为任意常数）

7. 当λ取何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\-x_1+2x_2-4x_3=2\\2x_1+5x_2-x_3=\lambda\end{cases}$$

有解？在有解的情况下求方程组的通解.

解：由已知，有$A=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\-1&2&-4&2\\2&5&-1&\lambda\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&\lambda-5\end{array}\right]$，

当γ（A）=2 时有非零解，即λ=5 时方程组有解，

由$A=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\end{array}\right]$可得解向量$X_0=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，$X_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$

故该非齐次线性方程组的通解为$X_0+kX_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2k\\k+1\\k\end{bmatrix}$（k 为任意常数）

8. 求线性方程组$\begin{cases}x_1-2x_2+4x_3=-5\\2x_1+3x_2+x_3=4\\3x_1+8x_2-2x_3=13\\4x_1-x_2+9x_3=-6\end{cases}$的通解.

解：由已知，有$A=\begin{bmatrix}1&-2&4&\vdots&-5\\2&3&1&\vdots&4\\3&8&-2&\vdots&13\\4&-1&9&\vdots&-6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&4&\vdots&-5\\0&1&-1&\vdots&2\\0&0&0&\vdots&0\\0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}$，

可得解向量$X_0=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$，$X_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$

故该线性方程组的通解为$X_0+kX_1=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2k+1\\k+1\\k-1\end{bmatrix}$ （k 为任意常数）

二、证明题（每题 10 分，共 20 分）

1. 对任意方阵A，试证$A+A'$是对称矩阵.

证明：因为（A+A′ ）′ =A′ +A=A+A′

所以 A+A′ 是对称矩阵。

2. 设n阶方阵A满足$A^2+A-I=O$，试证矩阵A可逆.

证明：$A^2+A-I=0$ 则 $A^2+A=I$

所以 $A(A+I)=I$

所以矩阵 A 可逆，且 $A^{-1}=A+I$

若矩阵 A 可逆，则 $AA^{-1=}A^{-1}A=I$