国家开放大学《高等数学基础》第 1—4 次作业参考答案

第一次作业

（一）单项选择题

1.下列各函数对中，（C）中的两个函数相等.

A. $f(x)=(\sqrt{x})^2$， $g(x)=x$

B. $f(x)=\sqrt{x^2}$， $g(x)=x$

C. $f(x)=\ln x^3$， $g(x)=3\ln x$

D. $f(x)=x+1$， $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

2.设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，则函数 $f(x)+f(-x)$ 的图形关于（C）对称.

A.坐标原点

B. x 轴

C. y 轴

D. $y=x$

3.下列函数中为奇函数是（B）.

A. $y=\ln(1+x^2)$

B. $y=x\cos x$

C. $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$

D. $y=\ln(1+x)$

4. 下列函数中为基本初等函数是（C）.

A. $y=x+1$

B. $y=-x$

C. $y = x^{\sqrt{2}}$

D. $y = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \ge 0 \end{cases}$

5.下列极限存计算不正确的是（D）.

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+2} = 1$

B. $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x) = 0$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$

D. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = 0$

6.当$x \to 0$时，变量（C）是无穷小量.

A. $\frac{\sin x}{x}$

B. $\frac{1}{x}$

C. $x\sin\frac{1}{x}$

D. $\ln(x+2)$

7.若函数$f(x)$在点x_0满足（A），则$f(x)$在点x_0连续。

A. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

B. $f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义

C. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

D. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

（二）填空题

1.函数$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3} + \ln(1+x)$的定义域是 x>3 .

2.已知函数$f(x+1) = x^2 + x$，则$f(x) =$ x²-x .

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{2x})^x = e^{\frac{1}{2}}$.

4.若函数 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ x+k, & x\geq 0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，则 $k=$ <u> e </u>.

5.函数 $y=\begin{cases}x+1, & x>0\\ \sin x, & x\leq 0\end{cases}$ 的间断点是 <u> x=0 </u>.

6.若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则当 $x\to x_0$ 时，$f(x)-A$ 称为<u>无穷小量</u>.

（三）计算题

1.设函数

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x>0\\ x, & x\leq 0\end{cases}$$

求：$f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$.

参考答案：

f（-2）=-2

f（0）=0

f（1）=e^1=e

2.求函数 $y=\lg\dfrac{2x-1}{x}$ 的定义域.

参考答案：

欲使函数有意义，必使$\lg\frac{2x-1}{x}>0$

即：$\frac{2x-1}{x}>1$

即：$2x-1>x$

则函数定义域是：$x>1$

3.在半径为 R 的半圆内内接一梯形，梯形的一个底边与半圆的直径重合，另一底边的两个端点在半圆上，试将梯形的面积表示成其高的函数.

参考答案：

设梯形的高 CM= x，则 DM=$\sqrt{R^2-x^2}$

梯形的上底 DC=2$\sqrt{R^2-x^2}$，下底 AB=2R

则梯形的面积

S=$\frac{(2\sqrt{R^2-x^2}+2\mathrm{R})\ x}{2}=\left(\sqrt{R^2-x^2}+R\right)x\ (0<\ x<R)$

4.求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

参考答案：

原式$=\dfrac{3}{2} \times \dfrac{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x}} = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{1} = \dfrac{3}{2}$

5.求 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{\sin(x+1)}$.

参考答案：

原式 $= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x-1}{\frac{\sin(x+1)}{x+1}} = \dfrac{\lim\limits_{x \to -1}(x-1)}{\lim\limits_{x \to -1} \frac{\sin(x+1)}{x+1}} = \dfrac{-2}{1} = -2$

6.求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x}{x}$.

参考答案：

原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{x} = 3\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x} \times \dfrac{1}{\cos 3x} = 3\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x} \times \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos 3x}$

$= 3 \times 1 \times \dfrac{1}{1} = 3$

7.求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sin x}$.

参考答案：

原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{(\sqrt{1+x^2}+1)\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} \times \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\frac{\sin x}{x}}$

$= 0 \times 1 = 0$

8.求 $\lim\limits_{x \to \infty} (\dfrac{x-1}{x+3})^x$.

参考答案：

原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+3}\cdot\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{-3}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3-4}{x+3}\right)^{x+3}\cdot\left(\frac{x+3-4}{x+3}\right)^{-3}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+3}\right)^{x+3}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+3}\right)^{-3}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+3}\right)^{x+3}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-4}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-4}}\right]^{-4}$

$=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-4}}\right]^{-4}$

$=e^{-4}$

9.求$\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$.

参考答案：

原式$=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x-4)(x-2)}{(x-4)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-2}{x-1}=\frac{2}{3}$

10.设函数

$$f(x)=\begin{cases}(x-2)^2\ , & x>1\\ x\ , & -1\le x\le 1\\ x+1\ , & x<-1\end{cases}$$

讨论$f(x)$的连续性.

参考答案：

先看函数在分断点 $x=-1$ 处的情况

∵ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-}(x+1) = -1+1 = 0$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} x = -1$

∴ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) \ne \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$，故 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ 不存在.

∴ $x=-1$ 为函数 $f(x)$ 的间断点.

再看函数在分断点 $x=1$ 处的情况

∵ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x-2)^2 = 1$

∴ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$，故 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

又因为 $f(1) = x|_{x=1} = 1$

所以 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$

故 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的连续点

函数 $f(x)$ 的连续区间是：$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

第二次作业

（一）单项选择题

1.设 $f(0)=0$ 且极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$（B）.

A. $f(0)$

B. $f'(0)$

C. $f'(x)$

D. 0

2.设 $f(x)$ 在 x_0 可导，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{2h}=$（D）.

A. $-2f'(x_0)$

B. $f'(x_0)$

C. $2f'(x_0)$

D. $-f'(x_0)$

3.设 $f(x)=\mathrm{e}^x$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$（A）.

A. e

B. 2e

C. $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}$

D. $\dfrac{1}{4}\mathrm{e}$

4. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-99)$，则 $f'(0)=$（D）.

A. 99

B. -99

C. 99!

D. $-99!$

5.下列结论中正确的是（C）.

A. 若 $f(x)$ 在点 x_0 有极限，则在点 x_0 可导.

B. 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续，则在点 x_0 可导.

C. 若 $f(x)$ 在点 x_0 可导，则在点 x_0 有极限.

D. 若 $f(x)$ 在点 x_0 有极限，则在点 x_0 连续.

（二）填空题

1.设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，则 $f'(0)=$____0____.

2.设 $f(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^{2x}+5\mathrm{e}^x$，则 $\dfrac{\mathrm{d}f(\ln x)}{\mathrm{d}x}=$__$\dfrac{2lnx+5}{x}$__.

3.曲线 $f(x)=\sqrt{x}+1$ 在 $(1,2)$ 处的切线斜率是__1/2___.

4.曲线 $f(x)=\sin x$ 在 $(\frac{\pi}{2},1)$ 处的切线方程是__y=1__.

5.设 $y=x^{2x}$，则 $y'=\underline{x^{2x}(2\ln x+2)}$.

6.设 $y=x\ln x$，则 $y''=\underline{\frac{1}{x}}$.

（三）计算题

1.求下列函数的导数 y'：

（1） $y=(x\sqrt{x}+3)\mathrm{e}^{x}$

解：$y'=(x^{\frac{3}{2}}e^{x}+3e^{x})'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}e^{x}+x^{\frac{3}{2}}e^{x}+3e^{x}$

$=e^{x}(x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+3)$

（2） $y=\cot x+x^{2}\ln x$

解：$y'=(\frac{\cos x}{\sin x}+x^{2}\ln x)'=(\frac{-\sin x\sin x-\cos x\cos x}{\sin^{2}x}+2x\ln x+\frac{x^{2}}{x})$

$=-\frac{1}{\sin^{2}x}+2x\ln x+x$

（3） $y=\frac{x^{2}}{\ln x}$

解：$y'=\frac{2x\ln x-x}{\ln^{2}x}=\frac{x(2\ln x-1)}{\ln^{2}x}$

（4） $y=\frac{\cos x+2^{x}}{x^{3}}$

解：$y'=\frac{(-\sin x+2^{x}\ln 2)x^{3}-(\cos x+2^{x})\cdot 3x^{2}}{x^{6}}$

$=\frac{-x\sin x+\ln 2\cdot 2^{x}x-3\cos x-3\cdot 2^{x}}{x^{4}}$

（5） $y=\frac{\ln x-x^2}{\sin x}$

解：$y'=\frac{(\frac{1}{x}-2x)\sin x-\cos x(\ln x-x^2)}{\sin^2 x}$

$=\frac{(1-2x^2)\sin x-x\cos(\ln x-x^2)}{x\sin^2 x}$

（6） $y=x^4-\sin x\ln x$

解：$y'=4x^3-(\cos x\times\ln x+\frac{\sin x}{x})$

$=4x^3-\cos x\times\ln x-\frac{\sin x}{x}$

（7） $y=\frac{\sin x+x^2}{3^x}$

解：$y'=\frac{(\cos x+2x)3^x-3^x\ln 3(\sin x+x^2)}{3^{2x}}$

$=\frac{\cos x+2x-\ln 3(\sin x+x^2)}{3^x}$

（8） $y=\mathrm{e}^x\tan x+\ln x$

解：$y'=(e^x\tan x+\frac{e^x}{\cos^2 x})+\frac{1}{x}$

$=\frac{e^x(\sin x\cos x+1)}{\cos^2 x}+\frac{1}{x}$

2.求下列函数的导数 y'：

（1） $y=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$

解：$y'=e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{e^{\sqrt{x}}\sqrt{x}}{2x}$

（2） $y=\ln\cos x$

解：$y' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

（3） $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

解：因为 $y = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{8}} = x^{\frac{7}{8}}$

所以 $y' = \frac{7}{8} x^{-\frac{1}{8}}$

（4） $y = \sin^2 x$

解：因为 $y = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$

所以 $y' = \frac{1}{3}(x + x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{3}}(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})$

（5） $y = \sin x^2$

解：$y' = \cos x^2 \cdot 2x = 2x\cos x^2$

（6） $y = \cos e^x$

解：$y' = -\sin e^x \cdot e^x$

$= -e^x \sin e^x$

（7） $y = \sin^n x \cos nx$

解：$y' = (\sin^n x)' \cos nx + \sin^n x \cdot (\cos nx)'$

$= n\sin^{n-1} x \cdot \cos x \cdot \cos nx + \sin^n x \cdot (-\sin nx) \cdot n$

$= n\sin^{n-1} x(\cos x \cos nx - \sin x \sin nx)$

（8） $y = 5^{\sin x}$

解：设 $y = 5^u \quad u = \sin x$

$y' = y'_u \cdot u'_x = 5^u \ln 5 \cdot \cos x = \ln 5 \cdot 5^{\sin x} \cdot \cos x$

（9） $y = e^{\cos x}$

解：设 $y = e^u \quad u = \cos x$

$$y' = y'_u \cdot u'_x = e^u \cdot (-\sin x) = -e^{\cos x} \sin x$$

3.在下列方程中，$y = y(x)$ 是由方程确定的函数，求 y'：

（1）$y\cos x = \mathrm{e}^{2y}$

解：将方程两边对 x 求导：

$$y'\cos x - y\sin x = 2e^{2y} \cdot y'$$

移项 $y'(\cos x - 2e^{2y}) = y\sin x$

所以：$y' = \dfrac{y\sin x}{\cos x - 2e^{2y}}$

（2）$y = \cos y \ln x$

解：将方程两边对 x 求导：

$$y' = (\cos y)'\ln x + \cos y(\ln x)'$$

$$y' = -\sin y \cdot y'\ln x + \frac{\cos y}{x}$$

移项 $y'(1 + \sin y \times \ln x) = \dfrac{\cos y}{x}$

所以：$y' = \dfrac{\cos y}{x(1 + \ln x \sin y)}$

（3）$2x\sin y = \dfrac{x^2}{y}$

解：$2\sin y + 2x\cos y \cdot y' = \dfrac{2xy - x^2 y'}{y^2} = \dfrac{2x}{y} - \dfrac{x^2}{y^2} y'$

$$y' = \frac{\dfrac{2x}{y} - 2\sin y}{2x\cos y + \dfrac{x^2}{y^2}} = \frac{2xy - 2y^2\sin y}{2xy^2\cos y + x^2}$$

（4）$y = x + \ln y$

解：因为：$y' = 1 + \dfrac{y'}{y}$

解得 $y' = \dfrac{1}{y-1}$

（5）$\ln x + \mathrm{e}^y = y^2$

解：将方程两边对 x 求导：

$$\frac{1}{x}+e^{y}\cdot y'=2y\cdot y'$$

整理得：$y'=\dfrac{1}{x(2y-e^{y})}$

（6）$y^2+1=\mathrm{e}^x\sin y$

解：将方程两边对 x 求导：

$$2y\cdot y'=e^{x}\sin y+e^{x}\cos y\cdot y'$$

整理得：$y'=\dfrac{e^{x}\sin y}{2y-e^{x}\cos y}$

（7）$\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^x-y^3$

解：将方程两边对 x 求导：

$$e^{y}\cdot y'=e^{x}-3y^{2}\cdot y'$$

整理得：$y'=\dfrac{e^{x}}{e^{y}+3y^{2}}$

（8）$y=5^x+2^y$

解：将方程两边对 x 求导：

$$y'=5^{x}\ln 5+2^{y}\ln 2\cdot y'$$

整理得：

$$y'=\frac{5^{x}\ln 5}{1-2^{y}\ln 2}$$

4.求下列函数的微分 $\mathrm{d}y$：

（1）$y=\cot x+\csc x$

解：因为 $y'=-\dfrac{1}{\sin^{2}x}+(\dfrac{1}{\sin x})'=-\dfrac{1}{\sin^{2}x}-\dfrac{\cos x}{\sin^{2}x}$

$$=-\frac{1+\cos x}{\sin^{2}x}$$

所以 $dy=-\dfrac{1+\cos x}{\sin^{2}x}dx$

（2）$y=\dfrac{\ln x}{\sin x}$

解：因为 $y' = \dfrac{\frac{1}{x}\sin x - \cos x \cdot \ln x}{\sin^2 x}$

$= \dfrac{\sin x - x\cos x \cdot \ln x}{x\sin^2 x}$

所以 $dy = \dfrac{\sin x - x\cos x \cdot \ln x}{x\sin^2 x} dx$

（3） $y = \sin^2 e^x$

解：设 $y = u^2$， $u = \sin x$

则 $y' = y'_u \cdot u'_x$

$= 2u \cdot \cos x = 2\sin x \cdot \cos x$

$= \sin 2x$

所以 $dy = \sin 2x \, dx$

（4） $y = \tan e^{x^3}$

解：设: $y = \tan u$， $u = e^x$

则 $y' = y'_u \cdot u'_x$

$= \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot e^x$

$= \dfrac{e^x}{\cos^2 e^x}$

所以 $dy = \dfrac{e^x}{\cos^2 e^x} dx$

5.求下列函数的二阶导数：

（1） $y = \sqrt{x}$

解： $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$y'' = (\dfrac{1}{2\sqrt{x}})' = -\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

（2） $y = 3^x$

解： $y' = 3^x \ln 3$

$y'' = (3^x \ln 3)' = 3^x \ln 3 \times \ln 3$

（3） $y = \ln x$

解：$y' = \dfrac{1}{x}$

$y'' = (\dfrac{1}{x})' = -\dfrac{1}{x^2}$

（4） $y = x\sin x$

解：$y' = \sin x + x\cos x$

$y'' = (\sin x + x\cos x)' = \cos x + \cos x - x\sin x$

$= 2\cos x - x\sin x$

（四）证明题

设 $f(x)$ 是可导的奇函数，试证 $f'(x)$ 是偶函数.

证明：因为 $f(x)$ 是奇函数，所以

又因为 $f(x)$ 可导，函数 $f(-x)$ 为复合函数。

对 $f(-x) = -f(x)$ 两端对 x 求导，得：

$f'(-x)\cdot(-x)' = -f'(x)$

即 $-f'(-x) = -f'(x)$

所以：$f'(-x) = f'(x)$

根据偶函数的定义，$f'(x)$ 是偶函数。

第三次作业

（一）单项选择题

1.若函数 $f(x)$ 满足条件（D），则存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

A. 在 (a,b) 内连续

B. 在 (a,b) 内可导

C. 在 (a,b) 内连续且可导

D. 在 $[a,b]$ 内连续，在 (a,b) 内可导

2.函数 $f(x) = x^2 + 4x - 1$ 的单调增加区间是（D）.

A. $(-\infty, 2)$

B. $(-1, 1)$

C. $(2, +\infty)$

D. $(-2, +\infty)$

3.函数$y = x^2 + 4x - 5$在区间$(-6, 6)$内满足（A）.

A. 先单调下降再单调上升

B. 单调下降

C. 先单调上升再单调下降

D. 单调上升

4. 函数$f(x)$满足$f'(x) = 0$的点，一定是$f(x)$的（C）.

A. 间断点

B. 极值点

C. 驻点

D. 拐点

5.设$f(x)$在(a, b)内有连续的二阶导数，$x_0 \in (a, b)$，若$f(x)$满足（C），则$f(x)$在x_0取到极小值.

A. $f'(x_0) > 0, f''(x_0) = 0$

B. $f'(x_0) < 0, f''(x_0) = 0$

C. $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$

D. $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$

6.设$f(x)$在(a, b)内有连续的二阶导数，且$f'(x) < 0, f''(x) < 0$，则$f(x)$在此区间内是（A）.

A. 单调减少且是凸的

B. 单调减少且是凹的

C. 单调增加且是凸的

D. 单调增加且是凹的

（二）填空题

1.设$f(x)$在(a, b)内可导，$x_0 \in (a, b)$，且当$x < x_0$时$f'(x) < 0$，当$x > x_0$时

$f'(x)>0$，则 x_0 是 $f(x)$ 的<u>　极小值　</u>点．

2.若函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，且 x_0 是 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(x_0)=$<u>　0　</u>．

3.函数 $y=\ln(1+x^2)$ 的单调减少区间是<u>　（-∞，0）　</u>．

4.函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$ 的单调增加区间是<u>　（0，+∞）　</u>．

5.若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内恒有 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值是<u>f(a)</u>．

6.函数 $f(x)=2+5x-3x^3$ 的拐点是<u>(0,2)</u>．

（三）计算题

1.求函数 $y=(x+1)(x-5)^2$ 的单调区间和极值．

解：$y'=\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}(x-5)^2+2(x+1)^{\frac{3}{2}}(x-5)=\frac{1}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}(x-5)(3x-15+4x+4)$

$=\frac{1}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}(x+5)(7x-11)=0$

得驻点：x= -1　x=5　$x=\frac{1}{7}$

x	−1	$\left(-1,\frac{11}{7}\right)$	$\frac{11}{7}$	$\left(\frac{11}{7},5\right)$	5	$(5,+\infty)$
Y'	0	+	0	−	0	+
y	左端点	↗	极大 $f\left(\frac{11}{7}\right)=\frac{31104}{2401}\sqrt{14}$	↘	极小 $f(5)=0$	↗

$\therefore f(x)$ 在 $\left[-1,\frac{11}{7}\right)\cup(5,+\infty)$ 内单调上升，在 $\left(\frac{11}{7},5\right)$ 内单调下降。

极大值是 $f\left(\frac{11}{7}\right)=\frac{31104}{2401}\sqrt{14}$　　　　极小值是 $f(5)=0$

2.求函数 $y=x^2-2x+3$ 在区间 $[0,3]$ 内的极值点，并求最大值和最小值．

解：$y'=\frac{2}{3}(x^2-2x)^{-\frac{1}{3}}(2x-2)=0$　　得驻点 x=1

又当 x=0　x=2 时　　y' 无意义，但原函数连续

∴f(0)=0　　f(1)= 1　　f(2)=0　　f(3)= $\sqrt[3]{9}$

x	0	(0,1)	1	(1,2)	2	(2,3)	3
Y'	无意义	+	0	−	无意义	+	+
y	0	↗	极大值 f(1)=1	↘	极小值 f(2)=0	↗	↗

∴最小值 f(0)=f(2)=0　　　最大值是 f(3)= $\sqrt[3]{9}$　　　极大值 f(1)=1　　　极小值 f(2)=0

3.求曲线 $y^2=2x$ 上的点，使其到点 $A(2,0)$ 的距离最短.

解：$\because y=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图形过点 $(-2,44)$ 和点 $(1,-10)$，且 $x=-2$ 是驻点，$x=1$ 是拐点.

$$\therefore \begin{cases} -8x+4b-2c+d=44 \\ a+b+c+d=-10 \\ 12a-4b+c=0 \\ 6a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=-24 \\ d=16 \end{cases}$$

4. 圆柱体上底的中心到下底的边沿的距离为 L，问当底半径与高分别为多少时，圆柱体的体积最大?

解：设圆柱体的底面半径为 x，高为 h，则 $h=\sqrt{l^2-x^2}$

$$v=\pi x^2h=\pi x^2\sqrt{l^2-x^2}$$

$$v'=2\pi x\sqrt{l^2-x^2}-\frac{3\pi x^3}{2\sqrt{l^2-x^2}}=\frac{2\pi x\left(l^2-x^2\right)-\pi x^3}{\sqrt{l^2-x^2}}=\frac{2\pi xl^2-3\pi x^3}{\sqrt{l^2-x^2}}=0$$

$x=\frac{\sqrt{6}}{3}l, h=\frac{\sqrt{3}}{3}l$ 时，圆柱体的体积最大。

5. 一体积为 V 的圆柱体，问底半径与高各为多少时表面积最小?

解：设圆柱体的底面半径为 x，高为 h，$v=\pi x^2h$　　则 $h=\frac{v}{\pi x^2}$

$$s=2\pi xh+2\pi x^2=2\pi x\frac{v}{\pi x^2}+2\pi x^2=\frac{2v}{x}+2\pi x^2$$

$$s'=-\frac{2v}{x^2}+4\pi x=\frac{4\pi x^3-2v}{x^2}=0$$

当　$x=\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$　　$h=\sqrt[3]{\frac{4v}{\pi}}$ 时，圆柱体的表面积最小。

6. 欲做一个底为正方形，容积为 62.5 立方米的长方体开口容器，怎样做法用料最省?

解：设长方体底面正方形的边长为 x 米，长方体的高为 h 米，

则　容积　$62.5=x^2h$　　$h=\frac{62.5}{x^2}$

表面积：$s=x^2+4xh=x^2+4x\frac{62.5}{x^2}=x^2+\frac{250}{x}$

$$s'=2x-\frac{250}{x^2}=\frac{2x^3-250}{x^2}=0 \qquad x=5\ (米)$$

$\therefore x=5, h=2.5$ 时用料最省。

（四）证明题

1.当$x>0$时，证明不等式$x>\ln(1+x)$.

证明　利用函数的单调性证明

设$f(x)=x-\ln(1+x)$　$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0,(x>0)$

$\therefore f(x)$在$[0+\infty)$内单调增加，当$x>0$时，有$f(x)>f(0)$

即　$f(x)=x-\ln(1+x)>0$

$\therefore x>\ln(1+x)$成立

2.当$x>0$时，证明不等式$e^x>x+1$.

证明　利用函数的单调性证明

设$f(x)=e^x-x-1$　$f'(x)=e^x-1>0,(x>0)$

$\therefore f(x)$在$[0+\infty)$内单调增加，当$x>0$时，有$f(x)>f(0)$

即　$f(x)=e^x-x-1>0$

$\therefore e^x>x+1$成立

第四次作业

（一）单项选择题

1.若$f(x)$的一个原函数是$\frac{1}{x}$，则$f'(x)=$（D）.

A. $\ln|x|$

B. $-\frac{1}{x^2}$

C. $\frac{1}{x}$

D. $\frac{2}{x^3}$

2.下列等式成立的是（D）.

A. $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)$

B. $\int \mathrm{d}f(x)=f(x)$

C. $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$

D. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$

3.若 $f(x)=\cos x$，则 $\int f'(x)\mathrm{d}x=$（B）.

A. $\sin x+c$

B. $\cos x+c$

C. $-\sin x+c$

D. $-\cos x+c$

4. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int x^2 f(x^3)\mathrm{d}x=$（B）.

A. $f(x^3)$

B. $x^2 f(x^3)$

C. $\dfrac{1}{3}f(x)$

D. $\dfrac{1}{3}f(x^3)$

5.若 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+c$，则 $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})\mathrm{d}x=$（B）.

A. $F(\sqrt{x})+c$

B. $2F(\sqrt{x})+c$

C. $F(2\sqrt{x})+c$

D. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}F(\sqrt{x})+c$

6.下列无穷限积分收敛的是（D）.

A. $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$

B. $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

C. $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

D. $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$

（二）填空题

1.函数 $f(x)$ 的不定积分是 $\underline{\int f(x)dx = F(x) \pm C}$.

2.若函数 $F(x)$ 与 $G(x)$ 是同一函数的原函数，则 $F(x)$ 与 $G(x)$ 之间有关系式 $\underline{G(x)=F(x)+c}$.

3. $\mathrm{d}\int \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=$ $\underline{\quad e^{x^2}dx\quad}$.

4. $\int(\tan x)'\mathrm{d}x=$ $\underline{\quad \tan x+c\quad}$.

5.若 $\int f(x)\mathrm{d}x=\cos 3x+c$，则 $f'(x)=$ $\underline{\quad -9\cos 3x\quad}$.

6. $\int_{-3}^{3}(\sin^5 x+\frac{1}{2})\mathrm{d}x=$ $\underline{\quad 3\quad}$.

7.若无穷积分 $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛，则 p $\underline{\quad >1\quad}$.

（三）计算题

1. $\int\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}\mathrm{d}x=$ $-\int\cos\frac{1}{x}d\frac{1}{x}=-\sin\frac{1}{x}+c$

2. $\int\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$ $2\int e^{\sqrt{x}}d\sqrt{x}=2e^{\sqrt{x}}+c$

3. $\int\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=$ $\int\frac{1}{\ln x}d\ln x=\ln(\ln x)+c$

4. $\int x\sin 2x\mathrm{d}x=$ $-\frac{1}{2}\int xd\cos 2x \quad =-\frac{1}{2}(x\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x+c)$

5. $\int_{1}^{\mathrm{e}}\frac{3+\ln x}{x}\mathrm{d}x=$ $\int_1^e(3+\ln x)d\ln x=3\int_1^e d\ln x+\int_1^e\ln xd\ln x$

$=(3\ln x+\frac{1}{2}\ln^2 x)\Big|_1^e=3+\frac{1}{2}-0=\frac{7}{2}$

6. $\int_{0}^{1}x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$

$=-\frac{1}{2}\int_1^e xe^{-2x}d(-2x)=-\frac{1}{2}\int_1^e xde^{-2x}$

$=-\frac{1}{2}(xe^{-2x}+\frac{1}{2}e^{-2x})\Big|_1^e$

$=-\frac{1}{2}(e\cdot e^{-2e}+\frac{1}{2}e^{-2e}-e^{-2}-\frac{1}{2}e^{-2})=-\frac{1}{2}e^{-2}(e^{1+e}+\frac{1}{2}e^{e}-\frac{3}{2})$

7. $\int_1^e x\ln x\mathrm{d}x$

$$=\int_1^e \ln x\, d\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x}{2}dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big|_1^e=\frac{e^2}{2}+\frac{1}{4}$$

8. $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=\int_1^e \ln x\, d(-\frac{1}{x})=-\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^e+\int_1^e\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{e}-\frac{1}{x}\Big|_1^e=1-\frac{2}{e}$

（四）证明题

1.证明：若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上可积并为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0$.

证明：因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx$$

令 $x=-t$ 则 $dx=-dt$

x	-a	0
t	a	0

于是：$\int_{-a}^{0} f(x)dx=-\int_{a}^{0} f(-t)dt=\int_{0}^{a} f(-t)dx=-\int_{0}^{a} f(x)dx$

故：$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=-\int_{0}^{a} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=0$

2.证明：若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上可积并为偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

证明：因为 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上是偶函数

所以 $f(-x)=f(x)$

令 $x=-t$ 则 $dx=-dt$

x	-a	0
t	a	0

于是：$\int_{-a}^{0} f(x)dx=-\int_{a}^{0} f(-t)dt=\int_{0}^{a} f(t)dt=\int_{0}^{a} f(x)dx$

故：$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=\int_{0}^{a} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$