高等数学基础形考作业 1：

第 1 章　函数

第 2 章　极限与连续

（一）　单项选择题

1.下列各函数对中，（**C**）中的两个函数相等.

A. $f(x)=(\sqrt{x})^2$，$g(x)=x$　　B. $f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=x$

C. $f(x)=\ln x^3$，$g(x)=3\ln x$　　D. $f(x)=x+1$，$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

2.设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，则函数 $f(x)+f(-x)$ 的图形关于（**C**）对称.

A. 坐标原点　　B. x 轴

C. y 轴　　D. $y=x$

3.下列函数中为奇函数是（**B**）.

A. $y=\ln(1+x^2)$　　B. $y=x\cos x$

C. $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$　　D. $y=\ln(1+x)$

4.下列函数中为基本初等函数是（**C**）.

A. $y=x+1$　　B. $y=-x$

C. $y=x^{\sqrt{2}}$　　D. $y=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$

5.下列极限存计算不正确的是（**D**）.

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+2}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)=0$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

6.当 $x\to 0$ 时，变量（**C**）是无穷小量.

A. $\dfrac{\sin x}{x}$　　B. $\dfrac{1}{x}$

C. $x\sin\dfrac{1}{x}$　　D. $\ln(x+2)$

7.若函数 $f(x)$ 在点 x_0 满足（**A**），则 $f(x)$ 在点 x_0 连续。

A. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$　　B. $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义

C. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$　　　　D. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$

（二）填空题

1.函数 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3} + \ln(1+x)$ 的定义域是$\underline{(3,+\infty)}$.

2.已知函数 $f(x+1) = x^2 + x$，则 $f(x) = \underline{x^2-x}$.

3.$\lim\limits_{x \to \infty}(1+\dfrac{1}{2x})^x = \underline{e^{\frac{1}{2}}}$.

4.若函数 $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ x+k, & x \ge 0 \end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，则 $k = \underline{e}$.

5.函数 $y = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ \sin x, & x \le 0 \end{cases}$ 的间断点是$\underline{x=0}$.

6.若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则当 $x \to x_0$ 时，$f(x) - A$ 称为$\underline{x \to x_0\text{时的无穷小量}}$。

（三）计算题

1.设函数

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ x, & x \le 0 \end{cases}$$

求：$f(-2)$，$f(0)$，$f(1)$.

解：$f(-2) = -2$，$f(0) = 0$，$f(1) = e^1 = e$

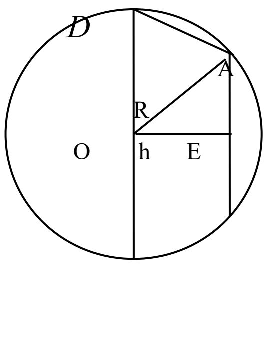
2.求函数 $y = \lg\dfrac{2x-1}{x}$ 的定义域.

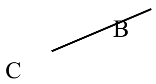
解：$y = \lg\dfrac{2x-1}{x}$ 有意义，要求 $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x} > 0 \\ x \ne 0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x > \dfrac{1}{2}\text{或}x < 0 \\ x \ne 0 \end{cases}$

则定义域为 $\left\{x \mid x < 0\text{或}x > \dfrac{1}{2}\right\}$

3.在半径为 R 的半圆内内接一梯形，梯形的一个底边与半圆的直径重合，另一底边的两个端点在半圆上，试将梯形的面积表示成其高的函数.

解：





设梯形 ABCD 即为题中要求的梯形，设高为 h，即 OE=h，下底 CD＝2R

直角三角形 AOE 中，利用勾股定理得

$$AE=\sqrt{OA^2-OE^2}=\sqrt{R^2-h^2}$$

则上底＝$2AE=2\sqrt{R^2-h^2}$

故$S=\frac{h}{2}\cdot\left(2R+2\sqrt{R^2-h^2}\right)=h\left(R+\sqrt{R^2-h^2}\right)$

4.求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\times 3x}{\frac{\sin 2x}{2x}\times 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin 2x}{2x}}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{1}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

5.求$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{\sin(x+1)}$.

解：$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{\sin(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{\sin(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x-1}{\frac{\sin(x+1)}{x+1}}=\frac{-1-1}{1}=-2$

6.求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}\cdot\frac{1}{\cos 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\times\frac{1}{\cos 3x}\times 3=1\times\frac{1}{1}\times 3=3$

7.求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sin x}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{(\sqrt{1+x^2}+1)\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{(\sqrt{1+x^2}+1)\sin x}$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{(\sqrt{1+x^2}+1)\frac{\sin x}{x}}=\frac{0}{(1+1)\times 1}=0$$

8.求$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-1}{x+3})^x$.

解：$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-1}{x+3})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}})^x=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-\frac{1}{x})^x}{(1+\frac{3}{x})^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{[(1+\frac{1}{-x})^{-x}]^{-1}}{[(1+\frac{1}{\frac{x}{3}})^{\frac{x}{3}}]^3}=\frac{e^{-1}}{e^3}=e^{-4}$

9.求 $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$.

解：$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x-2)}{(x-4)(x-1)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-2}{x-1}=\frac{4-2}{4-1}=\frac{2}{3}$

10.设函数

$$f(x)=\begin{cases}(x-2)^2\ , & x>1\\ x\ , & -1\le x\le 1\\ x+1\ , & x<-1\end{cases}$$

讨论 $f(x)$ 的连续性。

解：分别对分段点 $x=-1,x=1$ 处讨论连续性

（1）

$$\lim_{x\to -1+}f(x)=\lim_{x\to -1+}x=-1$$
$$\lim_{x\to -1-}f(x)=\lim_{x\to -1-}(x+1)=-1+1=0$$

所以 $\lim_{x\to -1+}f(x)\ne\lim_{x\to -1-}f(x)$，即 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处不连续

（2）

$$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}(x-2)^2=(1-2)^2=1$$
$$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}x=1$$
$$f(1)=1$$

所以 $\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)=f(1)$ 即 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续

由（1）（2）得 $f(x)$ 在除点 $x=-1$ 外均连续

高等数学基础作业 2 答案：

第 3 章　导数与微分

（一）单项选择题

1.设 $f(0)=0$ 且极限 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=$（**C**）.

A. $f(0)$　　B. $f'(0)$

C. $f'(x)$　　D. 0 cvx

2.设 $f(x)$ 在 x_0 可导，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{2h}=$（D）.

A. $-2f'(x_0)$　　B. $f'(x_0)$

C. $2f'(x_0)$　　D. $-f'(x_0)$

3.设 $f(x)=\mathrm{e}^x$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$（A）.

A. e　B. $2\mathrm{e}$　C. $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}$　D. $\dfrac{1}{4}\mathrm{e}$

4.设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-99)$，则 $f'(0)=$（D）.

A. 99　B. -99　C. $99!$　D. $-99!$

5.下列结论中正确的是（C）.

A. 若 $f(x)$ 在点 x_0 有极限，则在点 x_0 可导.　B. 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续，则在点 x_0 可导.

C. 若 $f(x)$ 在点 x_0 可导，则在点 x_0 有极限.　D. 若 $f(x)$ 在点 x_0 有极限，则在点 x_0 连续.

（二）填空题

1.设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，则 $f'(0)=$__0__.

2.设 $f(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^{2x}+5\mathrm{e}^x$，则 $\dfrac{\mathrm{d}f(\ln x)}{\mathrm{d}x}=\underline{\dfrac{2\ln x}{x}+\dfrac{5}{x}}$。

3.曲线 $f(x)=\sqrt{x}+1$ 在 $(1,2)$ 处的切线斜率是 $\underline{k=\dfrac{1}{2}}$。

4.曲线 $f(x)=\sin x$ 在 $(\dfrac{\pi}{2},1)$ 处的切线方程是 $\underline{y=1}$。

5.设 $y=x^{2x}$，则 $\underline{y'=2x^{2x}(1+\ln x)}$

6.设 $y=x\ln x$，则 $\underline{y''=\dfrac{1}{x}}$。

（三）计算题

1.求下列函数的导数 y'：

(1) $y=(x\sqrt{x}+3)\mathrm{e}^{x}$

解: $y'=\left(x\sqrt{x+3}\right)'e^{x}+\left(x\sqrt{x+3}\right)\left(e^{x}\right)' =(x^{\frac{3}{2}}+3)e^{x}+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}e^{x}$

(2) $y=\cot x+x^{2}\ln x$

解：$y'=\left(\cot x\right)'+\left(x^{2}\right)'\ln x+x^{2}\left(\ln x\right)'=-\csc^{2}x+x+2x\ln x$

(3) $y=\frac{x^{2}}{\ln x}$

解：$y'=\frac{\left(x^{2}\right)'\ln x-x^{2}\left(\ln x\right)'}{\ln^{2}x}=\frac{2x\ln x-x}{\ln^{2}x}$

(4) $y=\frac{\cos x+2^{x}}{x^{3}}$

解：$y'=\frac{\left(\cos x+2^{x}\right)'x^{3}-\left(\cos x+2^{x}\right)\left(x^{3}\right)'}{\left(x^{3}\right)^{2}} =\frac{x(-\sin x+2^{x}\ln 2)-3(\cos x+2^{x})}{x^{4}}$

(5) $y=\frac{\ln x-x^{2}}{\sin x}$

解：$y'=\frac{\left(\ln x-x^{2}\right)'\sin x-\left(\ln x-x^{2}\right)\left(\sin x\right)'}{\sin^{2}x}=\frac{\sin x(\frac{1}{x}-2x)-(\ln x-x^{2})\cos x}{\sin^{2}x}$

(6) $y=x^{4}-\sin x\ln x$

解：$y'=\left(x^{4}\right)'-\left(\sin x\right)'\ln x-\sin x\left(\ln x\right)'=4x^{3}-\frac{\sin x}{x}-\cos x\ln x$

(7) $y=\frac{\sin x+x^{2}}{3^{x}}$

解：$y'=\frac{\left(\sin x+x^{2}\right)'3^{x}-\left(\sin x+x^{2}\right)\left(3^{x}\right)'}{\left(3^{x}\right)^{2}}=\frac{3^{x}(\cos x+2x)-(\sin x+x^{2})3^{x}\ln 3}{3^{2x}}$

(8) $y=\mathrm{e}^{x}\tan x+\ln x$

解：$y'=\left(e^{x}\right)'\tan x+e^{x}\left(\tan x\right)'+\left(\ln x\right)'=e^{x}\tan x+\frac{e^{x}}{\cos^{2}x}+\frac{1}{x}$

2.求下列函数的导数 y'：

(1) $y = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$

解：$y' = \left(e^{\sqrt{x}}\right)' = \left(e^{\sqrt{x}}\right) \times \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$

(2) $y = \ln \cos x$

解：$y' = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos} = -\tan x$

(3) $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

解：$y' = \left(x^{\frac{7}{8}}\right)' = \frac{7}{8} x^{\frac{-1}{8}}$

(4) $y = \sin^2 x$

解：$y' = 2\sin x(\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x = 2\sin 2x$

(5) $y = \sin x^2$

解：$y' = \cos x^2 \cdot 2x = 2x\cos x$

(6) $y = \cos \mathrm{e}^{x^2}$

解：$y' = -\sin e^{x^2}\left(e^{x^2}\right)' = -2xe^{x^2} \sin e^{x^2}$ ？

(7) $y = \sin^n x \cos nx$

解：$y' = \left(\sin^n x\right)' \cos nx + \sin^n x(\cos nx)' = n\sin^{n-1} x \cos x \cos nx - n\sin^n x \sin(nx)$

(8) $y = 5^{\sin x}$

解：$y' = 5^{\sin x} \ln 5 \times \cos x = \ln 5 \cos x 5^{\sin x}$

(9) $y = \mathrm{e}^{\cos x}$

解：$y' = e^{\cos x}(-\sin x) = -\sin x e^{\cos x}$

3.在下列方程中，$y = y(x)$ 是由方程确定的函数，求 y'：

(1) $y\cos x = \mathrm{e}^{2y}$

解：$y'\cos x-y\sin x=2e^{2y}y' \qquad y'=\dfrac{y\sin x}{\cos x-2e^{2y}}$

(2) $y=\cos y\ln x$

解：$y'=\sin y.y'\ln x+\cos y.\dfrac{1}{x} \qquad y'=\dfrac{\cos y}{x(1+\sin y\ln x)}$

(3) $2x\sin y=\dfrac{x^2}{y}$

解：$2x\cos y.y'+2\sin y=\dfrac{2yx-x^2y'}{y^2} \quad y'(2x\cos y+\dfrac{x^2}{y^2})=\dfrac{2yx}{y^2}-2\sin y \quad y'=\dfrac{2xy-2y\sin y}{2xy^2\cos y+x^2}$

(4) $y=x+\ln y$

解：$y'=\dfrac{y'}{y}+1 \qquad y'=\dfrac{y}{y-1}$

(5) $\ln x+\mathrm{e}^y=y^2$

解：$\dfrac{1}{x}+e^yy'=2yy' \qquad y'=\dfrac{1}{x(2y-e^y)}$

(6) $y^2+1=\mathrm{e}^x\sin y$

解：$2yy'=e^x\cos y.y'+\sin y.e^x \qquad y'=\dfrac{e^x\sin y}{2y-e^x\cos y}$

(7) $\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^x-y^3$

解：$e^yy'=e^x-3y^2y' \qquad y'=\dfrac{e^x}{e^y}+3y^2$

(8) $y=5^x+2^y$

解：$y'=5^x\ln 5+y'2^y\ln 2 \qquad y'=\dfrac{5^x\ln 5}{1-2^y\ln 2}$

4.求下列函数的微分$\mathrm{d}y$：（注：$dy=y'dx$）

(1) $y=\cot x+\csc x$

解：$y'=-\csc^2 x-\csc x\cot x \qquad dy=(\dfrac{-1}{\cos^2 x}-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x})dx$

(2) $y=\dfrac{\ln x}{\sin x}$

解：$y' = \dfrac{\frac{1}{x}\sin x - \ln x\cos x}{\sin^2 x}$　　$dy = \dfrac{\frac{1}{x}\sin x - \ln x\cos x}{\sin^2 x}dx$

⑶ $y = \sin^2 x$

解：$y' = 2\sin x\cos x$　　　$dy = 2\sin x\cos x dx$

⑹ $y = \tan \mathrm{e}^x$

解：$y' = \sec^2 e^x \cdot e^x$　　　$dy = \sec^2 e^{x^3} \cdot e^x dx = e^{x^3} \sec^2 e^x dx$

5.求下列函数的二阶导数：

⑴ $y = \sqrt{x}$　解：$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$　$y'' = \frac{1}{2} \bullet \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

⑵ $y = 3^x$

解：$y' = 3^x \ln 3$　$y'' = \ln 3 \cdot 3^x \cdot \ln 3 = \ln^2 3 \cdot 3^x$

⑶ $y = \ln x$

解：$y' = \dfrac{1}{x}$　　　$y'' = -\dfrac{1}{x^2}$

⑷ $y = x\sin x$

解：$y' = \sin x + x\cos x$　$y'' = \cos x + \cos x + x(-\sin x) = 2\cos x - x\sin x$

（四）证明题

设 $f(x)$ 是可导的奇函数，试证 $f'(x)$ 是偶函数.

证：因为 f(x)是奇函数 所以 $f(-x) = -f(x)$

两边导数得：$f'(-x)(-1) = -f'(x) \Rightarrow f'(-x) = f(x)$

所以 $f'(x)$ 是偶函数。

A. 在(a, b)内连续 B. 在(a, b)内可导

C. 在(a, b)内连续且可导 D. 在$[a, b]$内连续，在(a, b)内可导

高等数学基础形考作业 3 答案：

第 4 章 导数的应用

（一）单项选择题

1.若函数$f(x)$满足条件（D），则存在$\xi \in (a, b)$，使得$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

A. 在(a, b)内连续 B. 在(a, b)内可导

C. 在(a, b)内连续且可导 D. 在$[a, b]$内连续，在(a, b)内可导

2.函数$f(x)=x^2+4x-1$的单调增加区间是（D ）.

A. $(-\infty, 2)$　　B. $(-1, 1)$

C. $(2, +\infty)$　　D. $(-2, +\infty)$

3.函数 $y = x^2 + 4x - 5$ 在区间 $(-6, 6)$ 内满足（A　）.

A. 先单调下降再单调上升　　B. 单调下降

C. 先单调上升再单调下降　　D. 单调上升

4.函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) = 0$ 的点，一定是 $f(x)$ 的（C　）.

A. 间断点　　B. 极值点

C. 驻点　　D. 拐点

5.设 $f(x)$ 在 (a, b) 内有连续的二阶导数，$x_0 \in (a, b)$，若 $f(x)$ 满足（ C ），则 $f(x)$ 在 x_0 取到极小值.

A. $f'(x_0) > 0, f''(x_0) = 0$　　B. $f'(x_0) < 0, f''(x_0) = 0$

C. $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$　　D. $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$

6.设 $f(x)$ 在 (a, b) 内有连续的二阶导数，且 $f'(x) < 0, f''(x) < 0$，则 $f(x)$ 在此区间内是（ A ）.

A. 单调减少且是凸的　　B. 单调减少且是凹的

C. 单调增加且是凸的　　D. 单调增加且是凹的

（二）填空题

1.设 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导，$x_0 \in (a, b)$，且当 $x < x_0$ 时 $f'(x) < 0$，当 $x > x_0$ 时 $f'(x) > 0$，则 x_0 是 $f(x)$ 的 极小值 点.

2.若函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，且 x_0 是 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(x_0) =$ 0 .

3.函数 $y = \ln(1 + x^2)$ 的单调减少区间是 $(-\infty, 0)$.

4.函数 $f(x) = e^{x^2}$ 的单调增加区间是 $(0, +\infty)$

5.若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内恒有 $f'(x) < 0$，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值是 $f(a)$.

6.函数 $f(x) = 2 + 5x - 3x^3$ 的拐点是 $(0,2)$

（三）计算题

1.求函数 $y = (x+1)\ (x-5)^2$ 的单调区间和极值.

解：令 $y' = (x-5)^2 + (x+1) \cdot 2 \cdot (x-5) \ = 3(x-5)(x-1)$

$\Rightarrow$ 驻点 $x = 1, x = 5$

X	$(-\infty,1)$	1	(1,5)	5	$(5,+\infty)$

列表：

y'	+	0	—	0	+
y	上升	极大值 32	下降	极小值 0	上升

极大值：$f(1)=32$

极小值：$f(5)=0$

2.求函数 $y=x^2-2x+3$ 在区间 $[0,3]$ 内的极值点，并求最大值和最小值．

解：令：$y'=2x-2=0$ $\Rightarrow x=1$(驻点)，列表：

x	（0,1）	1	（1,3）
y'	+	0	—
y	上升	极大值 2	下降

$$y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$$

$f(0)=3$ $f(3)=6$ $f(1)=2$

$\Rightarrow$ 极值点：$f(1)=2$

$\Rightarrow$ 最大值 $f(3)=6$

$\Rightarrow$ 最小值 $f(1)=2$

3. 求曲线 $y^2=2x$ 上的点，使其到点 $A(2,0)$ 的距离最短．

解：设 $p(x,y)$ 是 $y^2=2x$ 上的点，d 为 p 到 A 点的距离，则：

$$d=\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{(x-2)^2+2x}$$

$$令d'=\frac{2(x-2)+2}{2\sqrt{(x-2)^2+2x}}=\frac{x-1}{\sqrt{(x-2)^2+2x}}=0 \qquad \Rightarrow x=1\Rightarrow y=\pm\sqrt{2}$$

$\therefore y^2=2x$ 上点 $(1,\sqrt{2})$ 或 $(1,-\sqrt{2})$ 到点 $A(2,0)$ 的距离最短。。

4. 圆柱体上底的中心到下底的边沿的距离为 L，问当底半径与高分别为多少时，圆柱体的体积最大？

解：设园柱体半径为 R，高为 h，则体积 $V=\pi R^2h=\pi(L^2-h^2)h$

$$令：V'=\pi[h(-2h)+L^2-h^2]=\pi[L^2-3h^2]=0 \qquad \Rightarrow L=\sqrt{3}h \qquad h=\frac{\sqrt{3}}{3}L$$

$$R=\sqrt{\frac{2}{3}}L \qquad \therefore 当h=\frac{\sqrt{3}}{3},R=\sqrt{\frac{2}{3}}L时其体积最大。$$

5.一体积为 V 的圆柱体，问底半径与高各为多少时表面积最小？

解：设园柱体半径为 R，高为 h，则体积 $V = \pi R^2 h$

$$S_{表面积} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\frac{V}{R} + 2\pi R^2$$

令：$S' = -2VR^{-2} + 4\pi R = 0 \qquad \Rightarrow \frac{V}{2\pi} = R^3 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \qquad h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$

答：当 $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \qquad h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$ 时表面积最大。

6. 欲做一个底为正方形，容积为 62.5 立方米的长方体开口容器，怎样做法用料最省？

解：设底长为 x，高为 h。则：

$62.5 = x^2 h \qquad \Rightarrow h = \frac{62.5}{x^2}$

侧面积为：$S = x^2 + 4xh = x^2 + \frac{250}{x}$

令 $S' = 2x - \frac{250}{x^2} = 0 \qquad \Rightarrow x^3 = 125 \Rightarrow x = 5$

答：当底连长为 5 米，高为 2.5 米时用料最省。

（四）证明题

1.当 $x > 0$ 时，证明不等式 $x > \ln(1+x)$.

证：在区间 $[1, 1+x]$ 上对函数 $f(x) = \ln x$ 应用拉格朗日定理，有

$\ln(1+x) - \ln 1 = \frac{1}{\xi}x$ 　其中 $1 < \xi < 1+x$, 故 $\frac{1}{\xi} < 1$，于是由上式可得 $x > \ln(1+x)$

2.当 $x > 0$ 时，证明不等式 $e^x > x+1$.

证：设 $f(x) = e^x - (x+1)$

$f'(x) = e^x - 1 > 0 \qquad$ (当 $x > 0$ 时) $\qquad \Rightarrow$ 当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 单调上升且 $f(0) = 0$

$\therefore f(x) > 0$, 即 $e^x > (x+1)$

高等数学基础形考作业 4 答案：

第 5 章　不定积分

第 6 章　定积分及其应用

（一）单项选择题

1.若 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{1}{x}$，则 $f'(x) =$（D）.

A. $\ln|x|$ 　　　B. $-\frac{1}{x^2}$

C. $\frac{1}{x}$　　　　D. $\frac{2}{x^3}$

2.下列等式成立的是（D）.

A $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)$　　　　B. $\int \mathrm{d}f(x) = f(x)$ C. $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)$　　　　D. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)$

3.若 $f(x)=\cos x$，则 $\int f'(x)\mathrm{d}x =$（B）.

A. $\sin x + c$　　　　B. $\cos x + c$

C. $-\sin x + c$　　　　D. $-\cos x + c$

4.$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int x^2 f(x^3)\mathrm{d}x =$（B）.

A. $f(x^3)$　　　　B. $x^2 f(x^3)$

C. $\frac{1}{3}f(x)$　　　　D. $\frac{1}{3}f(x^3)$

5.若 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+c$，则 $\int \frac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x})\mathrm{d}x =$（B）.

A. $F(\sqrt{x})+c$　　　　B. $2F(\sqrt{x})+c$

C. $F(2\sqrt{x})+c$　　　　D. $\frac{1}{\sqrt{x}}F(\sqrt{x})+c$

6.下列无穷限积分收敛的是（D）.

A. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$　　　　B. $\int_0^{+\infty} e^x dx$

C. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$　　　　D. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$

（二）填空题

1.函数 $f(x)$ 的不定积分是 $\underline{\int f(x)dx}$。

2.若函数 $F(x)$ 与 $G(x)$ 是同一函数的原函数，则 $F(x)$ 与 $G(x)$ 之间有关系式 $\underline{F(x)-G(x)=c(\text{常数})}$。

3. $\mathrm{d}\int \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \underline{e^{x^2}}$。

4. $\int (\tan x)'\mathrm{d}x = \underline{\tan x + c}$。

5.若 $\int f(x)\mathrm{d}x = \cos 3x + c$，则 $f'(x) = \underline{-9\cos(3x)}$。

6. $\int_{-3}^{3}(\sin^5 x+\frac{1}{2})\mathrm{d}x=\underline{3}$

7.若无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\underline{p>0}$。

（三）计算题

1. $\int\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}\mathrm{d}x=-\int\cos\frac{1}{x}d(\frac{1}{x})=-\sin\frac{1}{x}+c$

2. $\int\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int e^{\sqrt{x}}d\sqrt{x}=2e^{\sqrt{x}}+c$

3. $\int\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\ln x}d(\ln x)=\ln(\ln x)+c$

4. $\int x\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int xd\left(\cos 2x\right)=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{2}\int\cos 2xdx=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+c$

5. $\int_1^{\mathrm{e}}\frac{3+\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}(3+\ln x)\mathrm{d}(3+\ln x)=\frac{1}{2}(3+\ln x)\ \Big|_1^e=\frac{7}{2}$

6. $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}e^{-2x}x\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2}-\frac{1}{4}e^{-2x}\Big|_0^1=-\frac{3}{4}e^{-2}+\frac{1}{4}$

7. $\int_1^{\mathrm{e}}x\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^e\ln xdx^2=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e xdx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^2\Big|_1^e\right)=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$

8. $\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^e+\int_1^e\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{e}-\frac{1}{x}\Big|_1^e=\frac{-2}{e}+1$

（四）证明题

1.证明：若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上可积并为奇函数，则 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0$.

证: 令$x=-t$ $\quad\int_{-a}^{a}f(x)dx=-\int_{a}^{-a}f(-t)dt=\int_{-a}^{a}f(-t)dt=-\int_{-a}^{a}f(t)dt$

$\Rightarrow\int_{-a}^{a}f(x)dx=-\int_{-a}^{a}f(x)dx\quad\Rightarrow\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$ 证毕

2.证明：若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上可积并为偶函数，则 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

证：$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$

令$x=-t$,则$\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^0 f(-t)\mathrm{dt}=\int_0^a f(t)\mathrm{dt}\quad\because f(x)$是偶函数

$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ 证毕