

试卷代号:1080

座位号

--	--

国家开放大学(中央广播电视大学)2016年秋季学期“开放本科”期末考试

工程数学(本) 试题(半开卷)

2017年1月

题 号	一	二	三	四	总 分
分 数					

得 分	评卷人

一、单项选择题(每小题 3 分,共 15 分)

- 设 A, B 都是 n 阶方阵,则下列命题中正确的是().
 - $(A+I)(A-I)=A^2-I$
 - 若 $AB=O$,则 $A=O$ 或 $B=O$
 - 若 $AB=AC$,且 $A \neq O$,则 $B=C$
 - $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$
- 若齐次线性方程组 $AX=O$ 只有零解,则非齐次线性方程组 $AX=b$ 的解的情况是().
 - 有唯一解
 - 有无穷多解
 - 可能无解
 - 有非零解
- 设 A, B 是两个随机事件,则下列等式中不正确的是().
 - $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
 - $P(AB)=P(A)P(B)$
 - $P(A)=1-P(\bar{A})$
 - $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$

4. 袋中有 3 个红球, 2 个白球, 第一次取出一球后放回, 第二次再取一球, 则两次都取到红球的概率是().

A. $\frac{3}{10}$

B. $\frac{3}{20}$

C. $\frac{6}{25}$

D. $\frac{9}{25}$

5. 对于单个正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 未知时, 关于均值 μ 的假设检验应采用().

A. F 检验法

B. U 检验法

C. χ^2 检验法

D. t 检验法

得 分	评卷人

二、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

6. 设 A, B 是 3 阶方阵, 其中 $|A|=3, |B|=2$, 则 $|2A'B^{-1}| =$ _____.

7. 设 A 为 n 阶方阵, 若存在数 λ 和非零 n 维向量 X , 使得 $AX = \lambda X$, 则称 X 为 A 相应于特征值 λ 的 _____.

8. 若 $r(A)=1$, 则 3 元齐次线性方程组 $AX=O$ 的一个基础解系中含有 _____ 个解向量.

9. 若 $P(A+B)=0.9, P(\overline{AB})=0.3, P(\overline{AB})=0.5$, 则 $P(AB)=$ _____.

10. 设随机变量 X , 若 $E(X)=3$, 则 $E(2X+1)=$ _____.

得 分	评卷人

三、计算题(每小题 16 分,共 64 分)

11. 解矩阵方程 $AX=B$, 其中 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

12. λ 为何值时, 下列方程组有解? 有解时求出其全部解.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = \lambda \end{cases}$$

13. 设 $X \sim N(2, 25)$, 试求: (1) $P(12 < X < 17)$; (2) $P(X > -3)$. (已知 $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(2) = 0.9772$, $\Phi(3) = 0.9987$)

14. 据资料分析, 某厂生产的砖的抗断强度 X 服从正态分布 $N(32.5, 1.21)$. 今从该厂最近生产的一批砖中随机地抽取了 9 块, 测得抗断强度(单位: kg/cm^2)的平均值为 31.18. 假设标准差没有改变, 在 0.05 的显著性水平下, 问这批砖的抗断强度是否合格. ($u_{0.975} = 1.96$)

得 分	评卷人

四、证明题(本题 6 分)

15. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 + A - 3I = O$, 试证方阵 $A - I$ 可逆.

试卷代号:1080

国家开放大学(中央广播电视大学)2016年秋季学期“开放本科”期末考试

工程数学(本) 试题答案及评分标准(半开卷)

(供参考)

2017年1月

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. A 2. C 3. B 4. D 5. D

二、填空题(每小题3分,共15分)

6. 12
7. 特征向量
8. 2
9. 0.1
10. 7

三、计算题(每小题16分,共64分)

11. 解:利用初等行变换可得

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{因此, } A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad \dots\dots(10 \text{ 分})$$

于是,由矩阵乘法可得

$$X=A^{-1}B=\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -9 & 2 \\ 2 & 0 \\ -15 & 3 \end{bmatrix}. \quad \cdots(16 \text{ 分})$$

12. 解:将方程组的增广矩阵化为阶梯形

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & \lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & \lambda-2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

由阶梯阵可知:当 $\lambda+1=0$,即 $\lambda=-1$ 时,方程组有解. $\cdots(7 \text{ 分})$

此时,由最后一个行简化阶梯阵得方程组的一般解为:

$$\begin{cases} x_1=5x_3+4 \\ x_2=-2x_3-3 \end{cases} \quad (\text{其中 } x_3 \text{ 为自由元}) \quad \cdots(10 \text{ 分})$$

令 $x_3=0$,得方程组的一个特解 $X_0=(4 \quad -3 \quad 0)'$. $\cdots(12 \text{ 分})$

不计最后一列,令 $x_3=1$,得到相应的齐次线性方程组的一个基础解系

$$X_1=(5 \quad -2 \quad 1)' \quad \cdots(14 \text{ 分})$$

于是,方程组的全部解为 $X=X_0+kX_1$ (其中 k 为任意常数). $\cdots(16 \text{ 分})$

$$\begin{aligned} 13. \text{ 解: } (1) P(12 < X < 17) &= P\left(\frac{12-2}{5} < \frac{X-2}{5} < \frac{17-2}{5}\right) = P\left(2 < \frac{X-2}{5} < 3\right) \\ &= \Phi(3) - \Phi(2) = 0.9987 - 0.9772 = 0.0215 \quad \cdots(8 \text{ 分}) \end{aligned}$$

$$(2) P(X > -3) = P\left(\frac{X-2}{5} > \frac{-3-2}{5}\right) = P\left(\frac{X-2}{5} > -1\right) = \Phi(1) = 0.8413 \quad \cdots(16 \text{ 分})$$

14. 解:零假设 $H_0: \mu=32.5$; $H_1: \mu \neq 32.5$.

由于标准差没有改变,故已知 $\sigma_0^2=1.21$,选取样本函数

$$U = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \sim N(0, 1) \quad \cdots(5 \text{ 分})$$

由已知, $\bar{x}=31.18, \mu_0=32.5, \sigma_0=1.1, n=9$,于是得

$$U = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} = \frac{31.18 - 32.5}{1.1 / \sqrt{9}} = -3.6 \quad \cdots(10 \text{ 分})$$

在 0.05 的显著性水平下, $\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \right| = 3.6 > 1.96$, 因此拒绝零假设 H_0 , 即这批砖的抗断

强度不合格.

.....(16 分)

四、证明题(本题 6 分)

15. 证明: 由 $A^2 + A - 3I = O$ 可得 $(A - I)(A + 2I) = I$

因此, 方阵 $A - I$ 可逆, 其逆为 $A + 2I$.

.....(6 分)

试卷代号:1080

座位号

国家开放大学(中央广播电视大学)2017 年春季学期“开放本科”期末考试

工程数学(本) 试题(半开卷)

2017 年 6 月

题 号	一	二	三	四	总 分
分 数					

得 分	评卷人

一、单项选择题(每小题 3 分,共 15 分)

- 下列命题中不正确的是().
 - A 与 A' 有相同的特征多项式
 - 若 λ 是 A 的特征值,则 $(\lambda I - A)X = O$ 的非零解向量必是 A 相应于 λ 的特征向量
 - 若 $\lambda = 0$ 是 A 的一个特征值,则 $AX = O$ 必有非零解
 - A 的特征向量的线性组合仍为 A 的特征向量
- 若 A 是对称矩阵,则等式()成立.
 - $AA' = I$
 - $A' = A$
 - $A' = A^{-1}$
 - $A^{-1} = A$
- n 元非齐次线性方程组 $AX = b$ 有解的充分必要条件是().
 - $r(A) < n$
 - $r(A) = n$
 - $r(A) = r([A : b])$
 - 相应的齐次线性方程组 $AX = O$ 有解

4. 设袋中有 6 只红球, 4 只白球, 从其中不放回地任取两次, 每次取 1 只, 则两次都取到红球的概率是().

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{9}{25}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{3}{10}$

5. 设 A, B 是两个随机事件, 则下列等式中正确的是().

A. $P(AB) = P(A)P(B)$

B. $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

C. $P(A+B) = P(A) + P(B)$

D. $P(AB) = P(B)P(B|A)$

得 分	评卷人

二、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

6. 当 $\lambda =$ _____ 时, 方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ -2x_1 + \lambda x_2 = -2 \end{cases}$$
 有无穷多解.

7. 设 A 为 n 阶方阵, 若存在数 λ 和非零 n 维向量 X , 使得 $AX = \lambda X$, 则称数 λ 为 A 的 _____.

8. 若 $P(A+B) = 0.7$, $P(\bar{A}B) = 0.2$, $P(A\bar{B}) = 0.3$, 则 $P(AB) =$ _____.

9. 设随机变量 $X \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$, 则 $P(X < 3) =$ _____.

10. 设随机变量 X , 若 $D(X) = 2$, 则 $D(3X+2) =$ _____.

得 分	评卷人

三、计算题(每小题 16 分,共 64 分)

11. 解矩阵方程 $X=AX+B$, 其中 $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

12. 求线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 13 \\ 4x_1 - x_2 + 9x_3 = -6 \end{cases}$$

的通解.

13. 设 $X \sim N(2, 3^2)$, 试求: (1) $P(-4 < X < 5)$; (2) $P(X > -1)$. (已知 $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(2) = 0.9772$, $\Phi(3) = 0.9987$)

14. 设某种零件长度 X 服从正态分布 $N(\mu, 2.25)$, 今从中任取 100 个零件抽检, 测得平均长度为 84.5cm, 试求此零件长度总体均值的置信度为 0.95 的置信区间 ($u_{0.975} = 1.96$).

得 分	评卷人

四、证明题(本题 6 分)

15. 设 A 为 n 阶方阵, 且满足 $AA' = I$, $|A| = -1$, 证明 $|I + A| = 0$.

试卷代号:1080

国家开放大学(中央广播电视大学)2017年春季学期“开放本科”期末考试

工程数学(本) 试题答案及评分标准(半开卷)

(供参考)

2017年6月

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. D 2. B 3. C 4. A 5. B

二、填空题(每小题3分,共15分)

6. 2
7. 特征值
8. 0.2
9. 0.7
10. 18

三、计算题(每小题16分,共64分)

11. 解:由 $X=AX+B$ 可得 $(I-A)X=B$(3分)

由已知可得 $(I-A)=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$(5分)

利用初等行变换可得

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

因此, $(I-A)^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$. (也可由伴随矩阵法求得)(13分)

$$\text{于是, } X = (I - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}. \quad \cdots(16 \text{ 分})$$

12. 解: 将方程组的增广矩阵化为阶梯形

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \\ 0 & 14 & -14 & 28 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{方程组的一般解为 } \begin{cases} x_1 = -2x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 + 2 \end{cases} \quad (\text{其中 } x_3 \text{ 为自由元}). \quad \cdots(7 \text{ 分})$$

$$\text{令 } x_3 = 0, \text{ 得到方程组的一个特解为 } X_0 = (-1 \ 2 \ 0)'. \quad \cdots(10 \text{ 分})$$

不计最后一列, 令 $x_3 = 1$, 得到相应的齐次线性方程组的一个基础解系

$$X_1 = (-2 \ 1 \ 1)' \quad \cdots(13 \text{ 分})$$

$$\text{于是, 方程组的通解为 } X = X_0 + kX_1 \quad (\text{其中 } k \text{ 为任意常数}). \quad \cdots(16 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} 13. \text{ 解: } (1) P(-4 < X < 5) &= P\left(\frac{-4-2}{3} < \frac{X-2}{3} < \frac{5-2}{3}\right) = P\left(-2 < \frac{X-2}{3} < 1\right) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) - (1 - \Phi(2)) \\ &= 0.8413 - (1 - 0.9772) = 0.8185 \quad \cdots(8 \text{ 分}) \end{aligned}$$

$$(2) P(X > -1) = P\left(\frac{X-2}{3} > \frac{-1-2}{3}\right) = P\left(\frac{X-2}{3} > -1\right) = \Phi(1) = 0.8413$$

$\cdots(16 \text{ 分})$

14. 解: 由于已知 σ^2 , 故选取样本函数

$$U = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \quad \cdots(5 \text{ 分})$$

零件长度总体均值的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left[\bar{x} - u_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \quad \dots\dots(10 \text{ 分})$$

由已知, $\bar{x}=84.5, \sigma=1.5, n=100, u_{0.975}=1.96$, 于是可得

$$\bar{x} - u_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 84.5 - 1.96 \times \frac{1.5}{\sqrt{100}} = 84.206,$$

$$\bar{x} + u_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 84.5 + 1.96 \times \frac{1.5}{\sqrt{100}} = 84.794,$$

因此, 此零件长度总体均值的置信度为 0.95 的置信区间为 $[84.206, 84.794]$.

$\dots\dots(16 \text{ 分})$

四、证明题(本题 6 分)

15. 证明: 因为

$$|I+A| = |AA'+A| = |A(A'+I)| = |A||A'+I| = |A||I+A| = -|I+A|$$

所以 $|I+A|=0$.

$\dots\dots(6 \text{ 分})$

试卷代号:1080

座位号

--	--

国家开放大学(中央广播电视大学)2017年秋季学期“开放本科”期末考试

工程数学(本) 试题(半开卷)

2018年1月

题 号	一	二	三	四	总 分
分 数					

得 分	评卷人

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. 若 A, B 都是 n 阶矩阵, 则等式() 成立.
 - A. $|A+B| = |A| + |B|$
 - B. $|AB| = |BA|$
 - C. $AB=BA$
 - D. $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$
2. 设 A 是 n 阶方阵, 当条件() 成立时, n 元线性方程组 $AX=b$ 有唯一解.
 - A. $b=0$
 - B. $|A|=0$
 - C. $r(A) < n$
 - D. $r(A) = n$
3. 下列命题中不正确的是().
 - A. A 与 A' 有相同的特征多项式
 - B. A 的特征向量的线性组合仍为 A 的特征向量
 - C. 若 $\lambda=0$ 是 A 的一个特征值, 则 $AX=O$ 必有非零解
 - D. 若 λ 是 A 的特征值, 则 $(\lambda I - A)X=O$ 的非零解向量必是 A 对应于 λ 的特征向量

4. 若事件 A, B 满足(), 则 A 与 B 是相互独立的.

A. $P(B) = P(A)P(B|A)$

B. $P(A-B) = P(A) - P(B)$

C. $P(AB) = P(A)P(B)$

D. $P(A) = P(B)P(A|B)$

5. 对正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的假设检验问题中, U 检验解决的问题是().

A. 已知方差, 检验均值

B. 未知方差, 检验均值

C. 已知均值, 检验方差

D. 未知均值, 检验方差

得 分	评卷人

二、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

6. 设 A, B 均为 2 阶矩阵, 且 $|A| = 3, |B| = 2, |3AB| =$ _____.

7. 当 $\lambda =$ _____时, 矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -5 & -4 \\ 0 & 2 & -4 & \lambda \end{bmatrix}$ 的秩最小.

8. 若 $P(A) = 0.7, P(B) = 0.8$, 且 A, B 相互独立, 则 $P(AB) =$ _____.

9. 设随机变量 X , 且 $E(X) = 2, E(X^2) = 9$, 那么 $D(X) =$ _____.

10. 设 x_1, x_2, \dots, x_n 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, 则 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sim$ _____.

得 分	评卷人

三、计算题(每小题 16 分,共 64 分)

11. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, 求 (1) $|A|$, (2) A^{-1} .

12. 求线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -2x_1 + 7x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

的全部解。

13. 设 $X \sim N(3, 4)$, 试求 (1) $P(5 < X < 9)$; (2) $P(X > 7)$. (已知 $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(2) = 0.9772$, $\Phi(3) = 0.9987$)

14. 已知某种零件重量 $X \sim N(15, 0.09)$, 采用新技术后, 取了 9 个样品, 测得重量(单位: kg)的平均值为 14.9, 已知方差不变, 问平均重量是否仍为 15 ($\alpha = 0.05$, $u_{0.975} = 1.96$)?

得 分	评卷人

四、证明题(本题 6 分)

15. 设 A, B 为随机事件, 试证: $P(A - B) = P(A) - P(AB)$.

试卷代号:1080

国家开放大学(中央广播电视大学)2017年秋季学期“开放本科”期末考试

工程数学(本) 试题答案及评分标准(半开卷)

(供参考)

2018年1月

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. B 2. D 3. B 4. C 5. A

二、填空题(每小题3分,共15分)

6. 54 7. 0 8. 0.56 9. 5 10. $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

三、计算题(每小题16分,共64分)

11. 解: (1) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$ 6分

(2) 利用初等行变换得

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -9 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

即 $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ 16分

12. 解: 将方程组的增广矩阵化为阶梯形

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 7 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 5x_4 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = -x_4 \end{cases} \quad (\text{其中 } x_4 \text{ 为自由未知量})$$

令 $x_4=0$, 得到方程的一个特解 $X_0=(1 \ 0 \ 0 \ 0)'$.

方程组相应的齐次方程的一般解为

$$\begin{cases} x_1=5x_4 \\ x_2=x_4 \\ x_3=-x_4 \end{cases} \quad (\text{其中 } x_4 \text{ 为自由未知量})$$

令 $x_4=1$, 得到方程的一个基础解系 $X_1=(5 \ 1 \ -1 \ 1)'$.

.....13 分

于是, 方程组的全部解为

$X=X_0+kX_1$ (其中 k 为任意常数)

.....16 分

13. 解: (1) $P(5 < X < 9) = P\left(\frac{5-3}{2} < \frac{X-3}{2} < \frac{9-3}{2}\right) = P\left(1 < \frac{X-3}{2} < 3\right)$
 $= \Phi(3) - \Phi(1) = 0.9987 - 0.8413 = 0.1574$

.....8 分

(2) $P(X > 7) = P\left(\frac{X-3}{2} > \frac{7-3}{2}\right)$
 $= P\left(\frac{X-3}{2} > 2\right) = 1 - P\left(\frac{X-3}{2} \leq 2\right)$
 $= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$

.....16 分

14. 解: 零假设 $H_0: \mu=15$. 由于已知 $\sigma^2=0.09$, 故选取样本函数

$$U = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

.....5 分

已知 $\bar{x}=14.9$, 经计算得

$$\frac{\sigma}{\sqrt{9}} = \frac{0.3}{3} = 0.1, \quad \left| \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right| = \left| \frac{14.9 - 15}{0.1} \right| = 1$$

.....10 分

由已知条件 $u_{0.975}=1.96$,

$$\left| \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right| = 1 < 1.96 = u_{0.975}$$

故接受零假设, 即零件平均重量仍为 15.

.....16 分

四、证明题(本题 6 分)

15. 证明: 由事件的关系可知

$$A = AU = A(B + \bar{B}) = AB + A\bar{B} = AB + (A - B)$$

而 $(A - B)(AB) = \emptyset$, 故由概率的性质可知

$$P(A) = P(A - B) + P(AB)$$

即

$$P(A - B) = P(A) - P(AB) \quad \text{证毕}$$

.....6 分

试卷代号:1080

座位号

--	--

国家开放大学(中央广播电视大学)2018年春季学期“开放本科”期末考试

工程数学(本) 试题(半开卷)

2018年7月

题 号	一	二	三	四	总 分
分 数					

得 分	评卷人

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. 若
$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & x+2 \end{vmatrix} = 0,$$
 则 $x = (\quad)$.

- A. 3
- B. 2
- C. -3
- D. -2

2. 设 A 是 n 阶方阵,当条件()成立时, n 元线性方程组 $AX=b$ 有唯一解.

- A. $b=0$
- B. $|A|=0$
- C. $r(A)=n$
- D. $r(A)<n$

3. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$,那么 A 的特征值是().

- A. -4,6
- B. 1,1
- C. 1,5
- D. 5,5

4. 设 A, B 是两事件, 则下列等式中()是不正确的.

A. $P(AB) = P(A)P(B|A)$, 其中 $P(A) \neq 0$

B. $P(AB) = P(B)P(A|B)$, 其中 $P(B) \neq 0$

C. $P(AB) = P(A)P(B)$, 其中 A, B 相互独立

D. $P(AB) = P(A)P(B)$, 其中 A, B 互不相容

5. 在对单正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的假设检验问题中, T 检验法解决的问题是().

A. 已知方差, 检验均值

B. 未知方差, 检验均值

C. 已知均值, 检验方差

D. 未知均值, 检验方差

得 分	评卷人

二、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

6. 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 则 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ 成立的充分必要条件是_____.

7. 当 $\lambda =$ _____ 时, 齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 = 0 \end{cases}$$
 有非零解.

8. 若 $P(A) = 0.7, P(B) = 0.8$, 且 A, B 相互独立, 则 $P(AB) =$ _____.

9. 设随机变量 $X \sim B(100, 0.15)$, 则 $E(X) =$ _____.

10. 设 x_1, x_2, \dots, x_{10} 是来自正态总体 $N(\mu, 4)$ 的一个样本, 则 $\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i \sim$ _____.

得 分	评卷人

三、计算题(每小题 16 分,共 64 分)

11. 已知 $AX=B$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 8 & 10 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求 X .

12. 当 λ 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = \lambda + 2 \end{cases}$$

有解, 在有解的情况下求方程组的全部解.

13. 设 $X \sim N(3, 4)$, 试求: (1) $P(X < -1)$; (2) $P(5 < X < 9)$.

(已知 $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(2) = 0.9772$, $\Phi(3) = 0.9987$)

14. 据资料分析, 某厂生产的一批砖, 其抗断强度 $X \sim N(32.5, 1.21)$, 今从这批砖中随机地抽取了 9 块, 测得抗断强度(单位: kg/cm^2)的平均值为 31.12, 问这批砖的抗断强度是否合格($\alpha = 0.05$, $u_{0.975} = 1.96$)?

得 分	评卷人

四、证明题(本题 6 分)

15. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的, 证明, $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$ 也线性无关.

试卷代号:1080

国家开放大学(中央广播电视大学)2018年春季学期“开放本科”期末考试

工程数学(本) 试题答案及评分标准(半开卷)

(供参考)

2018年7月

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. D 2. C 3. A 4. D 5. B

二、填空题(每小题3分,共15分)

6. $AB=BA$ 7. -1 8. 0.56 9. 15 10. $N(\mu, \frac{4}{10})$

三、计算题(每小题16分,共64分)

11. 解:利用初等行变换得

$$(A|I) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{即 } A^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & 4 & -1 \\ 5 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -6 & 4 & -1 \\ 5 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -15 & 7 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} \quad \dots\dots 16 \text{ 分}$$

12. 解:将方程组的增广矩阵化为阶梯形

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & \lambda+2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & \lambda-2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-3 \end{bmatrix}$$

由此可知当 $\lambda \neq 3$ 时, 方程组无解, 当 $\lambda = 3$ 时, 方程组有解.

.....8 分

此时相应的齐次方程组化为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 \\ x_2 = x_3 + 3x_4 \end{cases}$$

分别令 $x_3 = 1, x_4 = 0$ 及 $x_3 = 0, x_4 = 1$, 得齐次方程组的一个基础解系

$$X_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 0]', X_2 = [2 \ 3 \ 0 \ 1]'$$

令 $x_3 = 0, x_4 = 0$, 得非齐次方程组的一个特解

$$X_0 = [1 \ -1 \ 0 \ 0]'$$

由此得原方程组的全部解为

$$X = X_0 + k_1 X_1 + k_2 X_2 \quad (\text{其中 } k_1, k_2 \text{ 为任意常数})$$

.....16 分

$$13. \text{ 解: } (1) P(X < -1) = P\left(\frac{X-3}{2} < \frac{-1-3}{2}\right) = P\left(\frac{X-3}{2} < -2\right) = \Phi(-2)$$

$$= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

.....8 分

$$(2) P(5 < X < 9) = P\left(\frac{5-3}{2} < \frac{X-3}{2} < \frac{9-3}{2}\right) = P\left(1 < \frac{X-3}{2} < 3\right)$$

$$= \Phi(3) - \Phi(1) = 0.9987 - 0.8413 = 0.1574$$

.....16 分

14. 解: 零假设 $H_0: \mu = 32.5$. 由于已知 $\sigma^2 = 1.21$, 故选取样本函数

$$U = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

.....5 分

已知 $\bar{x} = 31.12$, 经计算得

$$\frac{\sigma}{\sqrt{9}} = \frac{1.1}{3} = 0.37, \left| \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right| = \left| \frac{31.12 - 32.5}{0.37} \right| = 3.73$$

.....10 分

由已知条件 $u_{0.975} = 1.96$,

$$\left| \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right| = 3.73 > 1.96 = u_{0.975}$$

故拒绝零假设, 即这批砖的抗断强度不合格.

.....16 分

四、证明题(本题 6 分)

15. 证明: 没有一组数 k_1, k_2, k_3 , 使得 $k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_1 + \alpha_3) = 0$ 成立, 即

$(k_1 + k_3)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 = 0$, 由已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 故有

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

该方程组只有零解, 得 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 故 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$ 是线性无关的, 证毕.

……6 分

试卷代号:1080

座位号

--	--

国家开放大学(中央广播电视大学)2018年秋季学期“开放本科”期末考试

工程数学(本) 试题(半开卷)

2019年1月

题 号	一	二	三	四	总 分
分 数					

得 分	评卷人

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. 设 A, B 均为 n 阶可逆矩阵,则下列等式成立的是().
 A. $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$
 B. $|A+B| = |A| + |B|$
 C. $|-2AB| = 2^n |A| |B|$
 D. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2. 向量组 $\alpha_1 = [1, 0, 0], \alpha_2 = [1, 2, 0], \alpha_3 = [0, 0, 3], \alpha_4 = [1, 2, 3]$ 的秩是().
 A. 1
 B. 2
 C. 3
 D. 4
3. 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ 的特征值为 0, 2, 则 $3A$ 的特征值为().
 A. 0, 2
 B. 0, 6
 C. 0, 0
 D. 2, 6

4. 设 A, B 是两事件, 则下列等式中()是不正确的.

A. $P(AB) = P(A)P(B|A)$, 其中 $P(A) \neq 0$

B. $P(AB) = P(B)P(A|B)$, 其中 $P(B) \neq 0$

C. $P(AB) = P(A)P(B)$, 其中 A, B 相互独立

D. $P(AB) = P(A)P(B)$, 其中 A, B 互不相容

5. 设 x_1, x_2, \dots, x_n 是来自正态总体 $N(5, 1)$ 的样本, 则检验假设 $H_0: \mu = 5$ 采用统计量 $U = (\quad)$.

A. $\frac{\bar{x} - 5}{\sqrt{5}}$

B. $\frac{\bar{x} - 5}{1/\sqrt{5}}$

C. $\frac{\bar{x} - 5}{1/\sqrt{n}}$

D. $\frac{\bar{x} - 5}{1}$

得 分	评卷人

二、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

6. 设行列式 $\begin{vmatrix} 6 & 7 & 9 \\ k & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 当 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 - \lambda x_2 = -1 \end{cases}$ 有无穷多解.

8. 若 $P(A) = 0.2, P(B) = 0.3$, 且 A 与 B 互不相容, 则 $P(A+B) = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 设随机变量 X 服从二项分布 $B(n, p)$, 则 $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且 σ^2 未知, 用样本假设检验 $H_0: \mu = \mu_0$ 时可采用统计量 $\underline{\hspace{2cm}}$.

得 分	评卷人

三、计算题(每小题 16 分,共 64 分)

11. 已知 $X = AX + B$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, 求 X .

12. 求线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - 8x_2 - 4x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 - 6x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

的全部解.

13. 设 $X \sim N(1, 0.04)$, 试求: (1) $P(X < 1.2)$; (2) $P(0.7 < X < 1.1)$.

(已知 $\Phi(0.5) = 0.6915$, $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(1.5) = 0.9332$, $\Phi(3) = 0.9987$)

14. 某一批零件重量 $X \sim N(\mu, 0.04)$, 随机抽取 4 个测得重量(单位: 千克)为

14.7, 15.1, 14.8, 15.2

可否认为这批零件的平均重量为 15 千克($\alpha = 0.05$) (已知 $u_{0.975} = 1.96$)?

得 分	评卷人

四、证明题(本题 6 分)

15. 设随机事件 A, B 相互独立, 试证 \bar{A}, B 也相互独立.

试卷代号:1080

国家开放大学(中央广播电视大学)2018年秋季学期“开放本科”期末考试

工程数学(本) 试题答案及评分标准(半开卷)

(供参考)

2019年1月

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. D 2. C 3. B 4. D 5. C

二、填空题(每小题3分,共15分)

6. 4 7. 1 8. 0.5 9. np 10. $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$

三、计算题(每小题16分,共64分)

11. 解: $X = (I - A)^{-1}B$ 5分

$$\text{且 } (I - A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{.....12分}$$

由矩阵乘法得

$$X = (I - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{.....16分}$$

12. 解:将方程组的增广矩阵化为阶梯形

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & -8 & -4 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & -8 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & -8 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -15 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此时齐次方程组化为

$$\begin{cases} x_1 = 15x_4 \\ x_2 = 8x_4 \\ x_3 = -5x_4 \end{cases}$$

令 $x_4 = 1$, 得齐次方程组的一个基础解系

$$X_1 = [15 \ 8 \ -5 \ 1]'$$

.....12 分

令 $x_4 = 0$, 得非齐次方程组的一个特解

$$X_0 = [16 \ 9 \ -6 \ 0]'$$

由此得原方程组的全部解为

$$X = X_0 + kX_1 \quad (\text{其中 } k \text{ 为任意常数})$$

.....16 分

13. 解: (1) $P(X < 1.2) = P\left(\frac{X-1}{0.2} < \frac{1.2-1}{0.2}\right) = P\left(\frac{X-1}{0.2} < 1\right) = \Phi(1) = 0.8413$ 8 分

(2) $P(0.7 < X < 1.1) = P\left(\frac{0.7-1}{0.2} < \frac{X-1}{0.2} < \frac{1.1-1}{0.2}\right) = P(-1.5 < \frac{X-1}{0.2} < 0.5)$
 $= \Phi(0.5) + \Phi(1.5) - 1 = 0.6915 + 0.9332 - 1 = 0.6247$ 16 分

14. 解: 零假设 $H_0: \mu = 15$. 由于已知 σ^2 , 故选取样本函数

$$U = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

.....5 分

经计算得

$$\bar{x} = 14.95, \left| \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right| = \left| \frac{14.95 - 15}{0.2/\sqrt{4}} \right| = 0.5$$

.....10 分

已知 $u_{0.975} = 1.96$,

$$\left| \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right| = 0.5 \leq 1.96 = u_{0.975}$$

故接受零假设, 即可以认为这批零件的平均重量为 15 千克.16 分

四、证明题(本题 6 分)

15. 证明: 因为 $P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A))$
 $= P(\bar{A})P(B)$

所以 \bar{A}, B 也相互独立. 证毕.6 分

试卷代号:1080

座位号

--	--

国家开放大学2019年春季学期期末统一考试

工程数学(本) 试题(半开卷)

2019年7月

题号	一	二	三	四	总分
分数					

得分	评卷人

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. 若 A, B 都是 n 阶矩阵,则下列运算关系正确的是().

- A. $|A+B| = |A| + |B|$ B. $|AB| = |BA|$
 C. $AB = BA$ D. $|2A| = 2|A|$

2. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关,则向量组内()可被该向量组内其余向量线性表出.

- A. 任何一个向量 B. 没有一个向量
 C. 至少有一个向量 D. 至多有一个向量

3. 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ 的特征值为().

- A. 0, 0 B. 0, 2
 C. 2, 6 D. 0, 6

4. 掷两颗均匀的骰子,事件“点数之和为4”的概率是().

- A. $\frac{1}{36}$ B. $\frac{1}{18}$
 C. $\frac{1}{12}$ D. $\frac{1}{11}$

5. 对正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的假设检验问题中, U 检验解决的问题是().

- A. 已知方差, 检验均值 B. 未知方差, 检验均值
C. 已知均值, 检验方差 D. 未知均值, 检验方差

得 分	评卷人

二、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

6.
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

7. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}$, 则 $A'B - I = \underline{\hspace{2cm}}.$

8. 若 $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.8$, 且事件 A, B 相互独立, 则 $P(\bar{A}B) = \underline{\hspace{2cm}}.$

9. 如果随机变量 $X \sim B(20, 0.3)$, 则 $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}.$

10. 设 x_1, x_2, \dots, x_n 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, 则 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sim \underline{\hspace{2cm}}.$

得 分	评卷人

三、计算题(每小题 16 分, 共 64 分)

11. 已知 $AX = B$, 且 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 8 & 10 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求 X .

12. 求 k 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = k \end{cases}$$

有解, 并求出全部解.

13. 设 $X \sim N(3, 4)$, 试求 (1) $P(5 < X < 9)$; (2) $P(X > 7)$. (已知 $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(2) = 0.9772$, $\Phi(3) = 0.9987$)

14. 某一批零件重量 $X \sim N(\mu, 0.04)$, 随机抽取 4 个测得重量(单位: 千克)分别为

14.7, 15.1, 14.8, 15.2

可否认为这批零件的平均重量为 15 千克 ($\alpha = 0.05$) (已知 $u_{0.975} = 1.96$)?

得 分	评卷人

四、证明题(本题 6 分)

15. 设 A, B 为同阶对称矩阵, 试证: $AB + BA$ 也是对称矩阵.

试卷代号:1080

国家开放大学2019年春季学期期末统一考试

工程数学(本) 试题答案及评分标准(半开卷)

(供参考)

2019年7月

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. B 2. C 3. D 4. C 5. A

二、填空题(每小题3分,共15分)

6. -7

7. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$

8. 0.24

9. 6

10. $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

三、计算题(每小题16分,共64分)

11. 解:利用初等行变换得

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & -6 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{即 } A^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & 4 & -1 \\ 5 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{于是 } X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -6 & 4 & -1 \\ 5 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -23 \\ 5 & 22 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

12. 解: 将方程组的增广矩阵化为阶梯形

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & k-2 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k-5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

当 $k=5$ 时, 方程组有解, 且方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4 \\ x_2 = \frac{3}{5} + \frac{3}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_4 \end{cases} \quad (\text{其中 } x_3, x_4 \text{ 为自由未知量})$$

令 $x_3=x_4=0$, 得到方程组的一个特解 $X_0 = (\frac{4}{5} \quad \frac{3}{5} \quad 0 \quad 0)'$. 方程组相应的齐次方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4 \\ x_2 = \frac{3}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_4 \end{cases} \quad (\text{其中 } x_3, x_4 \text{ 为自由未知量})$$

在上式中分别令自由未知量 $x_3=-5, x_4=0$ 和 $x_3=0, x_4=-5$ 得到齐次方程组的一个基础解系

$$X_1 = (1 \quad -3 \quad -5 \quad 0)', X_2 = (6 \quad 7 \quad 0 \quad -5)' \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

于是, 方程组的全部解为

$$X = X_0 + k_1 X_1 + k_2 X_2 \quad (\text{其中 } k_1, k_2 \text{ 为任意常数}) \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

$$13. \text{解: (1) } P(5 < X < 9) = P\left(\frac{5-3}{2} < \frac{X-3}{2} < \frac{9-3}{2}\right) = P\left(1 < \frac{X-3}{2} < 3\right) \\ = \Phi(3) - \Phi(1) = 0.9987 - 0.8413 = 0.1574 \quad \cdots \cdots \cdots 8 \text{ 分}$$

$$(2) P(X > 7) = P\left(\frac{X-3}{2} > \frac{7-3}{2}\right) \\ = P\left(\frac{X-3}{2} > 2\right) = 1 - P\left(\frac{X-3}{2} \leq 2\right) \\ = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228 \quad \cdots \cdots \cdots 16 \text{ 分}$$

14. 解: 零假设 $H_0: \mu = 15$. 由于已知 σ^2 , 故选取样本函数

$$U = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

经计算得

$$\bar{x} = 14.95, \quad \left| \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \right| = \left| \frac{14.95 - 15}{0.2 / \sqrt{4}} \right| = 0.5$$

已知 $u_{0.975} = 1.96$,

$$\left| \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \right| = 0.5 \leq 1.96 = u_{0.975}$$

故接受零假设, 即可以认为这批零件的平均重量为 15 千克. $\cdots \cdots \cdots 16 \text{ 分}$

四、证明题(本题 6 分)

15. 证明: 因

$$(AB + BA)' = (AB)' + (BA)' = B'A' + A'B' = BA + AB = AB + BA$$

所以 $AB + BA$ 是对称矩阵. 证毕. $\cdots \cdots \cdots 6 \text{ 分}$

试卷代号:1080

座位号

--	--

国家开放大学2019年秋季学期期末统一考试

工程数学(本) 试题(半开卷)

2020年1月

题 号	一	二	三	四	总 分
分 数					

得 分	评卷人

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. 若
$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & x-2 \end{vmatrix} = 0$$
, 则 $x = (\quad)$.

- A. 2
B. 3
C. -3
D. -2

2. 以下结论正确的是().

- A. 方程的个数小于未知量的个数的线性方程组一定有解
B. 方程的个数等于未知量的个数的线性方程组一定有唯一解
C. 方程的个数大于未知量的个数的线性方程组一定有无穷多解
D. 齐次线性方程组一定有解

3. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, 那么 A 的特征值是().

- A. -4, 6
B. 1, 1
C. 1, 5
D. 5, 5

4. 掷两颗均匀的骰子, 事件“点数之和为5”的概率是().

- A. $\frac{1}{36}$
B. $\frac{1}{18}$
C. $\frac{1}{9}$
D. $\frac{1}{12}$

5. 在对单正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的假设检验问题中, t 检验法解决的问题是().

A. 已知方差, 检验均值

B. 未知方差, 检验均值

C. 已知均值, 检验方差

D. 未知均值, 检验方差

得 分	评卷人

二、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

6. 设 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix}$, 则 $A'B =$ _____.

7. 设 A, B 均为 n 阶矩阵, $I - B$ 可逆, 则矩阵方程 $A + BX = X$ 的解 $X =$ _____.

8. 若随机变量 $X \sim N(5, 16)$, 则 $Y =$ _____ $\sim N(0, 1)$.

9. 设随机变量 $X \sim B(n, p)$, 则 $E(X) =$ _____.

10. 若参数 θ 的估计量 $\hat{\theta}$ 满足 $E(\hat{\theta}) = \theta$, 则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的 _____.

得 分	评卷人

三、计算题(每小题 16 分, 共 64 分)

11. 已知 $XA = B$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 求 X .

12. 设齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$
 问当 λ 取何值时方程组有非零解,

并求出全部解.

13. 设 A, B 是两个随机事件, 已知 $P(A) = 0.6$, $P(A + B) = 0.84$, $P(A\bar{B}) = 0.4$, 计算 $P(B)$.

14. 已知某零件的重量服从正态分布, 随机抽取 9 个样品, 重量分别为

18, 17, 20, 16, 17, 18, 19, 18, 19

求零件重量均值的置信区间. (置信度 $1 - \alpha = 0.95$, $t_{0.05}(8) = 2.306$)

得 分	评卷人

四、证明题(本题 6 分)

15. 设随机事件 A, B 相互独立, 试证: \bar{A}, B 也相互独立.

试卷代号:1080

国家开放大学2019年秋季学期期末统一考试

工程数学(本) 试题答案及评分标准(半开卷)

(供参考)

2020年1月

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. A 2. D 3. A 4. C 5. B

二、填空题(每小题3分,共15分)

6. $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

7. $(I - B)^{-1}A$

8. $\frac{X-5}{4}$

9. np

10. 无偏估计

三、计算题(每小题16分,共64分)

11. 解:利用初等行变换得

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 8 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

由此得

$$X = BA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 8 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 17 & -11 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

12. 解: 将方程组的系数矩阵化为阶梯形

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & -8 & \lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda - 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda - 4 \end{bmatrix}$$

所以, 当 $\lambda = 4$ 时方程组有非零解, $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

且方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

其中 x_3 为自由未知量.

在上式中令自由未知量 $x_3 = 1$, 得方程组的一个基础解系

$$X_1 = (-4 \quad -1 \quad 1)' \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

于是, 方程组的全部解为

$$X = k_1 X_1 \text{ (其中 } k_1 \text{ 为任意常数)} \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

13. 解: $P(AB) = P(A) - P(A\bar{B}) = 0.6 - 0.4 = 0.2 \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

$$P(B) = P(A + B) + P(AB) - P(A) = 0.84 + 0.2 - 0.6 = 0.44 \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

14. 解: $\alpha = 0.05, n = 9$. 选用统计量 $t = \frac{\bar{x} - \mu}{s} \sqrt{n} \sim t(n-1)$,

代入样本值计算

$$\bar{x} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i = 18, s^2 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2 = 1.5$$

$$\sqrt{\frac{s^2}{9}} = \sqrt{\frac{1.5}{9}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

已知 $t_{0.05}(8) = 2.306$

于是,重量的均值 μ 的置信区间为

$$[\bar{x} - t_{0.05}(8) \sqrt{\frac{s^2}{n}}, \bar{x} + t_{0.05}(8) \sqrt{\frac{s^2}{n}}] = [18 - \frac{2.306}{\sqrt{6}}, 18 + \frac{2.306}{\sqrt{6}}] = [17.06, 18.94]$$

..... 16 分

四、证明题(本题 6 分)

$$\begin{aligned} 15. \text{ 证明: } P(\overline{A}B) &= P(B) - P(AB) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) \\ &= P(\overline{A})P(B) \end{aligned}$$

所以 \overline{A}, B 也相互独立. 证毕. 6 分

试卷代号:1080

座位号

--	--

国家开放大学2020年春季学期期末统一考试

工程数学(本) 试题

2020年7月

题 号	一	二	三	四	总 分
分 数					

得 分	评卷人

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. 设 A, B 均为 n 阶可逆矩阵, 则下列等式成立的是().

A. $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

B. $|A+B| = |A| + |B|$

C. $|-2AB| = 2^n |A| |B|$

D. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2. 乘积矩阵 $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 中的元素 $c_{23} = ()$.

A. 1

B. -4

C. 7

D. 8

3. 设 X_1, X_2 为线性方程组 $AX = B$ 的两个解, 则下列向量中()一定是 $AX = B$ 的解.

A. $X_1 + X_2$

B. $X_1 - X_2$

C. $X_1 - 2X_2$

D. $2X_2 - X_1$

4. 掷两颗均匀的骰子, 事件“点数之和为3”的概率是().

A. $\frac{1}{36}$

B. $\frac{1}{18}$

C. $\frac{1}{12}$

D. $\frac{1}{11}$

5. 设 x_1, x_2, \dots, x_n 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 则()是 μ 的无偏估计.

A. $\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{3}{5}x_3$

B. $\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3$

C. $\frac{2}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3$

D. $x_1 + x_2 + x_3$

得 分	评卷人

二、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

6. 设 A, B 是 3 阶矩阵, 其中 $|A|=3, |B|=2$, 则 $|2A'B^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$, 则 $r(A) = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 若 $P(A)=0.7, P(B)=0.8$, 且事件 A, B 相互独立, 则 $P(A\bar{B}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 设 $f(x)$ 是连续型随机变量 X 的密度函数, 则对任意 $a < b$ 都有 $P(a < X < b) = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 设 x_1, x_2, \dots, x_{10} 是来自正态总体 $N(\mu, 4)$ 的一个样本, 则 $\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i \sim \underline{\hspace{2cm}}$.

得 分	评卷人

三、计算题(每小题 16 分, 共 64 分)

11. 已知 $X = AX + B$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, 求 X .

12. 当 λ 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = \lambda \end{cases}$$

有解, 在有解的情况下求方程组的全部解.

13. 已知 $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B|A) = \frac{1}{3}$, $P(A|B) = \frac{1}{2}$, 求 $P(A+B)$.

14. 据资料分析,某厂生产的砖的抗断强度 X 服从正态分布 $N(32.5, 1.21)$. 今从该厂最近生产的一批砖中随机地抽取了 9 块,测得抗断强度(单位: kg/cm^2)的平均值为 31.18. 假设标准差没有改变,在 0.05 的显著性水平下,问这批砖的抗断强度是否合格. ($u_{0.975} = 1.96$)

得 分	评卷人

四、证明题(本题 6 分)

15. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的,证明 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$ 也线性无关.

试卷代号:1080

国家开放大学2020年春季学期期末统一考试

工程数学(本) 试题答案及评分标准

(供参考)

2020年7月

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. D 2. C 3. D 4. B 5. A

二、填空题(每小题3分,共15分)

6. 12

7. 2

8. 0.14

9. $\int_a^b f(x) dx$

10. $N(\mu, \frac{4}{10})$

三、计算题(每小题16分,共64分)

11. 解: $X = (I - A)^{-1}B$, 5分

其中 $I - A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

利用初等行变换得

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{故 } (I-A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

由矩阵乘法得

$$X = (I-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

12. 解: 将方程组的增广矩阵化为阶梯形

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & \lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & \lambda-4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-5 \end{bmatrix}$$

由此可知当 $\lambda \neq 5$ 时, 方程组无解. 当 $\lambda = 5$ 时, 方程组有解. 8 分

此时方程组相应的齐次方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 \\ x_2 = x_3 + 3x_4 \end{cases} \quad (x_3, x_4 \text{ 是自由未知量})$$

分别令 $x_3 = 1, x_4 = 0$ 及 $x_3 = 0, x_4 = 1$, 得齐次方程组的一个基础解系

$$X_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 0]', X_2 = [2 \ 3 \ 0 \ 1]'$$

令 $x_3 = 0, x_4 = 0$, 得非齐次方程组的一个特解

$$X_0 = [1 \ -1 \ 0 \ 0]'$$

由此得原方程组的全部解为

$$X = X_0 + k_1 X_1 + k_2 X_2 \text{ (其中 } k_1, k_2 \text{ 为任意常数)} \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

$$13. \text{ 解: } P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{12}$$

$$P(B) = \frac{P(AB)}{P(A|B)} = \frac{1}{6} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{于是 } P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

14. 解:零假设 $H_0: \mu = 32.5$; $H_1: \mu \neq 32.5$.

由于标准差没有改变,故已知 $\sigma_0^2 = 1.21$,选取样本函数

$$U = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \sim N(0, 1) \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

由已知, $\bar{x} = 31.18$, $\mu_0 = 32.5$, $\sigma_0 = 1.1$, $n = 9$,于是得

$$U = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} = \frac{31.18 - 32.5}{1.1 / \sqrt{9}} = -3.6 \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

在 0.05 的显著性水平下, $\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \right| = 3.6 > 1.96$,因此拒绝零假设 H_0 ,即这批砖的抗断强度不合格. 16 分

四、证明题(本题 6 分)

15. 设有一组数 k_1, k_2, k_3 ,使得

$$k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_1 + \alpha_3) = 0$$

成立,即 $(k_1 + k_3)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 = 0$,由已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关,故有

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

成立,由于该方程组只有零解,即 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$,故 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$ 是线性无关的. 证毕. 6 分

试卷代号:1080

座位号

国家开放大学2020年春季学期期末统一考试

工程数学(本) 试题

2020年9月

题号	一	二	三	四	总分
分数					

得分	评卷人

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. 若 A, B 都是 n 阶可逆矩阵,则下列等式正确的是().

A. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

B. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

C. $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

D. $|2A| = 2|A|$

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}, I$ 是单位矩阵,则 $A'B - I = (\quad)$.

A. $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

3. 设 A, B 为 n 阶矩阵, λ 既是 A 又是 B 的特征值, x 既是 A 又是 B 的属于 λ 的特征向量,则结论()正确.

A. λ 是 AB 的特征值

B. λ 是 $A+B$ 的特征值

C. λ 是 $A-B$ 的特征值

D. x 是 $A+B$ 的特征向量

4. 掷两颗均匀的骰子,事件“点数之和为2”的概率是().

A. $\frac{1}{36}$

B. $\frac{1}{18}$

C. $\frac{1}{12}$

D. $\frac{1}{9}$

5. 设 x_1, x_2, \dots, x_n 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ (μ, σ^2 均未知) 的样本, 则()是统计量.

A. x_1

B. $x_1 + \mu$

C. μx_1

D. $\frac{x_1^2}{\sigma^2}$

得 分	评卷人

二、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

6. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

7. 当 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + \lambda x_2 = -1 \end{cases}$ 有无穷多解.

8. 若 $P(A) = 0.7, P(B) = 0.8$, 且事件 A, B 相互独立, 则 $P(\bar{A}\bar{B}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

9. 评价估计量好坏的两个重要标准是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 和有效性.

10. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且 σ^2 未知, 用样本检验假设 $H_0: \mu = \mu_0$ 是否成立时可采用统计量 $\underline{\hspace{2cm}}.$

得 分	评卷人

三、计算题(每小题 16 分, 共 64 分)

11. 已知 $AX = B$, 其中 $A = \begin{bmatrix} -13 & -6 & -3 \\ -4 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, 求 X .

12. 设线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 = \lambda \end{cases}$, 当 λ 为何值时, 方程组有解,

并求出全部解.

13. 设随机变量 $X \sim N(8, 4)$, 求 $P(7 < X < 9)$ 和 $P(X > 9)$. (其中 $\Phi(0.5) = 0.6915$, $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(2) = 0.9772$).

14. 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 = 0.04$, 取 X 的样本 x_1, x_2, \dots, x_{25} , 若 $\bar{x} = 11.2$, 求 μ 的置信度为 95% 的置信区间 ($u_{0.975} = 1.96$).

得 分	评卷人

四、证明题 (本题 6 分)

15. 设 A, B 为随机事件, 试证: $P(A - B) = P(A) - P(AB)$.

试卷代号:1080

国家开放大学2020年春季学期期末统一考试

工程数学(本) 试题答案及评分标准

(供参考)

2020年9月

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. B 2. C 3. D 4. A 5. A

二、填空题(每小题3分,共15分)

6. -7

7. -1

8. 0.06

9. 无偏性

$$10. t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

三、计算题(每小题16分,共64分)

11. 解:利用初等行变换得

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -13 & -6 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & 0 & -13 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{即 } A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{于是 } X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -17 & 1 \\ 12 & -6 \end{bmatrix} \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

12. 解:将方程组的增广矩阵化为阶梯形

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 4 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 5 & \lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & 9 & -9 \\ 0 & 1 & -5 & 9 & -9 \\ 0 & 1 & -5 & 9 & \lambda-5 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda+4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 14 & -13 \\ 0 & 1 & -5 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda+4 \end{bmatrix}$$

所以,当 $\lambda = -4$ 时方程组有解,且有无穷多解

且方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = 7x_3 - 14x_4 - 13 \\ x_2 = 5x_3 - 9x_4 - 9 \end{cases} \quad (\text{其中 } x_3, x_4 \text{ 为自由未知量}) \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

令 $x_3 = x_4 = 0$, 得到方程组的一个特解 $X_0 = (-13 \quad -9 \quad 0 \quad 0)'$.

相应的齐次方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = 7x_3 - 14x_4 \\ x_2 = 5x_3 - 9x_4 \end{cases} \quad (\text{其中 } x_3, x_4 \text{ 为自由未知量})$$

在上式中分别令自由未知量 $x_3 = 1, x_4 = 0$ 和 $x_3 = 0, x_4 = 1$ 得到齐次方程组的一个基础解系 $X_1 = (7 \quad 5 \quad 1 \quad 0)'$, $X_2 = (-14 \quad -9 \quad 0 \quad 1)'$ 13 分

于是,方程组的全部解为

$$X = X_0 + k_1 X_1 + k_2 X_2 \quad (\text{其中 } k_1, k_2 \text{ 为任意常数}) \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

$$13. \text{ 解: } P(7 < X < 9) = P\left(\frac{7-8}{2} < \frac{X-8}{2} < \frac{9-8}{2}\right)$$

$$= P(-0.5 < \frac{X-8}{2} < 0.5) = 2\Phi(0.5) - 1$$

$$= 2 \times 0.6915 - 1 = 0.383 \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$P(X > 9) = P\left(\frac{X-8}{2} > \frac{9-8}{2}\right) = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085 \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

14. 解: 已知 $\sigma^2 = 0.04, \sigma = 0.2, n = 25, \bar{x} = 11.2$

$$\text{选取统计量 } U = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

得到置信度为 95% 的 μ 的置信区间为

$$\left[\bar{x} - u_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\bar{x} - u_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 11.2 - 1.96 \times \frac{0.2}{5} = 11.1216$$

$$\bar{x} + u_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 11.2 + 1.96 \times \frac{0.2}{5} = 11.2784$$

因此, 所求 μ 的置信度为 95% 的置信区间为 $[11.1216, 11.2784]$ $\dots\dots\dots 16 \text{ 分}$

四、证明题(本题 6 分)

15. 证明: 由事件的关系可知

$$A = AU = A(B + \bar{B}) = AB + A\bar{B} = AB + (A - B)$$

而 $(A - B)(AB) = \emptyset$, 故由概率的性质可知

$$P(A) = P(A - B) + P(AB)$$

即

$$P(A - B) = P(A) - P(AB) \text{ 证毕 } \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

试卷代号:1080

座位号

国家开放大学2020年秋季学期期末统一考试

工程数学(本) 试题

2021年1月

题 号	一	二	三	四	总 分
分 数					

得 分	评卷人

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. 设 A, B 均为 n 阶方阵, 则下列命题中正确的是().

A. 若 $AB=O$, 则 $A=O$ 或 $B=O$

B. 若 $AB=I$, 则 $A=I$ 或 $B=I$

C. $|AB|=|A||B|$

D. $AB=BA$
2. 设 A 与 $[A : B]$ 分别代表非齐次线性方程组 $AX=B$ 的系数矩阵和增广矩阵, 若这个方程组有解, 则().

A. $r(A)=r([A : B])$

B. $r(A)<r([A : B])$

C. $r(A)>r([A : B])$

D. $r(A)=r([A : B])-1$
3. 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ 的特征值为().

A. $-1, 2$

B. $-1, 4$

C. $1, -1$

D. $1, 4$
4. 掷两颗均匀的骰子, 事件“点数之和为5”的概率是().

A. $\frac{1}{36}$

B. $\frac{1}{18}$

C. $\frac{1}{12}$

D. $\frac{1}{9}$
5. 设 x_1, x_2, \dots, x_n 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ (μ, σ^2 均未知) 的样本, 则() 是统计量.

A. $\bar{x} + \mu$

B. μx_1

C. x_1

D. $\frac{x_1 - \mu}{\sigma}$

得 分	评卷人

二、填空题(每小题 3 分,共 15 分)

6. 设 A, B 均为 3 阶矩阵,且 $|A| = -1, |B| = 2$, 则 $|-A'B^{-1}| =$ _____.
7. 设线性方程组 $AX = 0$ 中有 5 个未知量,且 $\text{秩}(A) = 2$, 则 $AX = 0$ 的基础解系中线性无关的解向量有 _____ 个.
8. 若 $P(A) = 0.4, P(B) = 0.3$, 且事件 A, B 相互独立, 则 $P(A+B) =$ _____.
9. 设随机变量 $X \sim B(20, 0.4)$, 则 $E(X) =$ _____.
10. 如果参数 θ 的估计量 $\hat{\theta}$ 满足 $E(\hat{\theta}) = \theta$, 则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的 _____.

得 分	评卷人

三、计算题(每小题 16 分,共 64 分)

11. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, 已知 $AX = B$, 求 X .

12. 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$ 的一个基础解系和通解.

13. 设 $X \sim N(20, 2^2)$, 试求: (1) $P(22 < X < 26)$; (2) $P(X > 24)$.

(已知 $\Phi(1) = 0.8413, \Phi(2) = 0.9772, \Phi(3) = 0.9987$)

14. 设某一批零件重量 X 服从正态分布 $N(\mu, 0.6^2)$, 随机抽取 9 个测得平均重量为 5 (单位: 千克), 试求此零件重量总体均值的置信度为 0.95 的置信区间 (已知 $u_{0.975} = 1.96$).

得 分	评卷人

四、证明题(本题 6 分)

15. 对任意方阵 A , 试证 $A + A'$ 是对称矩阵.

试卷代号:1080

国家开放大学2020年秋季学期期末统一考试

工程数学(本) 试题答案及评分标准

(供参考)

2021年1月

一、单项选择题(每小题3分,共15分)

1. C 2. A 3. B 4. D 5. C

二、填空题(每小题3分,共15分)

6. $\frac{1}{2}$

7. 3

8. 0.58

9. 8

10. 无偏估计量

三、计算题(每小题16分,共64分)

11. 解:利用初等行变换可得

$$[A \quad I] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{因此, } A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(10分)

于是由矩阵乘法可得

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 0 & -7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}. \quad (16 \text{ 分})$$

12. 解: 将齐次线性方程组的系数矩阵化为阶梯形

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 6 \\ 0 & 1 & -7 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{方程组的一般解为} \begin{cases} x_1 = 4x_3 - 5x_4 \\ x_2 = 7x_3 - 6x_4 \end{cases} \quad (\text{其中 } x_3, x_4 \text{ 是自由未知量}). \quad (7 \text{ 分})$$

令 $x_3 = 1, x_4 = 0$, 得相应的解向量为

$$X_1 = [4 \quad 7 \quad 1 \quad 0]', \quad (10 \text{ 分})$$

令 $x_3 = 0, x_4 = 1$, 得相应的解向量为

$$X_2 = [-5 \quad -6 \quad 0 \quad 1]',$$

于是, $\{X_1, X_2\}$ 即为方程组的一个基础解系. (13 分)

方程组的通解为 $k_1 X_1 + k_2 X_2$ (其中 k_1, k_2 为任意常数). (16 分)

$$\begin{aligned} 13. \text{ 解: } (1) P(22 < X < 26) &= P\left(\frac{22-20}{2} < \frac{X-20}{2} < \frac{26-20}{2}\right) = P\left(1 < \frac{X-20}{2} < 3\right) \\ &= \Phi(3) - \Phi(1) = 0.9987 - 0.8413 = 0.1574. \end{aligned} \quad (8 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} (2) P(X > 24) &= 1 - P(X \leq 24) = 1 - P\left(\frac{X-20}{2} \leq \frac{24-20}{2}\right) = 1 - P\left(\frac{X-20}{2} \leq 2\right) \\ &= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228. \end{aligned} \quad (16 \text{ 分})$$

14. 解: 由于已知 σ^2 , 故选取样本函数

$$U = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1), \quad (5 \text{ 分})$$

零件重量总体均值的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left[\bar{x} - u_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]. \quad (10 \text{ 分})$$

由已知, $\bar{x} = 5, \sigma = 0.6, n = 9, u_{0.975} = 1.96$, 于是可得

$$\bar{x} - u_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5 - 1.96 \times \frac{0.6}{\sqrt{9}} = 4.608,$$

$$\bar{x} + u_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5 + 1.96 \times \frac{0.6}{\sqrt{9}} = 5.392,$$

因此, 零件重量总体均值的置信度为 0.95 的置信区间为 $[4.608, 5.392]$. (16 分)

四、证明题(本题 6 分)

15. 证明: 由已知条件和对称矩阵的性质

$$(A + A')' = A' + (A')' = A' + A = A + A'$$

所以 $A + A'$ 是对称矩阵. (6 分)