粒子群优化算法求解旅行商问题

黄 岚, 王康平, 周春光, 庞 巍, 董龙江, 彭 利
(吉林大学计算机科学与技术学院, 长春 130012)

提要: 首先介绍粒子群优化的搜索策略与基本算法, 然后通过引入交换子和交换序的概念, 构造一种特殊的粒子群优化算法, 并用于求解旅行商问题. 实验表明了在求解组合优化问题中的有效性.

关键词: 粒子群优化算法; 旅行商问题; 组合优化
中图分类号: TP31 文献标识码: A 文章编号: 1671-5489(2003)04-0477-04

粒子群优化算法(Particle swarm optimization, 简称PSO)最初由Kennedy和Eberhart[1]提出, 是一种基于叠代的优化方法, 因其概念简单、实现容易, 而引起学术界的广泛重视. 目前已被应用于多目标优化、模式识别、信号处理和决策支持等领域[2～4]. 旅行商问题(Traveling salesman problem, 简称TSP)描述为: 给定n个城市和两两城市之间的距离, 求一条访问各城市一次且仅一次的最短路线. TSP是著名的组合优化问题, 是NP难题, 常被用来验证智能启发式算法的有效性[5,6].

目前, PSO算法在很多连续优化问题中得到成功应用, 而在离散域上的研究和应用还很少, 尤其是用PSO求解TSP问题是一个新的研究方向.

1 基本粒子群算法

在PSO算法中, 粒子群在一个n维空间中搜索, 其中的每个粒子所处的位置都表示问题的一个解. 粒子通过不断调整自己的位置X来搜索新解. 每个粒子都能记住自己搜索到的最好解, 记作P_{id}, 以及整个粒子群经历过的最好位置, 即目前搜索到的最优解, 记作P_{gd}. 每个粒子都有一个速度, 记作V,

$$V'_{id} = \omega V_{id} + \eta_1 \text{rand}()(P_{id} - X_{id}) + \eta_2 \text{rand}()(P_{gd} - X_{id}), \tag{1.1}$$

其中V_{id}表示第i个粒子第d维上的速度, ω为惯性权重, η_1, η_2为调节P_{id}和P_{gd}相对重要性的参数, rand()为随机数生成函数. 这样, 可以得到粒子移动的下一位置:

$$X'_{id} = X_{id} + V_{id}. \tag{1.2}$$

从(1.1)式和(1.2)式可以看出, 粒子的移动方向由三部分决定, 自己原有的速度V_{id}、与自己最佳经历的距离$(P_{id} - X_{id})$和与群体最佳经历的距离$(P_{gd} - X_{id})$, 并分别由权重系数ω, η_1和η_2决定其相对重要性.

PSO的基本算法步骤描述如下:

(1) 初始化粒子群, 即随机设定各粒子的初始位置X和初始速度V;

(2) 计算每个粒子的适应度值;

(3) 对每个粒子, 比较它的适应度值和它经历过的最好位置P_{id}的适应度值, 如果更好, 更新P_{id};

(4) 对每个粒子, 比较它的适应度值和群体所经历最好位置P_{gd}的适应度值, 如果更好, 更新P_{gd};

(5) 根据(1.1)式和(1.2)式调整粒子的速度和位置;

(6) 如果达到结束条件(足够好的位置或最大迭代次数), 则结束; 否则转步骤(2).

收稿日期: 2003-07-10.
作者简介: 黄 岚(1974～), 女, 博士研究生, 讲师, 从事智能算法与应用的研究, E-mail: lanh@21cn.com. 联系人: 周春光(1947～), 男, 教授, 博士生导师, 从事计算智能的研究, E-mail: cgzhou@mail.jlu.edu.cn.
基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 60175024)和教育部"符号计算与知识工程"重点实验室基金.

PSO是一种进化计算方法，它有以下几个进化计算的典型特征：有一个初始化过程，在这个过程中，群体中的个体被赋值为一些随机产生的初始解；通过产生更好的新一代群体来搜索解空间；新一代群体产生在前一代的基础上.

2　旅行商问题

TSP是运筹学、图论和组合优化中的NP难题，常被用来验证智能启发式算法的有效性. 主要的智能启发式算法包括最近邻域搜索、模拟退火、神经网络方法、遗传算法和蚂蚁算法等.

旅行商问题描述如下：给定 n 个城市及两两城市之间的距离，求一条经过各城市一次且仅一次的最短路线. 其图论描述为：给定图 $G=(V, A)$，其中 V 为顶点集，A 为各顶点相互连接组成的弧集，已知各顶点间连接距离，要求确定一条长度最短的Hamilton回路，即遍历所有顶点一次且仅一次的最短回路. 设 d_{ij} 为城市 i 与 j 之间的距离，即弧 (i, j) 的长度. 引入决策变量：

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若旅行商访问城市 } i \text{ 后访问城市 } j;\\ 0, & \text{否则,}\end{cases}\tag{2.1}$$

则TSP的目标函数为

$$\min Z=\sum_{i,j=1}^{n} x_{ij} d_{ij}.\tag{2.2}$$

TSP问题描述非常简单，但最优化求解很困难，若用穷举法搜索，则要考虑所有可能情况，并两两对比，找出最优，其算法复杂性呈指数增长，即所谓的"组合爆炸". 所以，寻求和研究TSP的有效启发式算法，是问题的关键.

PSO算法虽然成功地应用于连续优化问题中，但在组合优化问题中的研究和应用还很少. 下面将通过引入交换子和交换序的概念，对基本PSO算法进行改造，并将其应用于求解TSP问题中.

3　交换子和交换序

定义3.1　设 n 个节点的TSP问题的解序列为 $S=(a_i)$，$i=1,\cdots,n$. 定义交换子 $\mathrm{SO}(i_1, i_2)$ 为交换解 S 中的点 a_{i_1} 和 a_{i_2}，则 $S'=S+\mathrm{SO}(i_1, i_2)$ 为解 S 经算子 $\mathrm{SO}(i_1, i_2)$ 操作后的新解，这里为符号"+"赋予了新的含义.

例3.1　有一个5节点的TSP问题，其解为 $S=(1\ 3\ 5\ 2\ 4)$，交换算子为 $\mathrm{SO}(1,2)$，则

$$S'=S+\mathrm{SO}(1,2)=(1\ 3\ 5\ 2\ 4)+\mathrm{SO}(1,2)=(3\ 1\ 5\ 2\ 4).$$

定义3.2　一个或多个交换子的有序队列就是交换序，记作SS.

$$\mathrm{SS}=(\mathrm{SO}_1, \mathrm{SO}_2, \cdots, \mathrm{SO}_n),\tag{3.1}$$

其中 $\mathrm{SO}_1, \mathrm{SO}_2, \cdots, \mathrm{SO}_n$ 是交换子，它们之间的顺序是有意义的.

交换序作用于一个TSP解上意味着这个交换序中的所有交换子依次作用于该解上，即

$$S'=S+\mathrm{SS}=S+(\mathrm{SO}_1, \mathrm{SO}_2, \cdots, \mathrm{SO}_n)=[(S+\mathrm{SO}_1)+\mathrm{SO}_2]+\cdots+\mathrm{SO}_n.\tag{3.2}$$

定义3.3　不同的交换序作用于同一解上可能产生相同的新解，所有有相同效果的交换序的集合称为交换序的等价集.

定义3.4　若干个交换序可以合并成一个新的交换序，定义 $\oplus$ 为两个交换序的合并算子.

例3.2　设两个交换序 SS_1 和 SS_2，按先后顺序作用于解 S 上，得到新解 S'. 假设另外有一个交换序 SS' 作用于同一解 S 上，能够得到相同的解 S'，可定义

$$\mathrm{SS}'=\mathrm{SS}_1\oplus\mathrm{SS}_2,\tag{3.3}$$

SS' 和 $\mathrm{SS}_1\oplus\mathrm{SS}_2$ 属于同一等价集. 一般来说，SS' 不惟一.

定义3.5　在交换序等价集中，拥有最少交换子的交换序称为该等价集的基本交换序.

可按如下的方法构造一个基本交换序. 设给定两个解路径 A 和 B，需要构造一个基本交换序SS，使得 $B+\mathrm{SS}=A$.

$$A:\ (1\ 2\ 3\ 4\ 5);\qquad B:\ (2\ 3\ 1\ 5\ 4).$$

可以看出, $A(1)=B(3)=1$, 所以第一个交换子是 SO (1, 3), $B_1=B+$ SO (1, 3), 得到B_1: (1 3 2 5 4), $A(2)=B_1(3)=1$, 所以第二个交换子是 SO (2, 3), $B_2=B_1+$ SO (2, 3), 得到B_2: (1 2 3 5 4).

同理, 第三个交换子是 SO (4, 5), $B_3=B_2+$ SO (4, 5) $=A$. 这样, 就得到一个基本交换序:

$$SS = A - B = (SO(1,3), SO(2,3), SO(4,5)).$$

4 求解TSP 的PSO 算法

基本PSO 算法中的速度算式(1.1)已不适合TSP 问题, 于是重新构造了速度算式:

$$V_{id}' = V_{id} \oplus \alpha(P_{id} - X_{id}) \oplus \beta(P_{gd} - X_{id}), \tag{4.1}$$

其中α, β(α, β∈[0, 1])为随机数. $\alpha(P_{id}-X_{id})$表示基本交换序$(P_{id}-X_{id})$中的所有交换子以概率α保留; 同理, $\beta(P_{gd}-X_{id})$表示基本交换序$(P_{gd}-X_{id})$中的所有交换子以概率β保留. 由此可以看出, α的值越大, $(P_{id}-X_{id})$保留的交换子就越多, P_{id}的影响就越大; 同理, β的值越大, $(P_{gd}-X_{id})$保留的交换子就越多, P_{gd}的影响就越大.

求解TSP 的PSO 算法步骤描述如下:

(1) 初始化粒子群, 即给群体中的每个粒子赋一个随机的初始解和一个随机的交换序;

(2) 如果满足结束条件, 转步骤(5);

(3) 根据粒子当前位置X_{id}, 计算其下一个位置X_{id}', 即新解;

1) 计算P_{id}和X_{id}之间的差A, $A=P_{id}-X_{id}$, 其中A 是一个基本交换序, 表示A 作用于X_{id}得到P_{id};

2) 计算$B=P_{gd}-X_{id}$, 其中B 也是一基本交换序;

3) 根据(4.1)式计算速度V_{id}', 并将交换序V_{id}'转换为一个基本交换序;

4) 计算搜索到的新解

$$X_{id}' = X_{id} + V_{id}; \tag{4.2}$$

5) 如果找到一个更好的解, 则更新P_{id};

(4) 如果整个群体找到一个更好的解, 更新P_{gd}. 转步骤(2).

(5) 显示求出的结果值.

5 实验与结论

我们用14 个点的TSP 标准问题(问题来源及最好解见http://www.crpc.rice.edu/softlib/tsplib/)来验证算法的有效性. 实验环境为PC (Pentium Ⅳ-2GHz CPU, 256M RAM, Win2000 OS, VC++ 6.0). 14 点TSP 的问题描述列于表1, 初始的随机解与本算法获得的最好解如图1 所示, 算法性能分析列于表2.

Table 1 TSP with 14 nodes

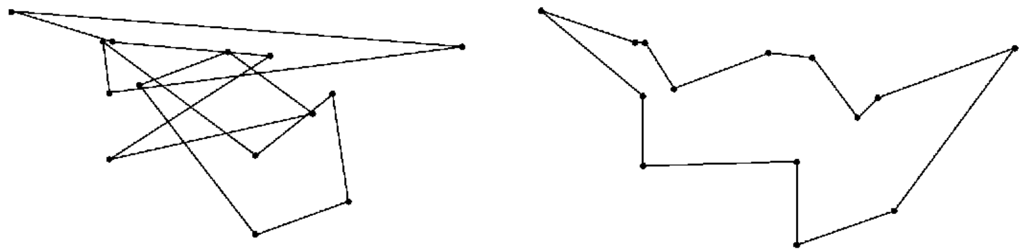
Node	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Coordinate X	16.47	16.47	20.09	22.39	25.23	22.00	20.47	17.20	16.30	14.05	16.53	21.52	19.41	20.09
Coordinate Y	96.10	94.44	92.54	93.37	97.24	96.05	97.02	96.29	97.38	98.12	97.38	95.59	97.13	94.55

Table 2 Analyses of the algorithm performance

Size of solution space	(14-1)!/2= 3 113 510 400
Number of particles in the swarm	100
Average number of iterations	20 000
Average size of search space	20 000 * 100= 2 000 000
Search space/solution space	2 000 000/3 113 510 400= 0.064%
Best solution of the algorithm	1→10→9→11→8→13→7→12→6→5→4→3→14→2
Length	30.878 5(Equal to the best known result in the world)

从实验结果可以看出, 算法只搜索了一个很小的区域就得到了一个已知最好的解, 收敛速度很快, 这表明算法有效. 我们实验所采用的虽然是只有14 个点TSP 算例, 并且算法比目前解决TSP 问题的经典算法

(如Lin-Kernighan[7]算法) 在解决问题的能力和速度方面有一定的差距, 但应用 PSO 算法解决 TSP 问题是一种崭新的尝试



(a) Initial random solution (length = 59.8462) (b) Best solution (length = 30.8785)

Fig 1 The solution paths of TSP with 14 nodes

参 考 文 献

[1] Eberhart R, Kennedy J. A New Optimizer Using Particles Swarm Theory [C]. Proc Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science. Nagoya, Japan: IEEE Service Center, Piscataway, 1995. 39～43.

[2] Xie X, Zhang W, Yang Z. Adaptive Particle Swarm Optimization on Individual Level [C]. International Conference on Signal Processing (ICSP 2002). Beijing: 2002. 1215～1218.

[3] Parsopoulos K E, Vrahatis M N. Recent Approaches to Global Optimization Problems Through Particle Swarm Optimization [J]. *Natural Computing*, 2002, **1**(2～3): 235～306.

[4] Ray T, Liew K M. A Swarm Metaphor for Multiobjective Design Optimization [J]. *Engineering Optimization*, 2002, **34**(2): 141～153.

[5] Zhou Chun-guang (周春光), Liang Yan-chun (梁艳春). Computational Intelligence (计算智能) [M]. Changchun (长春): Jinlin University Press (吉林大学出版社), 2001. 269～277.

[6] Huang Lan (黄 岚), Wang Kang-ping (王康平), Zhou Chun-guang (周春光), *et al*. Hybrid Ant Colony Algorithm for Traveling Salesman Problem (基于蚂蚁算法的混合方法求解旅行商问题) [J]. *Journal of Jilin University* (*Science Edition*) [吉林大学学报(理学版)], 2002, **40**(4): 369～373.

[7] Lin S, Kernighan B W. An Effective Heuristic Algorithm for the Traveling Salesman Problem [J]. *Operations Res*, 1973, **21**: 498～516.

Particle Swarm Optimization for Traveling Salesman Problems

HUANG Lan, WANG Kang-ping, ZHOU Chun-guang, PANG Wei, DONG Long-jiang, PENG Li

(*College of Computer Science and Technology, Jilin University, Changchun* 130012, *China*)

Abstract: This paper introduces the basic algorithm and search strategies of particle swarm optimization (PSO), *via* presenting the concepts of swap operator and swap sequence an algorithm of a kind of special particle swarm optimization is constructed and then proposes its application to traveling salesman problems (TSP). The experiments show the new PSO can achieve good results

Keywords: particle swarm optimization; traveling salesman problem; combinatorial optimization

(责任编辑: 赵立芹)