

课程: 极小曲面

draft version

修改日期: 2022 年 10 月 12 日

目录

第一章 极小曲面的基本性质	2
1.1 极小曲面方程	2
1.2 第一变分公式	5
1.3 曲面上的坐标函数	8
1.4 Schwartz 反射	9
1.5 单调性公式	12
1.6 Gauss 映射	14
1.7 Bernstein 定理	15
1.8 Weierstrass 表示	19
1.9 MSE revisited	28
1.10 第二变分与稳定性	31
第二章 曲率估计	47
2.1 逐点估计	47
2.2 L^p 估计	59
第三章 Plateau 问题	61
附录 A 附录	65
A.1 复分析基础	65
A.1.1 等温坐标的存在性	65
A.1.2 单值化定理	66
附录 B 习题	67
参考文献	69

第一章 极小曲面的基本性质

极小曲面起源于下面的问题:

问题. 给定简单闭曲线 $\gamma \subset \mathbb{R}^3$, 是否存在以 γ 为边界的面积最小的曲面? 即, 寻找曲面 $\Sigma, \partial\Sigma = \gamma$, 使得对于任意满足 $\partial\Sigma' = \gamma$ 的曲面 Σ' , 都有

$$\text{Area}(\Sigma) \leq \text{Area}(\Sigma')$$

这个问题现在被称为 Plateau 问题 (最早由 Langrange 提出). 1920-30s 年代, 这个问题被 Rado 和 Douglas 解决 (Douglas 也因为在 Plateau 问题上的工作而获得第一届 Fields 奖).

1.1 极小曲面方程

每个曲面都可以局部地表示为函数的图像的形式, 因此我们首先来研究可以作为函数图像的曲面. 设 Σ 是面积最小的曲面, 且

$$\Sigma = \text{Graph}(u) = \{(x, u(x)) \mid x \in \Omega\}$$

其中, Ω 是给定的有界区域, $u \in C_c^\infty(\Omega)$. 若使得 $\text{Graph}(u)$ 面积最小, 那么对于任意 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ 及 $t \in \mathbb{R}$,

$$\text{Area}(\text{Graph}(u)) \leq \text{Area}(\text{Graph}(u + t\varphi)) \quad (1.1)$$

于是, 我们有

$$\frac{d}{dt}(\text{Area}(\text{Graph}(u + t\varphi)))|_{t=0} = 0 \quad (1.2)$$

直接计算可知

$$\begin{aligned} \text{Area}(\text{Graph}(u + t\varphi)) &= \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du + tD\varphi|^2} \\ &= \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} + t \frac{\langle Du, D\varphi \rangle}{\sqrt{1 + |Du|^2}} + o(t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

因此, $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, 成立

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Area}(\text{Graph}(u + t\varphi))|_{t=0} &= \int_{\Omega} \frac{\langle Du, D\varphi \rangle}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \\ &= - \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div} \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

下面的方程便称为极小曲面方程 (MSE).

$$\operatorname{div} \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} = 0 \quad (1.5)$$

注 1.1. 一个曲面是否局部地满足 MSE, 跟我们选取的坐标表示是没有关系的.

显然地, 一个函数 u 满足极小曲面方程只是 $\text{Graph}(u)$ 面积最小的必要条件, 是否有可能是充分条件? 我们下面的两个结论.

命题 1.2. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. 设 u 满足 MSE. 设 $\Sigma \subset \Omega \times \mathbb{R}$ 且 $\partial\Sigma = \partial\text{Graph}(u)$. 则有

$$\text{Area}(\text{Graph}(u)) \leq \text{Area}(\Sigma) \quad (1.6)$$

证明. 记 $\vec{n} = \frac{\partial_{n+1} - Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}}$ 为 $\text{Graph}(u)$ 的单位法向 (这里我们将 \vec{n} 自然地扩张到 \mathbb{R}^{n+1} 上). 由于 u 满足 MSE, 则 $\operatorname{div}(\vec{n}) = 0$. 设 dx 是 \mathbb{R}^{n+1} 中的体积形式, 定义 n -形式 $\omega = i_{\vec{n}}^* dx$ 如下, 对于任意向量场 X_1, X_2, \dots, X_n :

$$\omega(X_1, X_2, \dots, X_n) = dx(X_1, X_2, \dots, X_n, \vec{n}) \quad (1.7)$$

显然地, ω 是多重线性的反对称张量, 即是一个 n -形式. 现在验证 ω 有如下性质:

1. $d\omega = 0$.
2. \forall 单位向量场 e_1, e_2, \dots, e_n , 成立 $\omega(e_1, e_2, \dots, e_n) \leq 1$. 并且等号成立当且仅当 e_1, e_2, \dots, e_n 形成 $T\Sigma$ 的标准正交基.

性质 (1) 由基本公式 $d(i_{\vec{n}}^* dx) = \operatorname{div}(\vec{n})dx$ 可知. 为了验证性质 (2), 设 $V = \text{span}(e_2, e_3, \dots, e_n, \vec{n})$. 将 e_1 分解为平行于 V 和垂直于 V 的部分, $e_1 = e_1^T + e_1^\perp$. 则

$$\omega(e_1, \dots, e_n, \vec{n}) = \det([e_1^\perp, e_2, \dots, e_n, \vec{n}]) \quad (1.8)$$

同样的相对于空间 $\text{span}(e_3, \dots, e_n, \vec{n})$, 分解 e_2 . 这样一直做下去, 最终有

$$\omega(e_1, \dots, e_n, \vec{n}) = \det([e_1^\perp, e_2^\perp, \dots, e_n^\perp, \vec{n}]) \leq 1 \quad (1.9)$$

等号成立当且仅当每一步地分解中, $e_i^T = 0$. 因此性质 (2) 成立. 性质 (2) 的两个直接推论是, 当 ω 限制在 $\text{Graph}(u)$ 上时, ω 恰好为 $\text{Graph}(u)$ 上的面积形式. 当 ω 限制在 Σ 上时, $\omega \leq d\Sigma$ (这里指的是 $\omega = f(x)d\Sigma, |f| \leq 1$).

由于 $H_n(\Omega \times \mathbb{R}) = H_n(\Omega) = \{0\}$, 则存在区域 $W \subset \Omega \times \mathbb{R}$ 使得 $\partial W = \text{Graph}(u) - \Sigma$. 由 Stokes 公式可知

$$0 = \int_W d\omega = \int_{\text{Graph}(u)} \omega - \int_\Sigma \omega \geq \text{Area}(\text{Graph}(u)) - \text{Area}(\Sigma) \quad (1.10)$$

□

命题 1.3. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界凸区域. 设 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. 设 u 满足 MSE. 设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 且 $\partial\Sigma = \partial\text{Graph}(u)$, 则有

$$\text{Area}(\text{Graph}(u)) \leq \text{Area}(\Sigma) \quad (1.11)$$

证明. 设 $P : \mathbb{R}^{n+1} \subset \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ 是 nearest point projection, 即 $\forall x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $P(x)$ 是 $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ 中离 x 最近的点. 由于 Ω 是凸的, $P(x)$ 存在且唯一. 易知 $|P(x) - P(y)| \leq |x - y|$, 即 P 是 1-Lipschitz 连续的, 在它的作用下, 长度, 面积, 体积等都会减少 (不增). 由于 $P(\Sigma) \subset \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$, 我们可以应用命题(1.2)

$$\text{Area}(\Sigma) \geq \text{Area}(P(\Sigma)) \geq \text{Area}(\text{Graph}(u)) \quad (1.12)$$

□

命题(1.2)中的证明还可以得到下面的结论:

推论 1.4. 设 $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 MSE. 设 $B_r \subset \Omega \times \mathbb{R}$. 则有

$$\text{Area}(B_r \cap \text{Graph}(u)) \leq \frac{1}{2} \text{Area}(\partial B_r) \quad (1.13)$$

证明. 设 B_r 在 Ω 中的投影为 B' . 显然 B' 是凸集. $\partial B_r \cap \text{Graph}(u)$ 将 ∂B_r 分成两部分, 分别记为 S^+, S^- . 设 $\Sigma' = B' \times \mathbb{R} \cap \Sigma$. 由命题(1.3)可知,

$$\text{Area}((\Sigma' - B_r \cap \Sigma) \cup S^+) \geq \text{Area}(\Sigma') \quad (1.14)$$

$$\text{Area}((\Sigma' - B_r \cap \Sigma) \cup S^-) \geq \text{Area}(\Sigma') \quad (1.15)$$

而这等价于

$$\text{Area}(S^+) \geq \text{Area}(B_r \cap \Sigma) \quad (1.16)$$

$$\text{Area}(S^-) \geq \text{Area}(B_r \cap \Sigma) \quad (1.17)$$

□

1.2 第一变分公式

设 (\mathcal{M}^n, g) 是黎曼流形, $\Sigma^{n-1} \subset \mathcal{M}$ 是 $n-1$ 维子流形. 我们采取的记号如下

- X^T, X^\perp : 切向量 $X \in T_p M$ 在 $T_p \Sigma$ 上的切向及法向分量.
- $T_p^\perp \Sigma := \{X \mid X \in T_p M, X \perp T_p \Sigma\}$. Σ 在 p 点处的法丛.
- ∇, ∇_Σ : \mathcal{M} 及 Σ 上的 Levi-Civita 联络. $\nabla_\Sigma = \nabla^T$.
- A/Π : Σ 在 \mathcal{M} 中的向量值与标量值第二基本形式. $A(X, Y) = (\nabla_X Y)^\perp$. $\Pi(X, Y) = \langle A(X, Y), \vec{n} \rangle$. \vec{n} 为给定的单位法向.
- \vec{H} : Σ 的平均曲率向量. $\vec{H}(p) = \text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n-1} A(e_i, e_i)$, $\{e_i\}$ 是 $T_p \Sigma$ 的标准正交基.
- H : Σ 的平均曲率. $H = \langle \vec{H}, \vec{n} \rangle$, \vec{n} 为 Σ 的单位法向.
- $\text{div}_\Sigma X$: $X \in TM$ 在 Σ 上的散度. $\text{div}_\Sigma X = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle$. $\{e_i\}$ 是 $T\Sigma$ 的标准正交基 (验证这个定义与基的选取无关). 需要注意, 这里 X 可以定义在 TM 上, 而不仅仅是 $T\Sigma$ 上. 散度算子满足如下的 Leibniz 公式:

$$\text{div}_\Sigma(fX) = f \text{div}_\Sigma(X) + \langle \nabla_\Sigma f, X \rangle \quad (1.18)$$

设 $F(x, t) : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ 是曲面 Σ 的一个变分 (连续形变) 满足

1. $F(x, 0) = x$.
2. $\forall x \in \partial \Sigma, F(x, t) = x$.

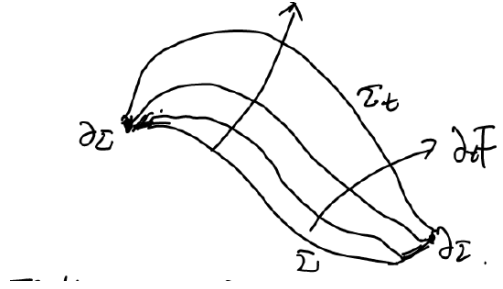


图 1.1: 曲面的变分

注 1.5. 我们假设 ε 足够小时, F 是 $\Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ 到它的像之间的同胚. 选定 Σ 上的一组局部坐标系 (x^i) . 以后我们将 ∂_t 与 $dF\partial_t$ 等同, 将 ∂_i 与 $dF\partial_i$ 等同, 并分别记作 $\partial_t F$ 与 $\partial_i F$.

设 Σ 上的度量为 g , Σ_t 上的度量记为 $g(t)$. 则 $g_{ij}(t) = \langle \partial_i F, \partial_j F \rangle$. 在这些记号下,

$$\text{Area}(\Sigma_t) = \int_{\Sigma} \sqrt{\det g(t)} dx \quad (1.19)$$

$$\frac{d}{dt} \text{Area}(\Sigma_t) = \int_{\Sigma} \frac{d}{dt} \sqrt{\det g(t)} dx \quad (1.20)$$

现在我们来求面积的第一变分. 首先证明一个引理.

引理 1.6. 设 $A = [a_{ij}]$ 是 $n \times n$ 矩阵. 将 $\det A$ 看作 n^2 个变量 (a_{ij}) 的函数. 则 $d \det A = A^{ij} da_{ij}$. A^{ij} 是 A 的代数余子式.

证明. 由行列式的拉普拉斯展开, 我们知道 $\forall i, \det A = \sum_j A^{ij} a_{ij}$. 注意到 A^{ij} 与 a_{ij} 无关, 则有 $\frac{\partial \det A}{\partial a_{ij}} = A^{ij}$. \square

推论 1.7. 设 $A_t = [a_{ij}(t)]$. 则 $\frac{d}{dt} \det A_t = \det A_t \text{Tr}(A_t^{-1} \frac{d}{dt} A_t)$.

固定一个点 $p \in \Sigma$ 并选取 p 点处的测地坐标. 以后所有计算都将在点 p 处进行.

$$2 \frac{d}{dt} \sqrt{\det g(t)}|_{t=0} = \text{Tr}(g'(0)) \quad (1.21)$$

现在, 我们只需要计算 $g'_{ij}(0)$ 即可. 根据定义, $g_{ij}(t) = \langle \partial_i F, \partial_j F \rangle$. 对 t 求偏导, 则有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g_{ij}(t) &= \nabla_{\partial_t F} \langle \partial_i F, \partial_j F \rangle \\ &= \langle \nabla_{\partial_t F} \partial_i F, \partial_j F \rangle + \langle \partial_i F, \nabla_{\partial_t F} \partial_j F \rangle \end{aligned} \quad (1.22)$$

由于 $\nabla_{\partial_t F} \partial_i F - \nabla_{\partial_i F} \partial_t F = [\partial_t F, \partial_i F] = dF[\partial_t, \partial_i] = 0$, 则有

$$\frac{d}{dt} g_{ij}(t) = \langle \nabla_{\partial_i F} \partial_t F, \partial_j F \rangle + \langle \partial_i F, \nabla_{\partial_j F} \partial_t F \rangle \quad (1.23)$$

因此,

$$\text{Tr}(g'(0)) = \sum_i 2 \langle \nabla_{\partial_i F} \partial_t F, \partial_i F \rangle|_{t=0} = 2 \text{div}_\Sigma \partial_t F|_{t=0} \quad (1.24)$$

若记 ω_t 为 Σ_t 上的体积形式, 那么上面的等式可以写为

$$\frac{d}{dt} \omega_t = (\text{div}_\Sigma \partial_t F) \omega_t \quad (1.25)$$

积分后便有

$$\frac{d}{dt} \text{Area}(\Sigma_t)|_{t=0} = \int_\Sigma \text{div}_\Sigma \partial_t F \quad (1.26)$$

而 $\forall X \in TM$, 由于

$$\nabla_{\partial_i} \langle X^\perp, \partial_j \rangle = 0 = \langle \nabla_{\partial_i} X^\perp, \partial_j \rangle + \langle X^\perp, \nabla_{\partial_i} \partial_j \rangle \quad (1.27)$$

以及

$$\text{div}_\Sigma(X^\perp) = \sum_i \langle \nabla_{\partial_i} X^\perp, \partial_i \rangle = - \sum_i \langle X^\perp, \nabla_{\partial_i} \partial_i \rangle = - \langle X^\perp, \vec{H} \rangle \quad (1.28)$$

另外由于 $\partial_t F|_{\partial\Sigma} = 0$, 由散度定理可知

$$\int_\Sigma \text{div}_\Sigma(\partial_t F)^T = 0. \quad (1.29)$$

综上, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Area}(\Sigma_t)|_{t=0} &= \int_\Sigma \text{div}_\Sigma(\partial_t F)^\perp + \int_\Sigma \text{div}_\Sigma(\partial_t F)^T \\ &= - \int_\Sigma \langle \partial_t F, \vec{H} \rangle \end{aligned} \quad (1.30)$$

因此, 若要使得曲面 Σ 的任意变分都不减小曲面的面积, 则 Σ 的平均曲率必定为 0. 现在我们得到以下的定义:

定义 1.8. 称 $\Sigma^{n-1} \subset \mathcal{M}^n$ 是极小曲面, 如果 $H_\Sigma = 0$.

1.3 曲面上的坐标函数

设 $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 是光滑曲面. 设 $\vec{X} = (X^1, X^2, \dots, X^n)$ 为 \mathbb{R}^n 上的坐标函数在 Σ 上的限制. \vec{X} 的一些性质如下.

1. $\nabla_\Sigma |\vec{X}|^2 = 2\vec{X}^T, \nabla_\Sigma |\vec{X}| = \frac{\vec{X}^T}{|\vec{X}|}.$
2. $\Delta_\Sigma \vec{X} = (\Delta_\Sigma X^1, \Delta_\Sigma X^2, \dots, \Delta_\Sigma X^n) = \vec{H}_\Sigma.$
3. $\Delta_\Sigma |\vec{X}|^2 = 2(n-1) + 2\langle H, \vec{X}^\perp \rangle.$

证明. 性质 (1) 根据定义直接可以得到.

对于性质 (2), 首先需要注意, $\Delta_\Sigma \vec{X} = (\Delta_\Sigma X^1, \Delta_\Sigma X^2, \dots, \Delta_\Sigma X^n)$, 是在对每个分量求 Laplace. 设 (∂_i) 是 \mathbb{R}^n 的标准正交基. 我们注意到: 对于任意向量 $Y = Y^i \partial_i \in \mathbb{R}^n$,

$$\nabla_Y \vec{X} = Y^i X^j \nabla_{\partial_i} \partial_j + Y^i \partial_i (X^j) \partial_j = Y. \quad (1.31)$$

(上面的等式实际上就是 $\nabla \vec{X} = d\vec{X} = Id$, 也可记为 $Y(\vec{X}) = Y$, 即对函数 \vec{X} 在 Y 方向求偏导). 取 $T\Sigma$ 上的标准正交基 (e_i) . 设 X^k 是 \vec{X} 的第 k 个分量. 则 $\forall Y \in T\Sigma$,

$$\nabla_Y^\Sigma X^k = \langle \nabla^\Sigma X^k, Y \rangle = \langle \nabla X^k, Y \rangle = Y(X^k). \quad (1.32)$$

于是有

$$\begin{aligned} \Delta_\Sigma X^k &= \sum_i (\nabla_{e_i}^\Sigma \nabla_{e_i}^\Sigma X^k - \nabla_{\nabla_{e_i}^\Sigma e_i}^\Sigma X^k) \\ &= \sum_i (e_i e_i X^k - (\nabla_{e_i} e_i)^T X^k). \end{aligned} \quad (1.33)$$

因此, 我们有

$$\begin{aligned} \Delta_\Sigma \vec{X} &= \sum_i (e_i (e_i \vec{X}) - (\nabla_{e_i} e_i)^T \vec{X}) \\ &= \sum_i (\nabla_{e_i} e_i - (\nabla_{e_i} e_i)^T) \vec{X} \\ &= \text{Tr} A = \vec{H}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

对于性质 (3),

$$\Delta_\Sigma |\vec{X}|^2 = \text{div}_\Sigma (\nabla_\Sigma |\vec{X}|^2) = 2\text{div}_\Sigma (\vec{X}^T) = 2\text{div}_\Sigma (\vec{X}) - 2\text{div}_\Sigma (\vec{X}^\perp) \quad (1.35)$$

分别计算这两项, 则有

$$\operatorname{div}_{\Sigma}(\vec{X}^{\perp}) = \sum_i \langle \nabla_{e_i} \vec{X}^{\perp}, e_i \rangle = - \sum_i \langle \vec{X}^{\perp}, \nabla_{e_i} e_i \rangle = - \langle \vec{X}^{\perp}, \vec{H} \rangle \quad (1.36)$$

$$\operatorname{div}_{\Sigma}(\vec{X}) = \sum_i \langle \nabla_{e_i} \vec{X}, e_i \rangle = \sum_i \langle e_i, e_i \rangle = n - 1 \quad (1.37)$$

综合以上三个等式即可知性质 (3). \square

推论 1.9. 设 $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. 则 Σ 是极小曲面当且仅当 \mathbb{R}^n 中的坐标函数在 Σ 上是调和的 (Σ 上的度量继承自 \mathbb{R}^n).

证明. 性质 (2) 的直接推论. \square

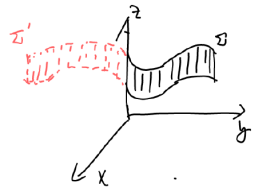
推论 1.10. 设 $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 是带有边界的极小曲面. 则 $\Sigma \subset \operatorname{Conv}(\partial\Sigma)$. Conv 指的是集合的凸包.

证明. $\forall \vec{v} \in \mathbb{S}^{n-1}$, 记 $P_{\vec{v},a} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \vec{v} \rangle \leq a\}$. 设 $u(x) = \langle x, \vec{v} \rangle$, 则 $u(x)$ 是 Σ 上的调和函数. 因此, u 的最大值只能在 $\partial\Sigma$ 上取到. 若 $\partial\Sigma \subset P_{\vec{v},a}$, 则 $\forall x \in \partial\Sigma, u(x) \leq a$, 因此, $\forall x \in \Sigma, u(x) \leq a$. 即, $\Sigma \subset P_{\vec{v},a}$. 证毕. \square

1.4 Schwartz 反射

由于推论(1.9), 极小曲面有许多性质跟调和函数非常相似 (实际上极小曲面也是调和映射). 非常重要的一个应用便是 Schwartz 反射原理.

命题 1.11. 设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 是极小曲面. 设 $\Gamma \subset \partial\Sigma$ 是一段直线段. 设 Σ 有关直线 Γ 的对称反射的像为 Σ' . 则 $\Sigma \cup \Sigma'$ 是极小曲面.



如图, 设 Γ 在 xy 轴上, $\Sigma' = \{(x,y,z) \mid (-x,-y,z) \in \Sigma\}$
则 $\Sigma' \cup \Sigma$ 是极小曲面.

图 1.2: Schwartz 反射

引理 1.12. 设 \mathbb{D} 为单位圆盘, $\mathbb{D}^+, \mathbb{D}^-$ 为上半/下半单位圆盘. 设 $u: \mathbb{D}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ 是调和函数, 且在 x -轴上, $u \equiv 0$. 在 \mathbb{D} 上定义

$$\tilde{u}(x, y) = \begin{cases} u(x, y), & (x, y) \in \mathbb{D}^+. \\ -u(x, -y), & (x, y) \in \mathbb{D}^-. \end{cases} \quad (1.38)$$

则 \tilde{u} 是 \mathbb{D} 上的调和函数.

证明. 显然, \tilde{u} 连续且在 $\mathbb{D}^+, \mathbb{D}^-$ 内部都是调和的, 我们只需要考虑 \tilde{u} 在 x -轴附近的行为. $\forall x_0 \in x\text{-axis}$, 取 $B_r(x_0) \subset \mathbb{D}$. 解方程

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & x \in B_r \\ v|_{\partial B_r(x_0)} = 0 \end{cases} \quad (1.39)$$

方程的可解性由 Poisson 积分给出, 在复坐标 $z = x + iy$ 下

$$v(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z-x_0|=r} \frac{r^2 - |a-x_0|^2}{|z-a|^2} \tilde{u}(z) ds \quad (1.40)$$

由于 $\forall z \in \partial B_r(x_0), \tilde{u}(z) = -\tilde{u}(\bar{z})$. 则 $\forall a \in B_r, v(a) = -v(\bar{a})$. 则在 x -轴上, $v \equiv 0$. 因此, $v|_{\partial B_r^+} = \tilde{u}|_{\partial B_r^+}, v|_{\partial B_r^-} = \tilde{u}|_{\partial B_r^-}$. 由最大值原理可知在 B_r 上, $\tilde{u} = v$. 因此, \tilde{u} 是调和的. \square

引理 1.13 (等温坐标的存在性). 设 (\mathcal{M}^2, g) 是二维黎曼流形, 则存在 \mathcal{M}^2 上的一组坐标卡 $\{z = x + iy\}$, 使得在这组坐标下, $g = \lambda^2 |dz|^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2)$, 并且这组坐标下的坐标变换是全纯的.

证明. 见附录. \square

命题(1.11)的证明. 取 Σ 上的等温坐标, 显然地, Σ 上的等温坐标经反射后得到 Σ' 上的等温坐标. 将 z -轴看作是 $\mathbb{C} = \{w = u + iv\}$ 上的 u -轴. 将 $B_r(p) \cap \Sigma$ 看作 \mathbb{D}^+ , 将 $B_r(p) \cap \Sigma'$ 看作 \mathbb{D}^- . 根据构造,

$$x(w) = -x(\bar{w}), y(w) = -y(\bar{w}) \quad (1.41)$$

现在, 利用调和函数的反射性质可知, 在 $\Sigma \cap \Sigma'$ 上, x, y 坐标都是调和的. 我们只需要说明 z -坐标也是调和的即可. 由 Σ' 的构造可知,

$$z(u, v) = z(u, -v). \quad (1.42)$$

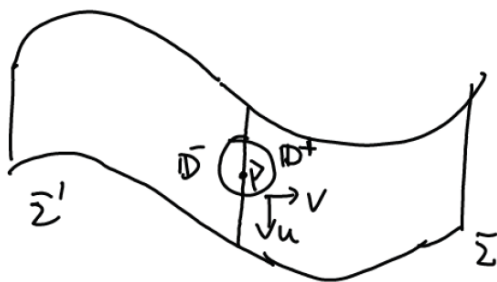


图 1.3: 等温坐标

设 \vec{n} 是 $B_r \cap \Sigma$ 在 z -轴上的单位法向, 则 $\frac{\partial z}{\partial \vec{n}} = \partial_v z = 0$. 于是, z 满足

$$\partial_v z(u, v) = -\partial_v z(u, -v). \quad (1.43)$$

由 Schwarz 反射可知, z_v 是调和函数, 则 z 是调和的. \square

注 1.14. 由此可见, 极小曲面上包含直线是非常强的条件. Schwarz 反射的一类非常重要的应用是当极小曲面的边界上包含两条平行的直线的情况下. 这个时候我们可以做无穷多次反射得到一个周期的极小曲面.

命题 1.15. 设 $X(u, v) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是共形浸入. 则 $\Sigma = X(\mathbb{D})$ 是极小曲面当且仅当 X 的每个分量是调和函数.

证明. 由于 X 是共形浸入, 则在 Σ 上的度量在 $z = u + iv$ 坐标下可以表示为 $\lambda^2 |dz|^2$ 的形式, 而 $\Delta_\Sigma X = \frac{1}{\lambda^2} \Delta X = 0$. \square

注 1.16. $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 是极小曲面当且仅当 \mathbb{R}^3 中的坐标函数在 Σ 上的限制是调和的, 这里 Σ 上必须是继承自 \mathbb{R}^3 上的度量. 命题 (1.15) 中的共形浸入的条件是必不可少的, 比如, 设 $X : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3, X(u, v) = (u, v, uv)$. 显然地, $\Delta X = 0$. 但是 $X(\mathbb{D})$ 不是极小曲面.

1.5 单调性公式

命题 1.17 (余面积公式). 设 $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 是光滑曲面. 设 $h: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ 是 Lipschitz, proper (紧集的原像为紧集) 映射. 则 $\forall f \in L^1_{loc}(\Sigma)$, 成立

$$\int_{\{h < t\}} f |\nabla_\Sigma h| d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{-\infty}^t \int_{\{h=r\}} f d\mathcal{H}^{n-2} dr \quad (1.44)$$

余面积公式相当于 Fubini 定理, 可以将多重积分变为累次积分来计算. 例如, 取 $\Sigma = \Omega, h(x, y) = x, f(x, y) = \chi_\Omega, t = +\infty$. 那么, 在余面积公式中,

$$\text{左侧} = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_\Omega = |\Omega| \quad (1.45)$$

$$\text{右侧} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\{x=r\}} \chi_\Omega dy dr = |\Omega| \quad (1.46)$$

命题 1.18. 设 $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 是光滑曲面. 设 $t > s$ 且 $B_t(p) \cap \partial\Sigma = \emptyset$. 设 $f \in C^1(\Sigma)$, \vec{H} 是 Σ 的平均曲率向量. 则有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t^{n-1}} \int_{\Sigma \cap B_t} f d\mathcal{H}^{n-1} - \frac{1}{s^{n-1}} \int_{\Sigma \cap B_s} f d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \int_{\Sigma \cap (B_t - B_s)} f \frac{|(x-p)^\perp|^2}{|x-p|^{n+1}} \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_s^t \frac{1}{r^n} \int_{\Sigma \cap B_r} (r^2 - |x-p|^2) \Delta_\Sigma f + 2f \langle \vec{H}, (x-p)^\perp \rangle d\mathcal{H}^{n-1} dr \end{aligned} \quad (1.47)$$

证明. 记 $I(r) = \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\Sigma \cap B_r} f$. 不失一般性, 设 $p = 0$. 对 $I(r)$ 求导, 则有

$$\frac{d}{dr} I(r) = -(n-1) \frac{1}{r^n} \int_{\Sigma \cap B_r} f + \frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} \int_{\Sigma \cap B_r} f \quad (1.48)$$

我们分别计算上式右侧的两项. 首先来计算第二项. 设 $f = g \frac{|x^T|}{|x|} = g |\nabla_\Sigma |x||$. 则由余面积公式 (取 $h = |x|$),

$$\int_{\Sigma \cap B_r} f = \int_{\{|x| < r\} \cap \Sigma} g |\nabla_\Sigma |x|| = \int_{-\infty}^r \int_{\{|x|=\rho\} \cap \Sigma} g d\mathcal{H}^{n-2} d\rho \quad (1.49)$$

因此,

$$\frac{d}{dr} \int_{\Sigma \cap B_r} f = \int_{\partial B_r \cap \Sigma} f \frac{|x|}{|x^T|} = r \int_{\partial B_r \cap \Sigma} f \frac{1}{|x^T|}. \quad (1.50)$$

设 \vec{n} 是 $B_r \cap \Sigma$ 在 $\partial B_r \cap \Sigma$ 上的单位法向. 容易验证 $\langle x^T, \vec{n} \rangle = |x^T|$. 现在, 我们来计算第一项. 由 $\Delta_\Sigma |x|^2 = 2(n-1) + 2\langle \vec{H}, x^\perp \rangle$ 及分部积分公式可

知,

$$\begin{aligned}
2(n-1) \int_{\Sigma \cap B_r} f &= \int_{\Sigma \cap B_r} f \Delta_{\Sigma} |x|^2 - 2 \int_{\Sigma \cap B_r} f \langle \vec{H}, x^{\perp} \rangle \\
&= \int_{\Sigma \cap B_r} |x|^2 \Delta_{\Sigma} f + 2 \int_{\partial B_r \cap \Sigma} f \langle \vec{n}, x^T \rangle \\
&\quad - \int_{\partial B_r \cap \Sigma} |x|^2 \langle \vec{n}, \nabla_{\Sigma} f \rangle - 2 \int_{\Sigma \cap B_r} f \langle \vec{H}, x^{\perp} \rangle \\
&= I + II + III + IV
\end{aligned} \tag{1.51}$$

现在, 在等式(1.51)中,

$$II = 2 \int_{\partial B_r \cap \Sigma} f |x^T|. \tag{1.52}$$

$$III = -r^2 \int_{\partial B_r \cap \Sigma} \langle \vec{n}, \nabla_{\Sigma} f \rangle = -r^2 \int_{B_r \cap \Sigma} \Delta_{\Sigma} f. \tag{1.53}$$

现在, 将(1.51)及(1.50)代入到(1.48)中, 则有

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr} I(r) &= -\frac{1}{2r^n} \int_{\Sigma \cap B_r} |x|^2 \Delta_{\Sigma} f - \frac{1}{r^n} \int_{\partial B_r \cap \Sigma} f |x^T| + \frac{1}{2r^{n-2}} \int_{B_r \cap \Sigma} \Delta_{\Sigma} f \\
&\quad + \frac{1}{r^n} \int_{\Sigma \cap B_r} f H |x^{\perp}| + \frac{1}{r^{n-2}} \int_{\partial B_r \cap \Sigma} \frac{f}{|x^T|} \\
&= \frac{1}{2r^n} \int_{\Sigma \cap B_r} (\Delta_{\Sigma} f (r^2 - |x|^2) + 2 \langle \vec{H}, x^{\perp} \rangle) + \frac{1}{r^n} \int_{\partial B_r \cap \Sigma} f \frac{|x^{\perp}|^2}{|x^T|}
\end{aligned} \tag{1.54}$$

再次利用余面积公式以及 $|\nabla^{\Sigma} |x|| = \frac{|x^T|}{|x|}$, 上式右侧第二项的积分为

$$\begin{aligned}
\int_s^t \frac{1}{r^n} \int_{\partial B_r \cap \Sigma} f \frac{|x^{\perp}|^2}{|x^T|^2} &= \int_s^t \int_{\{|x|=r\} \cap \Sigma} f \frac{|x^{\perp}|^2}{|x^T|} \frac{1}{|x|^n} \\
&= \int_{\{s < |x| < t\} \cap \Sigma} f \frac{|x^{\perp}|^2}{|x^T|} \frac{1}{|x|^n} |\nabla^{\Sigma} |x|| \\
&= \int_{(B_t - B_s) \cap \Sigma} f \frac{|x^{\perp}|^2}{|x|^{n+1}}
\end{aligned} \tag{1.55}$$

在等式 (1.54) 两侧取积分, 并将(1.55)代入即可得到单调性公式. \square

推论 1.19. 设 $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 是极小曲面. $x_0 \in \Sigma$, $B_s(x_0) \cap \partial \Sigma = \emptyset$. 设 $f \in C^\infty(\Sigma)$ 且 $f \geq 0, \Delta_{\Sigma} f \geq -\frac{\lambda f}{s^2}$, 则有

$$f(x_0) \leq e^{\frac{\lambda}{2}} \frac{\int_{B_s \cap \Sigma} f}{|B_s \cap \mathbb{R}^{n-1}|} \tag{1.56}$$

证明. 设 $g(t) = \frac{1}{t^{n-1}} \int_{B_t \cap \Sigma} f$, $t \leq s$. 将单调性公式代入 $\frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t}$ 中并扔掉非负的部分, 求极限后得到

$$\begin{aligned} g'(t) &\geq \frac{1}{2} \frac{1}{t^n} \int_{B_t \cap \Sigma} (t^2 - |x|^2) \Delta_\Sigma f \\ &\geq -\frac{\lambda}{2} \frac{1}{t^{n-2} s^2} \int_{B_t \cap \Sigma} f = -\frac{\lambda}{2} \frac{t}{s^2} g(t). \end{aligned} \quad (1.57)$$

于是有,

$$\frac{g'(t)}{g(t)} \geq -\frac{\lambda}{2s^2} t \geq -\frac{\lambda}{2s} \quad (1.58)$$

而这等价于: $\frac{d}{dt}(e^{\frac{\lambda t}{2s}} g(t)) \geq 0$. 因此, $|B_1 \subset \mathbb{R}^{n-1}| f(x_0) = g(0) \leq e^{\frac{\lambda}{2}} g(s)$, 证毕. \square

推论 1.20. 设 $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 是极小曲面. $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 设 $f \in C^\infty(\Sigma)$ 且 $f \geq 0, \Delta_\Sigma f \geq 0$, 则

$$\frac{1}{s^{n-1}} \int_{B_s(x_0) \cap \Sigma} f \quad (1.59)$$

关于变量 s 是非减函数. 特别地, 如果 $x_0 \in \Sigma$, 那么对于任意 $s > 0$, 成立

$$f(x_0) \leq \frac{\int_{B_s(x_0) \cap \Sigma} f}{|B_s \subset \mathbb{R}^{n-1}|} \quad (1.60)$$

1.6 Gauss 映射

设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 是光滑曲面. 设 \vec{n} 为其单位法向. 由于在 \mathbb{R}^3 中, \vec{n} 可以看作 \mathbb{S}^2 上的点, 我们可以得到映射 $N: \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2, N(p) = \vec{n}(p), p \in \Sigma$. 称 N 为曲面 Σ 的 Gauss 映射.

命题 1.21. 设 $p \in \Sigma$, 则 $T_{N(p)}\mathbb{S}^2 = T_p\Sigma$.

证明. $T_{N(p)}\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, N(p) \rangle = \langle x, \vec{n} \rangle = 0\} = T_p\Sigma$. \square

回忆一下, Π 表示标量值的第二基本形式, $\Pi(X, Y) = \langle \nabla_X Y, \vec{n} \rangle$, \vec{n} 表示 Σ 的一个给定的单位法向. $\forall p \in \Sigma$, Π 也可以看作是 $T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$ 的线性映射. $\forall X \in T_p\Sigma$, 定义 $\Pi(X)$ 为唯一满足下列性质的向量 Z .

$$\forall Y \in T_p\Sigma, \langle \Pi(X), Y \rangle = \langle Z, Y \rangle \quad (1.61)$$

根据定义易知, $\Pi = \nabla \vec{n}$.

命题 1.22. $\forall X, Y \in T_p \Sigma$, 有等式:

$$\langle \Pi(X, Y), \vec{n} \rangle = -\langle \nabla_X \vec{n}, Y \rangle = -\langle dNX, Y \rangle. \quad (1.62)$$

证明. 由于 $\langle \vec{n}, Y \rangle = 0$, 则有 $\langle \nabla_X Y, \vec{n} \rangle = -\langle Y, \nabla_X \vec{n} \rangle$.

第二个等式是因为 $\nabla_X \vec{n} = (\nabla \vec{n})X = dNX$, 即是欧氏空间中的方向导数. \square

命题 1.23. 设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 是光滑曲面. 则 Σ 是极小曲面当且仅当其 Gauss 映射是反共形的 (\mathbb{S}^2 上取由外单位法向所给定的定向). 反共形指的是保持角度大小而不保持方向.

注 1.24. 反向实际上排除了 Σ 是 \mathbb{S}^2 的一部分的情况.

证明. 固定点 $p \in \Sigma$. 由于 Π 是对称的, 则存在局部标架 $\{e_i\}$, 使得在 p 点处, $\Pi e_1 = \lambda_1 e_1$, $\Pi e_2 = \lambda_2 e_2$. (这里, λ_i, e_i 分别被称作曲面 Σ 的主曲率与主曲率方向). 现在, 我们有

$$\langle dNe_i, dNe_j \rangle = \langle \nabla_{e_i} \vec{n}, \nabla_{e_j} \vec{n} \rangle = \lambda_i \lambda_j \langle e_i, e_j \rangle \quad (1.63)$$

显然地, $dN = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ 是反共形的当且仅当 $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, 当且仅当 Σ 是极小曲面. \square

命题 1.25. 设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 是极小曲面. N 为其 Gauss 映射. $d\Sigma, \omega$ 分别为 Σ, \mathbb{S}^2 上的面积形式, 设 $N^* \omega$ 为其拉回. 则有

$$|\Pi|^2 d\Sigma = -2N^* \omega. \quad (1.64)$$

证明. 如是在命题(1.23)的证明中选择 $\{e_i\}$. 设 $\{e^{*i}\}$ 为其对偶标架. 由于 $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, 则

$$|\Pi|^2 d\Sigma = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) e^{*1} \wedge e^{*2} = -2\lambda_1 \lambda_2 e^{*1} \wedge e^{*2}. \quad (1.65)$$

而由于 $dN = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, 则 $|\Pi|^2 d\Sigma = -2N^* e^{*1} \wedge e^{*2}$. \square

1.7 Bernstein 定理

命题 1.26. 设 $u: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 MSE. 设 $\Sigma = \text{Graph}(u)$. 设 $\varphi \in \text{Lip}(\Sigma)$ 且 φ 具有紧支集, 则

$$\int_{\Sigma} |\Pi|^2 \varphi^2 \leq C \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \varphi|^2 \quad (1.66)$$

这里, C 是万有常数.

证明. 显然地, $N(\Sigma) \subset \mathbb{S}_+^2$. 设 ω 是 \mathbb{S}^2 上的面积形式. 由于 \mathbb{S}_+^2 是单连通的, 则存在 1-形式 α 使得 $\Omega = d\alpha$. 而拉回与求微分是可交换的, 于是有

$$|\Pi|^2 d\Sigma = -2N^*\omega = -2N^*d\alpha = -2d(N^*\alpha) \quad (1.67)$$

由于 $\forall 1$ -形式 β , $d(\varphi^2\beta) = \varphi^2\beta + 2\varphi d\varphi \wedge \beta$, 再由 Stokes 公式

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |\Pi|^2 \varphi^2 &= -2 \int_{\Sigma} \varphi^2 d(N^*\alpha) = -2 \int_{\Sigma} d(\varphi^2 N^*\alpha) + 4 \int_{\Sigma} \varphi d\varphi \wedge N^*\alpha \\ &= 4 \int_{\Sigma} \varphi d\varphi \wedge N^*\alpha \end{aligned} \quad (1.68)$$

在局部标架下, $\varphi = \varphi_i e^{*i}$, $N^* = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, $\alpha = \alpha_i e^{*i}$. 因此, 若设 $d\varphi \wedge N^*\alpha = f(x)d\Sigma$, 则 $|f| \leq C_{\alpha} |\nabla_{\Sigma}\varphi| |\Pi|$. 于是有

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |\Pi|^2 \varphi^2 &\leq C_{\alpha} \int_{\Sigma} |\Pi| |\varphi| |\nabla_{\Sigma}\varphi| \\ &\leq C_{\alpha} (\varepsilon \int_{\Sigma} |\Pi|^2 \varphi^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma}\varphi|^2) \end{aligned} \quad (1.69)$$

取 ε 使得 $\varepsilon C_{\alpha} = \frac{1}{2}$ 即可. \square

定理 1.27. 设 $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 在全平面上满足 MSE. 记 $\Sigma = \text{Graph}(u)$. 则 u 是仿射函数, 或者等价地, Σ 是平面.

证明. 我们首先说明, 如果下面的断言成立, 则 u 是仿射.

断言. $\forall k > 0$, 存在 $\varphi_k \in \text{Lip}(\Sigma)$ 使得 $\varphi_k|_{B_k \cap \Sigma} = 1$, φ_k 有紧支集且 $\int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma}\varphi_k|^2 \rightarrow 0$.

若断言成立, 那么由不等式(1.26)可知, $\int_{\Sigma \cap B_k} |\Pi|^2 \leq \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma}\varphi_k|^2 \rightarrow 0$. 则 $\Pi \equiv 0$. 因此 Σ 为平面.

现在我们来证明断言成立. $\forall k > 0$, 定义

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 1, & |x| < k, \\ 1 - \frac{\log|x| - \log k}{\log k}, & k \leq |x| \leq k^2, \\ 0, & |x| > k^2 \end{cases} \quad (1.70)$$

记 $R_{s,t} = B_t - B_s$ 为环域. 将 R_{k,k^2} 分解为若干环域的并

$$R_{k,k^2} = \bigcup_{i=0}^{\log k} R_{2^i k, 2^{i+1} k}. \quad (1.71)$$

直接计算可知, 在环域 $R_{2^i k, 2^{i+1} k}$ 上,

$$|\nabla_{\Sigma} \varphi| \leq |\nabla \varphi| \leq \frac{1}{\log k} \frac{1}{|x|} \quad (1.72)$$

以及

$$|R_{2^i k, 2^{i+1} k} \cap \Sigma| \leq C 2^{2i} k^2. \quad (1.73)$$

上面的不等式其实于是, 我们有

$$\int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \varphi_k|^2 \leq C \sum_{i=0}^{\log k} 2^{2i} k^2 \frac{1}{(\log k)^2} \frac{1}{2^{2i} k^2} \leq C \frac{1}{\log k} \rightarrow 0. \quad (1.74)$$

断言得证. \square

下面我们提供一个 Bernstein 定理的非常初等的证明. 这个证明没有用到任何极小曲面方程的性质, 只用到了 Gauss 映射, 球极投影和全纯函数的 Liouville 定理.

定义 1.28. 球极投影 π 是指 $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 的一个映射. 设 $p \in \mathbb{S}^2$, 设 l 为经过点 p 与点 $(0,0,1)$ 的直线. 设 l 与 xy 平面交于点 p' , 定义 $\pi(p) = p'$. 如图所示.

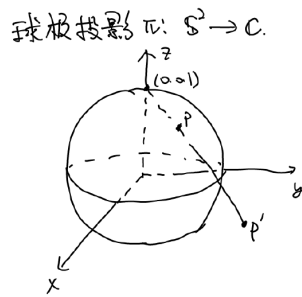


图 1.4: 球极投影

球极投影最重要的性质是它是共形 (反共形, 取决于我们选取的定向) 映射, 这意味着我们可以将与 \mathbb{S}^2 有关的共形映射变为定义在 \mathbb{C} 中某个区域

上的亚纯函数. π 与其逆的表达式为

$$\pi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right), (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \quad (1.75)$$

$$\pi^{-1}(w) = \left(\frac{2\Re w}{1+|w|^2}, \frac{2\Im w}{1+|w|^2}, \frac{-1+|w|^2}{1+|w|^2} \right), w \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}. \quad (1.76)$$

Bernstein 定理证明 II. 这里我们用设 f 满足极小曲面方程 (字母 u 留作它用). 将散度形式展开后得到

$$(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy} = 0 \quad (1.77)$$

定义下列三个函数,

$$a = \frac{1+f_x^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}, b = \frac{f_x f_y}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}, c = \frac{1+f_y^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \quad (1.78)$$

由于 f 满足极小曲面方程, 直接计算可知: $a_y = b_x, b_y = c_x$. 定义

$$\varphi(x, y) = \int_0^x \int_0^y b(s, t) dt ds + \int_0^x \int_0^t a(s, 0) ds dt + \int_0^y \int_0^t h(0, s) ds dt \quad (1.79)$$

可知,

$$\varphi_{xx} = a, \varphi_{xy} = b, \varphi_{yy} = c. \quad (1.80)$$

首先我们注意到,

$$\det \nabla^2 \varphi = ac - b^2 = 1 \quad (1.81)$$

那么, $\nabla^2 \varphi$ 正定或者负定. 这里我们假设 φ 为凸函数, 否则选取 $-\varphi$. 令

$$u = x + \varphi_x, v = y + \varphi_y. \quad (1.82)$$

断言 1: (u, v) 是 $\text{Graph}(f)$ 上的等温坐标.

显然地, 由 φ 的凸性可以知道, $(x, y) \rightarrow (u, v)$ 是 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 的微分同胚. 我们将 x, y 也看作是变量 (u, v) 的函数. 注意到, $\text{Graph}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. 在 (u, v) 坐标下则可以看作

$$\text{Graph}(f) = \{(x(u, v), y(u, v), f(x(u, v), y(u, v))) \mid (u, v) \in \mathbb{R}^2\}. \quad (1.83)$$

令 $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), f(x(u, v), y(u, v)))$. 现在, 只需要证明 X 是共形嵌入即可. 即需要证明 $\langle X_u, X_v \rangle = 0$ 以及 $|X_u| = |X_v|$.

后面为了记号方便, 记 $p = f_x, q = f_y, w = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$. 直接计算可知

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1+p^2}{w} & \frac{pq}{w} \\ \frac{pq}{w} & 1 + \frac{1+q^2}{w} \end{bmatrix} \quad (1.84)$$

那么,

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} = \frac{w}{(1+w)^2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1+q^2}{w} & -\frac{pq}{w} \\ -\frac{pq}{w} & 1 + \frac{1+p^2}{w} \end{bmatrix} \quad (1.85)$$

因此,

$$\begin{aligned} X_u &= (x_u, y_u, f_x x_u + f_y y_u) \\ &= \frac{w}{(1+w)^2} (1+w+q^2, -pq, p(1+w)). \end{aligned} \quad (1.86)$$

$$\begin{aligned} X_v &= (x_v, y_v, f_x x_v + f_y y_v) \\ &= \frac{w}{(1+w)^2} (-pq, 1+w+p^2, q(1+w)). \end{aligned} \quad (1.87)$$

这样, 断言得证. 现在, 我们知道当 $\text{Graph}(f)$ 赋予等温坐标后, 可以将 $\text{Graph}(f)$ 看作 \mathbb{C} . 考虑 Gauss 映射 N . 设 π 为球极投影. 我们知道 $g = \pi \circ N \circ X$ 是共形的. 显然地, $N \circ X(\mathbb{C}) \subset \mathbb{S}_+^2$. 这样由球极投影的性质易知, $|g| \geq 1$. 那么 $\left| \frac{1}{g} \right| \leq 1$. 而由于 $\frac{1}{g}$ 是定义在 \mathbb{C} 上的全纯函数, 由 Liouville 定理可知, g 常数. 即, $\text{Graph}(f)$ 的 Gauss 映射为常值映射, 那么 $\text{Graph}(f)$ 必定为平面. \square

1.8 Weierstrass 表示

命题 1.29. 设 $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ 光滑. Ω 上的坐标记为 (u, v) . 则 X 是局部嵌入当然且当 dX 非退化. 并且, X 是共形嵌入当且仅当 $|X_u| = |X_v| \neq 0, \langle X_u, X_v \rangle = 0$.

证明. 略. \square

定义 1.30. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Ω 上的坐标记为 (u, v) , 复坐标记为 $z = u + iv$. 对于任意 C^1 函数 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, 定义其形式偏导

$$\partial f = \frac{1}{2}(f_u - if_v), \bar{\partial} f = \frac{1}{2}(f_u + if_v). \quad (1.88)$$

其它的记号 $\partial_z f = \frac{\partial f}{\partial z} = \partial f, \partial_{\bar{z}} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \bar{\partial} f$ 也是常用的.

注 1.31. 易知, $\partial\bar{\partial}f = \frac{1}{4}\Delta f$.

命题 1.32. 设 $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是光滑嵌入. $X = (X_1, X_2, X_3)$. $\forall k$, 定义 $\varphi_k = 2\partial X_k$. 则

1. X 是共形的当且仅当 $\sum_k \varphi_k^2 = 0$.
2. 若 X 是共形的, 则 $X(\Omega)$ 是极小曲面当且仅当 $\forall k, \varphi_k$ 全纯.
3. 若 X 是共形的, 则 $X(\Omega)$ 上的度量可以表示为

$$ds^2 = \frac{1}{2} \sum_k |\varphi_k|^2 |dz|^2 \quad (1.89)$$

证明. 对于性质 (1), 直接计算可知

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\varphi_k\right)^2 &= (\partial X_k)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial X_k}{\partial u} - i \frac{\partial X_k}{\partial v} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(\left(\frac{\partial X_k}{\partial u} \right)^2 - \left(\frac{\partial X_k}{\partial v} \right)^2 - \frac{1}{2} i \frac{\partial X_k}{\partial u} \frac{\partial X_k}{\partial v} \right) \end{aligned} \quad (1.90)$$

因此, $\sum_k \varphi_k^2 = (|X_u|^2 - |X_v|^2) - 2i\langle X_u, X_v \rangle$. 由命题(1.29)可知结论成立.

对于性质 (2), 我们知道 $X(\Omega)$ 是极小的当且仅当 $\forall k, X_k$ 是调和函数.

而

$$X_k \text{ 调和} \iff \bar{\partial}\partial X_k = 0 \iff \partial X_k \text{ 全纯} \iff \varphi_k \text{ 全纯}.$$

性质 (3) 可由 $ds^2 = |X_u|^2 du^2 + 2\langle X_u, X_v \rangle dudv + |X_v|^2 dv^2$ 及性质 (2) 得到. \square

在单连通域上, 通过取 $\Phi_k = \int \varphi_k$, 我们可以得到以下定理:

定理 1.33 (Weierstrass 表示). 任意极小曲面 Σ 者可以局部地由三个满足 $\sum_k \Phi_k'^2 = 0$ 的全纯函数 Φ_k 确定, 并且 Σ 可以表示为 $\Sigma = X(\Omega)$, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ 满足

$$\begin{aligned} X &= \Re(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \\ &= \Re \int^z (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \end{aligned} \quad (1.91)$$

证明. 我们已经证明了任意满足这样条件的三个全纯函数都可以确定一个极小曲面. 而等温坐标及调和共轭的存在性则保证了每个极小曲面都可以局部地表示成这样的形式. $\forall p \in \Sigma$, 取 p 点处的等温坐标. 不失一般性, 可

以假设 $B_r \cap \Sigma = X(\mathbb{D})$, $X : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$. 那么, X 的三个分量都是调和函数. 而调和函数都可以作为全纯函数的实部, 因此存在三个全纯函数 Φ_k 使得 $X = \Re(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$. \square

由该定理可以知道, 要构造一个极小曲面, 我们只需要构造三个全纯函数 $\{\Phi_k\}$ 使得 $\sum \Phi_k^2 = 0$ 即可. 给定全纯函数 f 及亚纯函数 g , 取

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}f(1-g^2), \varphi_2 = \frac{i}{2}f(1+g^2), \varphi_3 = fg \quad (1.92)$$

那么, $\sum_k \varphi_k^2 = 0$ 恒成立. 只要我们先取 f, g 使得 φ_k 都是全纯函数, 便能得到一个极小曲面. 另一方面, 简单计算可知,

$$f = \varphi_1 - i\varphi_2, g = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2} = -\frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\varphi_3} \quad (1.93)$$

因此, 每个极小曲面都可以局部地由 (g, f) 给出. 称 (g, f) 为极小曲面的 Weierstrass 表示对.

注 1.34. 为了使得 φ_k 都是全纯函数, 对于亚纯函数 g 的极点需要有一定的限制. 比如如果 f 在 p 点处有一个 n 阶零点, 那么 g 在 p 点处极点的阶数至多为 $\frac{n}{2}$. 另外, 由于 X 是嵌入, f 不包含零点.

亚纯函数 g 实际上是 Gauss 映射, 下面的命题(1.36)阐述了这件事. 首先证明全纯函数的一个简单性质.

引理 1.35. 设 $z = u + iv$, $F(z) = f(z) + ig(z)$, f, g 均为实值函数. 那么

$$1. \partial_u f = \Re F'.$$

$$2. \partial_v f = -\Im F'.$$

证明. 直接代入定义及 Cauchy 方程即可.

$$\begin{aligned} F' = \partial F &= \frac{1}{2}(F_u - iF_v) \\ &= \frac{1}{2}(f_u + ig_u - if_v + g_v) \\ &= f_u - if_v \end{aligned} \quad (1.94)$$

\square

命题 1.36. 设 Ω 为单连通区域. $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ 为共形嵌入且 $X(\Omega)$ 为极小曲面. 设 $\pi: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ 是球极投影. N 为 $X(\Omega)$ 的 Gauss 映射. 设 (g, f) 为 X 的 Weierstrass 表示对. 则

$$ds^2 = \lambda^2 |dz|^2 = \frac{1}{4} |f|^2 (1 + |g|^2)^2 |dz|^2. \quad (1.95)$$

$$g = \pi \circ N \circ X. \quad (1.96)$$

证明. ds^2 可直接计算. 对于 Gauss 映射, 首先由全纯函数的性质可知,

$$\partial_u \Re \int \varphi = \Re \varphi \quad (1.97)$$

$$\partial_v \Re \int \varphi = -\Im \varphi \quad (1.98)$$

因此, 我们有

$$\begin{aligned} & X_u \wedge X_v \\ &= -(\Re \varphi_1, \Re \varphi_2, \Re \varphi_3) \wedge (\Im \varphi_1, \Im \varphi_2, \Im \varphi_3) \\ &= - \begin{bmatrix} \Re \varphi_1 & \Re \varphi_2 & \Re \varphi_3 \\ \Im \varphi_1 & \Im \varphi_2 & \Im \varphi_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \end{bmatrix} \\ &= -(\Re \varphi_2 \Im \varphi_3 - \Im \varphi_2 \Re \varphi_3, \Re \varphi_3 \Im \varphi_1 - \Im \varphi_3 \Re \varphi_1, \Re \varphi_1 \Im \varphi_2 - \Re \varphi_2 \Im \varphi_1) \\ &= (\Im \varphi_2 \bar{\varphi}_3, \Im \varphi_3 \bar{\varphi}_1, \Im \varphi_1 \bar{\varphi}_2) \\ &= (\Im \frac{i}{2} |f|^2 (1 + g^2) \bar{g}, \frac{1}{2} |f|^2 (1 - \bar{g}^2) g, \Im \frac{i}{4} |f|^2 (1 - g^2) (1 - \bar{g}^2)) \end{aligned} \quad (1.99)$$

这里, \Re, \Im 分别表示实部与虚部. 于是,

$$|X_u \wedge X_v| = \frac{1}{4} |f|^2 (1 + |g|^2)^2 \quad (1.100)$$

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|} = \frac{1}{1 + |g|^2} (2\Re g, 2\Im g, |g|^2 - 1) \quad (1.101)$$

最终由球极投影的定义(1.28)可知 $\pi \circ N \circ X = g$. \square

由上面的命题可知, 亚纯函数 g 的极点的几何含意是明显的, 在 g 的极点处, 极小曲面的单位法向垂直向上.

另一种表示方法为 (g, dh) . 这里 g 如上. dh 为亚纯微分. 我们只需要取 $dh = fgdz$ 即可. 这样, Weierstrass 表示也可以写为

$$X = \Re \int^z \left(\frac{1-g^2}{2g}, \frac{i(1+g^2)}{2g}, 1 \right) dh \quad (1.102)$$

在这种表示下, dh 被称为高度微分 (height differential), 它的几何含意也是明显地, 我们有

$$\Re dh = dX_3. \quad (1.103)$$

极小曲面的例子

Catenoid: $g(z) = z, dh = \frac{1}{z}dz, z \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Catenoid 是由悬链线 (xz 平面上的曲线 $x = \cosh z$) 旋转而得到的.

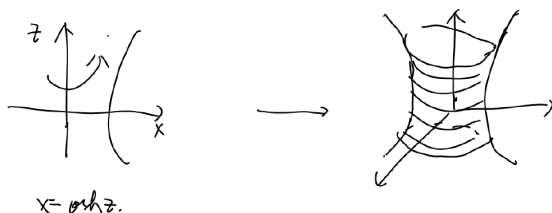


图 1.5: Catenoid

Helicoid: $g(z) = z, dh = \frac{i}{z}dz, z \in \mathbb{C} - \{0\}$. Helicoid 是由一条水平直线匀速螺旋上升而得到的. Helicoid 可以局部地表示为 $z = \arctan \frac{y}{x}$ 的形式.

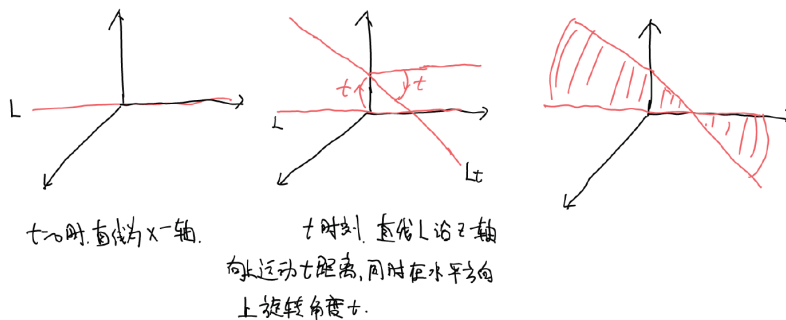


图 1.6: Helicoid

Catenoid 与 Helicoid 的关系: Helicoid 可以由 Catenoid 连续变化而得

到. 注意观察它们的 Weierstrass 表示对分别为 $(z, \frac{1}{z}dz)$, $(z, \frac{i}{z}dz)$.

$$\text{Catenoid} = \Re \int \left(\frac{1-z^2}{2z}, \frac{i(1+z^2)}{2z}, 1 \right) \frac{1}{z} dz \quad (1.104)$$

$$\text{Helicoid} = \Re i \int \left(\frac{1-z^2}{2z}, \frac{i(1+z^2)}{2z}, 1 \right) \frac{1}{z} dz \quad (1.105)$$

$$(1.106)$$

现在, 定义

$$\Sigma_t = \Re e^{\frac{\pi i t}{2}} \int \left(\frac{1-g^2}{2g}, \frac{i(1+g^2)}{2g}, 1 \right) \frac{1}{z} dz \quad (1.107)$$

那么, 对于每一个 θ , Σ_θ 都是极小曲面, 并且 $\theta = 0, 1$ 时得到的分别为

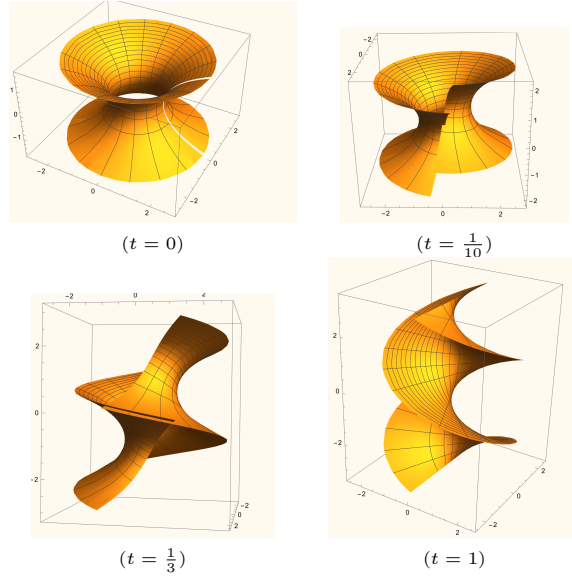


图 1.7: Catenoid 到 Helicoid 的连续形变

Catenoid 与 Helicoid. 图(1.7)表示了这个连续变化的过程.

The singly periodic Scherk surface. 单周期 Scherk surface 的 Weierstrass 表示为

$$g(z) = z, dh = \frac{iz}{z^4 - 1}$$

$$X(z) = \Re \int_0^z \left(\frac{1-w^2}{2w}, \frac{i(1+w^2)}{2w}, 1 \right) \frac{iw}{w^4 - 1} dw$$

这里, \int_0^z 表示沿条连接 0 与 z 点的路径的曲线积分. 然而由于被积函数不是全纯的, 这个路径是依赖于路径的选取的. 我们接下来将会说明, 对路径的依赖将会导致曲面具有周期性.

首先来看 $X(z)$ 的 x 分量. 我们计算一下 $x(z)$ 对路径的依赖是什么样的. 对于 x 坐标, $\{\pm i\}$ 是积分的奇点. 设 α, β 为如图所示的两条路径, 那么

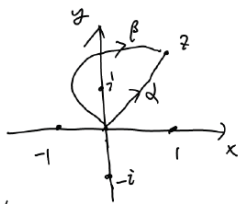


图 1.8: x-coordinate

$$\begin{aligned} \int_{\alpha-\beta} \frac{1}{2} \frac{1-w^2}{w} \frac{iw}{w^4-1} &= -\frac{i}{2} \int_{\alpha-\beta} \frac{1}{1+w^2} \\ &= -\frac{i}{2} 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+w^2}\right) \big|_{w=i} = -\frac{\pi}{2} i. \end{aligned} \quad (1.108)$$

对于点 $-i$ 处的计算也是如此. 因此, x -坐标与积分路径的选择无关. 同样地, 对于 y -坐标, $\{\pm 1\}$ 是其奇点. 设 α, β 如图, 那么直接计算可知

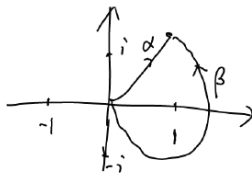


图 1.9: y-coordinate

$$\begin{aligned} \int_{\alpha-\beta} \frac{i}{2} \frac{1+w^2}{w} \frac{iw}{w^4-1} &= \frac{1}{2} \int_{\alpha-\beta} \frac{1}{1-w^2} \\ &= \frac{1}{2} 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1-w^2}\right) \big|_{w=1} = \frac{\pi}{2} i \end{aligned} \quad (1.109)$$

因此, y -坐标也与路径的选择无关.

而对于 z - 坐标, 我们只以图(1.8)中的情况为例来说明.

$$\int_{\alpha-\beta} \frac{iw}{w^4-1} = i2\pi i \text{Res}\left(\frac{w}{w^4-1}\right) \Big|_{w=i} = \frac{\pi}{2} \quad (1.110)$$

因此, z - 坐标是路径的选择有关的. 令

$$\Omega = \mathbb{C} - \{(x, y) \mid y = 0, |x| \geq 1 \text{ 或 } x = 0, |y| \geq 1\} \quad (1.111)$$

那么, Ω 是单连通的. $\forall z \in \Omega$, 选择曲线 $\alpha \subset \Omega$ 使得 $\alpha(0) = 0, \alpha(1) = z$. 那么我们就可以定义

$$X(z) = \Re \int_{\alpha} \left(\frac{1}{2} \frac{1-w^2}{w}, \frac{i}{2} \frac{1+w^2}{w}, 1 \right) \frac{iw}{w^4-1} dw \quad (1.112)$$

由于我们选择了 Ω 单连通, 那么 X 是良好定义的. 这样我们得到了 $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ 的一个极小曲面.

$\forall z$, 选择 β 使得 $\beta(0) = 0, \beta(1) = z$, 但是比起 α , 我们要求 β 在点 i 处绕了一圈. 如图(1.10)所示. 定义

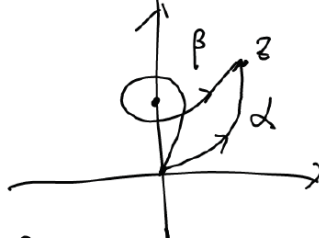


图 1.10: z -coordinate

$$\tilde{X}(z) = \Re \int_{\beta} \left(\frac{1}{2} \frac{1-w^2}{w}, \frac{i}{2} \frac{1+w^2}{w}, 1 \right) \frac{iw}{w^4-1} dw \quad (1.113)$$

根据我们之前的计算, $x = \tilde{x}, y = \tilde{y}, z = \tilde{z} - \frac{\pi}{2}$. 因此, $\tilde{X}(\Omega)$ 是 $X(\Omega)$ 向上平移而得到的. 实际上, $X(\Omega) \cup \tilde{X}(\Omega)$ 可以光滑地拼接在一起. 另外, 假如我们选择 β 在点 i 处绕 k 圈时, 将恰好得到由 $X(\Omega)$ 向上平移 $\frac{k\pi}{2}$ 而得到的极小曲面. 将无数个这样的曲面拼接在一起就得到了单周期的 Scherk surface. 图(1.11)显示了 Scherk 曲面在一个周期内的图像 (Helicoid 也是同样的, 在 z - 方向上是周期的, 只是 Helicoid 时的周期性很容易得到).

借助于 Weierstrass 表示, 我们来研究 Gauss 映射的值分布, 并给出 Bernstein 定理的一个新的证明.

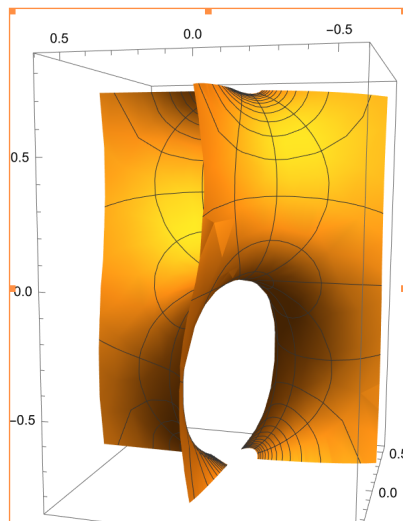


图 1.11: 单周期 Scherk 曲面

引理 1.37. 设 q 是 \mathbb{D} 上的全纯函数. 如果 q 没有零点, 那么度量 $|q|^2 |dz|^2$ 不是完备的.

证明. 直接计算可知, 若 q 没有零点, 则 $|q|^2 |dz|^2$ 是平坦度量. 如果这个度量是完备的, 那么指数映射将给出 $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ 的共形映射, 这是不可能的. \square

定理 1.38. 设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 是非平坦的完备极小曲面, 则其 Gauss 映射的像在 \mathbb{S}^2 中稠密.

证明. 设 Σ 是单连通的, 否则可以取 Σ 的万有覆盖. 如果 $N(\Sigma)$ 不是稠密的, 可以旋转 Σ , 使得 $\overline{N(\Sigma)}$ 取不到 $(0, 0, -1)$ 的邻域. 这样得到的 Gauss 映射 $\pi \circ g : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ 是有界的, 即有 $|g| \leq C$. 由于 Σ 是单连通的, 则 Σ 共形等价于 \mathbb{D} 或者 \mathbb{C} . 如果是前者, 则由等式(1.95)可知, Σ 上的度量满足 $ds^2 \leq C |f|^2 |dz|^2$. 由引理(1.37)可知, ds^2 不可能是完备的. 而如果是后者, 则得到了 $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 上的有界全纯函数 g , 而此时 g 必定为常数, 这意味着 Σ 是平坦的. \square

推论 1.39. 如果 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 是极小曲面, 且其 Gauss 映射的像不包含 \mathbb{S}^2 中的某个开集. 则 Σ 是平坦的.

1.9 MSE revisited

命题 1.40. 设 u, v 满足极小曲面方程, 则 $w = u - v$ 满足一个线性椭圆方程

$$\operatorname{div}(a^{ij}w_i\partial_j) = 0 \quad (1.114)$$

并且存在常数 $C = C(Du, Dv)$ 使得 $\frac{1}{C} \leq \lambda_{\min} \leq \lambda_{\max} \leq C$.

证明. 设 $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(x) = \frac{x}{\sqrt{1+|x|^2}}$. 由微积分基本定理

$$\begin{aligned} F(Du) - F(Dv) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tDu + (1-t)Dv) dt \\ &= \int_0^1 dF(tDu + (1-t)Dv)(Du - Dv) dt \\ &= \int_0^1 dF(tDu + (1-t)Dv) dw dt \\ &= a^{ij}w_i\partial_j \end{aligned} \quad (1.115)$$

其中, $a^{ij} = \int_0^1 \frac{\partial F^i}{\partial x^j}(tDu + (1-t)Dv) dt$.

由于 $\operatorname{div}(F(Du)) = \operatorname{div}(F(Dv)) = 0$, 则

$$\operatorname{div}(a^{ij}w_i\partial_j) = 0. \quad (1.116)$$

直接计算可知

$$\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right] = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{3}{2}}} ((1+|x|^2)I - xx^T) \quad (1.117)$$

显然为正定矩阵, 且其特征值为 $\lambda_1 = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}$. 结论得证. \square

推论 1.41. 设 u, v 满足 MSE, $u(p) = v(p)$ 且在 p 点的邻域内, $u \geq v$. 则 $u \equiv v$.

证明. 设 $w = u - v$. 则在点 p 的邻域内, $w(p) = 0$ 并且 $w \geq 0$. 由强最大值原理可知, $w \equiv 0$. \square

推论 1.42. 设 $\Sigma_1, \Sigma_2 \subset \mathbb{R}^n$ 是极小曲面, 设 $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ 是 Σ_1, Σ_2 的内点. 若 Σ_1 完全位于 Σ_2 的同一侧, 则 $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

证明. 由假设条件, Σ_1, Σ_2 在 p 点处相切. 设 p 点的邻域中, $\Sigma_1 = \text{Graph}(u)$, $\Sigma_2 = \text{Graph}(v)$. 由于 Σ_1 完全位于 Σ_2 的同一侧, 这里不妨设为上方, 则 $u \geq v$. 又由于 $u(p) = v(p)$, 则由强最大值原理可知 $u \equiv v$. \square

定理 1.43. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是严格凸的. $\Gamma = \text{Graph}(\psi) \subset \partial\Omega \times \mathbb{R}$, 其中, $\psi \in C(\partial\Omega)$. 设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 是以 Γ 为边界的极小曲面, 则存在函数 u 使得 $\Sigma = \text{Graph}(u)$.

证明. 首先说明 $\Sigma \subset \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$. 否则, 取 $x \in \Omega$, 取 $R > 0$ 使得 $\Sigma \subset B_R \times \mathbb{R}$ 并且 Σ 与 $\partial B_R \times \mathbb{R}$ 相切于点 $y \in \partial B_R \times \mathbb{R}$. 设 $\tilde{\Sigma}$ 为 $\partial B_R \times \mathbb{R}$ 在点 y 处的切平面, 则 Σ 完全位于 $\tilde{\Sigma}$ 的同一侧且它们相切于点 y . 由最大值原理可知, $\Sigma = \tilde{\Sigma}$, 这样便推出一个矛盾. 因此, $\Sigma \subset \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$.

设 P_t 为平面 $\{x_3 = t\}$. 设 P_t 与 Σ 相交. 记 Σ_t^+ 为 Σ 在平面 P_t 上侧的部分, Σ_t^- 为 Σ 在平面 P_t 下侧的部分. 将 Σ_t^+ 反射到 P_t 下侧, 记为 $\tilde{\Sigma}_t^+$. 现在我们考虑下面两种情况:

1. $\forall t, \tilde{\Sigma}_t^+ \cap \Sigma_t^- = \emptyset$, 则 $\pi: \Sigma \rightarrow \Omega$ 必定为单射. 否则, 若存在 $p_1, p_2 \in \Sigma$ 使得 $\pi(p_1) = \pi(p_2)$, 不妨设 p_1 在上侧. 则取 $t = \frac{1}{2}(z(p_1) + z(p_2))$ 时, 必定有 $p_2 \in \tilde{\Sigma}_t^+ \cap \Sigma_t^-$, 这样也假设矛盾. 因此, Σ 作为某个函数的图像.
2. $\exists t$ 使得 $\tilde{\Sigma}_t^+ \cap \Sigma_t^- \neq \emptyset$. 取这样最大的 t . 则 $\tilde{\Sigma}_t^+$ 完全位于 Σ_t^- 的上侧. 当 t 再减小时, 设 $\Lambda = \tilde{\Sigma}_t^+ \cap \Sigma_t^-$, 则 $\Lambda \subset \Omega \times \mathbb{R}$ (因为 $\partial\Sigma$ 是边界上的 Graph , 因此 Λ 不可能与 $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ 相交). 显然地, Λ 同时围出 $\tilde{\Sigma}_t^+, \Sigma_t^-$ 上的两个极小曲面. 通过选取 t 足够接近 t_0 , 我们可以假设这两个极小曲面都能 (旋转坐标系之后) 写成函数的图像的形式, 这样便与最大值原理矛盾.

\square

注 1.44. 上面的定理将 Σ 写成函数 u 的图像之后, 虽然 Σ 是光滑的, 但是到现在为止我们还不能得到 u 的光滑性.

定理 1.45. 设 u 满足 MSE , 则 u 是实解析的.

证明. $n = 2$ 时, [6, p.125] 中提供了一个非常简单的证明. 一般情况下请参考 [2] 及其中的参考文献. \square

定理 1.46. 设 $\Sigma_1, \Sigma_2 \subset \mathbb{R}^3$ 是极小曲面, 且 Σ_1, Σ_2 在点 $p \in \mathbb{R}^3$ 处相切. 则在 p 点的某个邻域中, 或者 $\Sigma_1 = \Sigma_2$, 或者 $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ 包含 $2k$ 条由 p 点发出的曲线 ($k \geq 2$), 且这些曲线中相邻两条之间的夹角是 $\frac{\pi}{k}$.

证明. 设 $p = 0, \Sigma_1 = \text{Graph}(u), \Sigma_2 = \text{Graph}(v)$, 且 $u(0) = v(0), Du(0) = Dv(0)$. 记 $w = u - v$. 由于 u, v 均是解析函数, 则

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{i=k}^{+\infty} \sum_{j=0}^i \frac{1}{j!(k-j)!} \frac{\partial^k w}{\partial x^j \partial y^{k-j}} x^j y^{k-j} \\ &= \sum_{i=k}^{+\infty} P_i(x, y), (k \geq 2). \end{aligned} \quad (1.118)$$

这里, 每一项 P_i 都是 i -次齐次的多项式. 由于 w 是解析函数, 我们可以逐项求导, 于是有

$$\Delta w = \sum_{i=k}^{+\infty} \Delta P_i(x, y). \quad (1.119)$$

记 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. 幂级数的阶由其第一项非零决定, 因此若 $\Delta P_k \neq 0$, 则

$$\Delta w = O(r^{k-2}). \quad (1.120)$$

由于 u, v 满足 MSE, 则

$$\Delta u = 2u_x u_y u_{xy} - u_x^2 u_{yy} - u_y^2 u_{xx} \quad (1.121)$$

$$\Delta v = 2v_x v_y v_{xy} - v_x^2 v_{yy} - v_y^2 v_{xx} \quad (1.122)$$

两式相减后得到

$$\Delta w = 2u_x u_y u_{xy} - u_x^2 u_{yy} - u_y^2 u_{xx} - 2v_x v_y v_{xy} + v_x^2 v_{yy} + v_y^2 v_{xx} \quad (1.123)$$

现在, 我们需要知道右侧的阶的大小, 因此, 我们希望把右侧变为每一项都包含 w 及其导数的形式. 前三项保持不变. 后三项中, 将每一项中 v 的二阶导数的项用 $v = u - w$ 代替, 则得到

$$\begin{aligned} \Delta w &= u_{xy}(2u_x u_y - 2v_x v_y) - u_{yy}(u_x^2 - v_x^2) - u_{xx}(u_y^2 - v_y^2) \\ &\quad - 2v_x v_y w_{xy} - v_x^2 w_{yy} - v_y^2 w_{xx} \\ &= 2u_{xy}(u_x w_y + v_y w_x) - u_{yy}(u_x + v_x)w_x - u_{xx}(u_y + v_y)w_y \\ &\quad - 2v_x v_y w_{xy} - v_x^2 w_{xx} - v_y^2 w_{yy} \end{aligned} \quad (1.124)$$

上面右侧的每一项都含有 w 的导数并且由于 $Du(0) = Dv(0) = 0$, 则

$$\Delta w = O(r^k) \quad (1.125)$$

综合(1.120),(1.125)以及 ΔP_k 至多是 $k-2$ 阶多项式的事实, 必有 $\Delta P_k = 0$. 那么, 存在全纯函数 $h(z)$ 使得 $P_k(z) = \Re(h(z))$. 而由于 $P_k = O(r^k)$, 则 $h(z)$ 在零点处的阶为 k . $h(z) = \Re(z^k \tilde{h}(z))$. 其中, $\tilde{h}(0) \neq 0$. 记 $w = z\tilde{h}(z)^{\frac{1}{k}}$. 则 $w(z)$ 在零点附近是共形变换, 因此我们可以将 w 看成新的坐标系. 在 $w = re^{i\theta}$ 坐标下, $P_k(z(w)) = \Re(w^k) = r^k \cos(k\theta)$. 因此, 在 w 坐标下, $P_k = 0$ 由 $2k$ 条曲线组成, 相邻两条之间的夹角是 $\frac{\pi}{k}$. 而 $w - P_k = o(r^k)$, 而角度只与 C^1 行为有关. \square

1.10 第二变分与稳定性

设 $F(x, t) : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ 是曲面 Σ 的一个变分 (连续形变) 满足

$$F(x, 0) = x. \quad (1.126)$$

定理 1.47. 设所有记号如第(1.2)节中所介绍的. 设 $d\mu_t = d\Sigma_t = \sqrt{\det g} dx$ 为 Σ_t 上的面积形式.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \text{Area}(\Sigma_t) |_{t=0} &= \int_{\Sigma} - \sum_{ij} \langle \nabla_{\partial_i} \partial_t F, \partial_j \rangle \langle \nabla_{\partial_j} \partial_t F, \partial_i \rangle + \text{div}_{\Sigma}(\nabla_{\partial_t F} \partial_t F) \\ &\quad + |\nabla^{\perp} \partial_t F|^2 - \sum_i^{n-1} R(\partial_i, \partial_t F, \partial_i, \partial_t F) + (\text{div}_{\Sigma} \partial_t F)^2 d\mu \end{aligned} \quad (1.127)$$

证明. 对 $\text{Area}(\Sigma_t)$ 求导, 则有

$$\frac{d^2}{dt^2} \text{Area}(\Sigma_t) = \int_{\Sigma_t} \frac{d^2}{dt^2} d\mu_t \quad (1.128)$$

而根据第一变分公式中的计算 (1.25),

$$\frac{d}{dt} d\mu_t = \text{div}_{\Sigma_t}(\partial_t F) d\mu_t \quad (1.129)$$

固定点 $p \in \Sigma$, 取 p 点附近的测地坐标 x_i . 所有计算都在 p 点进行. 记 $\partial_i F = dF \partial_i$. 需要注意, 不在 p 点时, 不一定有 $\langle \partial_i F, \partial_j F \rangle = \delta_{ij}$. 由散度的定义,

$$\text{div}_{\Sigma_t}(\partial_t F) = g^{ij} \langle \nabla_{\partial_i F} \partial_t F, \partial_j F \rangle \quad (1.130)$$

则有

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}d\mu_t &= \frac{d}{dt}\operatorname{div}_{\Sigma_t}(\partial_t F)d\mu_t + \operatorname{div}_{\Sigma_t}(\partial_t F)\frac{d}{dt}d\mu_t \\
&= \frac{d}{dt}g^{ij}\langle\nabla_{\partial_i F}\partial_t F, \partial_j F\rangle d\mu_t + g^{ij}\frac{d}{dt}\langle\nabla_{\partial_i F}\partial_t F, \partial_j F\rangle d\mu_t \\
&\quad + (\operatorname{div}_{\Sigma_t}(\partial_t F))^2 d\mu_t \\
&= I + II + III
\end{aligned} \tag{1.131}$$

现在我们分别来计算这三项. 首先计算第一项. 由于 $gg^{-1} = Id$, 则

$$\frac{d}{dt}g^{-1}(t) = -g^{-1}\frac{d}{dt}gg^{-1}. \tag{1.132}$$

于是,

$$\frac{d}{dt}g^{ij}(t)|_{t=0} = -\langle\nabla_{\partial_i}\partial_t F, \partial_j\rangle - \langle\partial_i, \nabla_{\partial_j}\partial_t F\rangle. \tag{1.133}$$

则有

$$I = -\sum_{ij}^{n-1}\langle\nabla_{\partial_i}\partial_t F, \partial_j\rangle^2 - \sum_{ij}^{n-1}\langle\nabla_{\partial_i}\partial_t F, \partial_j\rangle\langle\nabla_{\partial_j}\partial_t F, \partial_i\rangle \tag{1.134}$$

现在计算 II . 在 p 点处, $t = 0$ 时, 由 Ricci 恒等式

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z &= \nabla_{XY}^2 Z - \nabla_{YX}^2 Z \\
&= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[Y, X]}Z
\end{aligned} \tag{1.135}$$

可知,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle\nabla_{\partial_i F}\partial_t F, \partial_j F\rangle &= \langle\nabla_{\partial_t F}\nabla_{\partial_i F}\partial_t F, \partial_j F\rangle + \langle\nabla_{\partial_i F}\partial_t F, \nabla_{\partial_t F}\partial_j F\rangle \\
&= \langle\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_t F}\partial_t F - R(\partial_t F, \partial_i, \partial_t F), \partial_j\rangle + \langle\nabla_{\partial_i F}\partial_t F, \nabla_{\partial_j F}\partial_t F\rangle
\end{aligned} \tag{1.136}$$

又知 $R(X, Y, Z, T)$ 关于 (1,2), (3,4) 位置分别是反对称的, 于是有

$$\begin{aligned}
II &= \operatorname{div}_{\Sigma}(\nabla_{\partial_t F}\partial_t F) - \sum_i^{n-1}R(\partial_t F, \partial_i, \partial_t F, \partial_i) + \sum_i^{n-1}\langle\nabla_{\partial_i}\partial_t F, \nabla_{\partial_i}\partial_t F\rangle \\
&= \operatorname{div}_{\Sigma}(\nabla_{\partial_t F}\partial_t F) - \sum_i^{n-1}R(\partial_i, \partial_t F, \partial_i, \partial_t F) + \sum_i^{n-1}\langle\nabla_{\partial_i}\partial_t F, \nabla_{\partial_i}\partial_t F\rangle
\end{aligned} \tag{1.137}$$

上式中的最后一项可以变形为

$$\begin{aligned}
& \sum_i^{n-1} \langle \nabla_{\partial_i} \partial_t F, \nabla_{\partial_i} \partial_t F \rangle \\
&= \sum_i^{n-1} \langle \nabla_{\partial_i}^\perp \partial_t F, \nabla_{\partial_i}^\perp \partial_t F \rangle + \sum_i^{n-1} \langle \nabla_{\partial_i}^T \partial_t F, \nabla_{\partial_i}^T \partial_t F \rangle \\
&= \sum_i^{n-1} \langle \nabla_{\partial_i}^\perp \partial_t F, \nabla_{\partial_i}^\perp \partial_t F \rangle + \sum_i^{n-1} \left\langle \nabla_{\partial_i} \partial_t F, \sum_j^{n-1} \langle \nabla_{\partial_i} \partial_t F, \partial_j \rangle \partial_j \right\rangle \\
&= |\nabla^\perp \partial_t F|^2 + \sum_{ij} \langle \nabla_{\partial_i} \partial_t F, \partial_j \rangle^2
\end{aligned} \tag{1.138}$$

因此,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} d\mu_t \big|_{t=0} &= - \sum_{ij} \langle \nabla_{\partial_i} \partial_t F, \partial_j \rangle \langle \nabla_{\partial_j} \partial_t F, \partial_i \rangle + \operatorname{div}_\Sigma (\nabla_{\partial_t F} \partial_t F) + |\nabla^\perp \partial_t F|^2 \\
&\quad - \sum_i^{n-1} R(\partial_i, \partial_t F, \partial_i, \partial_t F) + (\operatorname{div}_\Sigma \partial_t F)^2 d\mu
\end{aligned} \tag{1.139}$$

积分后便得到第二变分公式 (1.127). \square

注 1.48. 上面的记号中, $|\nabla^\perp X|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{e_i}^\perp X, \nabla_{e_i}^\perp X \rangle^2$. 其中, $\{e_i\}$ 是 $T\Sigma$ 的局部标准正交标架.

现在, 设 $F(x, t)$ 是具有紧支集的法向变分, 即 $\partial_t F \perp \Sigma$. 设 Σ 是极小曲面. 在这种情况下, 我们分别化简(1.127)右侧的五项.

$$\langle \nabla_{e_i} \partial_t F, e_j \rangle = -\langle \partial_t F, \nabla_{e_i} e_j \rangle = -\langle \partial_t F, A_{ij} \rangle. \tag{1.140}$$

于是,

$$\sum_{ij} \langle \nabla_{\partial_i} \partial_t F, \partial_j \rangle \langle \nabla_{\partial_j} \partial_t F, \partial_i \rangle = -\langle A(\cdot, \cdot), \partial_t F \rangle^2. \tag{1.141}$$

由于 $\partial_t F|_{\partial\Sigma} = 0$, 由 Stokes 公式可知

$$\int_\Sigma \operatorname{div}_\Sigma (\nabla_{\partial_t F} \partial_t F) = 0. \tag{1.142}$$

第五项中,

$$\operatorname{div}_\Sigma (\partial_t F) = -\langle \vec{H}, \partial_t F \rangle = 0. \tag{1.143}$$

因此, 第二变分公式可以简化为

$$\frac{d^2}{dt^2} \text{Area}(\Sigma_t) \big|_{t=0} = \int_{\Sigma} -\langle A(\cdot, \cdot), \partial_t F \rangle^2 + |\nabla^\perp \partial_t F|^2 - \text{Tr} R(\cdot, \partial_t F, \cdot, \partial_t F) \quad (1.144)$$

定义 1.49. 称 $\Sigma^{n-1} \subset \mathcal{M}^n$ 为 *two-sided*, 如果 Σ 存在法向量场. 否则称为 *one-sided*.

注 1.50. *one-sided* 子流形的例子是欧氏空间中的莫比乌斯带. 当 \mathcal{M} 可定向时, Σ^{n-1} 为 *two-sided* 当且仅当 Σ^{n-1} 是定向子流形. 我们总是假设 \mathcal{M}^n 可定向且 $\Sigma^{n-1} \subset \mathcal{M}^n$ 是定向子流形, 这样 Σ^{n-1} 上总是存在处处有定义光滑单位法向量场.

设 Σ 是可定向的, 记 $\partial_t F = f\vec{n}$, 在第三项中, 由于 $|\vec{n}| = 1$, 由 $\langle \nabla_{e_i} \vec{n}, \vec{n} \rangle = 0$. 因此,

$$\nabla_{e_i}^\perp(f\vec{n}) = (e_i(f)\vec{n} + f\nabla_{e_i} \vec{n})^\perp = e_i(f)\vec{n} \quad (1.145)$$

则有

$$\begin{aligned} |\nabla^\perp(f\vec{n})|^2 &= \sum_i^{n-1} \langle \nabla_{e_i}^\perp(f\vec{n}), \nabla_{e_i}^\perp(f\vec{n}) \rangle^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} e_i(f)^2 = |\nabla_\Sigma f|^2. \end{aligned} \quad (1.146)$$

因此, 对于 $n-1$ 维极小曲面 Σ , 设 $F(x, t)$ 是固定边界的法向变分, 即 $\partial_t F = f(x, t)\vec{n}$. 这里 \vec{n} 为曲面 Σ_t 的单位法向. 记 $\mathcal{L}u = \Delta_\Sigma u + (\text{Ric}(\vec{n}, \vec{n}) + \Pi^2)u$, 则其第二基本变分公式可以简化为

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \text{Area}(\Sigma_t) \big|_{t=0} &= \int_{\Sigma} |\nabla_\Sigma f|^2 - (\text{Ric}(\vec{n}, \vec{n}) + \Pi^2)f^2 d\mu \\ &= \int_{\Sigma} -f \Delta_\Sigma f - (\text{Ric}(\vec{n}, \vec{n}) + \Pi^2)f^2 d\mu \\ &= - \int_{\Sigma} f \mathcal{L}f d\mu \end{aligned} \quad (1.147)$$

定义 1.51. 称算子 \mathcal{L} 为 *Jacobi* 算子 (或者稳定性算子).

定义 1.52. 称极小曲面 $\Sigma^{n-1} \subset \mathcal{M}^n$ 是稳定的, 如果对于任意 $\varphi \in C_0^\infty(\Sigma)$, 都成立

$$\frac{d^2}{dt^2} \text{Area}(\Sigma_t) \big|_{t=0} = - \int_{\Sigma} \langle \varphi, \mathcal{L}\varphi \rangle \geq 0. \quad (1.148)$$

如果 Σ 是不带边界的, 那么称 Σ 是稳定的, 如果对于任意紧子曲面 $\Sigma' \subset \subset \Sigma$, Σ' 是稳定的.

命题 1.53. 设 $\Sigma^{n-1} \subset \mathcal{M}^n$ 是稳定极小曲面. 则 $\forall \eta \in Lip(\Sigma) \cap C_c(\Sigma)$, 成立

$$\int_{\Sigma} (\inf_{\mathcal{M}} Ric^{\mathcal{M}} + |\Pi|^2) \eta^2 \leq \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \eta|^2 \quad (1.149)$$

证明.

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} (Ric + |\Pi|^2) \eta^2 &\leq - \int_{\Sigma} \eta \Delta_{\Sigma} \eta \\ &= \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \eta|^2 \end{aligned} \quad (1.150)$$

左侧对 Ric 取下界即可. \square

引理 1.54. 设 $\Sigma^{n-1} \subset \mathcal{M}^n$ 为极小曲面, \vec{n} 为其单位法向. 设 $S^{\mathcal{M}}, S^{\Sigma}$ 分别为 \mathcal{M}, Σ 的数量曲率 (Ric 曲率的迹). 则有

$$Ric^{\mathcal{M}}(\vec{n}, \vec{n}) = \frac{1}{2} (S^{\mathcal{M}} - S^{\Sigma} - |\Pi|^2). \quad (1.151)$$

证明. 由 Gauss 方程,

$$R^{\mathcal{M}}(X, Y, Z, W) = R^{\Sigma}(X, Y, Z, W) - \Pi(X, W)\Pi(Y, Z) + \Pi(X, Z)\Pi(Y, W). \quad (1.152)$$

设 $\{e_i\}$ 为 Σ 上标准正交标架, 则有

$$R_{ijij}^{\mathcal{M}} = R_{ijij}^{\Sigma} - \Pi_{ij}^2 + \Pi_{ii}\Pi_{jj}. \quad (1.153)$$

对 i, j 求和后, 则有

$$\sum_{ij}^{n-1} R_{ijij}^{\mathcal{M}} = -S^{\Sigma} - |\Pi|^2 + H^2. \quad (1.154)$$

而

$$\begin{aligned} \sum_{ij}^{n-1} R_{ijij}^{\mathcal{M}} &= \sum_{ij}^n R_{ijij}^{\mathcal{M}} - \sum_{i=1}^n R_{i\vec{n}i\vec{n}} - \sum_{j=1}^n R_{\vec{n}j\vec{n}j} + R_{\vec{n}\vec{n}\vec{n}\vec{n}} \\ &= -S^{\mathcal{M}} + 2Ric^{\mathcal{M}}(\vec{n}, \vec{n}). \end{aligned} \quad (1.155)$$

因此,

$$S^{\mathcal{M}} - 2Ric^{\mathcal{M}}(\vec{n}, \vec{n}) = S^{\Sigma} + |\Pi|^2 - H^2. \quad (1.156)$$

\square

推论 1.55. 设 \mathcal{M}^n 可定向且 $\Sigma^{n-1} \subset \mathcal{M}^n$ 是定向的稳定闭极小曲面. 则

1. 若 $Ric^{\mathcal{M}} \geq 0$, 则 Σ 是全测地子流形且在 Σ 上, $Ric(\vec{n}, \vec{n}) = 0$.
2. 若 $n = 3, S^{\mathcal{M}} \geq 0$, 下列之一必然发生:

(a) Σ 同胚于 \mathbb{S}^2 , 并且有

$$\int_{\Sigma} S^{\mathcal{M}} + |\Pi|^2 \leq 8\pi \quad (1.157)$$

(b) Σ 同胚于 \mathbb{T}^2 , 并且是平坦的全测地子流形.

证明. 结论 (1), 由于 Σ 是闭子流形 (紧致无边界), 在不等式(1.148)只需要取 $\varphi \equiv 1$ 则有

$$\int_{\Sigma} Ric(\vec{n}, \vec{n}) + |\Pi|^2 \leq 0. \quad (1.158)$$

结论 (2), 将不等式(1.151)代入到(1.158)中, 则有

$$\int S^{\mathcal{M}} - S^{\Sigma} + |\Pi|^2 \leq 0. \quad (1.159)$$

由 Gauss-Bonnet 公式及 $S^{\Sigma} = K^{\Sigma}$ 可知,

$$\int S^{\Sigma} = \int 2K^{\Sigma} = 4\pi\chi(\Sigma). \quad (1.160)$$

则有

$$0 \leq \int S^{\mathcal{M}} + |\Pi|^2 \leq \int S^{\Sigma} = 4\pi\chi(\Sigma). \quad (1.161)$$

根据闭曲面的分类,

1. 或者 $\Sigma = \mathbb{S}^2, \chi_{\Sigma} = 2$.
2. 或者 $\Sigma = \mathbb{T}^2, \chi_{\Sigma} = 0$. 此时, $|\Pi|^2 = 0, S^{\mathcal{M}} = 0$. 设 $\eta \equiv 1$. 则 $\int \eta \mathcal{L} \eta = 0$, 因此 $\lambda_1 = 0$ (参考命题(1.63)). 这意味着 $\mathcal{L} \eta + \lambda_1 \eta = 0$. 则 $Ric(\vec{n}, \vec{n}) = 0$, 再由引理(1.54)得到 $K^{\Sigma} = 0$.

□

后面为了简化记号, 我们通常记 $q(x) = Ric^{\mathcal{M}}(\vec{n}, \vec{n}) + |\Pi|^2$, 则

$$\mathcal{L} = \Delta_{\Sigma} + q. \quad (1.162)$$

注意到, 如果 $\Sigma \subset \mathcal{M}$ 是紧的, 那么 $|q| \leq C(\Sigma, \mathcal{M})$.

定义 1.56. 称 λ 为 \mathcal{L} 在 $\Omega \subset \Sigma$ 中的特征值, 如果存在 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ 使得 $\mathcal{L}\varphi + \lambda\varphi = 0$. 称空间 $E_\lambda(\Omega) = \{\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \mid \mathcal{L}\varphi + \lambda\varphi = 0\}$ 为算子 \mathcal{L} 在 Ω 中的特征值 λ 所对应的特征空间.

定理 1.57. 算子 L 在 $\Omega \subset \Sigma$ 中的谱

$$\text{Spect}(\mathcal{L}, \Omega) = \{\lambda \mid \exists \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \mathcal{L}\varphi + \lambda\varphi = 0\}. \quad (1.163)$$

是 \mathbb{R} 中的离散子集. 将所有特征值从小到大排列 (计重数) 为

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots \quad (1.164)$$

那么, $\lambda_k \rightarrow \infty$. 并且存在 $L^2(\Omega)$ 的标准正交基 $\{\varphi_k\}$ 使得

$$\mathcal{L}\varphi_k = -\lambda_k \varphi_k. \quad (1.165)$$

定理 1.58. 设 Σ 是极小曲面, $\Omega \subset \Sigma$. $\lambda_1 = \lambda_{\min}(L, \Omega)$. $\forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, 定义

$$F(\varphi) = - \int_{\Sigma} \varphi \mathcal{L}\varphi = \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \varphi|^2 - q\varphi^2. \quad (1.166)$$

定义

$$Q(\varphi) = \frac{F(\varphi)}{\|\varphi\|_{L^2}^2}. \quad (1.167)$$

那么,

$$\lambda_1 = \inf\{Q(\varphi) \mid \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)\}. \quad (1.168)$$

如果 $\varphi \in W_0^{1,2}$ 恰好取到 Q 的最小值, 那么 φ 是光滑函数并且

$$\mathcal{L}\varphi = -\lambda_1 \varphi. \quad (1.169)$$

注 1.59. 若 $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, 将 $\mathcal{L}\varphi$ 定义为线性算子

$$\forall \psi \in W_0^{1,2}(\Omega), \langle \mathcal{L}\varphi, \psi \rangle_{W_0^{1,2}} = \int_{\Omega} \langle \nabla_{\Sigma} \varphi, \nabla_{\Sigma} \psi \rangle - q\varphi\psi. \quad (1.170)$$

显然地, 这是一个连续线性算子. 因此, $\mathcal{L}\varphi \in W_0^{1,2}$ 是良好定义的.

证明. 我们首先证明存在 φ , 使得 φ 取到 Q 的最小值. 记 $c = \inf_{\varphi} Q(\varphi)$. 取 φ_k 使得

$$Q(\varphi_k) \leq c + \frac{1}{k}. \quad (1.171)$$

由于 $\forall \psi \in W_0^{1,2}, \alpha \in \mathbb{R}, Q(\alpha\psi) = Q(\psi)$, 我们可以假设 $\|\varphi_k\|_{L^2}^2 = 1$. 由于 q 有界, 那么

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla_{\Sigma} \varphi_k|^2 &\leq c + \frac{1}{k} + \int |q| |\varphi_k|^2 \\ &\leq c + C. \end{aligned} \quad (1.172)$$

于是, $\{\varphi_k\}$ 在 $W_0^{1,2}$ 中是有界的. 由紧嵌入定理, 存在子列 (仍记为 $\{\varphi_k\}$) 及 $\varphi \in L^2$, 使得 $\|\varphi_k - \varphi\|_{L^2} \rightarrow 0$. 另一方面, 由于有界集是弱紧的, 那么存在 $\tilde{\varphi}$, 使得 $\varphi_k \rightarrow \tilde{\varphi}$ weakly. 而 $W^{1,2}$ 弱收敛蕴含 L^2 弱收敛 [5, 定理 2.5.11]. 因此, $\tilde{\varphi} = \varphi$. 另外, 能量泛函是下半连续的, 即

$$\int |\nabla_{\Sigma} \varphi|^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int |\nabla_{\Sigma} \varphi_k|^2 \quad (1.173)$$

于是有

$$Q(\varphi) = \int |\nabla_{\Sigma} \varphi|^2 - q\varphi^2 \leq \liminf \int |\nabla_{\Sigma} \varphi_k|^2 - q\varphi_k^2 = c \quad (1.174)$$

因此, φ 取到 Q 的最小值. 现在来说明如果 φ 取到 Q 的最小值, 那么 φ 是光滑函数.

记 $c = \inf_{\varphi} Q(\varphi)$. 设 $\eta \in W_0^{1,2}(\Omega)$ 并且 $\int \varphi \eta = 0$. 由于 φ 取到最小值, 那么 $\forall t$,

$$Q(\varphi + t\eta) \geq Q(\varphi) \quad (1.175)$$

因此,

$$\frac{d}{dt} Q(\varphi + t\eta) \big|_{t=0} = 2\langle \varphi, \eta \rangle_{W^{1,2}} = 0 \quad (1.176)$$

上面的等式对于 $\forall \eta \in W_0^{1,2}, \int \eta \varphi = 0$ 成立. 对于一般情况, 设 $\alpha = \int \varphi \eta$, $\tilde{\eta} = \eta - \alpha\varphi$, 则 $\int \tilde{\eta} \varphi = 0$. 将 $\tilde{\eta}$ 代入到(1.176)中, 则得到

$$\begin{aligned} 0 &= \int \langle \nabla_{\Sigma} \varphi, \nabla_{\Sigma} \eta - \alpha \nabla_{\Sigma} \varphi \rangle - q\varphi \eta - \alpha q\varphi^2 \\ &= \int \langle \nabla_{\Sigma} \varphi, \nabla_{\Sigma} \eta \rangle - q\varphi \eta - \alpha \int |\nabla_{\Sigma} \varphi|^2 - q\varphi^2 \\ &= \int \langle \nabla_{\Sigma} \varphi, \nabla_{\Sigma} \eta \rangle - q\varphi \eta - c\alpha \\ &= \int \langle \nabla_{\Sigma} \varphi, \nabla_{\Sigma} \eta \rangle - (q - c)\varphi \eta \end{aligned} \quad (1.177)$$

上式对于 $\forall \eta \in W_0^{1,2}$ 成立. 因此, φ 是方程 $\mathcal{L}\varphi + c\varphi = 0$ 的弱解. 由弱解的正则性可知, φ 是光滑的. 于是 $\mathcal{L}\varphi + c\varphi = 0$ 在经典意义下成立.

最后, 设 $-\mathcal{L}(\eta) = \lambda_1 \eta, \eta \in W_0^{1,2}$, 那么 $Q(\eta) = \lambda_1 \geq c$. 另一方面, 又由于 $-\mathcal{L}\varphi = c\varphi, \lambda_1 \leq c$. 则 $c = \lambda_1$. \square

对于 λ_k , 我们有下面的命题.

命题 1.60. 设 $\Sigma \subset \mathcal{M}$ 是极小曲面, $\Omega \subset \Sigma$. 设 $V \subset C_0^\infty(\Omega)$ 是有限维线性子空间. 定义

$$\lambda(V) = \sup\{Q(\varphi) \mid \varphi \in V\}. \quad (1.178)$$

那么则有

$$\lambda_k = \inf_{V \subset C_0^\infty} \{\lambda(V) \mid \dim(V) = k\}. \quad (1.179)$$

命题 1.61. 设 $u \in C_0^\infty(\Omega)$ 且 $\mathcal{L}u = -\lambda_1 u$, 那么 u 在 Ω 内不变号.

证明. 显然地, $Q(|u|) = Q(u)$. 因此, $|u|$ 也取到 Q 的最小值. 那么 $|u|$ 是光滑的. 则

$$\mathcal{L}|u| = -\lambda_1 |u|. \quad (1.180)$$

由 Harnack 不等式可知, 在 Ω 内部, $|u| > 0$. 则 u 不会变号. \square

推论 1.62. 算子 \mathcal{L} 的最小特征值所对应的特征空间是 1 维的.

证明. 若 $u, v \in E_{\lambda_1}$, 则 $\forall \alpha \in \mathbb{R}, u - \alpha v \in E_{\lambda_1}$. 若要使得 $u - \alpha v$ 不变号, 必须存在常数 β 使得 $u = \beta v$. \square

命题 1.63. 设 Σ 是极小曲面, $\Omega \subset \Sigma$. 则

1. Ω 是稳定的当且仅当 $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega) \geq 0$.

2. 若 $\Omega' \subset \Omega$, 则 $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega') > \lambda_1(\mathcal{L}, \Omega)$.

证明. 结论 (1), 若 Ω 是稳定的, 设 $\mathcal{L}\varphi + \lambda_1 \varphi = 0$. 则 $-\int \varphi \mathcal{L}\varphi = \lambda_1 \int |\varphi|^2 \geq 0$. 因此 $\lambda_1 \geq 0$. 反之, 若 $\lambda_1 \geq 0$, 则由定理(1.58)可知, $Q(\eta) \geq 0 \forall \eta \in W_0^{1,2}$ 成立.

结论 (2). 首先显然有 $\lambda_1(\Omega') \leq \lambda_1(\Omega)$. 设 φ, φ' 分别是 $\lambda_1(\Omega), \lambda_1(\Omega')$ 所对应的特征函数. 将 φ 零延拓到 Ω' 上, 则 $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega')$. 若 $\lambda_1(\Omega) = \lambda_1(\Omega')$, 则 φ, φ' 都取到泛函 Q 在 Ω' 上的最小值, 因此 $\varphi = \alpha \varphi'$, 而是这不可能的 (因为 $\varphi' > 0$). \square

命题 1.64. 设 Σ 是极小曲面. 则 Σ 是稳定的当且仅当存在正函数 $u > 0$ 使得 $\mathcal{L}u \leq 0$.

证明. 设存在正函数 u 使得 $\mathcal{L}\varphi = 0$. 记 $w = \log u$. 直接计算可知

$$\begin{aligned}\Delta_{\Sigma} w &= \operatorname{div}_{\Sigma}(\nabla_{\Sigma} \log u) \\ &= \operatorname{div}_{\Sigma}\left(\frac{1}{u} \nabla_{\Sigma} u\right) \\ &= -\frac{|\nabla_{\Sigma} u|^2}{u^2} + \frac{\Delta_{\Sigma} u}{u}\end{aligned}\quad (1.181)$$

因此, w 满足

$$|\nabla_{\Sigma} w|^2 + q \leq -\Delta_{\Sigma} w. \quad (1.182)$$

$\forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$, 在上侧等式两侧乘以 φ^2 后积分, 则有

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \varphi^2 (|\nabla_{\Sigma} w|^2 + q) &\leq -\int_{\Omega} \varphi^2 \Delta_{\Sigma} w \\ &\leq 2 \int_{\Omega} |\varphi| |\nabla_{\Sigma} \varphi| |\nabla_{\Sigma} w| \\ &\leq \int_{\Omega} |\varphi|^2 |\nabla_{\Sigma} w|^2 + \int_{\Omega} |\nabla_{\Sigma} \varphi|^2\end{aligned}\quad (1.183)$$

上式等价于 $-\int_{\Omega} \varphi \mathcal{L}\varphi \geq 0$. 由于 φ 是任意的, 则 Ω 是稳定的.

现在证明反方向的. 设 Σ 是稳定的. 取 $\{\Omega_k\}$ 使得 $\Omega_k \subset \subset \Omega_{k+1}$ 并且 $\Sigma = \bigcup \Omega_k$. 由于 Σ 是稳定的, 则 Ω_k 是稳定的. 设 φ_k 满足 $\mathcal{L}\varphi_k + \lambda_1(\mathcal{L}, \Omega_k)\varphi_k = 0$. 则在 Ω_k 内部, $\varphi_k > 0$. 固定点 $p \in \Omega_1$. 对每个 φ_k , 可设 $\varphi_k(p) = 1$. 根据命题(1.63), $\lambda_1(\Omega_1) > \lambda_1(\Omega_2) > \cdots \rightarrow \lambda^* \geq 0$. 而 φ_k 满足方程

$$\mathcal{L}\varphi_k + \lambda_1(\mathcal{L}, \Omega_k)\varphi_k = 0. \quad (1.184)$$

由 Harnack 不等式, $\forall K \subset \subset \Sigma$, 在 K 上, 当 k 足够大时, 成立

$$\sup_K \varphi_k \leq C(K)\varphi_k(p) = C(K). \quad (1.185)$$

再由 Schauder 估计,

$$\|\varphi_k\|_{C^{2,\alpha}} \leq C(K). \quad (1.186)$$

使用对角线法, 我们可以选择 φ_k 的子列使得 $\varphi_k \xrightarrow{C_{loc}^2} \varphi$. 则 φ 满足方程

$$\mathcal{L}\varphi + \lambda^* \varphi = 0. \quad (1.187)$$

显然地, $\varphi \geq 0$ 且 $\varphi(p) = 1$. 则由 Harnack 不等式可知, $\varphi > 0$, 而 $\lambda^* \geq 0$, 则 $\mathcal{L}\varphi \leq 0$. \square

推论 1.65. 若 Σ 完备的非紧的极小曲面, 由上面的 $\mathcal{L}u \leq 0$ 可以替换为 $\mathcal{L}u = 0$.

证明. 我们只指出与命题 (1.64) 中不同的地方. 在 Ω_k 上, 解下面的方程

$$\begin{cases} \mathcal{L}\varphi_k = 0 \\ \varphi_k|_{\Omega_k} = 1 \end{cases} \quad (1.188)$$

由于 $\lambda_1(\Omega_k) > 0$, 则方程

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = 0, \\ u|_{\partial\Omega_k} = 0. \end{cases} \quad (1.189)$$

没有非平凡解 (否则, $\lambda_1(\Omega_k) = \inf\{-\int \varphi \mathcal{L}\varphi\} = 0$). 因此, 由 Fredholm 二择一, 方程 (1.188) 是可解的. 现在, 我们说明 $\varphi_k > 0$. 否则, 记 Ω' 为区域 $\{\varphi_k < 0\}$ 的一个连通分支, 那么 $\Omega' \subset \subset \Omega$. 在 Ω' 上, $\mathcal{L}(-\varphi_k) = 0$, 而这意味着 $\lambda_1(\mathcal{L}, \Omega') = 0$, 这与稳定性矛盾. 剩下的过程同命题 (1.64) \square

引理 1.66. 设 (Σ^2, g) 是二维黎曼流形. 设 $u: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ 是光滑函数. 则 u 的能量 $e(u) = \int |\nabla u|^2$ 是共形不变量.

证明. 设 $\tilde{g} = \rho^2 g$. 则 $\nabla_{\tilde{g}} u = \frac{1}{\rho^2} \nabla_g u$, $dv_{\tilde{g}} = \rho^2 dv_g$. 直接计算可知 $e(u, \tilde{g}) = e(u, g)$. \square

引理 1.67. 设 $u \in C^\infty(\mathbb{C})$. 若 $\Delta u \geq (\leq) 0$ 且 $u \leq (\geq) C$, 则 u 是常数.

证明. 直接计算可知, $\log |z|$ 在 $\mathbb{C} - \{0\}$ 中是调和函数. $\forall \varepsilon > 0$, 设

$$u_\varepsilon(z) = u(z) - \varepsilon \log |z|. \quad (1.190)$$

则 u_ε 是下调和的. 由于 $|z| \rightarrow \infty$ 时, $u_\varepsilon(z) \rightarrow -\infty$, 则

$$\sup_{|z|>1} u_\varepsilon = \sup_{|z|=1} u_\varepsilon = \sup_{|z|=1} u = \sup_{|z|\leq 1} u \quad (1.191)$$

于是有

$$\begin{aligned} u(z) = u_\varepsilon(z) + \varepsilon \log |z| &\leq \sup_{|z|>1} u_\varepsilon + \varepsilon \log |z| \\ &= \sup_{|z|\leq 1} u + \varepsilon \log |z| \end{aligned} \quad (1.192)$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 则有 $u(z) \leq \sup_{|z|\leq 1} u$. 因此, u 在内部达到最大值, 则 u 一定是常数. \square

引理 1.68 (Kato 不等式). 设 $\Delta u = 0$ 且 $|\nabla u| \neq 0$, 则

$$(1 + \frac{1}{n-1}) |\nabla |\nabla u||^2 \leq |\nabla^2 u|^2. \quad (1.193)$$

证明. 固定点 p , 选取标准正交标架 $\{e_i\}$, 并在 u 上乘以适当的常数, 使得在 p 点处, $\nabla u = e_1$. 则

$$|\nabla |\nabla u||^2 = |\nabla^2 u(\nabla u, \cdot)|^2 = \sum_{j=1}^n u_{1j}^2 \quad (1.194)$$

现在, 我们计算

$$\begin{aligned} |\nabla^2 u|^2 &\geq \sum_{j=1}^n u_{1j}^2 + \sum_{i=2}^n u_{i1}^2 + \sum_{i=2}^n u_{ii}^2 \\ &\geq \sum_{j=1}^n u_{1j}^2 + \sum_{i=2}^n u_{i1}^2 + \frac{1}{n-1} (\sum_{i=2}^n u_{ii})^2 \\ &= \sum_{j=1}^n u_{1j}^2 + \sum_{i=2}^n u_{i1}^2 + \frac{1}{n-1} u_{nn}^2 \\ &= \sum_{j=1}^n u_{1j}^2 + \frac{1}{n-1} \sum_{i=n}^n u_{i1}^2 \end{aligned} \quad (1.195)$$

□

引理 1.69 (Bochner 公式). 对于任意光滑函数 u , 成立

$$\frac{1}{2} \Delta |\nabla u|^2 = |\nabla^2 u|^2 + \langle \nabla u, \nabla \Delta u \rangle + \text{Ric}(\nabla u, \nabla u) \quad (1.196)$$

定理 1.70 (单值化定理). 每一个单连通的黎曼曲面必定同构于 $\mathbb{D}, \mathbb{C}, \mathbb{S}^2$ 中的三者之一.

命题 1.71. 设 (\mathcal{M}^3, g) 是可定向的完备黎曼流形. $S^{\mathcal{M}} \geq 0$. 设 $\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$ 是完备, 定向, 非紧的稳定极小曲面. 设 $\tilde{\Sigma}$ 是 Σ 的万有覆盖. 则 $\tilde{\Sigma}$ 共形同构于 \mathbb{C} .

证明. 设 Δ, ∇ 是 $\tilde{\Sigma}$ 上的算子. Σ 是稳定的, 则存在 $v \in C_0^\infty$ 使得 $v > 0, \mathcal{L}_\Sigma v \leq 0$. 设 \tilde{v} 为 v 在 $\tilde{\Sigma}$ 上的提升, 则 $\mathcal{L}_{\tilde{\Sigma}} \tilde{v} \leq 0$. 因此, $\tilde{\Sigma}$ 是稳定极小浸入. 则 $\forall f \in C_c^\infty(\tilde{\Sigma})$,

$$\int_{\tilde{\Sigma}} |\nabla f|^2 - (|\Pi|^2 + \text{Ric}) f^2 \geq 0. \quad (1.197)$$

由命题(1.54), 则有

$$\int_{\tilde{\Sigma}} |\nabla f|^2 - \frac{1}{2}(S^{\mathcal{M}} - S^{\Sigma} + |\Pi|^2)f^2 \geq 0. \quad (1.198)$$

而 $S^{\mathcal{M}} + |\Pi|^2 \geq 0$, 则

$$- \int_{\tilde{\Sigma}} S^{\Sigma} f^2 \leq 2 \int_{\tilde{\Sigma}} |\nabla f|^2. \quad (1.199)$$

由单值化定理(1.70)可知, $\tilde{\Sigma}$ 共形同构于 \mathbb{D} 或者 \mathbb{C} . 设 $\tilde{\Sigma}$ 同构于 \mathbb{D} . 则存在调和函数 $u \in C^\infty(\tilde{\Sigma})$ 使得

$$0 < \int_{\tilde{\Sigma}} |\nabla u|^2 < +\infty. \quad (1.200)$$

$\forall \varphi \in C_c^\infty(\tilde{\Sigma})$, 取 $f = |\nabla u| \varphi$. 则不等式(1.199)可化为

$$- \int_{\tilde{\Sigma}} S^{\Sigma} |\nabla u|^2 \varphi^2 \leq 2 \int_{\tilde{\Sigma}} |\nabla(|\nabla u| \varphi)|^2 \quad (1.201)$$

由散度定理,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Sigma}} |\nabla(|\nabla u| \varphi)|^2 &\leq \int_{\tilde{\Sigma}} |\nabla |\nabla u||^2 \varphi^2 + |\nabla u|^2 |\nabla \varphi|^2 + \frac{1}{2} \langle \nabla |\nabla u|^2, \nabla \varphi^2 \rangle \\ &= \int_{\tilde{\Sigma}} \varphi^2 |\nabla |\nabla u||^2 + |\nabla u|^2 |\nabla \varphi|^2 - \frac{1}{2} \varphi^2 \Delta |\nabla u|^2 \end{aligned} \quad (1.202)$$

而由 Bochner 公式及 Kato 不等式

$$\frac{1}{2} \Delta |\nabla u|^2 = |\nabla^2 u|^2 + Ric^{\tilde{\Sigma}}(\nabla u, \nabla u) \quad (1.203)$$

$$2 |\nabla |\nabla u||^2 \leq |\nabla^2 u|^2. \quad (1.204)$$

因此,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Sigma}} |\nabla(|\nabla u| \varphi)|^2 &\leq \int_{\tilde{\Sigma}} \varphi^2 |\nabla |\nabla u||^2 + |\nabla u|^2 |\nabla \varphi|^2 - \varphi^2 (|\nabla^2 u|^2 + K^{\tilde{\Sigma}}) \\ &\leq \int_{\tilde{\Sigma}} -\varphi^2 |\nabla |\nabla u||^2 + |\nabla u|^2 |\nabla \varphi|^2 - \varphi^2 K^{\tilde{\Sigma}} \end{aligned} \quad (1.205)$$

于是, 有

$$\begin{aligned} - \int_{\tilde{\Sigma}} S^{\tilde{\Sigma}} |\nabla u|^2 \varphi^2 &= \int_{\tilde{\Sigma}} -2K^{\tilde{\Sigma}} |\nabla u|^2 \varphi^2 \\ &\leq 2 \int_{\tilde{\Sigma}} -\varphi^2 |\nabla |\nabla u||^2 + |\nabla u|^2 |\nabla \varphi|^2 - \varphi^2 K^{\tilde{\Sigma}} \end{aligned} \quad (1.206)$$

最终得到

$$\int \varphi^2 |\nabla |\nabla u||^2 \leq \int |\nabla u|^2 |\nabla \varphi|^2. \quad (1.207)$$

选取 φ_k 使得在 B_k 上, $\varphi_k \equiv 1$. 在 B_{2k} 外部, $\varphi_k \equiv 0$, 并且 $|\nabla \varphi_k| \leq \frac{2}{k}$. 则

$$\int_{B_k} |\nabla |\nabla u||^2 \leq \frac{C}{k^2} \int |\nabla u|^2 \rightarrow 0. \quad (1.208)$$

于是, $|\nabla u|$ 为常数. 设 $\tilde{\Sigma} = (\mathbb{D}, g)$, $g = \rho^2 |dz|^2$. 则 $|\nabla u| = \frac{1}{\rho^2} |Du|$. 取 $u = x^1$. 则 $\rho \equiv 1$, 这与 g 的完备性矛盾. \square

定理 1.72. 设 $\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$ 是定向, 完备的稳定极小曲面. 则 Σ 是平面.

证明. 根据命题(1.71), $\tilde{\Sigma}$ 共形同构于 \mathbb{C} . 同时由于 Σ 是稳定的, 存在 $u > 0$ 使得 $\mathcal{L}_{\tilde{\Sigma}} u \leq 0$. 即有

$$\Delta u \leq -|\Pi|^2 u \leq 0. \quad (1.209)$$

而 \mathbb{C} 中的下有界的上调和函数是常数, 因此 $\Pi \equiv 0$. \square

定理 1.73. 设 $\Omega \subset \mathcal{M}^2$ 是有界光滑区域. 设 K 是 Gauss 曲率, $K_{\partial\Omega}$ 是 $\partial\Omega$ 相对于内单位法向的测地曲率. 则

$$\int_{\Omega} K dv_g + \int_{\partial\Omega} K_{\partial\Omega} ds = 2\pi \quad (1.210)$$

命题 1.74. 设 $\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$ 是极小曲面. 设 $B_{r_0} \subset \Sigma^2$ 是 Σ 上半径为 r_0 的圆盘 (在 Σ 的内蕴度量下). 若 B_{r_0} 是稳定的, 则有

$$\text{Area}(B_{r_0}) \leq \frac{4}{3} \pi r_0^2. \quad (1.211)$$

证明. 选取 $\eta \in C^1[0, r_0]$ 且 $\eta(r_0) = 0$. 设 (r, θ) 是 B_{r_0} 上的极坐标 (可 $T\Sigma$ 上的极坐标及指数映射给出). 令 $f(r, \theta) = \eta(r)$. 将 f 代入稳定性不等式, 并由 $\text{Ric} = 0$, $|\Pi|^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = -2\lambda_1\lambda_2 = -2K$ 得到,

$$\int_{B_{r_0}} |\nabla f|^2 + 2K f^2 \geq 0. \quad (1.212)$$

记 $l(r) = \int_{\partial B_r} ds$, $k(r) = \int_{B_r} K dv_g$. 设 $K_{\partial B_r}$ 为 ∂B_r 的测地曲率 (平均曲率在 1 维的情况). 则由第一变分公式及 Gauss-Bonnet 公式

$$l'(r) = \int_{\partial B_r} K_{\partial B_r} = 2\pi - k(r) \quad (1.213)$$

由余面积公式,

$$\frac{d}{dr}k(r) = \frac{d}{dr} \int_0^r \int_{\partial B_t} K ds dt = \int_{\partial B_r} K \quad (1.214)$$

再由分部积分公式, 不等式(1.212)可以化为,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{B_{r_0}} |\nabla f|^2 + 2Kf^2 = \int_{B_{r_0}} |\eta'|^2 + 2 \int_{B_{r_0}} K\eta^2 \\ &= \int_0^{r_0} |\eta'|^2 l(r) dr + 2 \int_0^{r_0} \int_{\partial B_r} K ds \eta^2 dr \\ &= \int_0^{r_0} |\eta'|^2 l(r) dr + 2 \int_0^{r_0} k' \eta^2 \quad (1.215) \\ &= \int_0^{r_0} |\eta'|^2 l(r) dr - 2 \int_0^{r_0} k(\eta^2)' \\ &= \int_0^{r_0} |\eta'|^2 l(r) dr - 2 \int_0^{r_0} (2\pi - l'(r))(\eta^2)' \end{aligned}$$

取 $\eta = 1 - \frac{r}{r_0}$, 则有

$$\frac{4}{r_0} \int_0^{r_0} l'(r) \eta - \int_0^{r_0} \frac{1}{r_0^2} l(r) \leq \frac{4}{r_0} \int_0^{r_0} 2\pi(1 - \frac{r}{r_0}) = 4\pi \quad (1.216)$$

而左侧为

$$\frac{4}{r_0} \int_0^{r_0} l'(r) \eta - \int_0^{r_0} \frac{1}{r_0^2} l(r) = \frac{4}{r_0^2} \int_0^{r_0} l(r) - \int_0^{r_0} \frac{1}{r_0^2} l(r) = \frac{3}{r_0^2} \text{Area}(B_{r_0}) \quad (1.217)$$

□

命题 1.75. 设 $\Sigma^{n-1} \subset \mathcal{M}^n$ 是定向的极小曲面. 设 X 是处处不为 0 的 Killing field. 设 \vec{n} 为 Σ 的单位法向. 设 X 与 Σ 横截相交 (即 $\langle X, \vec{n} \rangle$ 处处不为 0), 则 Σ 是稳定的.

证明. 设 $X^\perp = f\vec{n}$, 则 $f > 0$ 或 $f < 0$. 设为前者. 在 X 生成的 flow 的作用下, 设 H_t 为 Σ_t 的平均曲率. 则

$$\frac{d}{dt} H_t = \mathcal{L}f. \quad (1.218)$$

由于 X 是 Killing field, 则 $H_t \equiv 0$. 即 $\mathcal{L}f \equiv 0$. 由命题(1.64)可知 Σ 是稳定的. □

\mathbb{R}^3 中最常见的 Killing field 由平移生成. 设 $X = (0, 0, 1)$, 显然 X 是 Killing field. 设 Σ 是极小曲面, 且存在 u 使得 $\Sigma = \text{Graph}(u)$. 设 \vec{n} 为 Σ 的单位法向, 令 $\theta = \langle \vec{n}, X \rangle$. 则由(1.218), $\mathcal{L}\theta = 0$. 而显然地, $\theta \geq 0$. 于是由 Harnack 不等式可知, $\theta > 0$. 这等价于 $|\nabla_{\mathbb{R}^n} u| < +\infty$. 因此, u 是光滑的.

定义 1.76. 设 (\mathcal{M}, g) 是黎曼流形. 如果 \mathcal{M} 上的非正下调和函数都是常数, 则称 \mathcal{M} 是抛物的.

下面的定理可以参考 [1, p.179].

定理 1.77. 设 \mathcal{M} 是抛物型黎曼面. 设 $\Omega \subset \mathcal{M}$ 是开集. 设 $u \in C(\overline{\Omega})$. 设 u 是有界下调和函数. 则 $u \leq \sup_{\partial\Omega} u$.

例如, \mathbb{C} 是抛物的, \mathbb{D} 不是抛物的.

第二章 曲率估计

2.1 逐点估计

设 $\Sigma^{n-1} \subset \mathcal{M}^n$ 是光滑子流形. \vec{n} 是 Σ 的单位法向. 设 T 是 $(0, 2)$ 型张量, $T = T_{ij}dx^i dx^j$. 记号约定如下.

$$(\nabla_{XY}^2 T)(Z, W) = \nabla^2 T(Z, W, Y, X). \quad (2.1)$$

在局部坐标下,

$$\nabla_{lk}^2 T_{ij} = (\nabla_{\partial l, \partial k}^2 T)(\partial_i, \partial_j) = \nabla^2 T(\partial_i, \partial_j, \partial k, \partial l) = T_{ijkl}. \quad (2.2)$$

Codazzi 方程.

$$R^{\mathcal{M}}(X, Y, W, \vec{n}) = \nabla \Pi(W, Y, X) - \nabla \Pi(W, X, Y). \quad (2.3)$$

Gauss 方程

$$R^{\mathcal{M}}(X, Y, Z, W) = R^{\Sigma}(X, Y, Z, W) - \Pi(X, W)\Pi(Y, Z) + \Pi(X, Z)\Pi(Y, W). \quad (2.4)$$

求导交换次序.

$$\nabla_{X,Y}^2 T(Z, W) = \nabla_{Y,X}^2 T(Z, W) - T(R(X, Y)Z, W) - T(Z, R(X, Y)W). \quad (2.5)$$

在局部坐标下,

$$T_{ijkl} = T_{ijlk} - R_{lki}^p T_{pj} - R_{lkj}^p T_{ip}. \quad (2.6)$$

求导交换次序的结果可以参考 [4, 定理 7.14]. 需要注意, $T_{ijkl} = (\nabla_{lk}^2 T)(\partial_i, \partial_j)$.

命题 2.1. 设 $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 是光滑曲面. ∇, Δ 为 Σ 上的算子. Π 为其第二基本型, H 是平均曲率. 则

$$\Delta \Pi_{ij} = \nabla_{ij}^2 H + H g^{kl} \Pi_{ik} \Pi_{jl} - |\Pi|^2 \Pi_{ij}. \quad (2.7)$$

证明. 固定点 p , 选取 p 点附近的测地坐标, 则有

$$\Delta \Pi_{ij} = \Pi_{ij;kk} = \Pi_{ik;jk} = \Pi_{ik;kj} - R_{kji}^p \Pi_{pk} - R_{kjk}^p \Pi_{ip}. \quad (2.8)$$

而

$$\Pi_{ik;kj} = \Pi_{kk;ij} = H_{ij}. \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} R_{kji}^p \Pi_{pk} + R_{kjk}^p \Pi_{ip} &= R_{kji} \Pi_{pk} + R_{kjk} \Pi_{ip} \\ &= \Pi_{kp} \Pi_{ji} \Pi_{kp} - \Pi_{ki} \Pi_{jp} \Pi_{pk} + \Pi_{kp} \Pi_{jk} \Pi_{ip} - \Pi_{kk} \Pi_{jp} \Pi_{ip} \\ &= |\Pi|^2 \Pi_{ij} - H g^{pq} \Pi_{jp} \Pi_{iq} \end{aligned} \quad (2.10)$$

□

命题 2.2 (Simons 等式). 设 Σ^{n-1} 是极小曲面, 则有

$$\Delta |\Pi|^2 = 2(|\nabla \Pi|^2 - |\Pi|^4). \quad (2.11)$$

证明. 将等式(2.7)写成坐标无关的形式, 又因 Σ 是极小曲面, 则有

$$\Delta \Pi = -|\Pi|^2 \Pi \quad (2.12)$$

由于 Tr 与联络导数可交换, 则

$$\begin{aligned} \Delta |\Pi|^2 &= \Delta(\text{Tr}^2(\Pi \otimes \Pi)) = \text{Tr}^2(\Delta \Pi \otimes \Pi + \Pi \otimes \Delta \Pi + 2\text{Tr}(\nabla \Pi, \nabla \Pi)) \\ &= \text{Tr}^2(-2|\Pi|^2 \Pi \otimes \Pi + 2\text{Tr}(\nabla \Pi \otimes \nabla \Pi)) \\ &= -2|\Pi|^4 + 2|\nabla \Pi|^2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

□

命题 2.3 (Simons 不等式). 设 Σ^{n-1} 是极小曲面, ∇, Δ 为 Σ 上的算子. 则

$$\Delta |\Pi|^2 \geq -2|\Pi|^4 + 2\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)|\nabla |\Pi||^2. \quad (2.14)$$

证明. 证明与命题(1.68)类似. 我们首先来计算 $|\nabla |\Pi||^2$. 固定点 p , 取 p 点处的测地坐标使得 $\Pi = \text{diag}(\lambda_i)$.

$$\begin{aligned} |\nabla |\Pi||^2 &= \frac{|\langle \nabla \Pi, \Pi \rangle|^2}{|\Pi|} = \frac{\sum_j (\sum_i \lambda_i \Pi_{iij})^2}{\sum_i \lambda_i^2} \\ &\leq \sum_{ji} \Pi_{iij}^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

而

$$\begin{aligned}
\sum_{ji} \Pi_{ij}^2 &= \sum_{j \neq i} \Pi_{ij}^2 + \sum_i \Pi_{ii}^2 \\
&= \sum_{j \neq i} \Pi_{ij}^2 + \sum_i \left(- \sum_{j \neq i}^{n-1} \Pi_{jji} \right)^2 \\
&\leq \sum_{j \neq i} \Pi_{ij}^2 + \sum_i (n-2) \sum_{j \neq i} \Pi_{jji}^2 \\
&\leq (n-1) \sum_{j \neq i} \Pi_{ij}^2 \\
&= \frac{n-1}{2} \left(\sum_{j \neq i} \Pi_{iji}^2 + \sum_{j \neq i} \Pi_{jii}^2 \right)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

(2.16) 两侧同乘以 $\frac{2}{n-1}$ 后与 (2.15) 相加可得,

$$\begin{aligned}
|\nabla |\Pi||^2 + \frac{2}{n-1} |\nabla |\Pi||^2 &\leq \sum_{ji} \Pi_{ij}^2 + \sum_{j \neq i} \Pi_{iji}^2 + \sum_{j \neq i} \Pi_{jii}^2 \\
&\leq \sum_{ijk} \Pi_{ijk}^2
\end{aligned} \tag{2.17}$$

再由 Simon 等式 (2.2) 即可得到不等式 (2.14). \square

定理 2.4. 设 $\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$ 是极小曲面. 则存在常数 $\varepsilon, \rho > 0$, 使得 $\forall p \in \Sigma, r_0 < \rho$, 如果

$$1. \partial \Sigma \cap B_{r_0}(p) = \emptyset.$$

$$2. \int_{\Sigma \cap B_{r_0}} |\Pi|^2 \leq \varepsilon.$$

那么 $\forall 0 < \sigma \leq r_0$ 及 $y \in B_{r_0-\sigma}$, 成立

$$\sigma^2 |\Pi|^2(y) \leq \delta, \text{ here } \delta = \frac{\int_{\Sigma \cap B_{r_0}} |\Pi|^2}{\varepsilon}. \tag{2.18}$$

证明. 将 B_{r_0} 简写为 B . 只需要证明 $F(x) = d^2(x, \partial B) |\Pi|^2(x) \leq \delta$ 即可. 我们用反证法. 设 F 在 q 点处取到最大值 $\max_{x \in B} F(x)$. 注意到在 ∂B 上, $F(x) \equiv 0$. 则 q 是内点. 设 $F(q) > \delta$, 我们将证明当 ε 足够小时, 会推出一个矛盾. 取 σ 使得

$$\sigma^2 |\Pi|^2(q) = \frac{\delta}{4} \leq \frac{1}{4} d^2(q, \partial B) |\Pi|^2(q). \tag{2.19}$$

因此, 有

$$\sigma \leq \frac{1}{2}d(q, \partial B). \quad (2.20)$$

由三角不等式可知, $\forall y \in B_\sigma(q)$,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{d(y, \partial B)}{d(q, \partial B)} \leq 2. \quad (2.21)$$

于是

$$\begin{aligned} \sup_{y \in B_\sigma(q)} d^2(q, \partial B) |\Pi|^2(y) &\leq 4 \sup_{y \in B_\sigma(q)} d^2(y, \partial B) |\Pi|^2(y) \\ &= 4d^2(q, \partial B) |\Pi|^2(q). \end{aligned} \quad (2.22)$$

因此,

$$\sup_{y \in B_\sigma(q)} |\Pi|^2(y) \leq 4 |\Pi|^2(q) = \frac{\delta}{\sigma^2}. \quad (2.23)$$

通过变换 $x \rightarrow \sigma x$, 上面的不等式变为

$$\sup_{y \in B_1(q)} |\Pi|^2(y) \leq 4 |\Pi|^2(q) = \delta \leq 1. \quad (2.24)$$

由 Simons 不等式, 我们得到

$$\Delta |\Pi|^2 \geq -2 |\Pi|^4 \geq -2 |\Pi|^2. \quad (2.25)$$

由推论(1.19)(取 $s = 1, \lambda = 2$) 可知,

$$\frac{\delta}{4} = |\Pi|^2(q) \leq C \int_{B_1} |\Pi|^2 \leq C\delta\varepsilon. \quad (2.26)$$

则当 ε 足够小时, 显然是不可能的. \square

把定理(2.4)写成下面形式往往是方便的.

定理. 设 $\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$ 是极小曲面. 则存在常数 $\varepsilon, \rho > 0$, 使得 $\forall r_0 < \rho$, 如果

$$1. \partial \Sigma \cap B_{r_0}(p) = \emptyset.$$

$$2. \int_{\Sigma \cap B_{r_0}} |\Pi|^2 \leq \varepsilon.$$

那么

$$\sup_{B_{\frac{r_0}{2}}} |\Pi(x)| \leq \frac{C}{r_0}. \quad (2.27)$$

引理 2.5 (一致图像引理). 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是具有光滑边界的开集. 设 $\Sigma^2 \subset \Omega$ 是嵌入的光滑曲面, 并且 Σ 在 Ω 中是闭的. 设 $|\Pi| \leq C$. 则 Σ 可以局部一致地表示成函数图像的形式. 确切地说, $\forall p \in \Sigma, R \in (0, R_0)$. 这里,

$$R_0 = \min\left\{\frac{1}{4C}, \frac{1}{2}d(p, \partial\Omega)\right\}. \quad (2.28)$$

设 $D(p, R)$ 为 $T_p\Sigma$ 上以 p 为中心, 半径为 R 圆盘, $W(p, R) = D(p, R) \times \mathbb{R}$.

$$D(p, R) = \{p + \vec{v} \mid v \in T_p\Sigma, |v| < R\}. \quad (2.29)$$

$$W(p, R) = \{q + t\vec{n}(p) \mid q \in D(p, R), t \in \mathbb{R}\}. \quad (2.30)$$

则存在函数 $u : D(p, R) \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $u(p) = 0$, 并且 Σ 可以写成 u 的在 $D(p, R)$ 上的图像的形式. 并且, 给定 $q \in D(p, R)$,

$$1. |u(p) - u(q)| \leq 8C |p - q|.$$

$$2. |\nabla u|(q) \leq 8C |p - q|.$$

$$3. |\nabla^2 u|(q) \leq 16C.$$

注 2.6. 一致图像引理不要求曲面是极小的.

证明. 设 $\Sigma_{p,r}$ 是 $\Sigma \cap W(p, r)$ 的包含 p 点的连通分支. 经过旋转平移之后, 设 $p = 0, T_p\Sigma = \{z = 0\}$. 设 $R \in \mathbb{R}$ 满足以下条件, 并且取上界: $\Sigma_{p,R}$ 可以表示为某个函数 $u \in C^\infty(D(p, R))$ 的图像, $u(0) = 0, \nabla u(p) = 0$ 且 $|\nabla u| \leq 1$. 注意, $|\nabla u| \leq 1$ 等价于 $N_3 = \langle \vec{n}, e_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}} \geq \frac{1}{2}$. 现在, 当 R 变得更大一点时, 有两种情况可能发生:

1. 函数 u 可以光滑地延拓到 $D(p, R)$ 的邻域内, 但是会导致 $N_3 < \frac{1}{2}$.

2. 函数 u 不能继续延拓, 这表明 $\text{Graph}(u)$ 碰到了 Ω 的边界.

直接计算可知, 我们有如下的比较关系

$$\frac{|\nabla^2 u|^2}{(1 + |\nabla u|^2)^3} \leq |\Pi|^2 \leq 2 \frac{|\nabla^2 u|^2}{1 + |\nabla u|^2}. \quad (2.31)$$

在 $D(p, R)$ 上, 由于 $|Du| \leq 1$, 则

$$C^2 \leq |\nabla^2 u| \leq 8C^2. \quad (2.32)$$

现在, 设情况(1)发生, 设 $q \in \partial D(p, R)$ 使得 $|\nabla u(q)| = \frac{1}{2}$. 则

$$1 = |\nabla u(0) - \nabla u(q)| \leq |\nabla^2 u| |q| \leq 4CR. \quad (2.33)$$

因此, $R \geq \frac{1}{4C}$. 若情况(2)发生, 设 $Q = (q, u(q)) \in \partial\Omega, q \in \partial D(p, R)$. 设 α 是连接 p, q 的线段, 则

$$d(p, Q) \leq \sup \sqrt{1 + |\nabla u|} l_\alpha \leq 2R. \quad (2.34)$$

即有 $R \geq \frac{1}{2}d(p, \partial\Omega)$. 其余性质均可由中值定理得到. \square

推论 2.7. 定理(2.4)中的 B_r 可以换成 B_r^Σ .

证明. 在定理(2.4)的证明中, 有了不等式(2.24)(欧氏度量换成内蕴度量后, 直到这里的推导都是正确的), 我们就可以用应用一致图像引理. 由于此时 $|\nabla u|$ 一致有界, 那么 Σ 上的内蕴度量与外蕴度量实际上是局部可比较的. 最后在 $B_{\frac{1}{4}}$ (引理(2.5)中, $C = 1$) 上应用推论(1.19). \square

定理 2.8. 设 $\{\Sigma_i\} \subset \mathbb{R}^3$ 是完备极小曲面. 设 $p_i \in \Sigma_i$ 且 $p_i \rightarrow p$. 设存在常数 C 使得 $\forall i$,

$$|\Pi_{\Sigma_i}| \leq C. \quad (2.35)$$

则存在子列 Σ_{i_k} 及极小曲面 Σ 使得 $\Sigma_{i_k} \xrightarrow{C^\infty} \Sigma$.

证明. 在 p 点处, (选取子列) 设 $T_{p_k} \Sigma_k \rightarrow \{z = 0\}$. 设 $B_\delta(0) = \{(x, y, z) \mid z = 0, x^2 + y^2 \leq \delta^2\}$. 由一致图像引理, 存在 $\delta = \delta(C) > 0$ 使得 Σ_k 可以表示成为 $B_\delta(0)$ 上的函数 u_k 的图像, 且在 B_δ 上, Du_k 一致有界. 则存在函数 u 使得 $u_k \rightarrow u$. 由 Schauder 估计可知, $u_k \xrightarrow{C^\infty} u$.

取 $p \in \partial B_\delta(0)$, 则在 p 点的 δ 邻域中, 重复上面的过程. 我们可以得到在更大区域上的收敛子列. 此过程可以一直继续下去, 直到我们得到完备的极小曲面. \square

在后面的曲率估计中, 下面的引理将会被频繁用到.

引理 2.9. 设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 是嵌入的光滑曲面. 则

$$d(x, \partial\Sigma) |\Pi(x)|, \quad \int_\Sigma |\Pi|^2 dv_g \quad (2.36)$$

是在伸缩变换下的不变量.

定理 2.10. 存在常数 $C > 0$ 使得对于任意定向的稳定极小曲面 $\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$, 成立

$$d_\Sigma(x, \partial\Sigma) |\Pi|(x) \leq C. \quad (2.37)$$

证明. 反证法. 设存在稳定极小曲面 Σ_k 及 $p_k \in \Sigma_k$ 使得

$$d(p_k, \partial\Sigma_k) |\Pi_k(p_k)| \rightarrow \infty. \quad (2.38)$$

如果 Σ_k 是无界的, 则截断 Σ_k 使其是带有光滑边界的紧集. 不失一般性, 设 p_k 取到 $d(x, \partial\Sigma_k) |\Pi_k(x)|$ 的最大值. 经过平移旋转后, 设 p_k 在 0 点处. 对 Σ_k 做伸缩变换 $x \rightarrow |\Pi_k(p_k)| x$, 得到新的极小曲面列, 仍记为 Σ_k . 这些新的极小曲面仍然满足: Σ_k 是稳定的, 并且 $d(0, \partial\Sigma_k) |\Pi_k(0)| \rightarrow \infty$. 另外, $|\Pi_k(0)| = 1$. 因此, $d(0, \partial\Sigma_k) \rightarrow \infty$. 根据 p_k 的选取, $\forall x \in \Sigma_k$,

$$d(x, \partial\Sigma_k) |\Pi_k(x)| \leq d(0, \partial\Sigma_k). \quad (2.39)$$

设 $x \in B_r$. 则

$$|\Pi_k(x)| \leq \frac{d(0, \partial\Sigma_k)}{d(x, \partial\Sigma_k)} \rightarrow 1. \quad (2.40)$$

因此, $|\Pi_k|$ 局部一致有界. 根据定理(2.8), 存在极小曲面 Σ 使得 $\Sigma_k \xrightarrow{C^\infty} \Sigma$. 显然 Σ 是完备的, 且 $|\Pi(0)| = 1$. 下面我们说明 Σ 是稳定的. 否则的话, 存在 $\Omega \subset \subset \Sigma$ 使得 $\lambda_1(\mathcal{L}_\Sigma, \Omega) < 0$. 而由于 $\Sigma_k \xrightarrow{C^\infty} \Sigma$, $\mathcal{L}_{\Sigma_k} \rightarrow \mathcal{L}_\Sigma$, 则 Σ 是稳定的. 而由定理(1.72)可知, Σ 是平面, 而这与 $|\Pi(0)| = 1$ 矛盾. \square

定理 2.11. 设 $C \in (0, 8\pi)$. 则存在常数 $C_0 = C_0(C)$ 使得: 如果 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 是定向极小曲面, 并且

$$\int_\Sigma |\Pi|^2 dv_g \leq C. \quad (2.41)$$

则 $\forall x \in \Sigma$,

$$d(x, \partial\Sigma) |\Pi(x)| \leq C_0. \quad (2.42)$$

定理(2.11)的证明需要下面的定理(2.12).

定理 2.12. 设 Σ^2 是非紧, 可定向, 完备的 2 维黎曼流形, 并且

$$\int_\Sigma K^- < +\infty. \quad (2.43)$$

这里, $K^- = -\min(K, 0)$, K 是 Gauss 曲率. 则有

$$1. \int_\Sigma |K| dv_g < +\infty.$$

2. 存在闭黎曼面 \mathcal{S} 及 $\{p_1, p_2 \cdots p_k\} \subset \mathcal{S}$ 使得 Σ 共形同构于 $\mathcal{S} - \{p_i\}$.

如果 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 是极小曲面, 则

3. 存在 $m \leq 0$ 使得 $\int_{\Sigma} K dv_g = 4m\pi$.

证明. 设 $p \in \Sigma$. 记 $D_r = D(p, r) = \{x \in \Sigma \mid d_{\Sigma}(p, x) \leq r\}$, 则 ∂D_r 是分段光滑曲线. 设 $\{\theta_i\}$ 是 ∂D 上的非光滑点处的外角, 如是图所示. 我们这里选

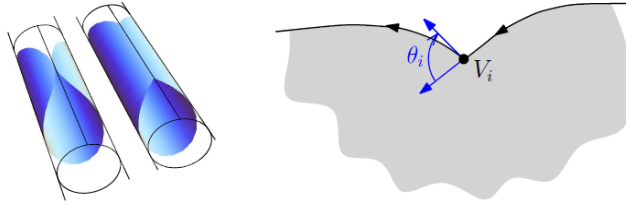


图 2.1: 区域 D_r 的边界.

取的定向使得 $-\pi \leq \theta_i \leq 0$. 记 $l(r) = l(\partial D_r)$. 则由第一变分公式 (非光滑点附近需要单独处理, 参考 [8] 及 [7]),

$$l'(r) = \int_{\partial D_r} K_{\partial D} ds + 2 \sum \tan\left(\frac{\theta_i}{2}\right). \quad (2.44)$$

而由于 $\tan(\frac{\theta_i}{2}) \leq \frac{\theta_i}{2}$, 及 Gauss-Bonnet 公式 (分段光滑区域上的 Gauss-Bonnet 公式参考 [4]),

$$l'(r) \leq \int_{\partial D_r} K_{\partial D} ds + \sum \theta_i = 2\pi\chi(D_r) - \int_{D_r} K dv_g. \quad (2.45)$$

由于 $\limsup l'(r) \geq 0$ (若 $\limsup l'(r) \leq \alpha < 0$, 则存在 r 足够大使得 $l(r) < 0$, 这是不可能的), 则有

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{r \rightarrow \infty} l'(r) \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} (2\pi\chi(D_r) - \int_{D_r} K dv_g) \\ &\leq \limsup (2\pi(2 - 2p(D_r) - (\partial D_r)^{\#}) - \int_{D_r} K^+ dv_g + \int_{D_r} K^- dv_g) \end{aligned} \quad (2.46)$$

其中, p 为 D_r 的亏格, $(\partial D_r)^{\#}$ 为 D_r 的边界的连通分支数. 上述不等式意味着, 存在常数 C 使得

$$1. \quad p(D_r), (\partial D_r)^{\#}, \int_{D_r} K^+ dv_g \leq C(\int_{\Sigma} K^- dv_g + 1).$$

2. 存在 $r_0 > 0$ 使得 $\forall r > r_0, p(D_r) = p(D_{r_0})$.

结论(1)由(2.46)取极限直接得到. 结论(2)是因为 $p(D_r)$ 是有上界的, 且 $p(D_r)$ 只取整数值且关于 r 是非减的. 现在, 对于 $\Sigma - D_r$, 我们证明

断言 1: 设 $r > r_0$, 则 $\Sigma - D_r$ 的每一个紧的连通分支都是单连通的.

证明. 设 Ω 是 $\Sigma - D_r$ 的一个连通分支. 若 $\partial\Omega$ 至少包含两个边界, 由于 $\partial\Omega \subset \partial D_r$, 则 $p(D_r \cup \Omega) > p(D_r)$, 这与结论(2)矛盾. 断言证毕. \diamond

现在, 记 $A_r = D_r \cup \{\Sigma - D_r \text{ 的所有紧连通分支}\}$. 同时取 r_i 使得(2.46)成立并且

$$(\partial D_{r_i})^\# = (\partial D_{r_{i+1}})^\# = c. \quad (2.47)$$

$(\partial D_r)^\#$ 总是取整数值并且有上界, (2.47)是可以取到的. 由于 $(\partial A_{r_i})^\# \leq (\partial D_{r_i})^\#$, 可设

$$(\partial A_{r_i})^\# = (\partial A_{r_{i+1}})^\# = c'. \quad (2.48)$$

此时, $A_{r_i} \subset A_{r_{i+1}}$ 并且 A_{r_i} 与 $A_{r_{i+1}}$ 同胚, 则 $A_{r_{i+1}}$ 是由 A_{r_i} 在边界处添加 annulus 而得到. 由于 $\Sigma = \cup A_{r_i}$, 则 Σ 与 A_{r_i} 具有相同的拓扑型. 现在可以在不等式(2.46)可以得到,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup(2\pi(2 - 2p(D_r) - (\partial D_r)^\#) - \int_{D_r} K^+ dv_g + \int_{D_r} K^- dv_g) \\ &\leq \limsup(2\pi(2 - 2p(A_r) - (\partial A_r)^\#) - \int_{A_r} K dv_g) \\ &\rightarrow 2\pi\chi(\Sigma) - \int_{\Sigma} K dv_g. \end{aligned} \quad (2.49)$$

至此, 我们已经证明了 Σ 是有限型曲面, 即同胚于闭区曲面去掉有限个点.

设 E 为 Σ 的一个末端 (end, 即 $\Sigma - D_{r_0}$ 的一个连通分支, r_0 取足够大). 则 E 是 annulus.

断言 2: E 共形同构于 $\{1 < |z| < +\infty\}$.

证明. 记 $\Gamma_r = \partial D_r \cap E$. 设 $\varphi: E \rightarrow \{1 < |z| < R\}$ 是共形等价. 我们需要证明 $R = +\infty$. 设 $\Gamma_r(s)$ 是其弧长参数化. 则

$$2\pi = l_{\mathbb{S}^1} \leq l_{\varphi \circ \Gamma_r} = \int_{\Gamma_r} |d\varphi(\Gamma_r)\Gamma'_r| ds. \quad (2.50)$$

由 Cauchy 不等式, 则有

$$\begin{aligned} 4\pi^2 &\leq \left(\int_{\Gamma_r} |d\varphi(\Gamma_r)\Gamma'_r| ds \right)^2 \leq l_{\Gamma_r} \int_{\Gamma_r} |D\varphi(\Gamma_r)|^2 ds \\ &= l(\Gamma_r) \int_{\Gamma_r} \det \varphi ds. \end{aligned} \quad (2.51)$$

(最后一个等式中, 我们用到了对于全纯函数 φ , $|d\varphi|^2 = |\varphi'|^2 = \det \varphi$). 由于

$$l'(r) \leq 2\pi\chi(D_r) - \int_{D_r} K dv_g \rightarrow 2\pi\chi(\Sigma) - \int_{\Sigma} K dv_g, \quad (2.52)$$

则存在常数 C 使得

$$l(r) \leq Cr. \quad (2.53)$$

综合以上几个不等式, 我们得到

$$\frac{4\pi^2}{Cr} \leq \frac{4\pi^2}{l(r)} \leq \frac{4\pi^2}{l_{\Gamma_r}} \leq \int_{\Gamma_r} \det \varphi ds. \quad (2.54)$$

对 r 积分, 则有

$$\begin{aligned} +\infty &= \int_{r_0}^{\infty} \frac{4\pi^2}{Cr} \leq \int_{r_0}^{\infty} \int_{\Gamma_r} \det \varphi ds dr \\ &= \text{Area}(\varphi(E)) \\ &= \text{Area}(\{1 < |z| < R\}) \end{aligned} \quad (2.55)$$

因此, $R = +\infty$, 断言证毕. \diamond

现在设 Σ 是极小曲面, 我们计算 Σ 的全曲率. 由命题(1.25)可知,

$$\int_{\Sigma} K dv_g = -\text{Area}(N(\Sigma)). \quad (2.56)$$

N 为 Gauss 映射. 等式右侧面积的计算需要计象集中每个点的重数. 现在, 我们需要说明存在一个整数重数.

断言 3: 设 Σ 共形等价于 $\mathcal{S} - \{p_i\}$, \mathcal{S} 是闭黎曼曲面. 则其 Gauss 映射 $g: \Sigma \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ 可以延拓为 \mathcal{S} 上的亚纯函数.

证明. 取 $p \in \{p_i\}$, 并取 p 点的邻域, 设这个邻域共形等价于 $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} - \{0\}$. 现在, 可以将 g 看作 $g: \mathbb{D}^* \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. 设 $\gamma_\rho = \{|z| = \rho\}$, 并取 γ_ρ 的弧长参数化. 则有

$$|l_{g(\gamma_\rho)}|^2 = \left(\int_{\gamma_\rho} |dg(\gamma_\rho)\gamma'_\rho(s)ds| \right)^2 \leq 2\pi\rho \int_{\gamma_\rho} |dg(\gamma_\rho)|^2 ds. \quad (2.57)$$

两侧同时除以 $\frac{1}{2\pi\rho}$ 并对 ρ 积分, 则有

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{l^2(g(\gamma_\rho))}{2\pi\rho} d\rho &\leq \int_0^1 \int_{\gamma_\rho} |dg(\gamma_\rho)|^2 ds d\rho = 2\text{Area}(g(\mathbb{D}^*)) \\ &\leq -2 \int_{\Sigma} K dv_g < \infty. \end{aligned} \quad (2.58)$$

最后一个不等式是因为命题(1.25). 由于 $\frac{1}{\rho}$ 不可积, 则存在 $\rho_i \rightarrow 0$ 使得 $l(g(\rho_i)) \rightarrow 0$. 这意味着 g 在 0 点的邻域内有界. 因此, g 可以延拓为 \mathbb{D} 上的亚纯函数. 断言得证. \diamond

由于黎曼面之间的共形映射是覆盖映射 (除去有限个分歧点), 则

$$\int_{\Sigma} K dv_g = -\deg(g) \text{Area}(\mathbb{S}^2) = -\deg(g) 4\pi. \quad (2.59)$$

□

注 2.13. 上面等式(2.59)实际上提供了一种计算完备极小曲面全曲率的方法: 只需要知道 Gauss 映射下 \mathbb{S}^2 上任意一个点的原像的个数, 乘以 4π 即可.

推论 2.14. 设 Σ 是完备的定向极小曲面, 且 $-4\pi < \int_{\Sigma} K dv_g \leq 0$, 则 Σ 是平面.

定理(2.11)的证明. 所有的计算都是在曲面的内蕴度量下进行的. 假设结论不成立. 设 $\forall k$, 存在 Σ_k 使得 $\int_{\Sigma_k} |\Pi_k|^2 dv_g \leq C$ 并且存在 $p_k \in \Sigma_k$ 使得 $d(p_k, \partial\Sigma_k) |\Pi_k(p_k)| \rightarrow +\infty$. 不失一般性, 我们选择 p_k 使得

$$d(p_k, \partial\Sigma_k) |\Pi(p_k)| \geq d(x, \partial\Sigma_k) |\Pi(x)| \quad \forall x \in \Sigma_k. \quad (2.60)$$

将 p_k 平移到 0 点处, 将作伸缩 $x \rightarrow \Pi_k(p_k)x$, 得到的新的曲面仍记为 Σ_k . 在伸缩变换下, $\int_{\Sigma_k} |\Pi|^2 dv_g, d(p_k, \partial\Sigma) |\Pi|(p_k)$ 都是不变的. 因此, 这些新的曲面满足

$$\int_{\Sigma_k} |\Pi_k|^2 \leq C, \quad \Pi_k(0) = 1. \quad (2.61)$$

特别地, 有 $d(0, \partial\Sigma_k) \rightarrow \infty$ 以及 $d(x, \partial\Sigma_k) |\Pi(x)| \leq d(0, \partial\Sigma_k)$. 设 $x \in B(0, r)$, 则有

$$|\Pi_k(x)| \leq \frac{d(0, \partial\Sigma_k)}{d(x, \partial\Sigma_k)} \leq \frac{d(0, \partial\Sigma_k)}{d(0, \partial\Sigma_k) - d(0, x)} \rightarrow 1. \quad (2.62)$$

因此, $|\Pi_k|$ 局部一致有界. 由定理(2.8), 存在极小曲面 Σ , 使得 $\Sigma_k \rightarrow \Sigma$. 显然地, Σ 是完备的. 并且

$$|\Pi_\Sigma(0)| = 1. \quad (2.63)$$

另外, 有

$$\int_\Sigma |\Pi_\Sigma|^2 dv_g \leq \liminf \int_{\Sigma_k} |\Pi_k|^2 dv_g \leq C < 8\pi. \quad (2.64)$$

这等价于 $-\int_\Sigma K dv_g < 4\pi$. 由推论(2.14)可知, Σ 是平面, 而这与(2.63)矛盾. \square

对于极小曲面 $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, 记 $\theta(\Sigma, p, R) = \frac{\text{Area}(B(p, R) \cap \Sigma)}{\pi R^2}$. 由单调性公式可知, θ 关于 R 单调递增且 $\lim_{R \rightarrow 0} \theta = 1$.

引理 2.15. 设 $\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$ 是极小曲面. 则 $\theta \equiv 1$ 当且仅当 Σ 是平面.

定理 2.16. 存在 $\lambda > 1, \varepsilon > 0$ 及 $C < \infty$ 使得如果 $\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$ 是极小曲面, $p \in \Sigma$, $B(p, R) \cap \partial\Sigma = \emptyset$ 且 $\theta(\Sigma, p, R) \leq \lambda$, 则 $\forall x \in B(p, \varepsilon R)$,

$$|\Pi(x)| d(x, \partial B(p, \varepsilon R)) \leq C. \quad (2.65)$$

证明. 设论不成立. 取 $\lambda_k \rightarrow 1, \varepsilon_k \rightarrow 0$, 则 $\forall k$, 存在 Σ_k 及 $p_k \in \Sigma_k$, $R_k > 0$ 使得

$$\sup_{x \in B(p_k, \varepsilon_k R_k)} |\Pi_k(x)| d(x, \partial B(p_k, \varepsilon_k R_k)) \rightarrow \infty. \quad (2.66)$$

设 $|\Pi_k(x)| d(x, \partial B(p_k, \varepsilon_k R_k))$ 在 q_k 处取到最大, 则 q_k 是 $B(p_k, \varepsilon_k R_k)$ 的内点. 将 q_k 平移到原点处, 并做伸缩 $x \rightarrow |\Pi_k(q_k)| d(q_k, \partial B(p_k, \varepsilon_k R_k))x$. 伸缩变换后得到的极小曲面仍记为 Σ_k . 则

$$|\Pi_k(0)| = 1, \quad d(0, \partial B(p_k, \varepsilon_k R_k)) \rightarrow \infty. \quad (2.67)$$

特别地, 有 $R_k \rightarrow \infty$. 而 $|\Pi_k(x)| \leq \frac{d(0, \partial B(p_k, \varepsilon_k R_k))}{d(x, \partial B(p_k, \varepsilon_k R_k))} \rightarrow 1$, 则 $|\Pi_k|$ 局部一致有界. 因此, 存在子列, 仍记为 Σ_k 及完备极小曲面 Σ 使得 $\Sigma_k \rightarrow \Sigma$. 而对于任意 $R > 0$, 由单调性公式,

$$\theta(\Sigma, 0, R) = \lim_{k \rightarrow \infty} \theta(\Sigma_k, 0, R) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \theta(\Sigma_k, 0, \frac{1}{1 + \varepsilon_k} R_k). \quad (2.68)$$

另外, 由于 $p_k \in B(0, \varepsilon_k R_k)$,

$$\begin{aligned} \theta(\Sigma_k, 0, \frac{1}{1 + \varepsilon_k} R_k) &= \frac{(1 + \varepsilon_k)^2}{\pi R_k^2} \text{Area}(B(0, \frac{1}{1 + \varepsilon_k} R_k) \cap \Sigma_k) \\ &\leq \frac{(1 + \varepsilon_k)^2}{\pi R_k^2} \text{Area}(B(p_k, R_k) \cap \Sigma_k) \\ &\leq (1 + \varepsilon_k)^2 \lambda_k \rightarrow 1. \end{aligned} \quad (2.69)$$

则 $\theta(\Sigma, 0, R) = 1$. 由引理 (2.15) 可知, Σ 是平面, 这与 (2.68) 矛盾. \square

2.2 L^p 估计

定理 2.17. 设 $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 是定向的稳定极小曲面. 则 $\forall p \in [2, 2 + \sqrt{\frac{2}{n-1}})$, 存在 $C = C(n, p)$ 使得 $\forall \varphi \in C_0^1(\Sigma), \varphi \geq 0$, 成立

$$\int_{\Sigma} |\Pi|^{2p} \varphi^{2p} dv_g \leq C(n, p) \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \varphi|^{2p} dv_g. \quad (2.70)$$

证明. $\forall f \in C_0^1(\Sigma)$, 取 $\eta = |\Pi|^{1+q} f$ 代入到稳定性不等式中, 则有

$$\begin{aligned} \int |\Pi|^{4+2q} f^2 &\leq \int \left| \nabla_{\Sigma} (|\Pi|^{1+q} f) \right|^2 \\ &= \int |\Pi|^{2+2q} |\nabla_{\Sigma} f|^2 + (1+q)^2 |\Pi|^{2q} f^2 |\nabla |\Pi||^2 \\ &\quad + 2(1+q) |\Pi|^{2q+1} f \langle \nabla_{\Sigma} |\Pi|, \nabla_{\Sigma} f \rangle. \end{aligned} \quad (2.71)$$

由 Simons 不等式,

$$|\Pi| \Delta_{\Sigma} |\Pi| + |\Pi|^4 \geq \frac{2}{n-1} |\nabla_{\Sigma} |\Pi||^2. \quad (2.72)$$

两侧同时乘以 $|\Pi|^{2q} f^2$ 并积分后应用散度定理, 则有

$$\begin{aligned} \frac{2}{n-1} \int |\nabla_{\Sigma} |\Pi||^2 |\Pi|^{2q} f^2 &\leq \int |\Pi|^{2q+4} f^2 + \Delta_{\Sigma} |\Pi| |\Pi|^{2q+1} f^2 \\ &= \int |\Pi|^{2q+4} f^2 - \langle \nabla_{\Sigma} |\Pi|, \nabla_{\Sigma} \rangle \\ &= \int |\Pi|^{2q+4} f^2 - 2f |\Pi|^{2q+1} \langle \nabla_{\Sigma} |\Pi|, \nabla_{\Sigma} f \rangle \\ &\quad - (2q+1) f^2 |\Pi|^{2q} |\nabla_{\Sigma} |\Pi||^2. \end{aligned} \quad (2.73)$$

将不等式(2.71)与(2.73)相加后, 得到

$$\begin{aligned} &(\frac{2}{n-1} - q^2) \int |\nabla_{\Sigma} |\Pi||^{2q} |\Pi|^2 f^2 \\ &\leq \int |\Pi|^{2+2q} + 2q |\Pi|^{2q+1} f \langle \nabla_{\Sigma} |\Pi|, \nabla_{\Sigma} f \rangle \\ &\leq \int |\Pi|^{2+2q} |\nabla_{\Sigma} f|^2 + 2q(\frac{1}{\varepsilon} q^2 |\nabla_{\Sigma} f|^2 + \varepsilon f^2 |\nabla_{\Sigma} |\Pi||) |\Pi|^{2q}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

因此, 我们有

$$\left(\frac{2}{n-1} - q^2 - 2q\varepsilon\right) \int |\nabla |\Pi||^{2q} |\Pi|^2 f^2 \leq (1 + 2q\varepsilon) \int |\Pi|^{2+2q} |\nabla_\Sigma|^2. \quad (2.75)$$

这里, 要求

$$\frac{2}{n-1} - q^2 > 0. \quad (2.76)$$

将不等式(2.75)代入到(2.71)中, 则有

$$\begin{aligned} \int |\Pi|^{4+2q} f^2 &\leq 2 \left(\int |\Pi|^{2+2q} |\nabla f|^2 + (1+q)^2 f^2 |\Pi|^{2q} |\nabla_\Sigma |\Pi||^2 \right) \\ &\leq 2 \left(1 + \frac{1+2q\varepsilon}{\frac{2}{n-1} - q^2 - 2q\varepsilon} (1+q)^2 \right) \int |\Pi|^{2+2q} |\nabla_\Sigma f|^2. \end{aligned} \quad (2.77)$$

取 $q = p - 2$, $f = \varphi^p$, 应用 Hölder 不等式, 则有

$$\begin{aligned} \int |\Pi|^{2p} \varphi^{2p} &\leq C(n, p) \int |\Pi|^{2p-2} \varphi^{2p-2} |\nabla_\Sigma \varphi|^2 \\ &\leq C(n, p) \left(\int |\Pi|^{2p} \varphi^{2p} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int |\Pi|^{2p} \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

□

定理 2.18. 设 $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 是完备, 定向, 稳定的极小曲面. 设 $n \leq 6$ 且存在 $C > 0$ 使得

$$\text{Area}(B_r \cap \Sigma) \leq C r^{n-1}. \quad (2.79)$$

则 Σ 是平坦的.

证明. 设 $\rho > 0$. 设 φ 是 $B_{2\rho}, B_\rho$ 上的截断函数, 且 $|\nabla \varphi| \leq \frac{2}{\rho}$. 取 p 满足

$$\frac{n-1}{2} < p \quad \text{且} \quad 2 \leq p < 2 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}. \quad (2.80)$$

$n \leq 6$ 时这样的 p 是存在的. 代入到定理(2.17)中, 则有

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho \cap \Sigma} |\Pi|^{2p} &\leq C(n, p) \frac{1}{\rho^{2p}} \text{Area}(B_{2\rho}) \\ &\leq C(n, p) \rho^{n-1-2p} \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (2.81)$$

□

第三章 Plateau 问题

本章中, 我们回到最开始的问题: 极小曲面起源于下面的问题:

Plateau 问题. 给定简单闭曲线 $\gamma \subset \mathbb{R}^3$, 是否存在以 γ 为边界的面积最小的曲面? 即, 寻找曲面 $\Sigma, \partial\Sigma = \gamma$, 使得对于任意满足 $\partial\Sigma' = \gamma$ 的曲面 Σ' , 都有

$$\text{Area}(\Sigma) \leq \text{Area}(\Sigma')$$

在本章, 按照 Douglas 和 Rado 的方法, 我们将给出 Plateau 问题的肯定的回答. 关于 Douglas 在 Plateau 问题上的工作的简介, 可以参考 [3].

设 $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ 是简单闭曲线. 记 \mathcal{F}_γ 是满足下列条件的函数的集合:

1. $u : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3, u \in C(\overline{\mathbb{D}}) \cap W_{loc}^{1,2}(\mathbb{D}, \mathbb{R}^3)$.
2. $u|_{\partial\mathbb{D}}$ 是到 γ 的单调映射.

注 3.1. 称 u 是单调映射, 是指我们将 γ 沿任意点剪断看作实轴上的一段线段, u 是通常意义下的单调映射. 这里之所以没有要求 u 是同胚, 是因为同胚在求极限后 (一致收敛拓扑) 不会被保持, 而单调性总是会被保持的.

解决 Plateau 问题的第一选择是: 取 $u_k \in \mathcal{F}_\gamma$ 使得 $\text{Area}(u_k(\mathbb{D})) \rightarrow \mathbb{A}_\gamma$, 并证明 $\{u_k\}$ 存在收敛子列. 然而这种思路有两个问题需要解决:

1. 我们可以改变 u_k 在任意点 p 附近的值, 得到 \tilde{u}_k , 使得 \tilde{u}_k 与 $u_k(\mathbb{D})$ 与 $u_k(\mathbb{D})$ 相差”细长”的管状区域, 如图. 这样得到的 \tilde{u}_k 仍然是面积最小的列. 但是这样的列无法在通常的意义下收敛.
2. 第二个问题是面积泛函是与参数选取无关的, 这意味着选取 $\{u_k\}$ 后, 对于任意的微分同胚 $\varphi_k : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, $\text{Area}(u_k \circ \varphi_k(\mathbb{D})) = \text{Area}(u_k(\mathbb{D}))$. 这种情况下, 我们也很难得到收敛子列.

为了解决上面的问题, 我们将使用能量泛函而不是面积泛函. 当然, 首先我们需要说明的是, 对能量泛函求最小值和对面积泛函求最小值这两个问题是等价的 (虽然对于能量泛函, 上述两个问题仍然存在, 但是我们较好的解决该问题的方法).

定理 3.2. 设 $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ 是可求长的 Jordan 曲线. 则存在映射 $u \in \mathcal{F}_\gamma$ 使得 $\forall v \in \mathcal{F}_\gamma$,

$$\text{Area}(u(\mathbb{D})) \leq \text{Area}(v(\mathbb{D})). \quad (3.1)$$

对于任意 $u \in \mathcal{F}_\gamma$, 其面积与能量分别定义为

$$\text{Area}(u) = \int_{\mathbb{D}} |u_x \wedge u_y| \quad (3.2)$$

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} |u_x|^2 + |u_y|^2 \quad (3.3)$$

简单计算可知

$$\text{Area}(u) = \int_{\mathbb{D}} \sqrt{|u_x|^2 |u_y|^2 - \langle u_x, u_y \rangle^2} \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} |u_x|^2 + |u_y|^2 \leq E(u). \quad (3.4)$$

并且等号成立, 当且仅当 $|u_x| = |u_y|$, $\langle u_x, u_y \rangle = 0$.

记

$$\mathbb{A}_\gamma = \inf\{\text{Area}(v) \mid v \in \mathcal{F}_\gamma\}. \quad (3.5)$$

$$\mathbb{E}_\gamma = \inf\{E(v) \mid v \in \mathcal{F}_\gamma\}. \quad (3.6)$$

定义 3.3. 如果 $u \in W^{1,2}(\mathbb{D}, \mathbb{R}^3)$ 几乎处处满足 $\langle u_x, u_y \rangle = 0$ 并且 $|u_x| = |u_y|$, 则称 u 是几乎共形的.

引理 3.4. $\mathbb{A}_\gamma = \mathbb{E}_\gamma$, 并且如果 $u \in \mathcal{F}_\gamma$ 取到 \mathbb{E}_γ , 则 u 是几乎共形的.

证明. 由不等式(3.4)可知, $\mathbb{A}_\gamma \leq \mathbb{E}_\gamma$.

对于反方向的, 设 $u \in \mathcal{F}_\gamma$ 且 $E(u) \leq \mathbb{E}_\gamma + \varepsilon$. 首先设 u 是浸入, 即 du 处处非退化. 设 (\mathbb{D}, g) 为 u 作用下的拉回度量, 即 $g = du^* dx^2$, 由等温坐标的存在性可知, 存在光滑同胚 $\varphi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ 使得 φ 是 $\mathbb{D} \rightarrow (\mathbb{D}, g)$ 之间的共形映射, 即 $d\varphi^* g = \lambda^2 dx^2$. 而 $u \circ \varphi$ 是共形浸入, 则有

$$\text{Area}(u) = \text{Area}(u \circ \varphi) = E(u \circ \varphi) \geq E(u) - \varepsilon. \quad (3.7)$$

如果 du 有奇点, 那么我们定义 $u^s : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^5$, $u^s(x, y) = (u, sx, sy) \in \mathbb{R}^5$. 则 du^s 是非退化的. 像上面一样, 通过 u^s 拉回的度量为 $du^*g_{\mathbb{R}^3} + s^2(dx^2 + dy^2)$. 显然地,

$$\text{Area}(u^s) = \int_{\mathbb{D}} \det(du^*g_{\mathbb{R}^3} + s^2I) \geq \text{Area}(u). \quad (3.8)$$

$$E(u^s \circ \varphi) = \int_{\mathbb{D}} |(u^s \circ \varphi)_x|^2 + |(u^s \circ \varphi)_y|^2 = E(u \circ \varphi) + s^2 E(\varphi). \quad (3.9)$$

因此, 当 s 足够小时, 我们有

$$\begin{aligned} \text{Area}(u) &\leq \text{Area}(u^s \circ \varphi) = E(u^s \circ \varphi) = E(u \circ \varphi) + s^2 E(\varphi) \\ &\leq E(u) - \frac{1}{2}\varepsilon \end{aligned} \quad (3.10)$$

□

引理 3.5. 设 $f \in W^{1,2}(\mathbb{D}, \mathbb{R}^3)$, $E(f) \leq K$. 设 $0 < \delta < 1$, $p \in \mathbb{D}$. 则存在 $\rho \in (\delta, \sqrt{\delta})$ 使得 $f|_{\partial B(p, \rho) \cap \mathbb{D}}$ 是绝对连续的, 且 $\forall z_1, z_2 \in \partial B(p, \rho) \cap \mathbb{D}$, 成立

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq (8\pi)^{\frac{1}{2}} (\log \frac{1}{\delta})^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.11)$$

证明. 在 p 点处引理极坐标 (r, θ) . 由于 $f \in W^{1,2}$, 则几乎对于所有的 r , f 关于 θ 是绝对连续的. 则 Cauchy 不等式,

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &\leq \int_{\partial B \cap \mathbb{D}} |f_{\theta}(re^{i\theta})| d\theta \\ &\leq \sqrt{2\pi} \left(\int_{\partial B \cap \mathbb{D}} f_{\theta}^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

而由于在极坐标下, $Df = f_r \partial_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta} \partial_{\theta}$, 则

$$\int_{B \cap \mathbb{D}} (f_r^2 + \frac{1}{r^2} f_{\theta}^2) r dr d\theta \leq 2K. \quad (3.13)$$

取 ρ 使得 $\int_{\partial B \cap \mathbb{D}} f_{\theta}^2(\rho e^{i\theta})$ 取到 (几乎) 最小, 则有

$$\int_{\delta}^{\sqrt{\delta}} \int_{\partial B \cap \mathbb{D}} \frac{1}{r^2} f_{\theta}^2(\rho e^{i\theta}) r d\theta dr \leq 2K. \quad (3.14)$$

因此,

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \sqrt{2\pi} \frac{2K}{\int_{\delta}^{\sqrt{\delta}} \frac{1}{r}} = \sqrt{8K\pi} (\log \frac{1}{\delta})^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.15)$$

□

引理 3.6. 一致连续.

证明. 取 $u_k \in \mathcal{F}_\gamma$ 且 $E(u_k) \rightarrow \mathbb{E}_\gamma$. 用与 u_k 具有相同边界的调和函数替换 u_k , 仍然记为 u_k , 由于调和函数是能量最小的, 我们仍然有 $E(u_k) \rightarrow \mathbb{E}_\gamma$. 固定 $q_1, q_2, q_3 \in \gamma$ 及 $p_1, p_2, p_3 \in \partial\mathbb{D}$, 取 $\varphi_k \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ 使得 $u_k \circ \varphi_k(p_i) = q_i$. 仍将 $u_k \circ \varphi_k$ 记作 u_k . 由于 u_k 是调和的, 则

$$\max_{\mathbb{D}} |u_k - u_l| = \max_{\partial\mathbb{D}} |u_k - u_l|. \quad (3.16)$$

而根据引理(3.6), $u_k|_{\partial\mathbb{D}}$ 包含一致收敛子列, 则 u_k 包含一致收敛子列. 设 $u_k \rightarrow u$. □

附录 A 附录

A.1 复分析基础

A.1.1 等温坐标的存在性

定理 A.1. 设 (\mathcal{M}^2, g) 是二维黎曼流形, 则存在 \mathcal{M}^2 上的一组坐标卡 $\{z = x + iy\}$, 使得在这组坐标下, $g = \lambda^2 |dz|^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2)$, 并且这组坐标下的坐标变换是全纯的.

证明. 固定点 $p \in \mathcal{M}$. 取 p 点的足够小的邻域 Ω , 在 Ω 中, 取函数 u 使得

$$\Delta_g u = \Delta u + \Gamma_{ii}^j u_j = 0. \quad (\text{A.1})$$

根据椭圆方程的理论, 这个方程总是局部可解的, 并且可以选取 u 使得 $\nabla u(p) \neq 0$. 令 $\omega = \sqrt{\det g} dx$ 为 \mathcal{M} 上的体积形式. 定义 1- 形式

$$\alpha = \text{Tr}(\nabla u \otimes \omega) = i_{\nabla u}^* \omega \quad (\text{A.2})$$

则 $d\alpha = \text{div}(\nabla u)\omega = 0$. 即, α 是闭的 1- 形式. 由 Poincare 引理可知, 存在函数 v 使得 $\alpha = dv$. 现在, 我们证明函数 u, v 具有如下关系:

1. $\langle \nabla u, \nabla v \rangle = 0$.
2. $|\nabla u| = |\nabla v|$.

对于性质 (1), 我们有

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle = dv(\nabla u) = \alpha(\nabla u) = (i_{\nabla u}^* \omega)(\nabla u) = 0 \quad (\text{A.3})$$

对于性质 (2), 我们有

$$\langle \nabla v, \nabla v \rangle = \langle dv, dv \rangle = \langle i_{\nabla u}^* \omega, i_{\nabla u}^* \omega \rangle = \langle \nabla u, \nabla u \rangle. \quad (\text{A.4})$$

上面的最后一个等式在测地坐标下是容易验证的.

现在, 设 $F(x, y) = (u, v)$. 在点 p 处, 由性质 (1) 可知, $\det dF(p) \neq 0$. 由反函数定理可知, (u, v) 可以作为一组局部坐标. 在这组坐标下, 度量 g 的局部表示为

$$g = g_{uu}du^2 + 2g_{uv}dudv + g_{vv}dv^2 \quad (\text{A.5})$$

由于

$$g_{uu} = |\nabla u|^2 = |\nabla v|^2 = g_{vv} \quad (\text{A.6})$$

$$g_{uv} = \langle \nabla u, \nabla v \rangle = 0. \quad (\text{A.7})$$

只需要取 $z = u + iv$, $\lambda = |\nabla u|$ 即可. \square

命题 A.2. 设 Ω 是单连通区域. $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 是调和函数. 则存在全纯函数 F 使得 $u = \Re F$.

证明. 由 Riemann 映射定理, 不妨设 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ 或者 $\Omega = \mathbb{C}$. 定义

$$\tilde{v}(x, y) = \int_0^y u_x(x, t) dt. \quad (\text{A.8})$$

那么

$$\begin{aligned} \tilde{v}_x &= \int_0^y u_{xx}(x, t) dt = - \int_0^y u_{tt}(x, t) dt \\ &= -u_y(x, y) + u_y(x, 0) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

取 $v(x, y) = \tilde{v}(x, y) - \int_0^x u_y(t, 0) dt$, 则 $F(x, y) = u + iv$ 满足 Cauchy-Riemann 方程. \square

A.1.2 单值化定理

定理 A.3 (单值化定理). 每一个单连通的黎曼曲面必定同构于 $\mathbb{D}, \mathbb{C}, \mathbb{S}^2$ 中的三者之一.

证明. 证明. \square

附录 B 习题

1. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域. 设 $u \in W^{1,1}(\Omega)$. 设 $\text{Area}(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2}$.
证明: $\text{Area}(u)$ 在 $W^{1,1}(\Omega)$ 上是严格凸的.
2. 证明: \mathbb{R}^n 中不存在紧致无边的极小曲面.
3. 设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 是极小曲面. 设存在平面 P 使得 $\Sigma \perp P$. 设 Σ 关于平面 P 的反射后的像为 Σ' . 证明: $\Sigma \cup \Sigma'$ 是极小曲面.
4. 设 Σ 为 Catenoid. $\Gamma_a = \Sigma \cap \{z = \pm a\}$. 试比较以下三个以 Γ_a 为边界的曲面的面积大小.

(a) Γ_a 所围的两个圆盘之并.

$$\Sigma_1 = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq \cosh a, z = \pm a\}.$$

(b) Γ_a 的两个分支之间的柱面.

$$\Sigma_2 = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} = \cosh a, |z| \leq a\}.$$

(c) Γ_a 之间 Catenoid 的部分.

$$\Sigma_3 = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} = \cosh z, |z| \leq a\}.$$

5. 设 $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ 是 xz 平面上的曲线. $\gamma = \{(x, 0, z) \mid x = f(z) > 0\}$. 由 γ 绕 z 轴旋转所得到的曲面记为 Σ . 若 Σ 是极小曲面, 试求 f 的表达式.
6. 设 $\Sigma^{n-1} \subset \mathcal{M}^n$ 是极小曲面. $F(x, t) : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ 是固定边界的变分. 设 H_t 为 Σ_t 的平均曲率. 计算 $\frac{d}{dt} H_t \big|_{t=0}$.
7. 设 u 是 Catenoid 上的有界调和函数, 证明 u 是常数.

8. 设 \mathcal{M}^3 可定向且 $\Sigma^2 \subset \mathcal{M}^3$ 是定向的稳定极小曲面. 设 $\tilde{\Sigma}$ 是 Σ 的覆盖空间. 则覆盖映射 $f: \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma \hookrightarrow \mathcal{M}$ 是稳定极小曲面.
9. 设 $\Sigma^{n-1} \subset \mathcal{M}^n$ 是极小曲面. 证明: $\forall p \in \Sigma$, 存在 p 点的足够小的邻域 Ω 使得 $\Omega \cap \Sigma$ 是稳定的.
10. 补充定理(2.8)的证明细节, 并说明“第二基本型一致有界”可以替换为“局部一致有界”.
11. 通过等式(2.59)计算 Catenoid 的全曲率, 并验证定理(2.11)在 $C = 8\pi$ 时是否正确.
12. 设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 是极小曲面, Π 是其第二基本型. 将 Σ 赋予度量 $|\Pi| \langle \cdot, \cdot \rangle$, 计算该度量的曲率.

参考文献

- [1] Hershel M. Farkas and Irwin Kra. *Riemann surfaces*. Vol. 71. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980, pp. xi+337.
- [2] Enrico Giusti. *Minimal surfaces and functions of bounded variation*. Vol. 80. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984, pp. xii+240.
- [3] Jeremy Gray and Mario Micalef. “About the cover: the work of Jesse Douglas on minimal surfaces”. In: *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 45.2 (2008), pp. 293–302.
- [4] John M. Lee. *Introduction to Riemannian manifolds*. Vol. 176. Second edition of [MR1468735]. Springer, Cham, 2018, pp. xiii+437.
- [5] Robert E. Megginson. *An introduction to Banach space theory*. Vol. 183. Springer-Verlag, New York, 1998, pp. xx+596.
- [6] Johannes C. C. Nitsche. *Lectures on minimal surfaces. Vol. 1*. Introduction, fundamentals, geometry and basic boundary value problems, Translated from the German by Jerry M. Feinberg, With a German foreword. Cambridge University Press, Cambridge, 1989, pp. xxvi+563.
- [7] Perez. “Minimal and constant mean curvature surfaces”. In: ().
- [8] Brian White. “Correction to: “Complete surfaces of finite total curvature” [J. Differential Geom. **26** (1987), no. 2, 315–326; MR0906393 (88m:53020)]”. In: *J. Differential Geom.* 28.2 (1988), pp. 359–360.