

# 课程: 极小曲面

draft version

修改日期: 2022 年 9 月 13 日

# 目录

<b>第一章 极小曲面的基本性质</b>	<b>2</b>
1.1 极小曲面方程 . . . . .	2
1.2 第一变分公式 . . . . .	5
1.3 曲面上的坐标函数 . . . . .	7
1.4 Schwartz 反射 . . . . .	9
1.5 单调性公式 . . . . .	11
1.6 Gauss 映射 . . . . .	14
1.7 Bernstein 定理 . . . . .	15
1.8 Weierstrass 表示 . . . . .	16
<b>附录 A 附录</b>	<b>21</b>
A.1 复分析基础 . . . . .	21
A.1.1 等温坐标的存在性 . . . . .	21
A.1.2 调和共轭 . . . . .	22

# 第一章 极小曲面的基本性质

极小曲面起源于下面的问题:

**问题.** 给定简单闭曲线  $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ , 是否存在以  $\gamma$  为边界的面积最小的曲面? 即, 寻找曲面  $\Sigma, \partial\Sigma = \gamma$ , 使得对于任意满足  $\partial\Sigma' = \gamma$  的曲面  $\Sigma'$ , 都有

$$\text{Area}(\Sigma) \leq \text{Area}(\Sigma')$$

这个问题现在被称为 Plateau 问题 (虽然它最早由 Langrange 提出). 1920-30s 年代, 这个问题被 Rado 和 Douglas 解决 (Douglas 也因为在 Plateau 上的工作而获得第一届 Fields 奖).

## 1.1 极小曲面方程

每个曲面都可以局部地表示为函数的图像的形式, 因此我们首先来研究可以作为函数图像的曲面. 设  $\Sigma$  是面积最小的曲面, 且

$$\Sigma = \text{Graph}(u) = \{(x, u(x)) \mid x \in \Omega\}$$

其中,  $\Omega$  是给定的有界区域,  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ . 若使得  $\text{Graph}(u)$  面积最小, 那么对于任意  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  及  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\text{Area}(\text{Graph}(u)) \leq \text{Area}(\text{Graph}(u + t\varphi)) \quad (1.1)$$

于是, 我们有

$$\frac{d}{dt}(\text{Area}(\text{Graph}(u + t\varphi)))|_{t=0} = 0 \quad (1.2)$$

直接计算可知

$$\begin{aligned} \text{Area}(\text{Graph}(u + t\varphi)) &= \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du + tD\varphi|^2} \\ &= \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} + t \frac{\langle Du, D\varphi \rangle}{\sqrt{1 + |Du|^2}} + o(t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

因此,  $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , 成立

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Area}(\text{Graph}(u + t\varphi))|_{t=0} &= \int_{\Omega} \frac{\langle Du, D\varphi \rangle}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \\ &= - \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div} \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

下面的方程便称为极小曲面方程 (MSE).

$$\operatorname{div} \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} = 0 \quad (1.5)$$

**注 1.1.** 一个曲面是否局部地满足 MSE, 跟我们选取的坐标表示是没有关系的.

显然地, 一个函数  $u$  满足极小曲面方程只是  $\text{Graph}(u)$  面积最小的必要条件, 是否有可能是充分条件? 我们下面的两个结论.

**命题 1.2.** 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  是有界区域,  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ . 设  $u$  满足 MSE. 设  $\Sigma \subset \Omega \times \mathbb{R}$  且  $\partial\Sigma = \partial\text{Graph}(u)$ . 则有

$$\text{Area}(\text{Graph}(u)) \leq \text{Area}(\Sigma) \quad (1.6)$$

证明. 记  $\vec{n} = \frac{\partial_{n+1} - Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}}$  为  $\text{Graph}(u)$  的单位法向 (这里我们将  $\vec{n}$  自然地扩张到  $\mathbb{R}^{n+1}$  上). 由于  $u$  满足 MSE, 则  $\operatorname{div}(\vec{n}) = 0$ . 设  $dx$  是  $\mathbb{R}^{n+1}$  中的体积形式, 定义  $n$ -形式  $\omega = i_{\vec{n}}^* dx$  如下, 对于任意向量场  $X_1, X_2, \dots, X_n$ :

$$\omega(X_1, X_2, \dots, X_n) = dx(X_1, X_2, \dots, X_n, \vec{n}) \quad (1.7)$$

显然地,  $\omega$  是多重线性的反对称张量, 即是一个  $n$ -形式. 现在验证  $\omega$  有如下性质:

1.  $d\omega = 0$ .
2.  $\forall$  单位向量场  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , 成立  $\omega(e_1, e_2, \dots, e_n) \leq 1$ . 并且等号成立当且仅当  $e_1, e_2, \dots, e_n$  形成  $T\Sigma$  的标准正交基.

性质 (1) 由基本公式  $d(i_{\vec{n}}^* dx) = \operatorname{div}(\vec{n})dx$  可知. 为了验证性质 (2), 设  $V = \text{span}(e_2, e_3, \dots, e_n, \vec{n})$ . 将  $e_1$  分解为平行于  $V$  和垂直于  $V$  的部分,  $e_1 = e_1^T + e_1^\perp$ . 则

$$\omega(e_1, \dots, e_n, \vec{n}) = \det([e_1^\perp, e_2, \dots, e_n, \vec{n}]) \quad (1.8)$$

同样的相对于空间  $\text{span}(e_3, \dots, e_n, \vec{n})$ , 分解  $e_2$ . 这样一直做下去, 最终有

$$\omega(e_1, \dots, e_n, \vec{n}) = \det([e_1^\perp, e_2^\perp, \dots, e_n^\perp, \vec{n}]) \leq 1 \quad (1.9)$$

等号成立当且仅当每一步地分解中,  $e_i^T = 0$ . 因此性质 (2) 成立. 性质 (2) 的两个直接推论是, 当  $\omega$  限制在  $\text{Graph}(u)$  上时,  $\omega$  恰好为  $\text{Graph}(u)$  上的面积形式. 当  $\omega$  限制在  $\Sigma$  上时,  $\omega \leq d\Sigma$  (这里指的是  $\omega = f(x)d\Sigma, |f| \leq 1$ ).

由于  $H_n(\Omega \times \mathbb{R}) = H_n(\Omega) = \{0\}$ , 则存在区域  $W \subset \Omega \times \mathbb{R}$  使得  $\partial W = \text{Graph}(u) - \Sigma$ . 由 Stokes 公式可知

$$0 = \int_W d\omega = \int_{\text{Graph}(u)} \omega - \int_\Sigma \omega \geq \text{Area}(\text{Graph}(u)) - \text{Area}(\Sigma) \quad (1.10)$$

□

**命题 1.3.** 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  是有界凸区域. 设  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ . 设  $u$  满足 MSE. 设  $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$  且  $\partial\Sigma = \partial\text{Graph}(u)$ , 则有

$$\text{Area}(\text{Graph}(u)) \leq \text{Area}(\Sigma) \quad (1.11)$$

证明. 设  $P : \mathbb{R}^{n+1} \subset \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$  是 nearest point projection, 即  $\forall x \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $P(x)$  是  $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$  中离  $x$  最近的点. 由于  $\Omega$  是凸的,  $P(x)$  存在且唯一. 易知  $|P(x) - P(y)| \leq |x - y|$ , 即  $P$  是 1-Lipschitz 连续的, 在它的作用下, 长度, 面积, 体积等都会减少 (不增). 由于  $P(\Sigma) \subset \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ , 我们可以应用命题(1.2)

$$\text{Area}(\Sigma) \geq \text{Area}(P(\Sigma)) \geq \text{Area}(\text{Graph}(u)) \quad (1.12)$$

□

命题(1.2)中的证明还可以得到下面的结论:

**推论 1.4.** 设  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  满足 MSE. 设  $B_r \subset \Omega \times \mathbb{R}$ . 则有

$$\text{Area}(B_r \cap \text{Graph}(u)) \leq \frac{1}{2} \text{Area}(\partial B_r) \quad (1.13)$$

证明.  $\partial B_r \cap \text{Graph}(u)$  将  $\partial B_r$  分成两部分, 这两部分的面积都比  $\text{Area}(B_r \cap \text{Graph}(u))$  要大 (与命题(1.2)的证明完全相同). □

## 1.2 第一变分公式

设  $(\mathcal{M}^n, g)$  是黎曼流形,  $\Sigma^{n-1} \subset \mathcal{M}$  是  $n-1$  维子流形. 我们采取的记号如下

- $X^T, X^\perp$ : 切向量  $X \in T_p M$  在  $T_p \Sigma$  上的切向及法向分量.
- $T_p^\perp \Sigma := \{X \mid X \in T_p M, X \perp T_p \Sigma\}$ .  $\Sigma$  在  $p$  点处的法丛.
- $\nabla, \nabla_\Sigma$ :  $\mathcal{M}$  及  $\Sigma$  上的 Levi-Civita 联络.  $\nabla_\Sigma = \nabla^T$ .
- $A/II$ :  $\Sigma$  在  $\mathcal{M}$  中的向量值与标量值第二基本形式.  $A(X, Y) = (\nabla_X Y)^\perp$ .  $II(X, Y) = \langle A(X, Y), \vec{n} \rangle$ .  $\vec{n}$  为给定的单位法向.
- $\vec{H}$ :  $\Sigma$  的平均曲率向量.  $\vec{H}(p) = \text{Tr}(A) = \sum_i^{n-1} A(e_i, e_i)$ ,  $\{e_i\}$  是  $T_p \Sigma$  的标准正交基.
- $H$ :  $\Sigma$  的平均曲率.  $H = \langle \vec{H}, \vec{n} \rangle$ ,  $\vec{n}$  为  $\Sigma$  的单位法向.
- $\text{div}_\Sigma X$ :  $X \in TM$  在  $\Sigma$  上的散度.  $\text{div}_\Sigma X = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle$ .  $\{e_i\}$  是  $T\Sigma$  的标准正交基 (验证这个定义与基的选取无关). 需要注意, 这里  $X$  可以定义在  $TM$  上, 而不仅仅是  $T\Sigma$  上. 散度算子满足如下的 Lebniez 公式:

$$\text{div}_\Sigma(fX) = f \text{div}_\Sigma(X) + \langle \nabla_\Sigma f, X \rangle \quad (1.14)$$

设  $F(x, t) : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$  是曲面  $\Sigma$  的一个变分 (连续形变) 满足

1.  $F(x, 0) = x$ .
2.  $\forall x \in \partial\Sigma, F(x, t) = x$ .

**注 1.5.** 我们假设  $\varepsilon$  足够小时,  $F$  是  $\Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  到它的像之间的同胚. 选定  $\Sigma$  上的一组局部坐标系  $(x^i)$ . 以后我们将  $\partial_t$  与  $dF\partial_t$  等同, 将  $\partial_i$  与  $dF\partial_i$  等同, 并分别记作  $\partial_t F$  与  $\partial_i F$ .

设  $\Sigma$  上的度量为  $g$ ,  $\Sigma_t$  上的度量记为  $g(t)$ . 则  $g_{ij}(t) = \langle \partial_i F, \partial_j F \rangle$ . 在这些记号下,

$$\text{Area}(\Sigma_t) = \int_\Sigma \sqrt{\det g(t)} dx \quad (1.15)$$

$$\frac{d}{dt} \text{Area}(\Sigma_t) = \int_\Sigma \frac{d}{dt} \sqrt{\det g(t)} dx \quad (1.16)$$

现在我们来求面积的第一变分. 首先证明一个引理.

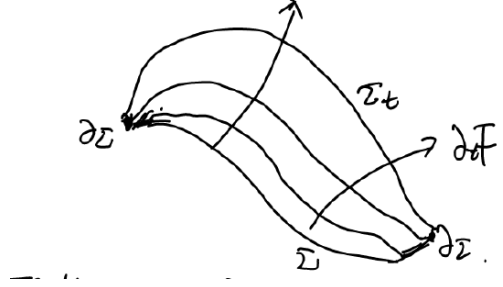


图 1.1: 曲面的变分

**引理 1.6.** 设  $A = [a_{ij}]$  是  $n \times n$  矩阵. 将  $\det A$  看作  $n^2$  个变量  $(a_{ij})$  的函数. 则  $d \det A = A^{ij} da_{ij}$ .  $A^{ij}$  是  $A$  的代数余子式.

证明. 由行列式的拉普拉斯展开, 我们知道  $\forall i, \det A = \sum_j A^{ij} a_{ij}$ . 注意到  $A^{ij}$  与  $a_{ij}$  无关, 则有  $\frac{\partial \det A}{\partial a_{ij}} = A^{ij}$ .  $\square$

**推论 1.7.** 设  $A_t = [a_{ij}(t)]$ . 则  $\frac{d}{dt} \det A_t = \det A_t \operatorname{Tr}(A_t^{-1} \frac{d}{dt} A_t)$ .

固定一个点  $p \in \Sigma$  并选取  $p$  点处的测地坐标. 以后所有计算都将在点  $p$  处进行.

$$2 \frac{d}{dt} \sqrt{\det g(t)}|_{t=0} = \operatorname{Tr}(g'(0)) \quad (1.17)$$

现在, 我们只需要计算  $g'_{ij}(0)$  即可. 根据定义,  $g_{ij}(t) = \langle \partial_i F, \partial_j F \rangle$ . 对  $t$  求偏导, 则有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g_{ij}(t) &= \nabla_{\partial_t F} \langle \partial_i F, \partial_j F \rangle \\ &= \langle \nabla_{\partial_t F} \partial_i F, \partial_j F \rangle + \langle \partial_i F, \nabla_{\partial_t F} \partial_j F \rangle \end{aligned} \quad (1.18)$$

由于  $\nabla_{\partial_t F} \partial_i F - \nabla_{\partial_i F} \partial_t F = [\partial_t F, \partial_i F] = dF[\partial_t, \partial_i] = 0$ , 则有

$$\frac{d}{dt} g_{ij}(t) = \langle \nabla_{\partial_i F} \partial_t F, \partial_j F \rangle + \langle \partial_i F, \nabla_{\partial_j F} \partial_t F \rangle \quad (1.19)$$

因此,

$$\operatorname{Tr}(g'(0)) = \sum_i 2 \langle \nabla_{\partial_i F} \partial_t F, \partial_i F \rangle|_{t=0} = 2 \operatorname{div}_{\Sigma} \partial_t F|_{t=0} \quad (1.20)$$

若记  $\omega_t$  为  $\Sigma_t$  上的体积形式, 那么上面的等式可以写为

$$\frac{d}{dt} \omega_t = (\operatorname{div}_{\Sigma} \partial_t F) \omega_t \quad (1.21)$$

积分后便有

$$\frac{d}{dt} \text{Area}(\Sigma_t) |_{t=0} = \int_{\Sigma} \text{div}_{\Sigma} \partial_t F \quad (1.22)$$

而  $\forall X \in TM$ , 由于

$$\nabla_{\partial_i} \langle X^{\perp}, \partial_j \rangle = 0 = \langle \nabla_{\partial_i} X^{\perp}, \partial_j \rangle + \langle X^{\perp}, \nabla_{\partial_i} \partial_j \rangle \quad (1.23)$$

以及

$$\text{div}_{\Sigma}(X^{\perp}) = \sum_i \langle \nabla_{\partial_i} X^{\perp}, \partial_i \rangle = - \sum_i \langle X^{\perp}, \nabla_{\partial_i} \partial_i \rangle = - \langle X^{\perp}, \vec{H} \rangle \quad (1.24)$$

另外由于  $\partial_t F|_{\partial\Sigma} = 0$ , 由散度定理可知

$$\int_{\Sigma} \text{div}_{\Sigma}(\partial_t F)^T = 0. \quad (1.25)$$

综上, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Area}(\Sigma_t) |_{t=0} &= \int_{\Sigma} \text{div}_{\Sigma}(\partial_t F)^{\perp} + \int_{\Sigma} \text{div}_{\Sigma}(\partial_t F)^T \\ &= - \int_{\Sigma} \langle \partial_t F, \vec{H} \rangle \end{aligned} \quad (1.26)$$

因此, 若要使得曲面  $\Sigma$  的任意变分都不减小曲面的面积, 则  $\Sigma$  的平均曲率必定为 0. 现在我们得到以下的定义:

**定义 1.8.** 称  $\Sigma^{n-1} \subset \mathcal{M}^n$  是极小曲面, 如果  $H_{\Sigma} = 0$ .

### 1.3 曲面上的坐标函数

设  $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  是光滑曲面. 设  $\vec{X} = (X^1, X^2, \dots, X^n)$  为  $\mathbb{R}^n$  上的坐标函数在  $\Sigma$  上的限制.  $\vec{X}$  的一些性质如下.

1.  $\nabla_{\Sigma} |\vec{X}|^2 = 2\vec{X}^T, \nabla_{\Sigma} |\vec{X}| = \frac{\vec{X}^T}{|\vec{X}|}.$
2.  $\Delta_{\Sigma} \vec{X} = (\Delta_{\Sigma} X^1, \Delta_{\Sigma} X^2, \dots, \Delta_{\Sigma} X^n) = \vec{H}_{\Sigma}.$
3.  $\Delta_{\Sigma} |\vec{X}|^2 = 2(n-1) + 2\langle H, \vec{X}^{\perp} \rangle.$

证明. 性质 (1) 根据定义直接可以得到.

对于性质 (2), 首先需要注意, 我们是在对  $\vec{X}$  的每个分量分别求导, 而不是求一个张量的 Laplace. 设  $(\partial_i)$  是  $\mathbb{R}^n$  的标准正交基. 我们注意到: 对



于任意  $Y = Y^i \partial_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $\nabla_Y \vec{X} = Y^i X^j \nabla_{\partial_i} \partial_j + Y^i \partial_i(X^j) \partial_j = Y$ . 取  $T\Sigma$  上的标准正交基  $(e_i)$ . 设  $X^k$  是  $\vec{X}$  的第  $k$  个分量. 由于对于任意  $Y \in T\Sigma$ ,  $\nabla_Y^\Sigma X^k = \langle \nabla^\Sigma X^k, Y \rangle = \langle \nabla X^k, Y \rangle = Y(X^k)$ , 则有

$$\begin{aligned} \Delta_\Sigma X^k &= \sum_i (\nabla_{e_i}^\Sigma \nabla_{e_i}^\Sigma X^k - \nabla_{\nabla_{e_i}^\Sigma e_i}^\Sigma X^k) \\ &= \sum_i (e_i e_i X^k - (\nabla_{e_i} e_i)^T X^k). \end{aligned} \quad (1.27)$$

因此, 我们有

$$\begin{aligned} \Delta_\Sigma \vec{X} &= \sum_i (e_i (e_i \vec{X}) - (\nabla_{e_i} e_i)^T \vec{X}) \\ &= \sum_i (\nabla_{e_i} e_i - (\nabla_{e_i} e_i)^T) \\ &= \text{Tr} A = \vec{H}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

对于性质 (3),

$$\Delta_\Sigma |\vec{X}|^2 = \text{div}_\Sigma (\nabla_\Sigma |\vec{X}|^2) = 2 \text{div}_\Sigma (\vec{X}^T) = 2 \text{div}_\Sigma (\vec{X}) - 2 \text{div}_\Sigma (\vec{X}^\perp) \quad (1.29)$$

分别计算这两项, 则有

$$\text{div}_\Sigma (\vec{X}^\perp) = \sum_i \langle \nabla_{e_i} \vec{X}^\perp, e_i \rangle = - \sum_i \langle \vec{X}^\perp, \nabla_{e_i} e_i \rangle = - \langle \vec{X}^\perp, \vec{H} \rangle \quad (1.30)$$

$$\text{div}_\Sigma (\vec{X}) = \sum_i \langle \nabla_{e_i} \vec{X}, e_i \rangle = \sum_i \langle e_i, e_i \rangle = n - 1 \quad (1.31)$$

综合以上三个等式即可知性质 (3).  $\square$

**推论 1.9.** 设  $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ . 则  $\Sigma$  是极小曲面当且仅当  $\mathbb{R}^n$  中的坐标函数在  $\Sigma$  上是调和的 ( $\Sigma$  上的度量继承自  $\mathbb{R}^n$ ).

证明. 性质 (2) 的直接推论.  $\square$

**推论 1.10.** 设  $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  是带有边界的极小曲面. 则  $\Sigma \subset \text{Conv}(\partial\Sigma)$ .  $\text{Conv}$  指的是集合的凸包.

证明.  $\forall \vec{v} \in \mathbb{S}^{n-1}$ , 记  $P_{\vec{v},a} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \vec{v} \rangle \leq a\}$ . 设  $u(x) = \langle x, \vec{v} \rangle$ , 则  $u(x)$  是  $\Sigma$  上的调和函数. 因此,  $u$  的最大值只能在  $\partial\Sigma$  上取到. 若  $\partial\Sigma \subset P_{\vec{v},a}$ , 则  $\forall x \in \partial\Sigma, u(x) \leq a$ , 因此,  $\forall x \in \Sigma, u(x) \leq a$ . 即,  $\Sigma \subset P_{\vec{v},a}$ . 证毕.  $\square$

**习题 1.11.** 证明:  $\mathbb{R}^n$  中不存在紧致无边的极小曲面.

## 1.4 Schwartz 反射

由于推论(1.9), 极小曲面有许多性质跟调和函数非常相似 (实际上极小曲面也是调和映射). 非常重要的一个应用便是 Schwartz 反射原理.

**命题 1.12.** 设  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  是极小曲面. 设  $\Gamma \subset \partial\Sigma$  是一段直线段. 设  $\Sigma$  有关直线  $\Gamma$  的对称反射的像为  $\Sigma'$ . 则  $\Sigma \cup \Sigma'$  是极小曲面.

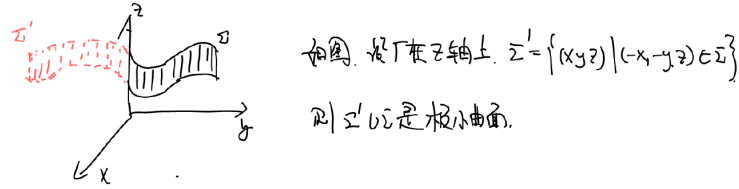


图 1.2: Schwartz 反射

**引理 1.13.** 设  $\mathbb{D}$  为单位圆盘,  $\mathbb{D}^+, \mathbb{D}^-$  为上半/下半单位圆盘. 设  $u: \mathbb{D}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  是调和函数, 且在  $x$ -轴上,  $u \equiv 0$ . 在  $\mathbb{D}$  上定义

$$\tilde{u}(x, y) = \begin{cases} u(x, y), & (x, y) \in \mathbb{D}^+. \\ -u(x, -y), & (x, y) \in \mathbb{D}^-. \end{cases} \quad (1.32)$$

则  $\tilde{u}$  是  $\mathbb{D}$  上的调和函数.

证明. 显然,  $\tilde{u}$  连续且在  $\mathbb{D}^+, \mathbb{D}^-$  内部都是调和的, 我们只需要考虑  $\tilde{u}$  在  $x$ -轴附近的行为.  $\forall x_0 \in x\text{-axis}$ , 取  $B_r(x_0) \subset \mathbb{D}$ . 解方程

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & x \in B_r \\ v|_{\partial B_r(x_0)} = 0 \end{cases} \quad (1.33)$$

方程的可解性由 Poisson 积分给出, 在复坐标  $z = x + iy$  下

$$v(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z-x_0|=r} \frac{r^2 - |a-x_0|^2}{|z-a|^2} \tilde{u}(z) ds \quad (1.34)$$

由于  $\forall z \in \partial B_r(x_0)$ ,  $\tilde{u}(z) = -\tilde{u}(\bar{z})$ . 则  $\forall a \in B_r$ ,  $v(a) = -v(\bar{a})$ . 则在  $x$ -轴上,  $v \equiv 0$ . 因此,  $v|_{\partial B_r^+} = \tilde{u}|_{\partial B_r^+}$ ,  $v|_{\partial B_r^-} = \tilde{u}|_{\partial B_r^-}$ . 由最大值原理可知在  $B_r$  上,  $\tilde{u} = v$ . 因此,  $\tilde{u}$  是调和的.  $\square$

**引理 1.14** (等温坐标的存在性). 设  $(M^2, g)$  是二维黎曼流形, 则存在  $M^2$  上的一组坐标卡  $\{z = x + iy\}$ , 使得在这组坐标下,  $g = \lambda^2 |dz|^2$ , 并且这组坐标下的坐标变换是全纯的.

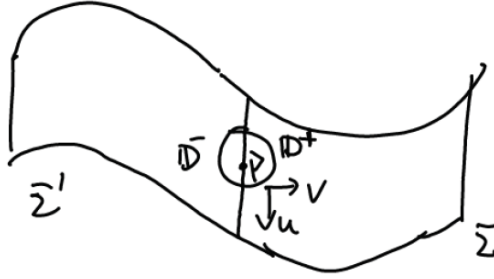


图 1.3: 等温坐标

命题(1.12)的证明. 取  $\Sigma$  上的等温坐标, 显然地,  $\Sigma$  上的等温坐标经反射后得到  $\Sigma'$  上的等温坐标. 将  $z$ -轴看作是  $\mathbb{C} = \{w = u + iv\}$  上的  $u$ -轴. 将  $B_r(p) \cap \Sigma$  看作  $\mathbb{D}^+$ , 将  $B_r(p) \cap \Sigma'$  看作  $\mathbb{D}^-$ . 根据构造,

$$x(w) = -x(\bar{w}), y(w) = -y(\bar{w}) \quad (1.35)$$

现在, 利用调和函数的反射性质可知, 在  $\Sigma \cap \Sigma'$  上,  $x, y$  坐标都是调和的. 我们只需要说明  $z$ -坐标也是调和的即可. 由  $\Sigma'$  的构造可知,

$$z(u, v) = z(u, -v). \quad (1.36)$$

设  $\vec{n}$  是  $B_r \cap \Sigma$  在  $z$ -轴上的单位法向, 则  $\frac{\partial z}{\partial \vec{n}} = \partial_v z = 0$ . 于是,  $z$  满足

$$\partial_v z(u, v) = -\partial_v z(u, -v). \quad (1.37)$$

由 Schwarz 反射可知,  $z_v$  是调和函数, 则  $z$  是调和的.  $\square$

**注 1.15.** 由此可见, 极小曲面上包含直线是非常强的条件. Schwarz 反射的一类非常重要的应用是当极小曲面的边界上包含两条平行的直线的情况下. 这个时候我们可以做无穷多次反射得到一个周期的极小曲面.

**命题 1.16.** 设  $X(u, v) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  是共形浸入. 则  $\Sigma = X(\mathbb{D})$  是极小曲面当且仅当  $X$  的每个分量是调和函数.

证明. 由于  $X$  是共形浸入, 则在  $\Sigma$  上的度量在  $z = u + iv$  坐标下可以表示为  $\lambda^2 |dz|^2$  的形式, 而  $\Delta_\Sigma X = \frac{1}{\lambda^2} \Delta X = 0$ .  $\square$

**注 1.17.**  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  是极小曲面当且仅当  $\mathbb{R}^3$  中的坐标函数在  $\Sigma$  上的限制是调和的, 这里  $\Sigma$  上必须是继承自  $\mathbb{R}^3$  上的度量. 命题 (1.16) 中的共形浸入的条件是必不可少的, 比如, 设  $X : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3, X(u, v) = (u, v, uv)$ . 显然地,  $\Delta X = 0$ . 但是  $X(\mathbb{D})$  不是极小曲面.

**习题 1.18.** 设  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  是极小曲面. 设存在平面  $P$  使得  $\Sigma \perp P$ . 设  $\Sigma$  关于平面  $P$  的反射后的像为  $\Sigma'$ . 证明:  $\Sigma \cup \Sigma'$  是极小曲面.

## 1.5 单调性公式

**命题 1.19** (余面积公式). 设  $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  是光滑曲面. 设  $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  是 Lipschitz, proper (紧集的原像为紧集) 映射. 则  $\forall f \in L^1_{loc}(\Sigma)$ , 成立

$$\int_{\{h < t\}} f |\nabla_\Sigma h| d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{-\infty}^t \int_{\{h=r\}} f d\mathcal{H}^{n-2} dr \quad (1.38)$$

余面积公式相当于 Fubini 定理, 可以将多重积分变为累次积分来计算. 例如, 取  $\Sigma = \Omega, h(x, y) = x, f(x, y) = \chi_\Omega, t = +\infty$ . 那么, 在余面积公式中,

$$\text{左侧} = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_\Omega = |\Omega| \quad (1.39)$$

$$\text{右侧} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\{x=r\}} \chi_\Omega dy dr = |\Omega| \quad (1.40)$$

**命题 1.20.** 设  $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  是光滑曲面. 设  $t > s$  且  $B_t(p) \cap \partial\Sigma = \emptyset$ . 设  $f \in C^1(\Sigma)$ ,  $H$  是  $\Sigma$  的平均曲率. 则有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t^{n-1}} \int_{\Sigma \cap B_t} f d\mathcal{H}^{n-1} - \frac{1}{s^{n-1}} \int_{\Sigma \cap B_s} f d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \int_{\Sigma \cap (B_t - B_s)} f \frac{|(x-p)^\perp|^2}{|x-p|^{n+1}} \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_s^t \frac{1}{r^n} \int_{\Sigma \cap B_r} (r^2 - |x-p|^2) \Delta_\Sigma f + 2f \langle \vec{H}, (x-p)^\perp \rangle d\mathcal{H}^{n-1} dr \end{aligned} \quad (1.41)$$

证明. 记  $I(r) = \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\Sigma \cap B_r} f$ . 不失一般性, 设  $p = 0$ . 对  $I(r)$  求导, 则有

$$\frac{d}{dr} I(r) = -(n-1) \frac{1}{r^n} \int_{\Sigma \cap B_r} f + \frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} \int_{\Sigma \cap B_r} f \quad (1.42)$$

我们分别计算上式右侧的两项. 首先来计算第二项. 设  $f = g \frac{|x^T|}{|x|} = g |\nabla_\Sigma |x||$ . 则由余面积公式 (取  $h = |x|$ ),

$$\int_{\Sigma \cap B_r} f = \int_{\{|x| < r\} \cap \Sigma} g |\nabla_\Sigma |x|| = \int_{-\infty}^r \int_{\{|x|=\rho\} \cap \Sigma} g d\mathcal{H}^{n-2} d\rho \quad (1.43)$$

因此,

$$\frac{d}{dr} \int_{\Sigma \cap B_r} f = \int_{\partial B_r \cap \Sigma} f \frac{|x|}{|x^T|} = r \int_{\partial B_r \cap \Sigma} f \frac{1}{|x^T|}. \quad (1.44)$$

设  $\vec{n}$  是  $B_r \cap \Sigma$  在  $\partial B_r \cap \Sigma$  上的单位法向. 容易验证  $\langle x^T, \vec{n} \rangle = |x^T|$ . 现在, 我们来计算第一项. 由  $\Delta_\Sigma |x|^2 = 2(n-1) + 2\langle \vec{H}, x^\perp \rangle$  及分部积分公式可知,

$$\begin{aligned} 2(n-1) \int_{\Sigma \cap B_r} f &= \int_{\Sigma \cap B_r} f \Delta_\Sigma |x|^2 - 2 \int_{\Sigma \cap B_r} f \langle \vec{H}, x^\perp \rangle \\ &= \int_{\Sigma \cap B_r} |x|^2 \Delta_\Sigma f + 2 \int_{\partial B_r \cap \Sigma} f \langle \vec{n}, x^T \rangle \\ &\quad - \int_{\partial B_r \cap \Sigma} |x|^2 \langle \vec{n}, \nabla_\Sigma f \rangle - 2 \int_{\Sigma \cap B_r} f \langle \vec{H}, x^\perp \rangle \\ &= I + II + III + IV \end{aligned} \quad (1.45)$$

现在, 在等式(1.45)中,

$$II = 2 \int_{\partial B_r \cap \Sigma} f |x^T|. \quad (1.46)$$

$$III = -r^2 \int_{\partial B_r \cap \Sigma} \langle \vec{n}, \nabla_\Sigma \rangle = -r^2 \int_{B_r \cap \Sigma} \Delta_\Sigma f. \quad (1.47)$$

现在, 将(1.45)及(1.44)代入到(1.42)中, 则有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} I(r) &= -\frac{1}{2r^n} \int_{\Sigma \cap B_r} |x|^2 \Delta_\Sigma f - \frac{1}{r^n} \int_{\partial B_r \cap \Sigma} f |x^T| + \frac{1}{2r^{n-2}} \int_{B_r \cap \Sigma} \Delta_\Sigma f \\ &\quad + \frac{1}{r^n} \int_{\Sigma \cap B_r} f H |x^\perp| + \frac{1}{r^{n-2}} \int_{\partial B_r \cap \Sigma} \frac{f}{|x^T|} \\ &= \frac{1}{2r^n} \int_{\Sigma \cap B_r} (\Delta_\Sigma f (r^2 - |x|^2) + 2\langle \vec{H}, x^\perp \rangle) + \frac{1}{r^n} \int_{\partial B_r \cap \Sigma} f \frac{|x^\perp|^2}{|x^T|} \end{aligned} \quad (1.48)$$

再次利用余面积公式以及  $|\nabla^\Sigma |x|| = \frac{|x^T|}{|x|}$ , 上式右侧第二项的积分为

$$\begin{aligned} \int_s^t \frac{1}{r^n} \int_{\partial B_r \cap \Sigma} f \frac{|x^\perp|^2}{|x^T|^2} &= \int_s^t \int_{\{|x|=r\} \cap \Sigma} f \frac{|x^\perp|^2}{|x^T|} \frac{1}{|x|^n} \\ &= \int_{\{s < |x| < t\} \cap \Sigma} f \frac{|x^\perp|^2}{|x^T|} \frac{1}{|x|^n} |\nabla_\Sigma |x|| \quad (1.49) \\ &= \int_{(B_t - B_s) \cap \Sigma} f \frac{|x^\perp|^2}{|x|^{n+1}} \end{aligned}$$

在等式 (1.48) 两侧取积分, 并将(1.49)代入即可得到单调性公式.  $\square$

**推论 1.21.** 设  $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  是极小曲面.  $x_0 \in \Sigma$ ,  $B_s(x_0) \cap \partial \Sigma = \emptyset$ . 设  $f \in C^\infty(\Sigma)$  且  $f \geq 0$ ,  $\Delta_\Sigma f \geq -\lambda s^2 f$ , 则有

$$f(x_0) \leq e^{\frac{\lambda}{2}} \frac{\int_{B_s \cap \Sigma} f}{|B_s \cap \mathbb{R}^{n-1}|} \quad (1.50)$$

证明. 设  $g(t) = \frac{1}{t^{n-1}} \int_{B_t \cap \Sigma} f$ ,  $t \leq s$ . 则由单调性公式,

$$\begin{aligned} g'(t) &\geq \frac{1}{2} \frac{1}{t^n} \int_{B_t \cap \Sigma} (t^2 - |x|^2) \Delta_\Sigma f \\ &\geq -\frac{\lambda}{2} \frac{1}{t^{n-2} s^2} \int_{B_t \cap \Sigma} f = -\frac{\lambda}{2} \frac{t}{s^2} g(t). \end{aligned} \quad (1.51)$$

于是有,

$$\frac{g'(t)}{g(t)} \geq -\frac{\lambda}{2s^2} t \geq -\frac{\lambda}{2s} \quad (1.52)$$

而这等价于:  $\frac{d}{dt}(e^{\frac{\lambda t}{2s}} g(t)) \geq 0$ . 证毕.  $\square$

**推论 1.22.** 设  $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  是极小曲面.  $x_0 \in \Sigma$ , 设  $f \in C^\infty(\Sigma)$  且  $f \geq 0$ ,  $\Delta_\Sigma f \geq 0$ , 则

$$\frac{1}{s^{n-1}} \int_{B_s(x_0) \cap \Sigma} f \quad (1.53)$$

关于变量  $s$  是非减函数. 特别地, 如果  $x_0 \in \Sigma$ , 那么对于任意  $s > 0$ , 成立

$$f(x_0) \leq \frac{\int_{B_s(x_0) \cap \Sigma} f}{|B_s \cap \mathbb{R}^{n-1}|} \quad (1.54)$$

## 1.6 Gauss 映射

设  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  是光滑曲面. 设  $\vec{n}$  为其单位法向. 由于在  $\mathbb{R}^3$  中,  $\vec{n}$  可以看作  $\mathbb{S}^2$  上的点, 我们可以得到映射  $N: \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2, N(p) = \vec{n}(p), p \in \Sigma$ . 称  $N$  为曲面  $\Sigma$  的 Gauss 映射.

**命题 1.23.** 设  $p \in \Sigma$ , 则  $T_{N(p)}\mathbb{S}^2 = T_p\Sigma$ .

证明.  $T_{N(p)}\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, N(p) \rangle = \langle x, \vec{n} \rangle\}$ . □

**命题 1.24.**  $\forall X, Y \in T_p\Sigma$ , 有等式:

$$\langle II(X, Y), \vec{n} \rangle = -\langle \nabla_X \vec{n}, Y \rangle = -\langle dNX, Y \rangle. \quad (1.55)$$

证明. 由于  $\langle \vec{n}, Y \rangle = 0$ , 则有  $\langle \nabla_X Y, \vec{n} \rangle = -\langle Y, \nabla_X \vec{n} \rangle$ .

第二个等式是因为  $\nabla_X \vec{n} = (\nabla \vec{n})X = dNX$ , 即是欧氏空间中的方向导数. □

**命题 1.25.** 设  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  是光滑曲面. 则  $\Sigma$  是极小曲面当且仅当其 Gauss 映射是反共形的 ( $\mathbb{S}^2$  上取由外单位法向所给定的定向). 反共形指的是保持角度大小而不保持方向.

证明. 固定点  $p \in \Sigma$ . 由于  $II$  是对称的, 则存在局部标架  $\{e_i\}$ , 使得在  $p$  点处,  $Iie_1 = \lambda_1 e_1, Iie_2 = \lambda_2 e_2$ . (这里,  $\lambda_i, e_i$  分别被称作曲面  $\Sigma$  的主曲率与主曲率方向). 现在, 我们有

$$\langle dNe_i, dNe_j \rangle = \langle \nabla_{e_i} \vec{n}, \nabla_{e_j} \vec{n} \rangle \lambda_i \lambda_j \langle e_i, e_j \rangle \quad (1.56)$$

显然地,  $dN = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$  是反共形的当且仅当  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ , 当且仅当  $\Sigma$  是极小曲面. □

**命题 1.26.** 设  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  是极小曲面.  $N$  为其 Gauss 映射.  $d\Sigma, \omega$  分别为  $\Sigma, \mathbb{S}^2$  上的面积形式, 设  $N^*\omega$  为其拉回. 则有

$$|II|^2 d\Sigma = -2N^*\omega. \quad (1.57)$$

证明. 如是在命题(1.25)的证明中选择  $\{e_i\}$ . 设  $\{e^{*i}\}$  为其对偶标架. 由于  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ , 则

$$|II|^2 d\Sigma = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) e^{*1} \wedge e^{*2} = -2\lambda_1 \lambda_2 e^{*1} \wedge e^{*2}. \quad (1.58)$$

而由于  $dN = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ , 则  $|II|^2 d\Sigma = -2N^*e^{*1} \wedge e^{*2}$ . □

## 1.7 Bernstein 定理

**命题 1.27.** 设  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  满足 MSE. 设  $\Sigma = \text{Graph}(u)$ . 设  $\varphi \in \text{Lip}(\Sigma)$  且  $\varphi$  具有紧支集, 则

$$\int_{\Sigma} |II|^2 \varphi^2 \leq C \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \varphi|^2 \quad (1.59)$$

这里,  $C$  是万有常数.

证明. 显然地,  $N(\Sigma) \subset \mathbb{S}_+^2$ . 设  $\omega$  是  $\mathbb{S}^2$  上的面积形式. 由于  $\mathbb{S}_+^2$  是单连通的, 则存在 1-形式  $\alpha$  使得  $\Omega = d\alpha$ . 于是有

$$|II|^2 d\Sigma = -2N^* \omega = -2N^* d\alpha = -2d(N^* \alpha) \quad (1.60)$$

由于  $\forall 1$ -形式  $\beta$ ,  $d(\varphi^2 \beta) = \varphi^2 d\beta + 2\varphi d\varphi \wedge \beta$ , 再由 Stokes 公式

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |II|^2 \varphi^2 &= -2 \int_{\Sigma} \varphi^2 d(N^* \alpha) = -2 \int_{\Sigma} d(\varphi^2 N^* \alpha) + 4 \int_{\Sigma} \varphi d\varphi \wedge N^* \alpha \\ &= 4 \int_{\Sigma} \varphi d\varphi \wedge N^* \alpha \end{aligned} \quad (1.61)$$

在局部标架下,  $\varphi = \varphi_i e^{*i}$ ,  $N^* = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $\alpha = \alpha_i e^{*i}$ . 因此, 若设  $d\varphi \wedge N^* \alpha = f(x) d\Sigma$ , 则  $|f| \leq C_{\alpha} |\nabla_{\Sigma}| |II|$ . 于是有

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |II|^2 \varphi^2 &\leq C_{\alpha} \int_{\Sigma} |A| |\varphi| |\nabla_{\Sigma} \varphi| \\ &\leq C_{\alpha} (\varepsilon \int_{\Sigma} |II|^2 \varphi^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \varphi|^2) \end{aligned} \quad (1.62)$$

取  $\varepsilon$  使得  $\varepsilon C_{\alpha} = \frac{1}{2}$  即可.  $\square$

**定理 1.28.** 设  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  在全平面上满足 MSE. 记  $\Sigma = \text{Graph}(u)$ . 则  $u$  是仿射函数, 或者等价地,  $\Sigma$  是平面.

证明. 我们首先说明, 如果下面的断言成立, 则  $u$  是仿射.

**断言.**  $\forall k > 0$ , 存在  $\varphi_k \in \text{Lip}(\Sigma)$  使得  $\varphi_k|_{B_k \cap \Sigma} = 1$ ,  $\varphi_k$  有紧支集且  $\int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \varphi_k|^2 \rightarrow 0$ .

若断言成立, 那么由不等式(1.27)可知,  $\int_{\Sigma \cap B_k} |II|^2 \leq \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \varphi_k|^2 \rightarrow 0$ . 则  $II \equiv 0$ . 因此  $\Sigma$  为平面.



现在我们来证明断言成立.  $\forall k > 0$ , 定义

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 1, & |x| < k, \\ 1 - \frac{\log|x| - \log k}{\log k}, & k \leq |x| \leq k^2, \\ 0, & |x| > k^2 \end{cases} \quad (1.63)$$

记  $R_{s,t} = B_t - B_s$  为环域. 将  $R_{k,k^2}$  分解为若干环域的并

$$R_{k,k^2} = \bigcup_{i=0}^{\log k} R_{2^i k, 2^{i+1} k}. \quad (1.64)$$

直接计算可知, 在环域  $R_{2^i k, 2^{i+1} k}$  上,

$$|\nabla_{\Sigma} \varphi| \leq |\nabla \varphi| \leq \frac{1}{\log k} \frac{1}{|x|} \quad (1.65)$$

以及

$$|R_{2^i k, 2^{i+1} k} \cap \Sigma| \leq C 2^{2i} k^2. \quad (1.66)$$

于是, 我们有

$$\int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \varphi_k|^2 \leq C \sum_{i=0}^{\log k} 2^{2i} k^2 \frac{1}{(\log k)^2} \frac{1}{2^{2i} k^2} \leq C \frac{1}{\log k} \rightarrow 0. \quad (1.67)$$

断言得证.  $\square$

## 1.8 Weierstrass 表示

**命题 1.29.** 设  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  光滑.  $\Omega$  上的坐标记为  $(u, v)$ . 则  $X$  是局部嵌入当然且当  $dX$  非退化. 并且,  $X$  是共形嵌入当且仅当  $|X_u| = |X_v| \neq 0, \langle X_u, X_v \rangle = 0$ .

证明. 略.  $\square$

**定义 1.30.** 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .  $\Omega$  上的坐标记为  $(u, v)$ , 复坐标记为  $z = u + iv$ . 对于任意  $C^1$  函数  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , 定义其形式偏导

$$\partial f = \frac{1}{2}(f_u - if_v), \bar{\partial} f = \frac{1}{2}(f_u + if_v). \quad (1.68)$$

其它的记号  $\partial_z f = \frac{\partial f}{\partial z} = \partial f, \partial_{\bar{z}} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \bar{\partial} f$  也是常用的.

**习题 1.31.** 设  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . 证明:

1.  $f$  全纯当且仅当  $\bar{\partial}f = 0$ .

2.  $f$  调和当且仅当  $\partial\bar{\partial}f = 0$ .

**命题 1.32.** 设  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  是光滑嵌入.  $X = (X_1, X_2, X_3)$ .  $\forall k$ , 定义  $\varphi_k = \partial X_k$ . 则

1.  $X$  是共形的当且仅当  $\sum_k \varphi_k^2 = 0$ .

2. 若  $X$  是共形的, 则  $X(\Omega)$  是极小曲面当且仅当  $\forall k, \varphi_k$  全纯.

证明. 对于性质 (1), 直接计算可知

$$\begin{aligned}\varphi_k^2 &= (\partial X_k)^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{X_k}{\partial u} - i \frac{X_k}{\partial v} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( \left( \frac{\partial X_k}{\partial u} \right)^2 - \left( \frac{\partial X_k}{\partial v} \right)^2 - i \frac{\partial X_k}{\partial u} \frac{\partial X_k}{\partial v} \right)\end{aligned}\quad (1.69)$$

因此,  $\sum_k \varphi_k^2 = \frac{1}{4}(|X_u|^2 - |X_v|^2) - \frac{i}{2}\langle X_u, X_v \rangle$ . 由命题(1.29)可知结论成立.

对于性质 (2), 我们知道  $X(\Omega)$  是极小的当且仅当  $\forall k, X_k$  是调和函数. 而

$$X_k \text{ 调和} \iff \bar{\partial}\partial X_k = 0 \iff \partial X_k \text{ 全纯} \iff \varphi_k \text{ 全纯}. \quad \square$$

在单连通域上, 通过取  $\Phi_k = \int \varphi_k$ , 我们可以得到以下定理:

**定理 1.33** (Weierstrass 表示). 任意极小曲面  $\Sigma$  者可以局部地由三个满足  $\sum_k \Phi_k'^2 = 0$  的全纯函数  $\Phi_k$  确定, 并且  $\Sigma$  可以表示为  $\Sigma = X(\Omega)$ ,  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  满足

$$\begin{aligned}X &= \Re(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \\ &= \Re \int^z (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)\end{aligned}\quad (1.70)$$

证明. 我们已经证明了任意满足这样条件的三个全纯函数都可以确定一个极小曲面. 而等温坐标及调和共轭的存在性则保证了每个极小曲面都可以局部地表示成这样的形式.  $\forall p \in \Sigma$ , 取  $p$  点处的等温坐标. 不失一般性, 可以假设  $B_r \cap \Sigma = X(\mathbb{D})$ ,  $X : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . 那么,  $X$  的三个分量都是调和函数. 根据调和函数的性质, 存在三个全纯函数  $\Phi_k$  使得  $X = \Re(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ .  $\square$

由该定理可以知道, 要构造一个极小曲面, 我们只需要构造三个全纯函数  $\{\Phi_k\}$  使得  $\sum \Phi_k'^2 = 0$  即可. 给定全纯函数  $f$  及亚纯函数  $g$ , 取

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2), \varphi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2), \varphi_3 = fg \quad (1.71)$$

那么,  $\sum_k \varphi_k^2 = 0$  恒成立. 只要我们先取  $f, g$  使得  $\varphi_k$  都是全纯函数, 便能得到一个极小曲面. 另一方面, 简单计算可知,

$$f = \varphi_1 - i\varphi_2, g = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2} = -\frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\varphi_3} \quad (1.72)$$

因此, 每个极小曲面都可以局部地由  $(g, f)$  给出. 称  $(g, f)$  为极小曲面的 Weierstrass 表示对. 亚纯函数  $g$  实际上是 Gauss 映射, 下面的命题阐述了这件事.

**命题 1.34.** 设  $\Omega$  为单连通区域.  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  为共形嵌入且  $X(\Omega)$  为极小曲面. 设  $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  是球极投影.  $N$  为  $X(\Omega)$  的 Gauss 映射. 设  $(g, f)$  为  $X$  的 Weierstrass 表示对. 则

$$g = \pi \circ N \circ X. \quad (1.73)$$

证明. 由全纯函数的性质可知,

$$\partial_u \Re \int \varphi = \Re \varphi \quad (1.74)$$

$$\partial_v \Re \int \varphi = -\Im \varphi \quad (1.75)$$

因此, 我们有

$$\begin{aligned} X_u \wedge X_v &= -(\Re \varphi_1, \Re \varphi_2, \Re \varphi_3) \wedge (\Im \varphi_1, \Im \varphi_2, \Im \varphi_3) \\ &= - \begin{pmatrix} \Re \varphi_1 & \Re \varphi_2 & \Re \varphi_3 \\ \Im \varphi_1 & \Im \varphi_2 & \Im \varphi_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \end{pmatrix} \\ &= -(\Re \varphi_2 \Im \varphi_3 - \Im \varphi_2 \Re \varphi_3, \Re \varphi_3 \Im \varphi_1 - \Im \varphi_3 \Re \varphi_1, \Re \varphi_1 \Im \varphi_2 - \Im \varphi_1 \Re \varphi_2) \\ &= (\Im \varphi_2 \bar{\varphi}_3, \Im \varphi_3 \bar{\varphi}_1, \Im \varphi_1 \bar{\varphi}_2) \\ &= (\Im \frac{i}{2} |f|^2 (1 + g^2) \bar{g}, \frac{1}{2} |f|^2 (1 - \bar{g}^2) g, \Im \frac{i}{4} |f|^2 (1 - g^2) (1 - \bar{g}^2)) \\ &= \frac{1}{4} (2\lambda^2 \Re g, 2\lambda^2 \Im g, \lambda^2 (|g|^2 - 1)) \end{aligned} \quad (1.76)$$

这里,  $\Re, \Im$  分别表示实部与虚部. 于是,

$$|X_u \wedge X_v|^2 = \frac{1}{4} |f|^2 (1 + |g|^2)^2 \quad (1.77)$$

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|} = \frac{1}{1 + |g|^2} (2\Re g, 2\Im g, |g|^2 - 1) \quad (1.78)$$

最终由球极投影的定义可知  $\pi \circ N \circ X = g$ .  $\square$

由上面的命题可知, 亚纯函数  $g$  的极点的几何含意是明显的, 在  $g$  的极点处, 极小曲面的单位法向垂直向上.

另一种表示方法为  $(g, dh)$ . 这里  $g$  如上.  $dh$  为亚纯微分. 我们只需要取  $dh = fgdz$  即可. 这样, Weierstrass 表示也可以写为

$$X = \Re \int^z \left( \frac{1 - g^2}{2g}, \frac{i(1 + g^2)}{2g}, 1 \right) dh \quad (1.79)$$

在这种表示下,  $dh$  被称为高度微分 (height differential), 它的几何含意也是明显地, 我们有

$$\Re dh = dX_3. \quad (1.80)$$

### 极小曲面的例子

Catenoid:  $g(z) = z, dh = \frac{1}{z} dz, z \in \mathbb{C} - \{0\}$ .

Catenoid 是由悬链面旋转而得到的.

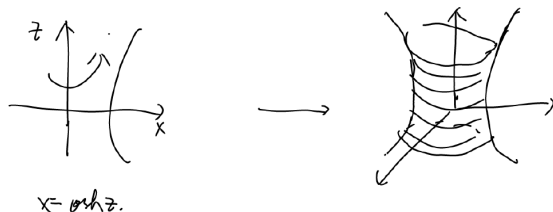


图 1.4: Catenoid

**习题 1.35.** 设  $\Sigma$  为 Catenoid.  $\Gamma_a = \Sigma \cap \{z = \pm a\}$ . 试比较以下三个以  $\Gamma_a$  为边界的曲面的面积大小.

1.  $\Gamma_a$  所围的两个圆盘之并. 即  $\{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq \cosh a, z = \pm a\}$ .
2.  $\Gamma_a$  的两个分支之间的柱面. 即  $\{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} = \cosh a, |z| \leq a\}$ .
3.  $\Gamma_a$  之间 Catenoid 的部分. 即  $\{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} = \cosh z, |z| \leq a\}$ .

**习题 1.36.** 设  $\gamma \subset \mathbb{R}^3$  是  $xz$  平面上的曲线.  $\gamma = \{(x, 0, z) \mid x = f(z) > 0\}$ . 由  $\gamma$  绕  $z$  轴旋转所得到的曲面记为  $\Sigma$ . 若  $\Sigma$  是极小曲面, 试求  $f$  的表达式.

Helicoid:  $g(z) = z, dh = \frac{i}{z}, z \in \mathbb{C} - \{0\}$ . Helicoid 是由一条水平直线匀速螺旋上升而得到的. Helicoid 可以局部地表示为  $z = \arctan \frac{y}{x}$  的形式.

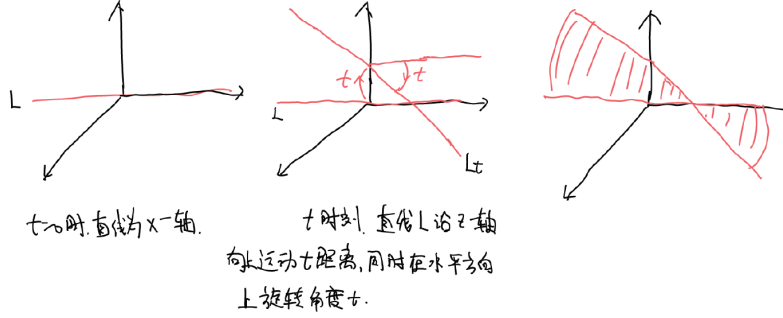


图 1.5: Helicoid

Catenoid 与 Helicoid 的关系: Helicoid 可以由 Catenoid 连续变化而得到. 注意观察它们的 Weierstrass 表示对分别为  $(z, \frac{1}{z}dz)$ ,  $(z, \frac{i}{z}dz)$ .

$$\text{Catenoid} = \Re \int \left( \frac{1-g^2}{2g}, \frac{i(1+g^2)}{2g}, 1 \right) \frac{1}{z} dz \quad (1.81)$$

$$\text{Helicoid} = \Re i \int \left( \frac{1-g^2}{2g}, \frac{i(1+g^2)}{2g}, 1 \right) \frac{1}{z} dz \quad (1.82)$$

$$(1.83)$$

现在, 定义

$$\Sigma_t = \Re e^{\frac{\pi i t}{2}} \int \left( \frac{1-g^2}{2g}, \frac{i(1+g^2)}{2g}, 1 \right) \frac{1}{z} dz \quad (1.84)$$

那么, 对于每一个  $t$ ,  $\Sigma_t$  都是极小曲面, 并且  $t = 0, 1$  时得到的分别为 Catenoid 与 Helicoid.

# 附录 A 附录

## A.1 复分析基础

### A.1.1 等温坐标的存在性

**定理 A.1.** 设  $(\mathcal{M}^2, g)$  是二维黎曼流形, 则存在  $\mathcal{M}^2$  上的一组坐标卡  $\{z = x + iy\}$ , 使得在这组坐标下,  $g = \lambda^2 |dz|^2$ , 并且这组坐标下的坐标变换是全纯的.

证明. 固定点  $p \in \mathcal{M}$ . 取  $p$  点的足够小的邻域  $\Omega$ , 在  $\Omega$  中, 取函数  $u$  使得

$$\Delta_g u = \Delta u + \Gamma_{ii}^j u_j = 0. \quad (\text{A.1})$$

根据椭圆方程的理论, 这个方程总是局部可解的. 令  $\omega = \sqrt{\det g} dx$  为  $\mathcal{M}$  上的体积形式. 定义 1- 形式

$$\alpha = \text{Tr}(\nabla u \otimes \omega) = i_{\nabla u}^* \omega \quad (\text{A.2})$$

则  $d\alpha = \text{div}(\nabla u)\omega = 0$ . 即,  $\alpha$  是闭的 1- 形式. 由 Poincare 引理可知, 存在函数  $v$  使得  $\alpha = dv$ . 现在, 我们证明函数  $u, v$  具有如下关系:

1.  $\langle \nabla u, \nabla v \rangle = 0$ .
2.  $|\nabla u| = |\nabla v|$ .

对于性质 (1), 我们有

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle = dv(\nabla u) = \alpha(\nabla u) = (i_{\nabla u}^* \omega)(\nabla u) = 0 \quad (\text{A.3})$$

对于性质 (2), 我们有

$$\langle \nabla v, \nabla v \rangle = \langle dv, dv \rangle = \langle i_{\nabla u}^* \omega, i_{\nabla u}^* \omega \rangle = \langle \nabla u, \nabla u \rangle. \quad (\text{A.4})$$

上面的最后一个等式在测地坐标下是容易验证的.

现在, 设  $F(x, y) = (u, v)$ . 在点  $p$  处, 由性质 (1) 可知,  $\det dF(p) \neq 0$ . 由反函数定理可知,  $(u, v)$  可以作为一组局部坐标. 在这组坐标下, 度量  $g$  的局部表示为

$$g = g_{uu}du^2 + 2g_{uv}dudv + g_{vv}dv^2 \quad (\text{A.5})$$

由于

$$g_{uu} = |\nabla u|^2 = |\nabla v|^2 = g_{vv} \quad (\text{A.6})$$

$$g_{uv} = \langle \nabla u, \nabla v \rangle = 0. \quad (\text{A.7})$$

只需要取  $z = u + iv$ ,  $\lambda = |\nabla u|^2$  即可.  $\square$

### A.1.2 调和共轭

**命题 A.2.** 设  $\Omega$  是单连通区域.  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  是调和函数. 则存在全纯函数  $F$  使得  $u = \Re F$ .

证明. 定义

$$\tilde{v}(x, y) = \int_0^y u_x(x, t) dt. \quad (\text{A.8})$$

那么

$$\begin{aligned} \tilde{v}_x &= \int_0^y u_{xx}(x, t) dt = - \int_0^y u_{tt}(x, t) dt \\ &= -u_y(x, y) + u_y(x, 0) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

取  $v(x, y) = \tilde{v}(x, y) - \int_0^x u_y(t, 0) dt$ , 则  $F(x, y) = u + iv$  满足 Cauchy-Riemann 方程.  $\square$