课程: 极小曲面

draft version

修改日期: 2022 年 10 月 19 日

目录

第一章　欧氏空间中的 Plateau 问题

1.1 The Disk Case

本章中, 我们回到最开始的问题:

Plateau 问题. *给定简单闭曲线 $\gamma \subset \mathbb{R}^3$, 是否存在以 γ 为边界的面积最小的曲面? 即, 寻找曲面 $\Sigma, \partial\Sigma = \gamma$, 使得对于任意满足 $\partial\Sigma' = \gamma$ 的曲面 Σ', 都有*

$$Area(\Sigma) \leq Area(\Sigma')$$

在本章, 按照 Douglas 和 Rado 的方法, 我们将给出 Plateau 问题的肯定的回答. 关于 Douglas 在 Plateau 问题上的工作的简介, 可以参考 [1].

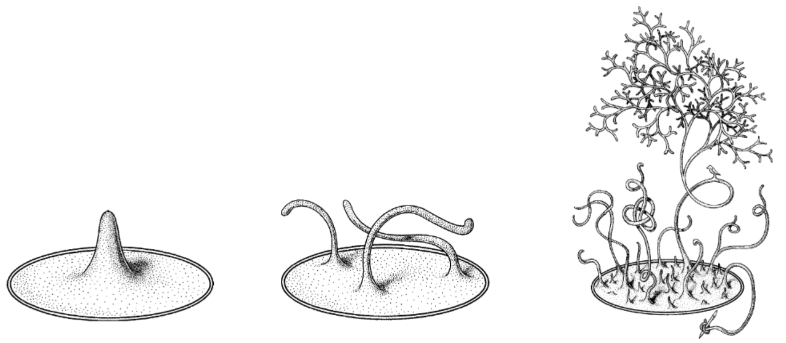
设 $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ 是简单闭曲线. 记

$$\mathcal{F}_\gamma = \{u \mid u \in C(\overline{\mathbb{D}}) \cap W^{1,2}_{loc}(\mathbb{D}, \mathbb{R}^3), u\mid_{\partial\mathbb{D}}: \partial\mathbb{D} \to \gamma\text{是单调映射.}\} \tag{1.1}$$

注 1.1. *称 $u\mid_{\partial\mathbb{D}}$ 是单调映射, 是指我们将 γ 沿任意点剪断后看作实轴上的一段线段, u 是通常意义下的单调映射. 这里之所以没有要求 u 是同胚, 是因为同胚在求极限后 (一致收敛拓扑) 不会被保持, 而单调性总是会被保持的.*

解决 Plateau 问题的第一选择是: 取 $u_k \in \mathcal{F}_\gamma$ 使得 $\mathrm{Area}(u_k(\mathbb{D})) \to \mathbb{A}_\gamma$, 并证明 $\{u_k\}$ 存在收敛子列. 然而这种思路有两个问题需要解决:

1. 我们可以改变 u_k 在任意点 p 附近的值, 得到 $\tilde{u}_k$, 使得 $\tilde{u}_k$ 与 $\tilde{u}_k(\mathbb{D})$ 与 $u_k(\mathbb{D})$ 相差" 细长" 的管状区域, 如图. 这样得到的 $\tilde{u}_k$ 仍然是面积最小的列. 但是这样的列无法在通常的意义下收敛. 如图(1.1)所示.



$\text{Area} = \pi + \frac{1}{4}$ $\text{Area} = \pi + \frac{1}{16}$ $\text{Area} = \pi + \frac{1}{64}$

图 1.1: 面积最小列, 但是没有收敛子列. 图片取自 [2]

2. 第二个问题是面积泛函是与参数选取无关的, 这意味着选取 $\{u_k\}$ 后, 对于任意的微分同胚 $\varphi_k : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $\text{Area}(u_k \circ \varphi_k(\mathbb{D})) = \text{Area}(u_k(\mathbb{D}))$. 这种情况下, 我们也很难得到收敛子列.

为了解决上面的问题, 我们将使用能量泛函而不是面积泛函. 当然, 首先我们需要说明的是, 对能量泛函求最小值和对面积泛函求最小值这两个问题是等价的 (虽然对于能量泛函, 上述两个问题仍然存在, 但是我们较好的解决该问题的方法).

定理 1.2. *设 $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ 是可求长的 Jordan 曲线. 则存在映射 $u \in \mathcal{F}_\gamma$ 使得 $\forall v \in \mathcal{F}_\gamma$,*

$$\mathit{Area}(u(\mathbb{D})) \leq \mathit{Area}(v(\mathbb{D})). \tag{1.2}$$

对于任意 $u \in \mathcal{F}_\gamma$, 其面积与能量分别定义为

$$\text{Area}(u) = \int_{\mathbb{D}} |u_x \wedge u_y| \tag{1.3}$$

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} |u_x|^2 + |u_y|^2 \tag{1.4}$$

简单计算可知

$$\text{Area}(u) = \int_{\mathbb{D}} \sqrt{|u_x|^2 |u_y|^2 - \langle u_x, u_y \rangle^2} \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} |u_x|^2 + |u_y|^2 \leq E(u). \tag{1.5}$$

并且等号成立, 当且仅当 $|u_x| = |u_y|, \langle u_x, u_y \rangle = 0$.

记

$$\mathbb{A}_\gamma = \inf\{\mathrm{Area}(v) \mid v \in \mathcal{F}_\gamma\}. \tag{1.6}$$

$$\mathbb{E}_\gamma = \inf\{E(v) \mid v \in \mathcal{F}_\gamma\}. \tag{1.7}$$

定义 1.3. 如果 $u \in W^{1,2}(\mathbb{D}, \mathbb{R}^3)$ 几乎处处满足 $\langle u_x, u_y\rangle = 0$ 并且 $|u_x| = |u_y|$, 则称 u 是几乎共形的.

引理 1.4. $\mathbb{A}_\gamma = \mathbb{E}_\gamma$, 并且如果 $u \in \mathcal{F}_\gamma$ 取到 $\mathbb{E}_\gamma$, 则 u 是几乎共形的.

证明. 由不等式(1.5)可知, $\mathbb{A}_\gamma \leq \mathbb{E}_\gamma$.

对于反方向的, 设 $u \in \mathcal{F}_\gamma$ 且 $\mathrm{Area}(u) \leq \mathbb{A}_\gamma + \varepsilon$. 首先设 u 是浸入, 即 du 处处非退化. 设 $(\mathbb{D}, g)$ 为 u 作用下的拉回度量, 即 $g = du^* dx^2$, 由等温坐标的存在性可知, 存在光滑同胚 $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 使得 φ 是 $\mathbb{D} \to (\mathbb{D}, g)$ 之间的共形映射, 即 $d\varphi^* g = \lambda^2 dx^2$. 而 $u \circ \varphi$ 是共形浸入, 则有

$$\mathbb{A}_\gamma + \varepsilon \geq \mathrm{Area}(u) = \mathrm{Area}(u \circ \varphi) = E(u \circ \varphi) \geq \mathbb{E}_\gamma \tag{1.8}$$

如果 du 有奇点, 那么我们定义 $u^s : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^5$, $u^s(x, y) = (u, sx, sy) \in \mathbb{R}^5$. 则 du^s 是非退化的. 像上面一样, 通过 u^s 拉回的度量为 $du^* g_{\mathbb{R}^3} + s^2(dx^2 + dy^2)$. 显然地,

$$\mathrm{Area}(u^s) = \int_{\mathbb{D}} \det(du^* g_{\mathbb{R}^3} + s^2 I) \to \mathrm{Area}(u). \tag{1.9}$$

$$E(u^s \circ \varphi) = \int_{\mathbb{D}} |(u^s \circ \varphi)_x|^2 + |(u^s \circ \varphi)_y|^2 = E(u \circ \varphi) + s^2 E(\varphi). \tag{1.10}$$

因此, 当 s 足够小时, 我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_\gamma + 2\varepsilon \geq \mathrm{Area}(u) + \varepsilon &\geq \mathrm{Area}(u^s \circ \varphi) \\ &= E(u^s \circ \varphi) \to E(u \circ \varphi) \\ &\geq \mathbb{E}_\gamma. \end{aligned} \tag{1.11}$$

若 $E(u) = \mathbb{E}_\gamma$, 则 $E(u) = \mathbb{E}_\gamma = \mathbb{A}_\gamma \leq \mathrm{Area}(u)$, 则 $E(u) = \mathrm{Area}(u)$. 由不等式(1.5)可知, u 是几乎共形的. □

引理 1.5 (Courant-Lebesgue 引理)**.** 设 $f \in W^{1,2}(\mathbb{D}, \mathbb{R}^3)$, $E(f) \leq K$. 设 $0 < \delta < 1$, $p \in \mathbb{D}$. 则存在 $\rho \in (\delta, \sqrt{\delta})$ 使得 $f|_{\partial B(p,\rho) \cap \mathbb{D}}$ 是绝对连续的, 且 $\forall z_1, z_2 \in \partial B(p, \rho) \cap \mathbb{D}$, 成立

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq (8K\pi)^{\frac{1}{2}} (\log \frac{1}{\delta})^{-\frac{1}{2}}. \tag{1.12}$$

证明. 在 p 点处引入极坐标 (r,θ). 由于 $f\in W^{1,2}$, 则几乎对于所有的 r, f 关于 θ 是绝对连续的. 则 Cauchy 不等式,

$$\begin{aligned}|f(z_1)-f(z_2)| &\le \int_{\partial B\cap\mathbb{D}} \left|f_\theta(re^{i\theta})\right| d\theta \\ &\le \sqrt{2\pi}\Big(\int_{\partial B\cap\mathbb{D}} f_\theta^2 d\theta\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{1.13}$$

而由于在极坐标下, $Df=f_r\partial_r+\frac{1}{r^2}f_\theta\partial_\theta$, 则

$$\int_{B\cap\mathbb{D}}(f_r^2+\frac{1}{r^2}f_\theta^2)rdrd\theta\le 2K. \tag{1.14}$$

取 ρ 使得 $\int_{\partial B\cap\mathbb{D}} f_\theta^2(\rho e^{i\theta})$ 取到 (几乎) 最小, 则有

$$\int_\delta^{\sqrt{\delta}}\int_{\partial B\cap\mathbb{D}}\frac{1}{r^2}f_\theta^2(\rho e^{i\theta})rd\theta dr\le 2K. \tag{1.15}$$

因此,

$$|f(z_1)-f(z_2)|\le\sqrt{2\pi}\frac{2K}{\int_\delta^{\sqrt{\delta}}\frac{1}{r}}=\sqrt{8K\pi}(\log\frac{1}{\delta})^{-\frac{1}{2}}. \tag{1.16}$$

□

引理 1.6. 设 $p_1,p_2,p_3\in\partial\mathbb{D}$ 是三个不同的点. 则对于任意三个点 $\forall p_1',p_2',p_3'$, 存在唯一的共形同胚 $\alpha:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 使得 $\alpha(p_i)=p_i'$. *(假设 p_i,p_i' 在 $\partial\mathbb{D}$ 上都按逆时针排列)*

证明. 见任意复分析教材. □

引理 1.7. 设 $\gamma\subset\mathbb{R}^3$ 长度有限, 则 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\lambda>0$ 使得 $\forall p,q\in\gamma$, 如果 $d(p,q)<\lambda$, 那么 $\gamma-\{p,q\}$ 的两条曲线中, 只有一条的直径 *(作为集合的直径)* 可以大于 ε.

证明. 略. □

现在, 固定三个点 $p_i\in\partial D$, $q_i\in\gamma$. 设 $K>0$, 记

$${\mathcal{F}_\gamma}^K=\{u\in\mathcal{F}_\gamma\mid E(u)\le K, u(p_i)=q_i\}. \tag{1.17}$$

引理 1.8. ${\mathcal{F}_\gamma}^K|_{\partial D}$ 是等度连续的.

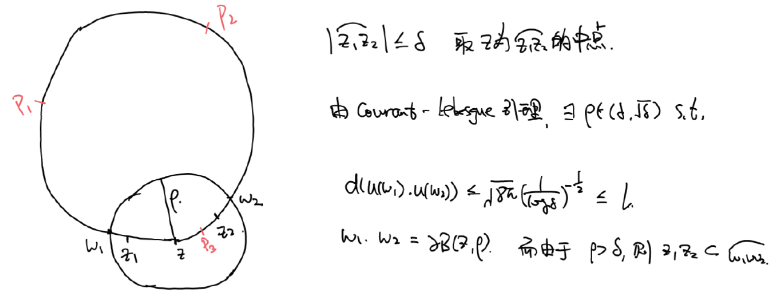


图 1.2: 边界等度连续性

证明. 我们选取 ε 非常小, 使得 γ 中任意长度为 ε 的曲线段都至多包含 $\{q_i\}$ 中的一个点. 现在, 我们证明存在 $\delta > 0$, 使得如果 $z_1, z_2 \in \partial\mathbb{D}, |z_1 - z_2| \le \delta$, 则 $\forall u \in {\mathcal{F}_\gamma}^K$, $|u(z_1) - u(z_2)| \le \varepsilon$.

取 δ 使得 $(8K\pi)^{\frac{1}{2}}(\log\frac{1}{\delta})^{-\frac{1}{2}} \le \lambda$, λ 由引理(1.7)得到. 设 $z_1, z_2 \in \partial\mathbb{D}$. 设 $|z_1 - z_2| \le \frac{1}{\pi}\delta$, 用 $\widehat{z_1z_2}$ 表示 $\partial\mathbb{D} - \{z_1, z_2\}$ 中较短的弧, 显然地, $|\widehat{z_1z_2}| \le \delta$. 只要取 δ 足够小, 就可以假设 $\widehat{z_1z_2}$ 至多包含 $\{p_i\}$ 中的一个点. 设 z 是弧 $\widehat{z_1z_2}$ 的中点. 由引理(1.5), 存在 $\rho \in (\delta, \sqrt{\delta})$ 使得 $\forall u \in {\mathcal{F}_\gamma}^K$,

$$d(u(w_1), u(w_2)) \le (8K\pi)^{\frac{1}{2}}(\log\frac{1}{\delta})^{-\frac{1}{2}} \le \lambda. \tag{1.18}$$

记 $\{w_1, w_2\} = \partial B(z, \rho) \cap \partial\mathbb{D}$, 那么 $u(w_1), u(w_2)$ 将 γ 分成两段, 其中较短的一段至多包含 $\{q_i\}$ 中的一个点. 那么, 这一段的原像必定是 $\widehat{w_1w_2}$. 而由于 $\rho > \delta$, 则 $z_1, z_2 \in \widehat{w_1w_2}$. 则 $d(u(z_1), u(z_2)) \le \varepsilon$. □

定理(1.2)的证明. 取 $u_k \in \mathcal{F}_\gamma$ 且 $E(u_k) \to \mathbb{E}_\gamma$. 由引理(1.6), 存在 φ_k 使得 $u_k \circ \varphi_k \in {\mathcal{F}_\gamma}^K$. 仍将 $u_k \circ \varphi_k$ 记为 u_k. 用与 u_k 具有相同边界的调和函数替换 u_k, 仍然记为 u_k, 由于调和函数是能量最小的, 我们仍然有 $E(u_k) \to \mathbb{E}_\gamma$. 由于 u_k 是调和的, 则

$$\max_{\mathbb{D}} |u_k - u_l| = \max_{\partial\mathbb{D}} |u_k - u_l|. \tag{1.19}$$

而根据引理(1.8), $u_k \mid_{\partial\mathbb{D}}$ 包含一致收敛子列, 则 u_k 包含一致收敛子列. 设 $u_k \to u$. 再选取 u_k 的子列, 使得 $u_k \xrightarrow{\text{弱}W^{1,2}} u$ 且 $u_k \xrightarrow{L^2} u$. 则由能量的下半连续性,

$$E(u) \le \liminf E(u_k) \to \mathbb{E}_\gamma. \tag{1.20}$$

最后, 由引理(1.4), $\text{Area}(u) = E(u) = \mathbb{A}_\gamma$. $\square$

1.2 The Annulus Case

现在, 我们考虑复杂一点的情况. 设 $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ 是两条简单闭曲线的并. 是否存在以 Γ 为边界的极小曲面?

与圆盘的情况不同的是, 并不总是能找到以 Γ 为边界的极小曲面. 这里我们给出一个反例. 设 Σ 为 Catenoid, 即 $\Sigma = \{\cosh^2 z = x^2 + y^2\}$. 设 $\Sigma_a = a\Sigma$. 那么, 当 $a \to +\infty$ 时, $\Sigma_a \to \emptyset$. $a \to 0$ 时, $\Sigma_a \to 2\{z = 0, x^2 + y^2 \neq 0\}$. 简单计算易知, 存在锥体 $C_\lambda = \{x^2 + y^2 < \lambda^2 z^2\}$ 使得 $\forall \Sigma_a \cap C_\lambda = \emptyset$. 分别记 $C_\lambda^+ = C_\lambda \cap \{z > 0\}$, $C_\lambda^- = C_\lambda \cap \{z < 0\}$.

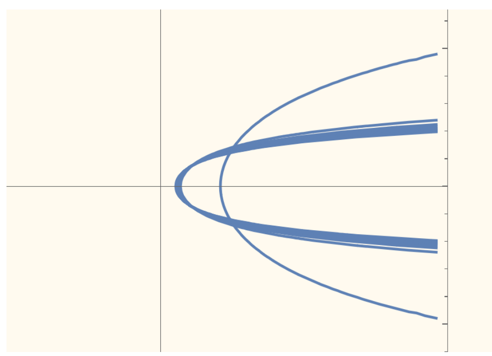


图 1.3: caption

命题 1.9. *设 $\Gamma = \gamma_1 \cap \gamma_2$, $\gamma_1 \subset C_\lambda^+, \gamma_2 \subset C_\lambda^-$. 则不存在以 Γ 为边界的有界连通极小曲面.*

证明. 设这样的极小曲面存在, 记为 M. 显然地, $a \to 0$ 时, $\Sigma_a \cap M \neq \emptyset$. $a \to \infty$ 时, $\Sigma_a \cap M = \emptyset$. 那么存在 a 使得 Σ_a 恰好与 M 相切, 显然地这将与最大值原理矛盾. $\square$

在此, 我们指出, 在解决给定拓扑型的 Plateau 问题时, 我们所会碰到的核心困难在于拓扑型的退化. 如图(1.4)我们要寻找由两个圆盘围出的同胚于环面的极小曲面 (图一图二均为两个环面, 且面积变小. 图三为两个圆盘). 当我们取面积递减的曲面序列的时候, 虽然所取的每一个曲面都同胚于环面, 但是最终得到的极限却是两个圆盘. 这种现象便是拓扑型的退化. 即, 取极限后无法保证得到的曲面的拓扑是我们想要的.

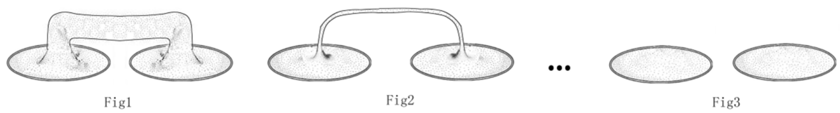


图 1.4: 拓扑型的退化

引理 1.10. 设 $\varphi:\mathbb{S}^1\to\mathbb{R}$ 是绝对连续的, 设 $u\in C(\mathbb{D})$ 是调和函数并且 $u\mid_{\partial\mathbb{D}}=\varphi$. 则

$$\int_{\partial\mathbb{D}}|\nabla u|^2dxdy\le\int_{\mathbb{S}^1}|\varphi_\theta|^2d\theta. \tag{1.21}$$

证明. 设 (r,θ) 是极坐标. 设 $c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^1}\varphi(\theta)e^{-in\theta}d\theta$. 则 u,u_r 具有展开式

$$u(r,\theta)=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_nr^{|n|}e^{in\theta}, \tag{1.22}$$

$$u_r(r,\theta)=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_n|n|r^{|n|-1}e^{in\theta}. \tag{1.23}$$

$$\tag{1.24}$$

由散度定理, 并将(1.22),(1.23)代入计算可知

$$\begin{aligned}\int_{|z|\le r}|\nabla u|^2dxdy&=\int_{\{|z|=r\}}uu_rd\theta\\&=2\pi\sum_{-\infty}^{+\infty}|n|r^{2n}|c_n|^2.\end{aligned} \tag{1.25}$$

另外, 有

$$\int_{\mathbb{S}^1}|u_\theta|^2=2\pi\sum_{-\infty}^{+\infty}|n|^2|c_n|^2. \tag{1.26}$$

令 $r\to 1$ 即可. □

引理 1.11. 设 $\delta<1$. 定义

$$\eta(r)=\begin{cases}1 & r\ge\sqrt{\delta},\\ 1+\dfrac{\log\sqrt{\delta}-\log r}{\log\sqrt{\delta}} & \delta\le r\le\sqrt{\delta}\\ 0 & r\le\delta\end{cases} \tag{1.27}$$

设 $u \in W^{1,2}(\Sigma) \cap C(\Sigma)$. 定义

$$u_\delta(z) = \begin{cases} u(z) & d(u(z), p) \geq \sqrt{\delta} \\ p + \eta(d(u(z), p))(u(z) - p) \end{cases} \tag{1.28}$$

则当 $\delta \to$ 时, $E(u_\delta) \to E(u)$.

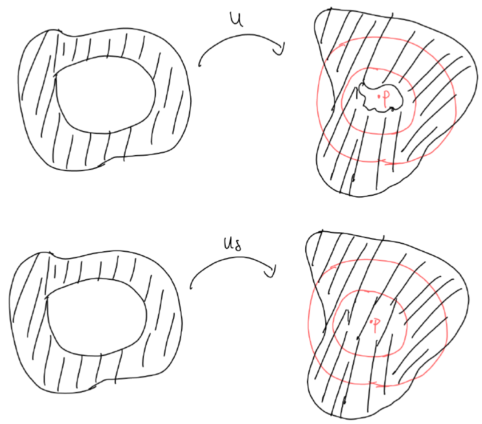


图 1.5: u_δ 填补了 u 的像中的" 空洞"

定理 1.12. 设 $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \subset \mathbb{R}^3$ 是两条不相交的简单闭曲线的并. 设存在以 Γ 为边界的双连通曲面 M 使得

$$Area(M) < \mathbb{A}_{\gamma_{\gamma_1}} + \mathbb{A}_{\gamma_{\gamma_2}}. \tag{1.29}$$

则存在以 Γ 为边界的双连通的极小曲面.

证明. 设 $u_k : \Sigma \to \mathbb{R}^3$, $E(u_k) \to \mathbb{E}_\Gamma$. 记 $K = \mathbb{E}_\Gamma + 1 < +\infty$. 这里, $\Sigma_k = \mathbb{S} \times (0, s_n)$. 现在, 我们证明: 存在子列使得 $s_n \to s > 0$. Σ_n 上的参数记为 (θ, r). $\theta \in \mathbb{S}^1, r \in (0, s_k)$.

断言 1: $\{s_k\}$ 有严格正的下界.

证明. 记 $d = d(\gamma_1, \gamma_2) > 0$. $\forall \theta$, 设 α 为直线 $\theta \times (0, s_k)$. 显然地, $l_{u_k(\alpha)} \geq d$. 则由 Cauchy 不等式

$$d^2 \leq (\int_0^{s_k} |du_k \alpha' | ds)^2 \leq s_k \int_0^{s_k} (\partial_\theta u_k)^2 dr. \tag{1.30}$$

于是, 有

$$\frac{2\pi d^2}{s_k} \le \int_{\mathbb{S}^1}\int_0^{s_k} (\partial_\theta u_k)^2 dr d\theta \le E(h) \le K. \tag{1.31}$$

则 $s_k \ge \frac{2\pi d^2}{K}$. ◇

断言 2: $\{s_k\}$ 有上界 (不等于 $+\infty$).

证明. 反证法. 设 $s_k \to +\infty$. 由于 $E(u_k) \le K$, 则存在 $\rho_k \in (0, s_k)$ 使得

$$s_k \int_{\mathbb{S}^1} (\partial_\theta u_k)^2(\theta, \rho_k) d\theta \le K. \tag{1.32}$$

则有 $\int_{\mathbb{S}^1}(\partial_\theta u_k)^2(\theta,\rho_k)d\theta \to 0$. 记 $D_{\rho_k} = \mathbb{D} \times \{\rho_k\}$. 现在以 $u_k(\rho_k, \theta)$ 为边界值, 由引理(1.10)可知, 存在函数 $f_k : \mathbb{D}_{\{}\rho_k\} \to \mathbb{R}^3$ 使得 $E(f_k) \to 0$. 现在我们定义两个新的映射:

$$\tilde{u}_k^1 : \mathbb{S}^1 \times (0, \rho_k) \cup \mathbb{D}_{\rho_k} \to \mathbb{R}^3. \quad \tilde{u}_k^1 = \begin{cases} u_k & x \in \mathbb{S}^1 \times (0, \rho_k), \\ f_k & x \in \mathbb{D}_{\rho_k}. \end{cases} \tag{1.33}$$

$$\tilde{u}_k^2 : \mathbb{S}^1 \times (0, \rho_k) \cup \mathbb{D}_{\rho_k} \to \mathbb{R}^3. \quad \tilde{u}_k^2 = \begin{cases} u_k & x \in \mathbb{S}^1 \times (\rho_k, s_k), \\ f_k & x \in \mathbb{D}_{\rho_k}. \end{cases} \tag{1.34}$$

则 $E(\tilde{u}_k^1) + E(\tilde{u}_k^2) \le E(u_k) + 2E(f_k)$. 而显然地, $\tilde{u}_k^1, \tilde{u}_k^2$ 的定义域都同胚于单位圆盘. 则

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{\gamma_1} + \mathbb{A}_{\gamma_2} = \mathbb{E}_{\gamma_1} + \mathbb{E}_{\gamma_2} &\le \lim E(\tilde{u}_k^1) + E(\tilde{u}_K^2) \\ &\le \lim E(u_k) + 2E(f_k) \to \mathbb{E}_\Gamma = \mathbb{A}_\Gamma. \end{aligned} \tag{1.35}$$

这与条件(1.29)矛盾. ◇

设 $\Sigma_k \to \Sigma = \mathbb{S}^1 \times (0, s)$. 同时, 我们可以假设 u_k 定义在 Σ 上.

断言 3: $u_k \mid_{\partial\Sigma}$ 是等度连续的.

证明. 我们只考虑 $u_k \mid_{\partial\mathbb{D}}$ 的等度连续性即可. 由引理(1.5), $\forall p \in \partial\mathbb{D}, \delta > 0$, 存在 $\rho_k \in (\delta, \sqrt{\delta})$ 使得

$$l_{u_k(\partial B(p,\rho_k)\cap\Sigma)} \le \sqrt{8K\pi}(\log(\frac{1}{\varepsilon}))^{-\frac{1}{2}}. \tag{1.36}$$

记 $\beta = \partial B(p, \rho_k)$ 将 $\partial\mathbb{D}$ 分成两部分. 其中短的一部分记为 C', 长的部分记为 C''. $u_k(\beta)$ 将 γ_1 分成两部分, 其中短的记为 γ_1', 长的记为 γ_2'. 由 Courant-Lebesgue 引理, 如果 $u_k(C') = \gamma_1'$, 那么 u_k 是等度连续的. 反证法. 设 $u_k(C') = \gamma_2''$. $u_k(C'' \cup \beta) = u(\beta) \cup \gamma_1''$, 而 $l_{u(\beta)\cup\gamma_1''} = \varepsilon_k \to 0$. 取 $q \in \mathbb{R}^3$ 使得 $d(q, u_k(\beta) \cup \gamma_1'') < \varepsilon_k$. 应用引理(1.11), 得到新的映射 $\tilde{u}_k$. $\diamond$

$\square$

1.3 The General Case

1.3.1 双曲几何