课程: 极小曲面

draft version

修改日期: 2022 年 10 月 1 日

目录

第一章　Plateau 问题

设 $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ 是简单闭曲线. 记 $\mathcal{F}_\gamma$ 是满足下列条件的函数的集合:

1. $u : \overline{D} \to \mathbb{R}^3, u \in C(\overline{D}) \cap W^{1,2}_{loc}(D)$.
2. $u\mid_{\partial D}$ 是到其像的同胚.

定理 1.1. *设 $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ 是可求长的 Jordan 曲线. 则存在映射 $u \in D_\gamma$ 使得 $\forall v \in \mathcal{F}_\gamma$,*

$$Area(u(D)) \leq Area(v(D)). \tag{1.1}$$

对于任意 $u \in \mathcal{F}_\gamma$, 其面积与能量分别定义为

$$\mathrm{Area}(u) = \int_{\mathbb{D}} |u_x \wedge u_y| \tag{1.2}$$

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} |u_x|^2 + |u_y|^2 \tag{1.3}$$

简单计算可知

$$\mathrm{Area}(u) = \int_{\mathbb{D}} \sqrt{|u_x|^2 |u_y|^2 - \langle u_x, u_y\rangle^2} \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} |u_x|^2 + |u_y|^2 \leq E(u). \tag{1.4}$$

并且等号成立, 当且仅当 $|u_x| = |u_y|, \langle u_x, u_y\rangle = 0$.

记

$$\mathbb{A}_\gamma = \inf\{\mathrm{Area}(v) \mid v \in \mathcal{F}_\gamma\}. \tag{1.5}$$

$$\mathbb{E}_\gamma = \inf\{E(v) \mid v \in \mathcal{F}_\gamma\}. \tag{1.6}$$

引理 1.2. $\mathbb{A}_\gamma = \mathbb{E}_\gamma$.

证明. 由不等式(1.4)可知, $\mathbb{A}_\gamma \leq \mathbb{E}_\gamma$.

对于反方向的, 设 $u \in \mathcal{F}_\gamma$ 且 $E(u) \leq \mathbb{E}_\gamma + \varepsilon$. 首先设 u 是浸入, 即 du 处处非退化. 设 $(\mathbb{D}, g)$ 为 u 作用下的拉回度量, 即 $g = du^* dx^2$, 由等温坐标

的存在性可知, 存在光滑同胚 $\varphi: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 使得 φ 是 $\mathbb{D} \to (\mathbb{D}, g)$ 之间的共形映射, 即 $d\varphi^* g = \lambda^2 dx^2$. 而 $u \circ \varphi$ 是共形浸入, 则有

$$\text{Area}(u) = \text{Area}(u \circ \varphi) = E(u \circ \varphi) \geq E(u) - \varepsilon. \tag{1.7}$$

如果 du 有奇点, 那么我们定义 $u^s: \mathbb{D} \to \mathbb{R}^5$, $u^s(x, y) = (u, sx, sy) \in \mathbb{R}^5$. 则 du^s 是非退化的. 像上面一样, 通过 u^s 拉回的度量为 $du^* g_{\mathbb{R}^3} + s^2(dx^2 + dy^2)$. 显然地,

$$\text{Area}(u^s) = \int_{\mathbb{D}} \det(du^* g_{\mathbb{R}^3} + s^2 I) \geq \text{Area}(u). \tag{1.8}$$

$$E(u^s \circ \varphi) = \int_{\mathbb{D}} |(u^s \circ \varphi)_x|^2 + |(u^s \circ \varphi)_y|^2 = E(u \circ \varphi) + s^2 E(\varphi). \tag{1.9}$$

因此, 当 s 足够小时, 我们有

$$\text{Area}(u) \leq \text{Area}(u^s \circ \varphi) = E(u^s \circ \varphi) = E(u \circ \varphi) + s^2 E(\varphi) \leq E(u) - \frac{1}{2}\varepsilon \tag{1.10}$$

$\square$

附录 A　附录

A.1　复分析基础

定理 A.1. 设 $(\mathcal{M}^2, g)$ 是二维黎曼流形, 则存在 $\mathcal{M}^2$ 上的一组坐标卡 $\{z = x + iy\}$, 使得在这组坐标下, $g = \lambda^2 |dz|^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2)$, 并且这组坐标下的坐标变换是全纯的.

证明. 固定点 $p \in \mathcal{M}$. 取 p 点的足够小的邻域 Ω, 在 Ω 中, 取函数 u 使得

$$\Delta_g u = \Delta u + \Gamma_{ii}^j u_j = 0. \tag{A.1}$$

根据椭圆方程的理论, 这个方程总是局部可解的, 并且可以选取 u 使得 $\nabla u(p) \neq 0$. 令 $\omega = \sqrt{\det g} dx$ 为 $\mathcal{M}$ 上的体积形式. 定义 1− 形式

$$\alpha = \mathrm{Tr}(\nabla u \otimes \omega) = i^*_{\nabla_u} \omega \tag{A.2}$$

则 $d\alpha = \mathrm{div}(\nabla u)\omega = 0$. 即, α 是闭的 1− 形式. 由 Poincare 引理可知, 存在函数 v 使得 $\alpha = dv$. 现在, 我们证明函数 u, v 具有如下关系:

1. $\langle \nabla u, \nabla v \rangle = 0$.
2. $|\nabla u| = |\nabla v|$.

对于性质 (1), 我们有

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle = dv(\nabla u) = \alpha(\nabla u) = (i^*_{\nabla u} w)\nabla u = 0 \tag{A.3}$$

对于性质 (2), 我们有

$$\langle \nabla v, \nabla v \rangle = \langle dv, dv \rangle = \langle i^*_{\nabla u}\omega, i^*_{\nabla u}\omega \rangle = \langle \nabla u, \nabla u \rangle. \tag{A.4}$$

上面的最后一个等式在测地坐标下是容易验证的.

现在, 设 $F(x,y)=(u,v)$. 在点 p 处, 由性质 (1) 可知, $\det dF(p)\neq 0$. 由反函数定理可知, (u,v) 可以作为一组局部坐标. 在这组坐标下, 度量 g 的局部表示为

$$g=g_{uu}du^2+2g_{uv}dudv+g_{vv}dv^2 \tag{A.5}$$

由于

$$g_{uu}=|\nabla u|^2=|\nabla v|^2=g_{vv} \tag{A.6}$$

$$g_{uv}=\langle\nabla u,\nabla v\rangle=0. \tag{A.7}$$

只需要取 $z=u+iv$, $\lambda=|\nabla u|$ 即可. □

命题 A.2. 设 Ω 是单连通区域. $u:\Omega\to\mathbb{R}$ 是调和函数. 则存在全纯函数 F 使得 $u=\mathfrak{Re}F$.

证明. 由 Riemann 映射定理, 不妨设 $\Omega=(0,1)\times(0,1)$ 或者 $\Omega=\mathbb{C}$. 定义

$$\tilde{v}(x,y)=\int_0^y u_x(x,t)dt. \tag{A.8}$$

那么

$$\begin{aligned}\tilde{v}_x=\int_0^y u_{xx}(x,t)dt&=-\int_0^y u_{tt}(x,t)dt\\&=-u_y(x,y)+u_y(x,0)\end{aligned} \tag{A.9}$$

取 $v(x,y)=\tilde{v}(x,y)-\int_0^x u_y(t,0)dt$, 则 $F(x,y)=u+iv$ 满足 Cauchy-Riemann 方程. □

定理 A.3 (单值化定理)**.** *每一个单连通的黎曼曲面必定同构于 $\mathbb{D},\mathbb{C},\mathbb{S}^2$ 中的三者之一.*

A.2 黎曼几何基础

我们按照约定 $\nabla^2_{X,Y}T=\nabla^2T(Y,X)$. 这样做是为了与欧氏空间的求导记号一致. 设 $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\nabla^2f(\partial_i,\partial_j)=f_{ij}=\partial_j\partial_i f=\nabla^2_{\partial_j,\partial_i}f. \tag{A.10}$$

注 A.4. *总是先对离 f 近的记号求导.*

定义 A.5. 对于任意张量场 S, 定义其曲率张量

$$R(X,Y)S = \nabla^2_{XY}S - \nabla^2_{YX}S \tag{A.11}$$

命题 A.6. 设 $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, 则

$$\nabla^3 f(X,Y,Z) = \nabla^3 f(X,Z,Y) + R(Z,Y,\nabla f,X) \tag{A.12}$$

证明.

$$\begin{aligned}\nabla^3 f(X,Y,Z) - \nabla^3 f(X,Z,Y) &= (\nabla^2_{Z,Y}\nabla f)(X) - (\nabla^2_{Y,Z}\nabla f)(X) \\ &= R(Z,Y,\nabla f,X)\end{aligned} \tag{A.13}$$

□

附录 B　习题

1. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域. 设 $u \in W^{1,1}(\Omega)$. 设 $\mathrm{Area}(u) = \int_\Omega \sqrt{1+|Du|^2}$. 证明: $\mathrm{Area}(u)$ 在 $W^{1,1}(\Omega)$ 上是严格凸的.

2. 证明: $\mathbb{R}^n$ 中不存在紧致无边的极小曲面.

3. 设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 是极小曲面. 设存在平面 P 使得 $\Sigma \perp P$. 设 Σ 关于平面 P 的反射后的像为 Σ'. 证明: $\Sigma \cup \Sigma'$ 是极小曲面.

4. 设 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 是光滑函数. 证明:

   (a) f 全纯当且仅当 $\bar{\partial} f = 0$.

   (b) f 调和当且仅当 $\partial\bar{\partial} f = 0$.

5. 设 Σ 为 Catenoid. $\Gamma_a = \Sigma \cap \{z = \pm a\}$. 试比较以下三个以 Γ_a 为边界的曲面的面积大小.

   (a) Γ_a 所围的两个圆盘之并.

   $$\Sigma_1 = \{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \le \cosh a, z = \pm a\}.$$

   (b) Γ_a 的两个分支之间的柱面.

   $$\Sigma_2 = \{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2} = \cosh a, |z| \le a\}.$$

   (c) Γ_a 之间 Catenoid 的部分.

   $$\Sigma_3 = \{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2} = \cosh z, |z| \le a\}.$$

6. 设 $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ 是 xz 平面上的曲线. $\gamma = \{(x,0,z) \mid x = f(z) > 0\}$. 由 γ 绕 z 轴旋转所得到的曲面记为 Σ. 若 Σ 是极小曲面, 试求 f 的表达式.

7. 设 $\Sigma^{n-1} \subset \mathcal{M}^n$ 是极小曲面. $F(x,t) : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathcal{M}$ 是固定边界的变分. 设 H_t 为 Σ_t 的平均曲率. 计算 $\frac{d}{dt} H_t \mid_{t=0}$.

8. 设 u 是 Catenoid 上的有界调和函数, 证明 u 是常数.

9. 设 $\mathcal{M}^3$ 可定向且 $\Sigma^2 \subset \mathcal{M}^3$ 是定向的稳定极小曲面. 设 $\tilde{\Sigma}$ 是 Σ 的覆盖空间. 则覆盖映射 $f : \tilde{\Sigma} \to \Sigma \hookrightarrow \mathcal{M}$ 是稳定极小曲面.

10. 设 $\Sigma^{n-1} \subset \mathcal{M}^n$ 是极小曲面. 证明: $\forall p \in \Sigma$, 存在 p 点的足够小的邻域 Ω 使得 $\Omega \cap \Sigma$ 是稳定的.