导数

所有教材概念

概念

几何意义

运算和基本公式

复合函数求导

应用

1. 导数的概念和意义

1.1 定义

定义：
函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数值，定义为极限：

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

工程学定义：

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Lh + o(h) \approx f(x_0) + Lhx$$

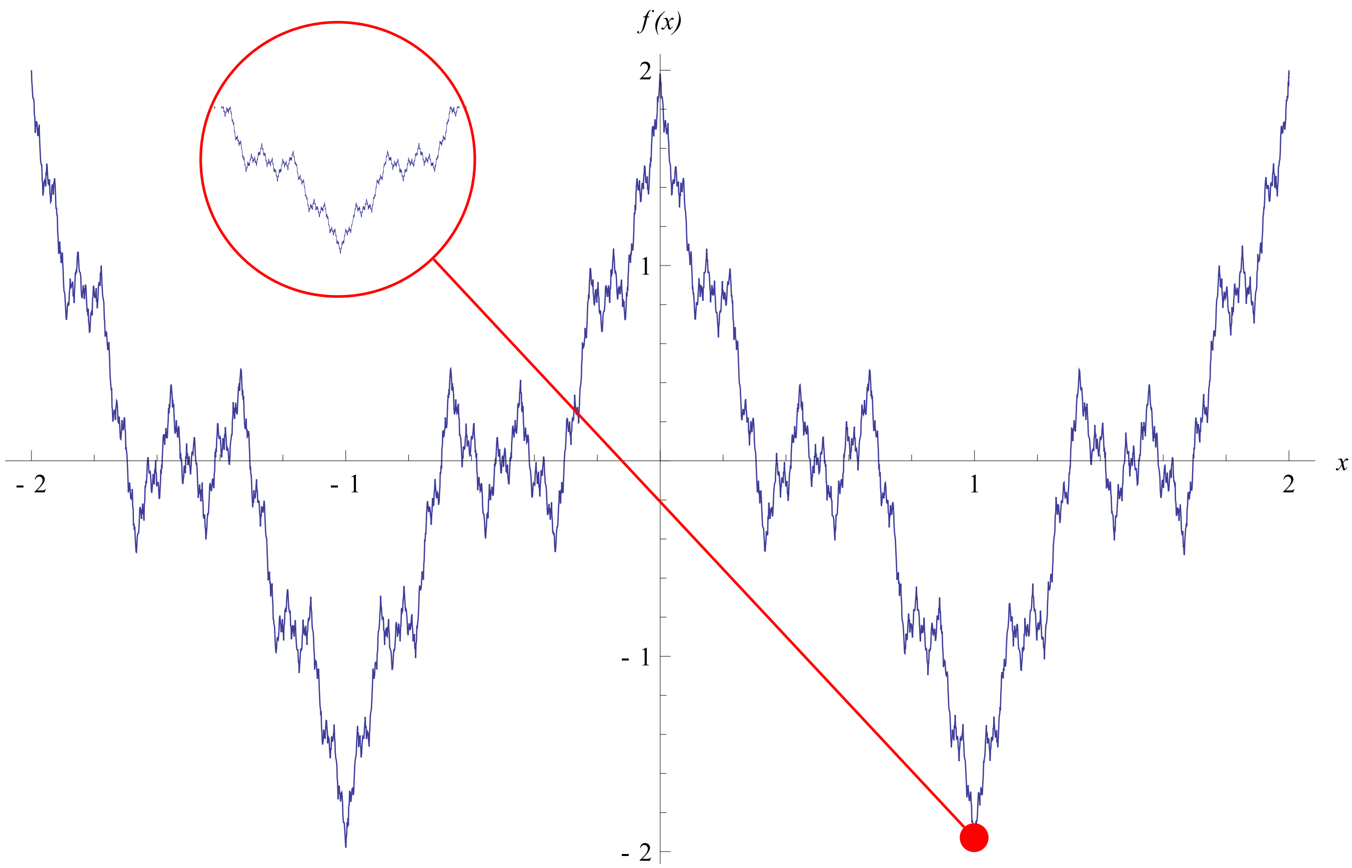
其中 $L = f'(x)$ 为导数值，$o(h)$ 表示当 $h \to 0$ 时，$o(h)$ 比 h 快的无穷小。

思考
为什么要定义导数？
如果把函数与数列对应，一个函数的导数对应数列的什么成分？
导数存在的条件是什么？
导数值与自变量有关吗？

小知识：

- 左导数：$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
- 右导数：$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
- Weierstrass函数 和 Cantor 函数：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

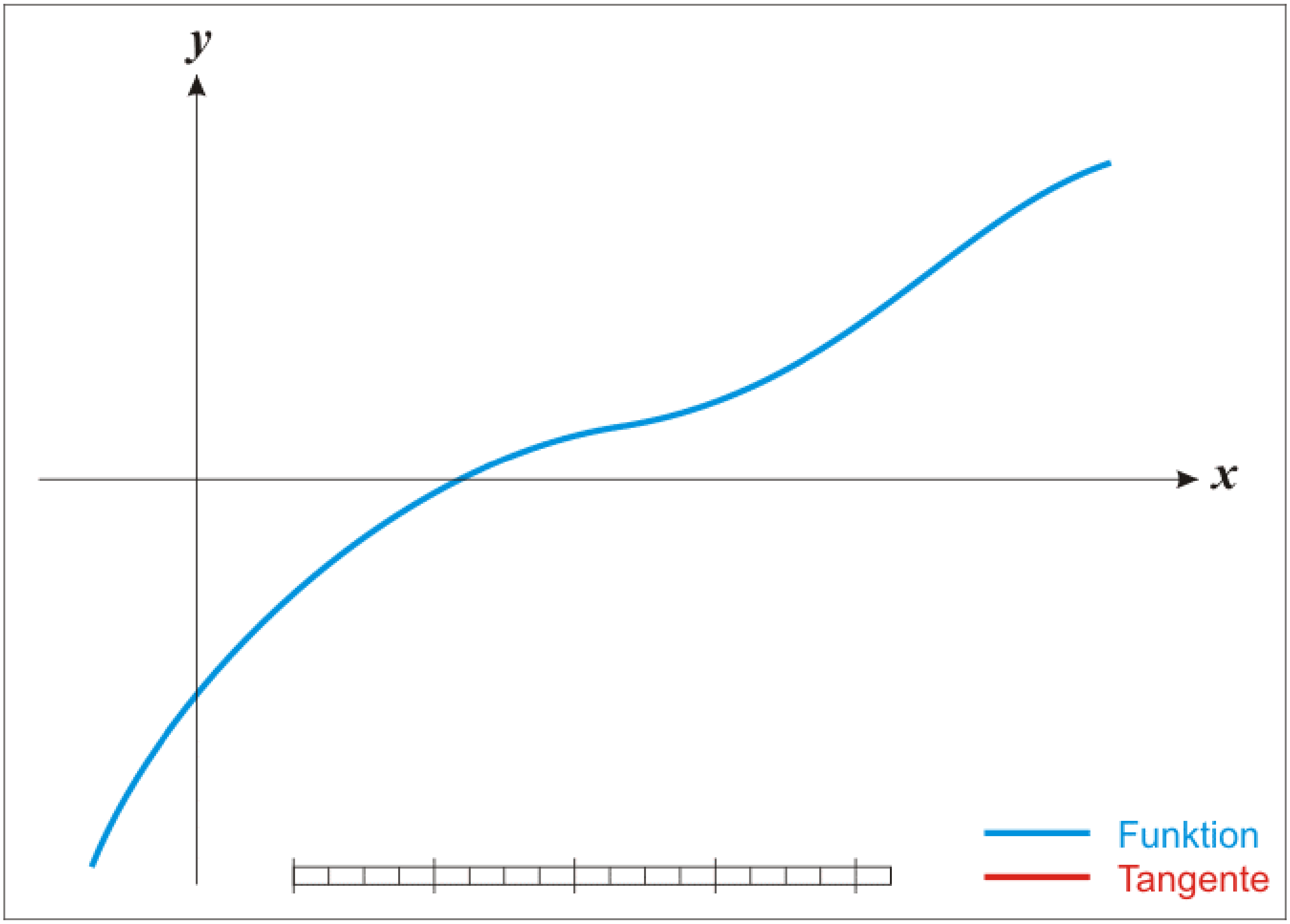


1.2 几何意义

- **切线**：函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的切线方程为 $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$。

小知识：

牛顿法（Newton's method）：$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$



y
x
Funktion
Tangente

2. 导数的运算和基本公式

2.1 基本导数公式

(1) $(C)'=0$，C 为常数；

(2) $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$，$\alpha$ 为常数；

(3) $(e^{x})'=e^{x}$；

(4) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；

(5) $(\sin x)'=\cos x$；

(6) $(\cos x)'=-\sin x$.

(7) $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$；

(8) $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$；

(9) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^{2}}$，$g(x)\neq 0$.

例2.1.1

根据定义证明 $f(x)=x^2$ 的导数为 $f'(x)=2x$； $f(x)=ln(x)$ 的导数为 $f'(x)=\frac{1}{x}$。

例2.1.2

求函数 $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ 的导数。

例2.1.3

求函数 $y = \frac{1}{x}$ 的导数。

2.2 导数的运算法则

- 和差法则：$(u \pm v)' = u' \pm v'$
- 积法则：$(uv)' = u'v + uv'$
- 商法则：$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- 复合函数求导：$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

小知识：

- 反函数求导：$y = f^{-1}(x)$，则 $f'(f^{-1}(x)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
- 隐函数求导：$F(x, y) = 0$，则 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$
- 参数方程求导：$x = f(t), y = g(t)$，则 $\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$
- 高阶导数：$f^{(n)}(x)$ 表示 $f(x)$ 的 n 阶导数
- Leibniz公式：$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$
- 泰勒公式：$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$
- L'Hospital法则：$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
- 微分：$dy = f'(x)dx$
- 积分：$\int f(x)dx = F(x) + C$
- 微分方程：$y' + p(x)y = q(x)$

例2.2.1

证明复合函数求导公式。

例2.2.2

求函数 $y = (x^2 + 1)^3$ 的导数。