导数

所有教材概念

1. 导数的概念和意义

1.1 定义

定义：

$y = f(x)$ x_0

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

工程学定义：

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Lh + o(h) \approx f(x_0) + Lhx$$

$L = f'(x)$ $o(h)$ $h \to 0$ $o(h)$ h

思考

为什么要定义导数？

如果把函数与数列对应，一个函数的导数对应数列的什么成分？

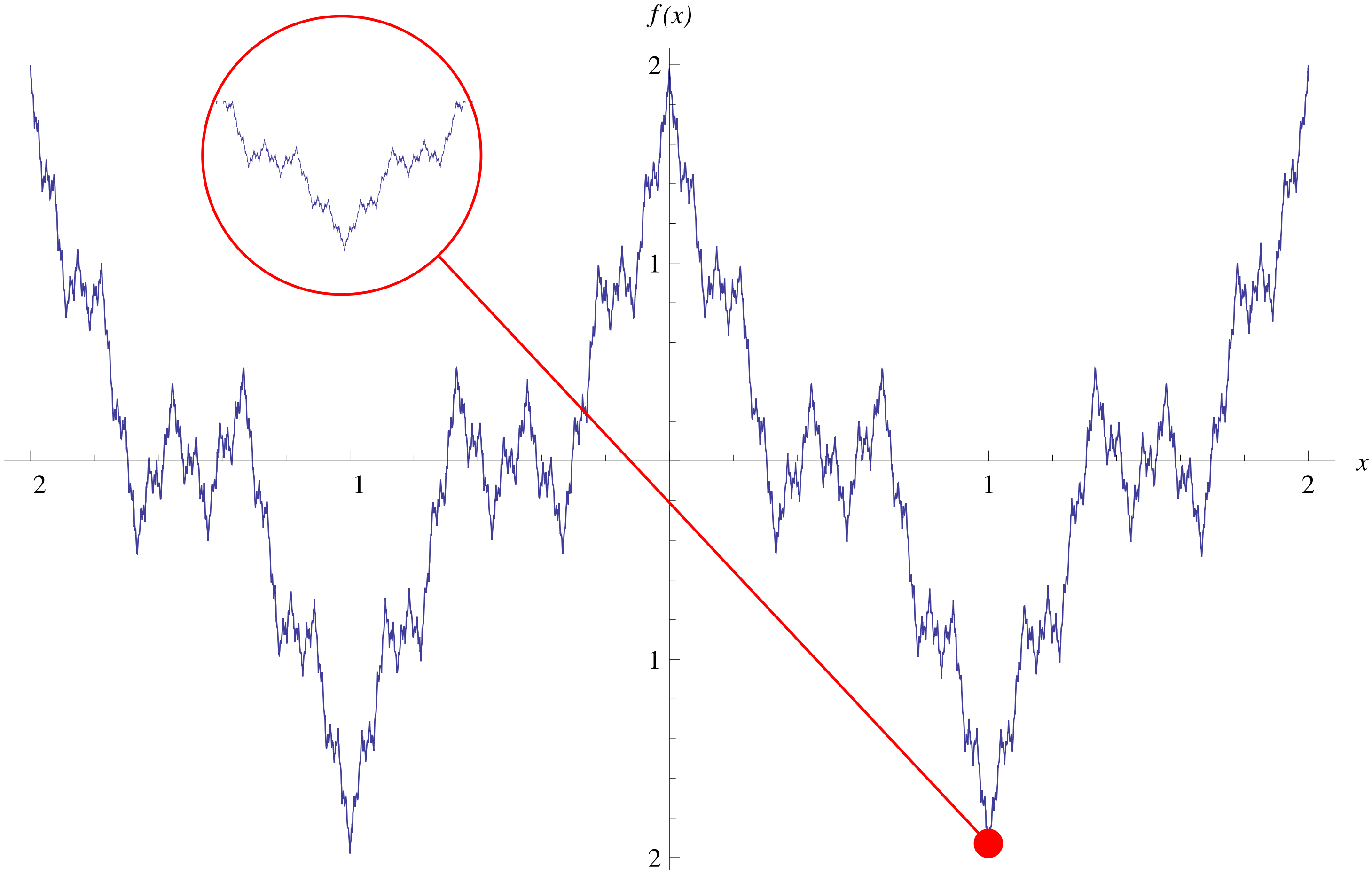
导数存在的条件是什么？

导数值与自变量有关吗？

小知识：

- 左导数：$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
- 右导数：$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
- Weierstrass函数 和 Cantor函数：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

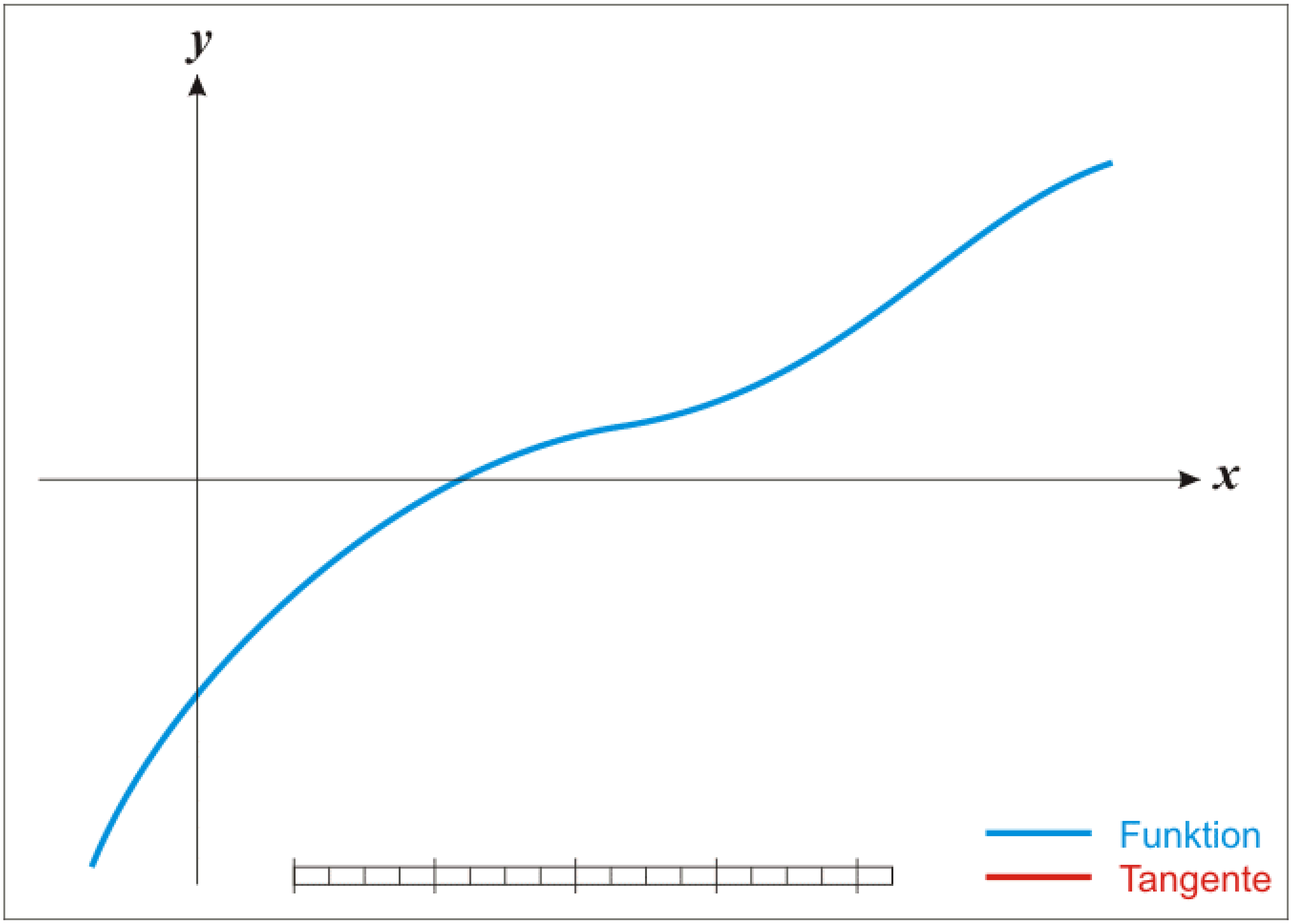


1.2 几何意义

- **切线**：函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的切线方程为 $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$。

小知识：

Newton's method $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$


y
x
Funktion
Tangente

2. 导数的运算和基本公式

2.1 基本导数公式

(1) $(C)'=0$，C 为常数；

(2) $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$，$\alpha$ 为常数；

(3) $(e^x)'=e^x$；

(4) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$；

(5) $(\sin x)'=\cos x$；

(6) $(\cos x)'=-\sin x$.

(7) $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$；

(8) $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$；

(9) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$，$g(x)\neq 0$.

例2.1.1

根据定义证明 $f(x)=x^2$ 的导数为 $f'(x)=2x$； $f(x)=ln(x)$ 的导数为 $f'(x)=\frac{1}{x}$。

例2.1.2
求函数 $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ 的导数。

例2.1.3
求函数 $y = \frac{1}{x}$ 的导数。

2.2 导数的运算法则

- **和差法则**：$(u \pm v)' = u' \pm v'$
- **积法则**：$(uv)' = u'v + uv'$
- **商法则**：$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- **复合函数求导**：$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

例2.2.1
证明复合函数求导公式。

例2.2.2
求函数 $y = (x^2 + 1)^3$ 的导数。