数列

所有教材概念

定义和性质

等差数列

等比数列

斐波那切数列

数学归纳法

*迭代法求近似值

*更多考试涉及内容

通项公式与递推关系

极限（导数）

特征根方程

数列求和

对新数列的分析运算

1. 数列的定义和性质

1.1 数列的定义

定义：
数列是按照一定的顺序排列的一列数，数列中的每一个数称为数列的项。

严格定义：
数列是一个定义在正整数集合上的函数，即一个从正整数集合到实数集合的映射。

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

数列的一般形式为：$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$，其中 a_n 表示数列的第 n 项，$\{a_n\}$ 表示该数列。

1.2 数列的性质

根据数列的定义，我们可以得到数列的一些重要性质：

- 数列是有序的，即数列中的每一个数都有一个确定的位置。
- *数列是无限的，即数列中的项的个数是无限的。
- *数列是可数的，即数列中的项可以一一对应到自然数集合中。

教材中的性质：

- 数列的项数是有限的或无限的。有限的数列称为有穷数列，无限的数列称为无穷数列。
- 每一项都大于（或小于）前一项的数列称为**递增（或递减）数列**；**严格大于（或小于）前一项的数列称为严格递增（或严格递减）数列**；统称为**单调数列**。
- 各项均相等的数列称为常数数列。

实际上，数学上将无序数组定义为集合（set），将无限有序数组定义为数列（sequence），而将有限有序数组单独定义（Finite Finite Ordered Array），有时我们也称之为元组（Tuple），或者向量（Vector）。
在计算机科学中，受限于存储空间，数组（Array）或元组（Tuple）是有序的有限的集合，但我们仍能通过递归的思想模拟无限数列。（如 Python 中 itertools 库。）

1.3 数列的表示方法

数列的一些常见表示方法:

- 通项公式: $a_n = f(n)$，其中 $f(n)$ 是 n 的函数。
- 递推公式: $a_{n+1} = f(a_n)$，其中 $f(a_n)$ 是 a_n 的函数。

思考
通项公式或递推公式唯一吗？一定存在吗？

数列的一些常见类型:

- **等差数列**: 数列中相邻两项的差是一个常数。
- **等比数列**: 数列中相邻两项的比是一个常数。
- **斐波那契数列**: 数列中每一项都是前两项之和。

例1.3.1

> 10.【金山 12】设 $\{a_n\}$ 是由正整数组成且项数为 m 的增数列，已知 $a_1=1$，$a_m=100$，数列 $\{a_n\}$ 任意相邻两项的差的绝对值不超过 1，若对于 $\{a_n\}$ 中任意序数不同的两项 a_s 和 a_t，在剩下的项中总存在序数不同的两项 a_p 和 a_q，使得 $a_s+a_t=a_p+a_q$，则 $\sum_{i=1}^{m} a_i$ 的最小值为________.【答案】5454

（s,t,p,q各不相同）

2. 数列的常见类型

2.1 等差数列

定义：
如果一个数列中任意两项的差都是一个常数，那么这个数列就是等差数列。

等差数列的一般形式为：$a, a+d, a+2d, \cdots, a+nd, \cdots$，其中 a 为**首项**，d 为**公差**。

- **等差中项** $a_{\frac{m+n}{2}} = \frac{a_m + a_n}{2}$，其中 $m+2=n$ 为任意整数。
- **递推公式**：$a_{n+1} = a_n + d$
- **通项公式**：$a_n = a + (n-1)d$
- **前 n 项和**：$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$

例2.1.1

3.【奉贤 4】已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_7 + a_9 = 15$，$a_4 = 1$，则 a_{12} 的值等于________.

例2.1.2

已知等差数列$\{a_n\}$前 n 项和为 S_n，$S_3 = 9$，$S_5 = 20$，$a_1 = 2$，求 a_7。

常用知识点

- $\{S_{(k+1)n} - S_{kn}\}$ 也是一个等差数列
- $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

2.2 等比数列

定义：
如果一个数列中任意两项的比都是一个常数，那么这个数列就是等比数列。

等比数列的一般形式为：$a, aq, aq^2, \cdots, aq^n, \cdots$，其中 a 为**首项**，q 为**公比**。

- **递推公式**：$a_{n+1} = a_n \cdot q$
- **通项公式**：$a_n = a \cdot q^{n-1}$,注意减一
- **前 n 项和**：$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$
- **无穷项和**：$S = \frac{a}{1-q}$，当 $|q| < 1$ 时成立。

例2.2.1

2.（2023·上海黄浦·统考一模）已知$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是等比数列，且$b_2=3$，$b_3=9$，$a_1=b_1$，$a_{14}=b_4$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$c_n=a_n+(-1)^n b_n\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，求数列$\{c_n\}$的前$2n$项和.

例2.2.2

6.（2023·上海·上海市七宝中学校考模拟预测）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=2$，对任意的正整数n，点(a_{n+1},S_n)均在函数$f(x)=x$图像上.

(1)证明：数列$\{S_n\}$是等比数列；

(2)证明：$\{a_n\}$中任何不同三项不构成等差数列.

例2.2.3

11.（2023·上海·高三专题练习）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_n=\dfrac{2S_n+3}{3}$.

（1）求证：数列$\{a_n\}$是等比数列；

（2）求数列$\left\{\dfrac{1}{\log_3 a_n\cdot\log_3 a_{n+2}}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

例2.2.4

15.（2023春·上海宝山·高三统考阶段练习） 高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的称号，以他的名字定义的函数称为高斯函数 $f(x)=[x]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_2=6$，$a_{n+2}+5a_n=6a_{n+1}$，若 $b_n=[\log_5 a_{n+1}]$，S_n 为数列 $\left\{\frac{1000}{b_n b_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和．

(1)证明：数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是等比数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)求 $[S_{2023}]$ 的值．

常用知识点

- 如何从递推公式或前 n 项和公式推导通项公式?

2.3 斐波那契数列

定义：

斐波那契数列是一个数列，数列中每一项都是前两项之和。

斐波那契数列的一般形式为：$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$。

- **递推公式**：$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$
- **通项公式**：$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$
- **前 n 项和**：$S_n = a_{n+2} - 1$

思考

斐波那契数列的通项公式如何推导？

3. 数学归纳法

3.1 数学归纳法的思想

- **首项成立**：证明当 $n = 1$ 时命题成立。
- **归纳假设**：假设当 $n = k$ 时命题成立。
- **归纳证明**：证明当 $n = k + 1$ 时命题成立。

思考
还有其他类似的形式吗？

3.2 数学归纳法的应用

- 证明数列的性质

例3.2.1
证明立方数列的求和公式$S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$。

- 数论

例3.2.2
证明 $2^n > n^2$ 对所有 $n \geq 5$ 成立。

例3.2.3
证明 $7^n - 1$ 可以被6整除。

- 图论

例3.2.4

证明 K_{2^n} 中有 2^{n-1} 个边。

- 递归算法
- 组合数学

例3.2.5

证明二项式定理

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

- 博弈论

例3.2.6

Nim 游戏分析。

- 数据结构与算法

例3.2.9

证明快速排序的平均时间复杂度为 $O(n\log n)$。

3.3 数学归纳法的例题

例3.3.1

7.（2019·湖北高考模拟（理））已知正项数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，前n项和S_n满足

$4S_n=(a_{n-1}+3)^2(n\geqslant 2, n\in N^*)$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=$__________.

例3.3.2

9.（2021·全国高三专题练习）数列$\{a_n\}$满足$S_n=2n-a_n\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$.

（1）计算a_1、a_2、a_3，并猜想a_n的通项公式；

（2）用数学归纳法证明（1）中的猜想.

数列极限

4.1 数列极限的定义

定义：
如果数列 $\{a_n\}$ 的项 a_n 随着 n 的增大趋于一个常数 A，那么称 A 为数列 $\{a_n\}$ 的极限，记为 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$。

严格定义：
若存在一个实数 A，对任意给定的正数 $\epsilon > 0$，总存在一个正整数 N，使得当 $n > N$ 时，$|a_n - A| < \epsilon$，则称实数 A 是数列 $\{a_n\}$ 的极限。

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |a_n - A| < \varepsilon$$

思考
在有理数域上成立吗？在什么样的数域上能够成立

4.2 数列极限的性质

- 唯一
- 有界单调数列必有极限
- 数列极限的四则运算
- 夹逼定理

例4.2.1
证明数列$\{a_n\}$，$a_n = \frac{1}{n}$，有极限。

4.3常见的数列极限：

- $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$，其中 $p>0$。
- $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$，其中 $a>0$。
- $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$，其中 $a>0$。
- $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$。

4.4 数列极限的计算

- 计算方法：凑+猜

例4.4.1
计算数列$\{a_n\}$，$a_n=\frac{n^2+1}{n^2+2}$的极限。

例4.4.2
计算数列$\{a_n\}$，$a_n=\frac{2n^2+3n+1}{n^2+2n+1}$的极限。

例4.4.3
计算数列$\{a_n\}$，$a_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$的极限。

常用知识点

- 数列的极限存在，数列和的极限就存在吗？
- 数列的极限不存在，数列和的极限就不存在吗？

调和数列
调和数列是指数列$\{a_n\}$，$a_n=\frac{1}{n}$，调和数列的和是发散的。可被近似为 $\ln m+\gamma,\gamma=0.57721$ 是欧拉-马歇罗尼常数（Euler-Mascheroni constant）。

4.5 函数极限与数列极限

函数极限的严格定义：
设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限。

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R},\varepsilon>0,\exists\delta\in\mathbb{R},\forall x,0<|x-x_0|<\delta,|f(x)-A|<\varepsilon$$

与之等价，但从数列极限角度的定义：

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义，如果对于任意数列 $\{x_n\}$，当 $x_n \to x_0$ 时，有 $f(x_n) \to A$，则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限。

$$\forall\{x_n\}, x_n \to x_0, f(x_n) \to A$$

思考

函数极限与数列极限的关系是什么？