Chapter IV Shortest Paths: Label-Setting Algorithms

1 定义与假设

$$\text{Minimize} \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

subject to

$$\sum_{\{j:(i,j)\in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i)\in A\}} x_{ji} = \begin{cases} n-1 & \text{for } i = s \\ -1 & \text{for all } i \in N - \{s\} \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{for all } (i,j) \in A.$$

若起终点相同

起终点不同

所作假设：1.所有弧长均为整数.

2.该网络从节点s到其他所有点均存在有向路径.

3.网络中没有负环.

4.网络是有向的.

2 最短路问题的几个应用

背包问题(转化为最大花费问题)：

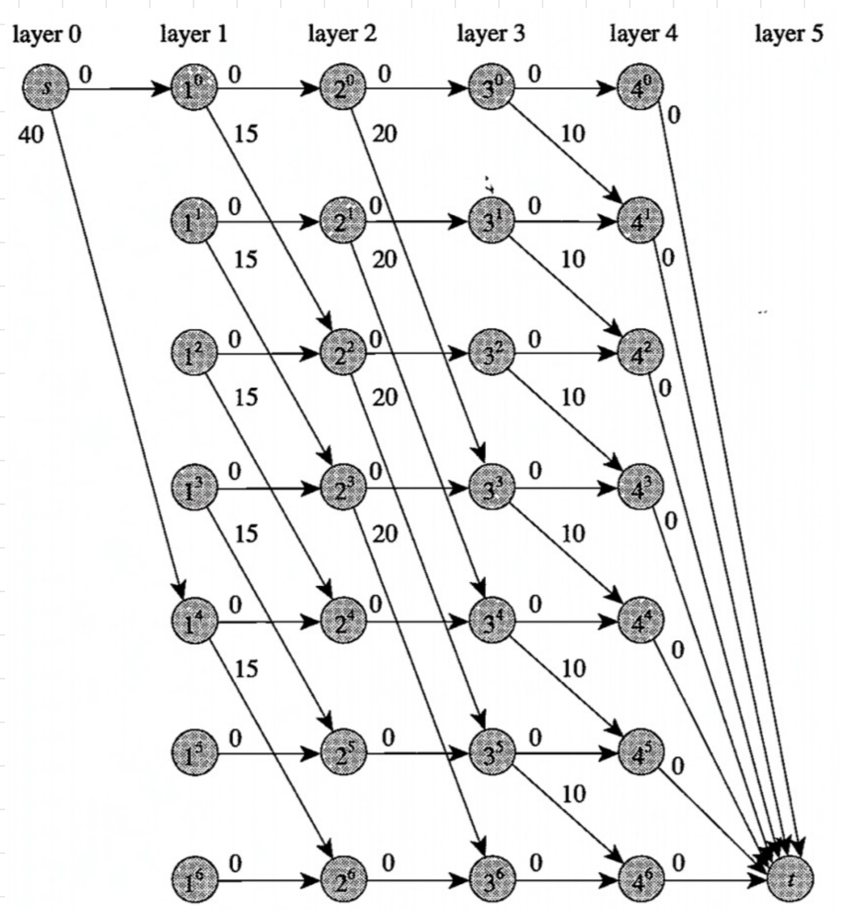


Figure 4.3 Longest path formulation of the knapsack problem.

j	1	2	3	4
u_j	40	15	20	10
w_j	4	2	3	1

通过将固定拿取组合变为流的形式，突出最短路思想。

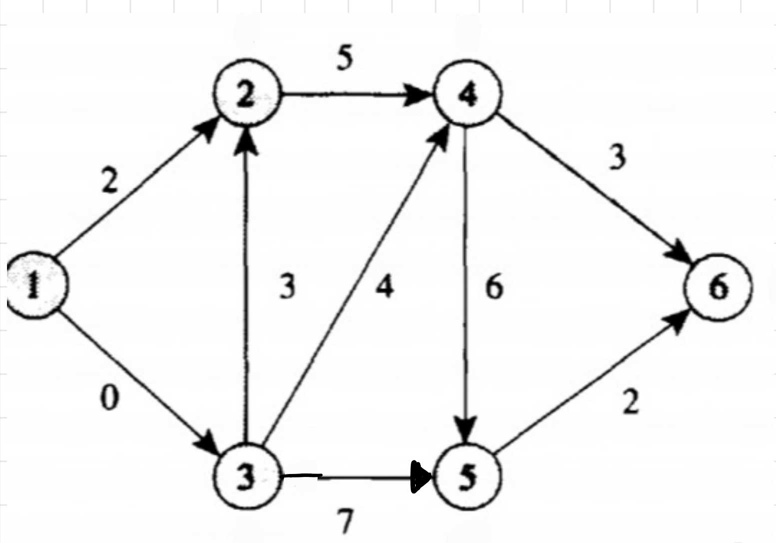
其他应用不展开赘述

3 最短路径树

性质1：如果路径s-i1-i2-···-in-k是s-k的最短路，那么对于任何q=2,3···h-1来说，路径s-i1-i2-···-is也是s-q的最短路.

性质2：如果矢量d是最短路，那么从源点到点k的有向路径P是最短路，当且仅当对于P中的所有弧，d(i)=d(j)+c(i,j).

4 无环网络中的最短路问题



无环网络最短路问题的“到达算法”

1. 设$d(s)=0$，其余点的$d(i)=M$
2. 按拓扑顺序查找点，对于点i的所有弧arc(i,j) ∈A(i)，若d(j)>d(i)+cj，则置为d(j)=d(i)+cj
3. 所有点都被检查完之后，即为最优解

5 Dijkstra算法

基本思想：

0.该算法仅适用于非负弧长的网络，其时间复杂度为O(n^2)。

1.每个点都有一个距离标识d(i)，表示到点i最短距离的上限。

2.所有点分为两类：永久标号点和临时标号点，永久标号代表从原点到该点的最短路径长。

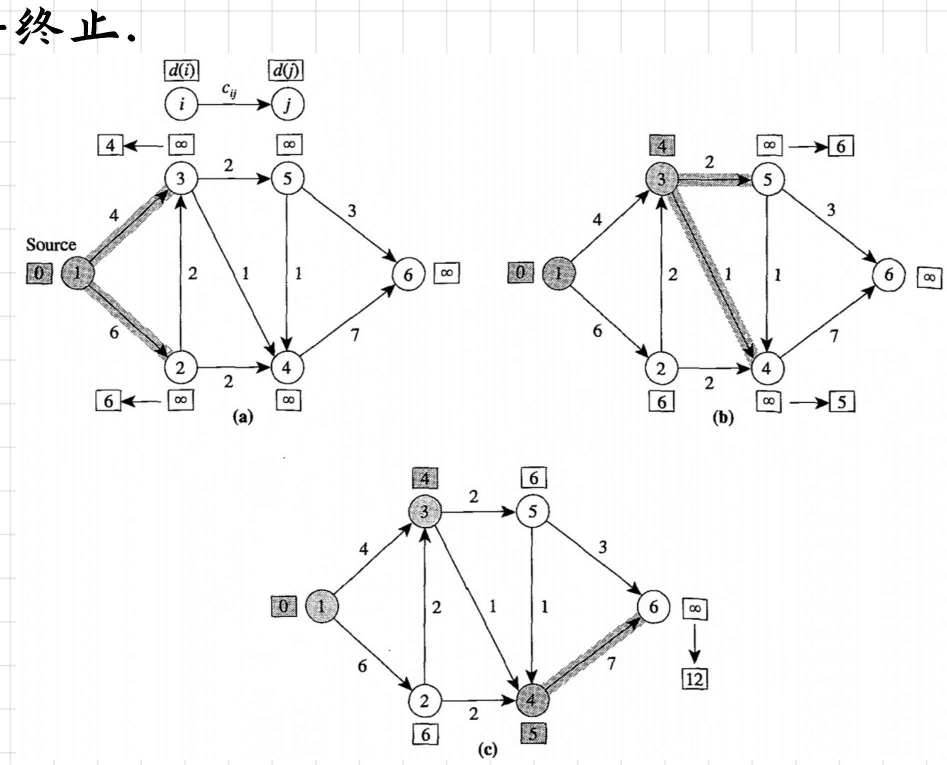
3.算法基本思路：从s与永久标号点向外展开，按照距离顺序对节点进行永久标记。

4.首先，给节点s一个永久标记0，给每个节点j一个临时标记为∞。节点i的标号就是它与源节点沿着这条路径的最短距离，该路径的内部节点(即除s或节点本身之外的节点)都被永久标记。该算法选择具有最小临时标号的节点i，使其变为永久标号，并从该节点向外延伸——也就是说，扫描A(i)中的弧来更新相邻节点的距离标号。

5.当所有节点都为永久节点时，该算法终止。

```
algorithm Dijkstra;
begin
    S : = Ø; S̄: = N;
    d(i) : = ∞ for each node i ∈ N;
    d(s) : = 0 and pred(s) : = 0;
    while |S| < n do
    begin
        let i ∈ S̄ be a node for which d(i) = min{d(j) : j ∈ S̄};
        S : = S ∪ {i};
        S̄ : = S̄ − {i};
        for each (i, j) ∈ A(i) do
            if d(j) > d(i) + cij then d(j) : = d(i) + cij and pred(j) : = i;
    end;
end;
```

Figure 4.6 Dijkstra's algorithm.



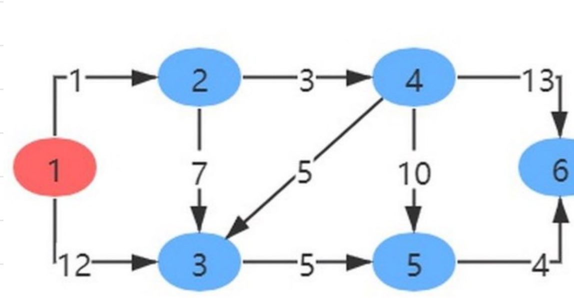
简易解释：

1.设起点标号为0，其余点为∞。

2.将标号最小的点转为永久标号；用 min(d(i)+Cij , d(j)) 更新其余点。

3.重复，直至所有点都有永久标号。

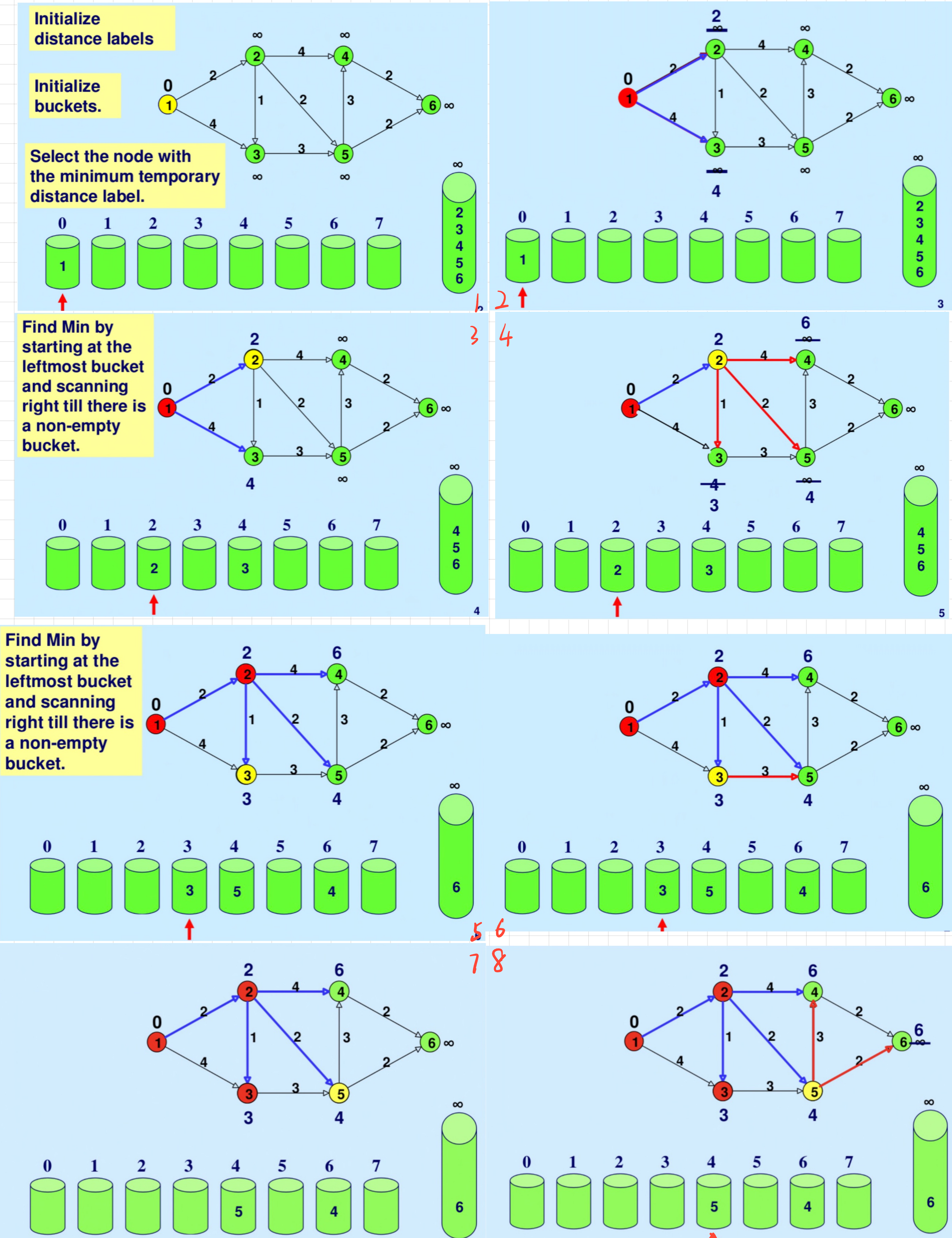
本算法所用数据结构为：邻接矩阵。



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	12	∞	∞	∞
2	∞	0	7	3	∞	∞
3	∞	∞	0	∞	5	∞
4	∞	∞	5	0	10	13
5	∞	∞	∞	∞	0	4
6	∞	∞	∞	∞	∞	0

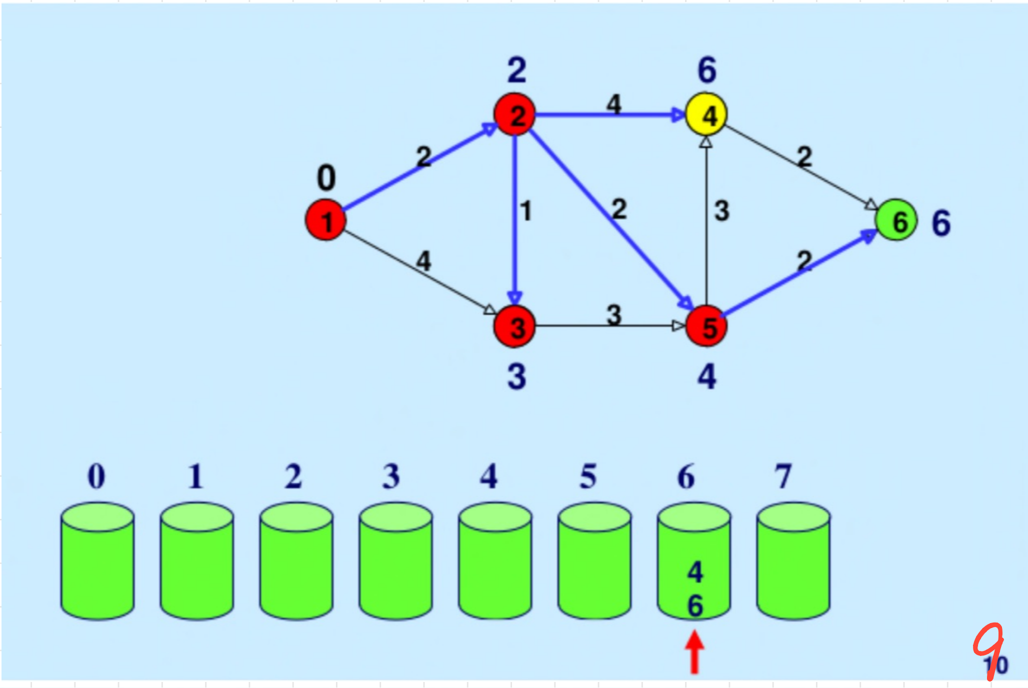
算法实现请移步GitHub查看

6 Dijkstra算法的Dial实现

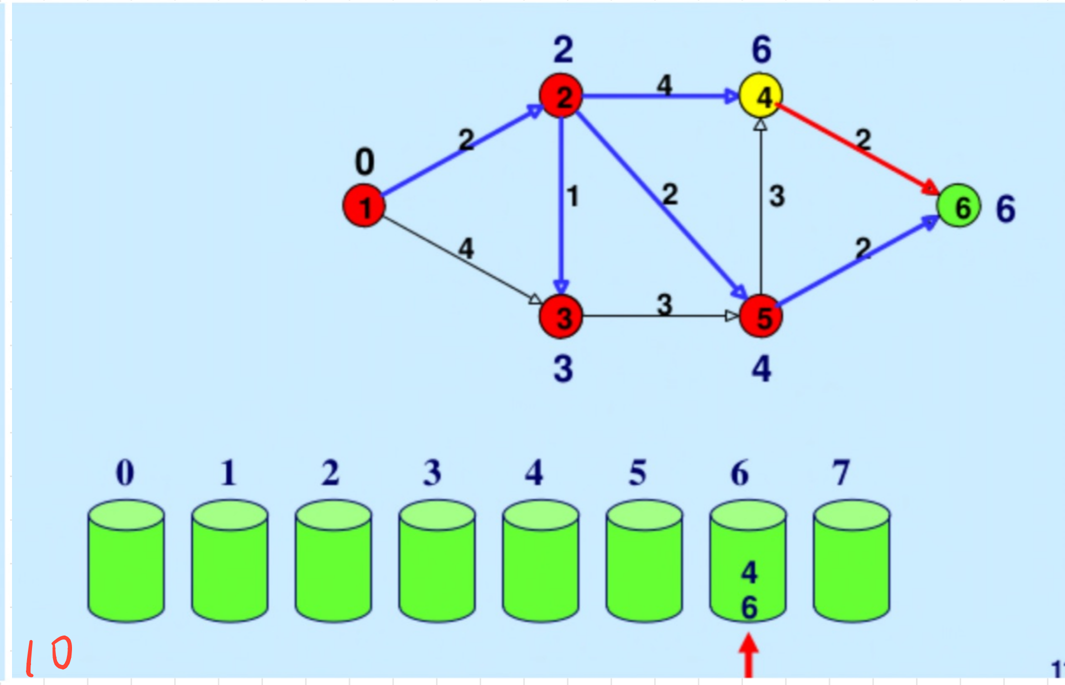


Dial实现图解

优化思路：引入“桶”(C+1个)，并从左到右扫描非空桶(扫到的永远都是最小值，从而优化寻找过程花费的时间)，将第一个扫描到的点转为永久并更新弧长与桶，直到所有桶为空。时间复杂度为O(m+nC).

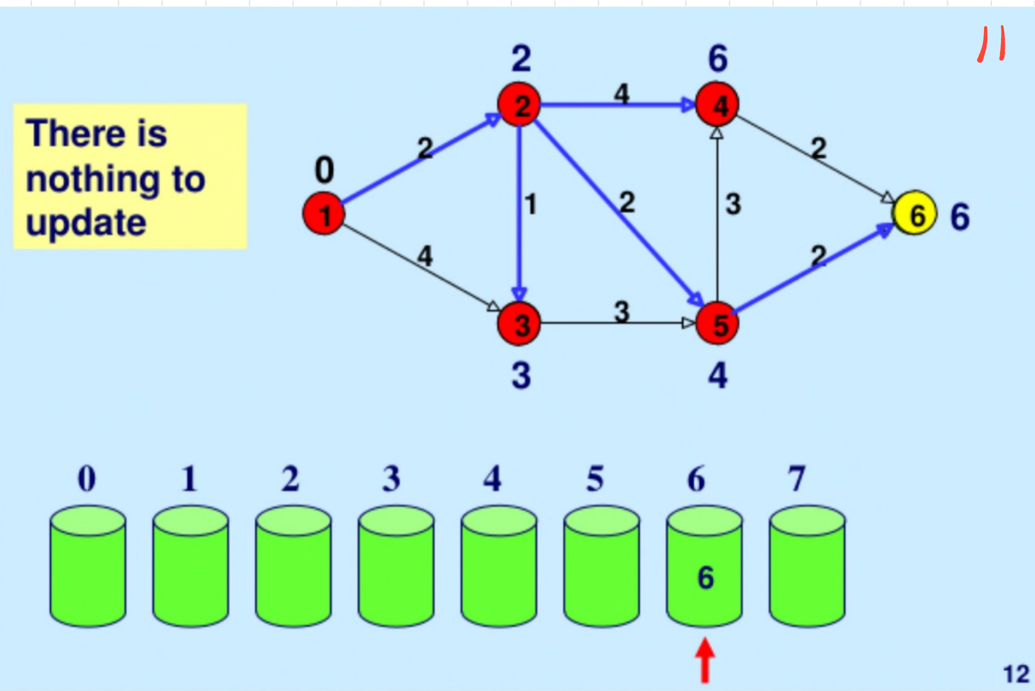


9

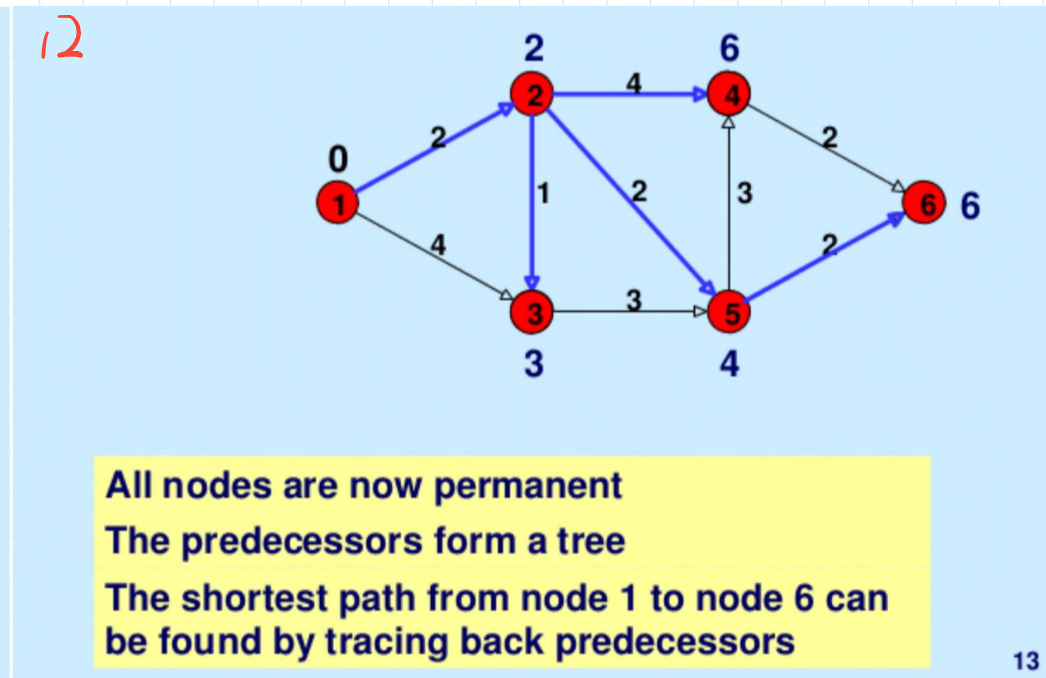


10

11



12



7 Dijkstra算法的堆优化