2018 年全军面向社会公开招考文职人员统一考试

理工学类（数学 1）专业科目考试

一、单项选择题（共 20 题，每小题 1 分，共 20 分。）

1.设 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，则 $f\left(\frac{1}{x}\right)=$（　）。

A. $f(x)$　　B. $f(-x)$　　C. $-f(x)$　　D. $-f(-x)$

2.记 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}^-}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)=a,\ \lim\limits_{x\to\frac{1}{n}^+}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)=b, n\in N^*$，则（　）。

A. $a=0,b=0$　　B. $a=0,b=1$　　C. $a=1,b=0$　　D. $a=1,b=1$

3.若当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x),\beta(x)$ 都是无穷小，则当 $x\to x_0$ 时，下列表达式中不一定是无穷小的是（　）。

A. $|\alpha(x)|+|\beta(x)|$　　B. $\alpha^2(x)+\beta^2(x)$

C. $\ln\left[1+\alpha(x)\beta(x)\right]$　　D. $\frac{\alpha^2(x)}{\beta^2(x)}$

4.极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=$（　）。

A. 0　　B. 1　　C. e　　D. ∞

5.设 $f(x)=x^4+e^{2x}$，则 $f^{(5)}(x)=$（　）。

A. e^{2x}　　B. 2^5e^{2x}　　C. $4!+2^5e^{2x}$　　D. $5!+2^5e^{2x}$

6.极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=$（　）。

A. 0　　B. 1　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{1}{3}$

7.函数 $f(x)=\int_0^x\frac{t^3}{t^2-t+1}dt$ 在 $[0,1]$ 上的最小值为（　）。

A. 0　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

8. 设二元函数 $z=\arctan\frac{y}{x}$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$（ ）。

A. $\frac{-y}{x^2+y^2}$　　B. $\frac{y}{x^2+y^2}$　　C. $\frac{x^2}{x^2+y^2}$　　D. $\frac{y^2}{x^2+y^2}$

9. 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 具有连续偏导数，$u(x,y)$ 可微且满足 $du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，$u(1,1)=5,u(0,0)=2$，曲线 l 为抛物型 $y=x^2$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(0,0)$ 一段，则 $\int_l P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$（ ）。

A. 7　　B. 2　　C. -2　　D. -3

10. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 条件收敛，则下列三个级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n{}^2+b_n{}^2)$ 中，条件收敛级数的个数为（ ）。

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

11. 设 A,B 均为 n 阶矩阵，一下结论正确的是（ ）。

A. $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$　　B. $A(A+B)=(A+B)A$

C. $A(A+E)=(A+E)A$　　D. $AB(A+E)=(A+E)BA$

12. 设 $A=(a_1,a_2,a_3)$，其中 $a_i(i=1,2,3)$ 是三维列向量，若 $|A|=1$，则 $|(4a_1,4a_1-3a_2,a_3)|$ 为（ ）。

A. -24　　B. -12　　C. 12　　D. 24

13. 设 A 均为 n 阶矩阵，且 $A^2+A-5E=O$，则 $A+2E$ 的逆矩阵为（ ）。

A. $A-E$　　B. $A+E$　　C. $\frac{1}{3}(A-E)$　　D. $\frac{1}{3}(A+E)$

14. 齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\ -x_2+x_3-x_4=0\end{cases}$ 的基础解析所含解向量的个数为（ ）。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

15. 已知 $\lambda=0$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\1&0&a\end{pmatrix}$ 的特征值，则 $a=$（ ）。

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

16. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3$ 的秩为（　）。

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

17. 随机变量 X 的分布函数定义为 $F(x)=P\{X\le x\}$，则 $F(x)$ 一定是（　）。

A.连续函数　　B.阶梯函数　　C.左连续函数　　D.右连续函数

18. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\varphi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 表示标准正态分布的密度函数和分布函数，则下列结论中不正确的是（　）。

A. $P(|X-\mu|>3\sigma)=1-2\Phi(3)$　　B. $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=2\Phi(1)-1$

C. $\varphi(-x)=\varphi(x)$　　D. $\Phi(x)=1-\Phi(-x)$

19. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_i$，是来自正态总体 $N(2,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\bar{X},S^2$ 分别为样本均值和样本方差，k 为常数，且已知 $P\{\bar{X}\le 2,S^2\le k^2\}=\frac{1}{5}$，则概率 $P\{S>k\}$ 的值为（　）。

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{3}{5}$

20. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自 X 的样本，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 为样本均值，

$S^{*2}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 为修正的样本方差，则有（　）。

A. $E(\bar{X})=\frac{\mu}{n}$　　B. $D(\bar{X})=\sigma^2$

C. $E(S^{*2})=\sigma^2$　　D. $E(S^{*2})=\frac{n-1}{n}\sigma^2$

二、单项选择题（共 40 题，每小题 1.5 分，共 60 分。）

21.设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-e^x}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则 $f'(0)$ 为（　）。

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D.不存在

22. 设 $f'(x)=g(x)$，则 $\frac{d}{dx}f(\sin^2 x)$ 等于（　）。

A. $2g(x)\sin x$　　B. $g(x)\sin 2x$　　C. $g(\sin^2 x)$　　D. $g(\sin^2 x)\sin 2x$

23. 设 $f(u)$ 可导，且 $f(u)\neq 0$，函数 $y=y(x)$ 由参数方程$\begin{cases} x=\int_0^{t^2} f(u)du \\ y=\int_0^{t} f(u)f(u^2)du \end{cases}$确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=$（　）。

A. $f(t)$　　B. $f(t^2)$　　C. $2tf(t)$　　D. $\dfrac{f(t)}{2t}$

24. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，则下列结论不正确的是（　）。

A.存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(b)-f(a)=f(\xi)(b-a)$

B.存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

C.存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}$

D.存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}=\xi f'(\xi)+f(\xi)$

25. 已知函数 $f(x)$ 在 x_0 点附近有 4 阶连续导数，且有 $f'(x_0)=f'(x_0)=f\,'(x_0)=0$，$f^{(4)}(x)<0$，则 $y=f(x)$ 在 x_0 处（　）。

A.有极大值　　B.有极小值　　C.有拐点　　D.无极值也无拐点

26.设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)<0$，则当 $x\in(a,b)$ 时，下列不等式成立的是（　）。

A. $\dfrac{f(x)}{f(a)}>\dfrac{g(x)}{g(a)}$　　B. $\dfrac{f(x)}{f(b)}>\dfrac{g(x)}{g(b)}$

C. $f(x)g(x)>f(a)g(a)$　　D. $f(x)g(x)>f(b)g(b)$

27. 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\dfrac{1}{2}x, x\in R$，关于 $f(x)$ 的最值点，下列结论正确的是（　）。

A.有最大值点，有最小值点　　B.有最大值点，无最小值点

C.无最大值点，有最小值点　　D.无最大值点，无最小值点

28. 曲线 $y=x(x-1)(x-2)$ 与 x 轴所围部分的面积之和为（　）。

A. $\int_0^1 x(x-1)(x-2)dx$

B. $\int_0^1 x(x-1)(x-2)dx+\int_1^2 x(x-1)(x-2)dx$

C. $\int_0^2 x(x-1)(x-2)dx$

D. $\int_0^1 x(x-1)(x-2)dx-\int_1^2 x(x-1)(x-2)dx$

29.已知 $f(2)=1, f'(2)=0, \int_0^2 f(x)dx=1$，则 $\int_0^1 x^2 f''(2x)dx$ 的值为（　　）。

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{4}$

30.设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，单调增加，则 $F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)dt$（　　）。

A. 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调增加

B. 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减

C. 在 $(-\infty,+\infty)$ 既非单调增加也非单调递减

D. 在 $(-\infty,0)$ 上单调增加，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减

31.已知 $|\boldsymbol{a}|=4, |\boldsymbol{b}|=2, |\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=4\sqrt{2}$，那么 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=$（　　）。

A. 4　　B. $4\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $-4\sqrt{2}$

32. 直线 $\begin{cases} 2y+3z-5=0 \\ x-2y-z+7=0 \end{cases}$ 在平面 $\pi: x-y+3z+8=0$ 上的投影方程为（　　）。

A. $x-y+3z+8=0$　　B. $\begin{cases} x+3z-5=0 \\ x-y+3z+8=0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x-2y-z+7=0 \\ x-y+3z+8=0 \end{cases}$　　D. $\begin{cases} x+3z-5=0 \\ x-2y-z+7=0 \\ x-y+3z+8=0 \end{cases}$

33. 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处存在偏导数是函数 $f(x,y_0)$ 和 $f(x_0,y)$ 分别在 x_0 和 y_0 处连续的（　　）。

A.充分条件　　B.必要条件

C.充分必要条件　　D.既非充分也非必要条件

34. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$ 确定，则 $\frac{dy}{dx}=$（　　）。

A. $\dfrac{x-y}{x+y}$　　B. $\dfrac{x+y}{x-y}$　　C. $\dfrac{y-x}{x+y}$　　D. $\dfrac{x+y}{y-x}$

35. 曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线有（　）。

A.1 条　　B.2 条　　C.至少 3 条　　D.不存在

36. 给定函数 $u=x^2+y^2+xye^{z^2}$，则 u 在点 $(1,-1,0)$ 增加最快的方向 $\vec{n}=$（　）。

A. $(1,1,0)$　　B. $(1,-1,0)$　　C. $(-1,1,0)$　　D. $(1,-1,2)$

37. 二重积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^2} dy=$（　）。

A. $-e$　　B. e　　C. $1-e$　　D. $e-1$

38. 设 $\Omega=\left\{(x,y,z) \middle| x^2+y^2+z^2 \le 1\right\}$，则有（　）。

A. $\iiint_\Omega x^2 dxdydz=0$　　B. $\iiint_\Omega y^2 dxdydz=0$

C. $\iiint_\Omega x\sin x dxdydz=0$　　D. $\iiint_\Omega \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) dxdydz=0$

39. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$ 的收敛域为（　）。

A. $(-1,1)$　　B. $[-1,1)$　　C. $(-1,1]$　　D. $[-1,1]$

40. 已知 $y_1=xe^x+e^{2x}$，$y_2=xe^x+e^{-x}$，$y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶线性齐次微分方程的解，则此微分方程的通解为 $y=$（　）。

A. $C_1xe^x+C_2e^{2x}+e^{-x}$　　B. $C_1xe^x+C_2e^{-x}+e^{2x}$

C. $C_1e^{2x}+C_2e^{-x}+xe^x$　　D. $C_1xe^x+C_2e^{-x}+xe^x+e^{2x}$

41. 若矩阵 A 与对角矩阵 $D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似，则 $A^{-1}=$（　）。

A. E　　B. D　　C. A　　D. $-E$

42. 设 A 与 B 都是 n 阶方阵，用 $R(A)$ 表示矩阵 A 的秩，则有（　）。

A. $R\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}<R(A)+R(B)$　　B. $R\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}>R(A)+R(B)$

C. $R\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=R(A)-R(B)$　　D. $R\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=R(A)+R(B)$

43. 设向量$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)^T,\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)^T,\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)^T$，则三条直线$a_1x+b_1y=c_1$，$a_2x+b_2y=c_2$及$a_3x+b_3y=c_3$ $(a_i^2+b_i^2\neq 0,i=1,2,3)$交于一点的充要条件是（　）。

A. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 线性相关　　B. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 线性无关

C. $R(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=R(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$　　D. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 线性相关而$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$线性无关

44. 设矩阵A的秩$R(A)=n-3$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$为$n$元齐次线性方程组$Ax=0$的三个线性无关的解，则方程组$Ax=0$的基础解系是（　）。

A. $-\boldsymbol{\alpha}_1, 2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$

C. $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1,-3\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_2$　　D. $2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2, -2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$

45. 设方程组$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$有无穷多个解，则有（　）。

A. $a=0$　　B. $a=1$　　C. $a=2$　　D. $a=-2$

46. 已知三阶矩阵A的特征值为$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$，则行列式$|A^{-1}-E|=$（　）。

A. 6　　B. 24　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{24}$

47. 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\ (b>0)$的矩阵$A$的特征值之和为1，特征值之积为-12，则（　）。

A. $a=-1,b=2$　　B. $a=1,b=2$　　C. $a=1,b=-2$　　D. $a=-1,b=-2$

48.已知矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & x \end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$相似，则有（　）。

A. $x=1,y=2$　　B. $x=2,y=3$　　C. $x=3,y=4$　　D. $x=4,y=3$

49. 设A，B是同阶正交矩阵，则下列命题错误的是（　）。

A. AB也是正交矩阵　　B. $A^{-1}B$也是正交矩阵

C. $A^{-1}B^{-1}$也是正交矩阵　　D. $A+B$也是正交矩阵

50.设 $A=\begin{pmatrix}-a & b\\ b & a\end{pmatrix}$，$a>b>0$，$a^2+b^2=1$，则 A 为（　）。

A.正定矩阵　　B.初等矩阵　　C.正交矩阵　　D.负定矩阵

51.甲、乙两人独立地对同一目标各射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.5，现已知目标被命中，则它被甲射中的概率是（　）。

A.0.6　　B.$\frac{5}{11}$　　C.0.75　　D.$\frac{6}{11}$

52.设随机变量 X,Y 相互独立且同分布，且 $P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\frac{1}{2}$，令 $Z=\frac{X}{Y}$，则下列结论不正确的是（　）。

A.$P\{Z=1\}=P\{Z=-1\}=\frac{1}{2}$　　B.X,Z 相互独立

C.Y,Z 相互独立　　D.X,Y,Z 相互独立

53.设随机变量 X与Y 相互独立，其中 Y 的密度函数为 $f(y)$，而 X 的概率分布 $P\{X=1\}=0.6$，$P\{X=2\}=0.4$，则随机变量 $U=XY$ 的概率密度函数为（　）。

A. $g_U(u)=0.3\times f\left(\frac{u}{2}\right)+0.4\times f(u+1), -\infty<u<+\infty$

B. $g_U(u)=0.3\times f(u+1)+0.4\times f\left(\frac{u}{2}\right), -\infty<u<+\infty$

C. $g_U(u)=0.6\times f(u)+0.2\times f\left(\frac{u}{2}\right), -\infty<u<+\infty$

D. $g_U(u)=0.6\times f(u)+0.4\times f\left(\frac{u}{2}\right), -\infty<u<+\infty$

54.设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=-1\}=\frac{1}{2}$，$P\{X=1\}=\frac{1}{2}$，且 X 与 Y 相互独立同分布，则 $P\{X=Y\}=$（　）。

A.0　　B.$\frac{1}{4}$　　C.$\frac{1}{2}$　　D.1

55.设 X与Y 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\le x\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则 X与Y（　）。

A.独立同分布　　B.独立但不同分布

C.不独立但同分布　　D.不独立也不同分布

56.设$x_1, x_2, \cdots, x_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本值，其中参数μ, σ^2均未知，现对μ进行假设检验，若在显著性水平$\alpha = 0.05$下拒绝了原假设 $H_0: \mu = 10$，则当显著性水平改为$\alpha = 0.1$时，下列结论正确的是（ ）。

A.必拒绝 H_0　　B.必接受H_0

C.可能拒绝 H_0，也可能接受 H_0　　D.以上结论均不正确

57.设 $X\ t(n)$，则$\dfrac{1}{X^2}$服从（ ）分布。

A.$\chi^2(n)$　　B.$F(1,n)$　　C.$F(n,1)$　　D.$t^{-2}(n)$

58.设总体 X 的期望为 μ 方差为 σ^2，抽取 X 的两个容量为 n 和 m 的独立样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$，为使 $\hat{\mu} = \dfrac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + \dfrac{b}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i$ 为 μ 的无偏估计，且 $D(\hat{\mu})$ 最小，则应取（ ）。

A. $a = \dfrac{1}{2}, b = \dfrac{1}{2}$　　B. $a = \dfrac{n}{n-m}, b = -\dfrac{m}{n-m}$

C. $a = \dfrac{m}{n+m}, b = \dfrac{n}{n+m}$　　D. $a = \dfrac{n}{n+m}, b = \dfrac{m}{n+m}$

59.设随机变量X，Y相互独立，且$X \sim N(\mu,1), Y \sim \chi^2(n)$，令$T = \dfrac{X-\mu}{\sqrt{Y\backslash n}}$，则下列结论正确的是（ ）。

A.$T \sim t(n-1)$　　B.$T \sim t(n)$　　C.$T \sim N(0,1)$　　D.$T \sim F(1,n)$

60.设 $X_1, X_2, \cdots, X_{20}$是来自正态总体$X \sim N(\mu, 2^2)$的简单随机样本，$\overline{X}$为样本均值，则当统计量$c\sum_{i=1}^{10}(X_i + X_{10+i} - 2\overline{X})^2$服从$\chi^2$－分布时，常数$c$的值应为（ ）。

A.$\dfrac{1}{4}$　　B.$\dfrac{3}{4}$　　C.$\dfrac{1}{8}$　　D.$\dfrac{3}{8}$

三、单项选择题（共 10 题，每小题 2 分，共 20 分。）

61.设函数 $f(x)$可导，$g(x)$是$f(x)$的反函数，$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则$\int g(x)dx =$（ ）。

A. $g(x)+F\lfloor g(x)\rfloor+C$　　　B. $g(x)-F\lfloor g(x)\rfloor+C$

C. $xg(x)+F\lfloor g(x)\rfloor+C$　　　D. $xg(x)-F\lfloor g(x)\rfloor+C$

62. 设 $f(u)$ 具有连续导数，D_R 是圆域：$x^2+y^2\le R^2$，则 $\lim\limits_{R\to 0^+}\dfrac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{D_R} f(\cos(x+y))dxdy=$（　）。

A. $f(1)$　　B. $f'(1)$　　C. $f(0)$　　D. 不存在

63. 设 $x=4\cos^3 t, y=4\sin^3 t$，则该封闭曲线的弧长是（　）。

A. 6　　B. 12　　C. 18　　D. 24

64. 设 S 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=2x$ 内部分的面积，则 $S=$（　）。

A. π　　B. $\sqrt{2}\pi$　　C. $3\sqrt{\pi}$　　D. 2π

65. 设周期为 2π 的连续函数 $f(x)$ 的傅里叶系数为 a_n,b_n，定义函数 $F(x)=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)dt$，记周期为$2\pi$的函数$F(x)$的傅里叶系数为 A_n,B_n，则 $A_n=$（　）。

A. $A_n=a_n^2$　　B. $A_n=b_n^2$　　C. $A_n=a_n^2+b_n^2$　　D. $A_n=a_nb_n$

66. 设 A,B 为 n 阶矩阵，且 $A^2=A, B^2=B, (A-B)^2=A+B$，则必有（　）。

A. $AB=O, BA\ne O$　　B. $AB\ne O, BA=O$

C. $AB=O, BA=O$　　D. $AB\ne O, BA\ne O$

67. 设 A 为 n 阶矩阵，满足 $A^2=E$，则必有（　）。

A. A 相似于零矩阵 O　　B. A 相似于对角矩阵

C. A 不相似于对角矩阵　　D. 以上结论都不对

68. 设随机变量 X,Y 独立，X 服从参数 $p=\dfrac{1}{2}$ 的 $0-1$ 分布，Y 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，$X+Y$（　）。

A. 不服从均匀分布　　B. 是连续型随机变量

C. 是离散型随机变量　　D. 既不是连续型随机变量也不是离散型随机变量

69. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，μ 和 σ^2 均为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的

样本，则 σ^2 的最大似然估计量为（ ）。

A. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$

B. $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$

C. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

D. $\bar{X}^2$

70. 设总体 $X\sim B(n,p)$，n 已知，$X_1,X_2,\cdots,X_r$ 为来自总体的样本，记 p 的矩估计为 $\hat{p}_m$，最大似然估计量为 $\hat{p}_L$，则有（ ）。

A. $\hat{p}_m$ 是 p 的无偏估计，$\hat{p}_L$ 不是 p 的无偏估计

B. $\hat{p}_L$ 是 p 的无偏估计，$\hat{p}_m$ 不是 p 的无偏估计

C. $\hat{p}_m$ 和 $\hat{p}_L$ 都是 p 的无偏估计

D. $\hat{p}_m$ 和 $\hat{p}_L$ 都不是 p 的无偏估计

答案解析

一、单项选择题（共20题，每小题1分，共20分。）

1.选 C。

【解析】考查函数的定义。整体换元：$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{1+x}=-f(x)$，从而选C。

2.选 C。

【解析】考查取整函数。$y=[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，$\lfloor n^- \rfloor = n-1; \lfloor n^+ \rfloor = n$，所以 $\lim\limits_{x\to \frac{1}{n}^-}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)=a=1, \lim\limits_{x\to \frac{1}{n}^+}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)=b=0$，选择C。

3.选 D。

【解析】考查无穷小的性质。A 有限个无穷小量之和仍然为无穷小量，B 无穷小量的平方为其本身的高阶无穷小，C 为等价于$\alpha(x)\beta(x)$，其也为无穷小，D 反例：$\alpha(x)=\beta(x)$ 时，$\frac{\alpha^2(x)}{\beta^2(x)}$=1，因此，选 D。

4.选 A。

【解析】考查极限求法——夹逼定理：

$$\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(2n)(2n+1)}<\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}<\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n)}$$

裂项相消得：$\frac{1}{n}-\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{2n}$，同时求极限，左右两边的极限值都是 0，所以选A。

5.选 B。

【解析】考查高阶导，$f^{(5)}(x)=\left(x^4\right)^{(5)}+\left(e^{2x}\right)^{(5)}=0+2^5e^{2x}$，所以选B。

6.选 D。

【解析】考查极限求法。洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{3x^2}=-\frac{1}{3}$$ 所以选D。

7.选 A。

【解析】考查积分变限函数的最值问题。$f'(x)=\frac{x^3}{x^2-x+1}\geq 0\Rightarrow x\geq 0$，函数在$[0,1]$单调递增，因此当 $x=0$ 时有最小值为 0，选择A。

8.选 A。

【解析】考查多元微分。$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{-y}{x^2+y^2}$所以选A。

9.选 D。

【解析】考查曲线积分。由题意可知 $\int_l P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 与路径无关，$\int_l P(x,y)dx+Q(x,y)dy=u|_{(1,1)}^{(0,0)}=-3$，故选D。

10.选 C。

【解析】考查级数的敛散性。级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 条件收敛，可取 $a_n=(-1)^n\frac{1}{n^2},b_n=(-1)^n\frac{1}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n^2}$，根据极限审敛法可知其条件收敛；$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$绝对收敛；$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^4}$绝对收敛；综上，只有一个，选 C。

11.选 C。

【解析】考查矩阵混合运算。矩阵不满足乘法的交换律，排除法选出 C。

12. 选 B。

【解析】考查向量组。由题意，$|A|=1$，可设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，从而

$\left|\left(4a_1,4a_1-3a_2,a_3\right)\right|=\begin{vmatrix}4&4&0\\0&-3&0\\0&0&1\end{vmatrix}$，运算得$-12$，选择B。

13. 选 C。

【解析】考查逆矩阵的定义。对 $A^2+A-5E=O$ 等价变形 $A^2+A-2E=3E$，变换成含有 $A+2E$ 的因子，$\frac{1}{3}(A-E)(A+2E)=E$ 选择 C。

14. 选 A。

【解析】考查齐次线性方程组的解。跟自由未知量有关，由题意得出系数矩阵 $\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&1&-1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&1&-1\end{pmatrix}\overset{r_2+r_1}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&3&2\end{pmatrix}$，可知其秩为2，未知数个数为 3，得自由未知量为 1，齐次线性方程组基础解析所含解向量的个数为$3-2=1$，选择A。

15. 选 C。

【解析】考查特征值。求特征值需用特征方程，$|A-E\lambda|=0$，代入 $\lambda=0$ 和矩阵

$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\1&0&a\end{pmatrix}$，$\begin{vmatrix}1&0&2\\0&2&0\\1&0&a\end{vmatrix}=0$，$a=2$，选C。

16. 选 C。

【解析】考查二次型所对应的对称阵。$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{初等行变换}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，可知秩为 2，选C。

17. 选 D。

【解析】考查随机变量 X 的分布函数定义和性质。可知必然右连续函数，选D。

18. 选 C。

【解析】考查随密度函数和分布函数的区别。题设给出$\varphi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 表示标准正态分布的密度函数和分布函数，因此，根据标准正态分布分布函数的性质得$\Phi(x)=1-\Phi(-x)$，D 正确。根据分布函数的概率特点 $P(x_1<X<x_2)=\Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$ 得 $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1$，B 正确，同理可以得到 A 正确，利用排除法，选C。

19. 选 D。

【解析】考查随机事件的概率。$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体$N(2,\sigma^2)$的简单随机样本，所以 $P\{\bar{X}\le 2\}=\frac{1}{2}$，而 $P\{\bar{X}\le 2,S^2\le k^2\}=\frac{1}{5}$，因此 $P\{S^2\le k^2\}=\frac{2}{5}$，所以 $P\{S>k\}=1-P\{S^2\le k^2\}=\frac{3}{5}$，故选D。

20. 选 C。

【解析】考查正态总体样本的均值与样本方差的分布。$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自 X 的样本，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 为样本均值 $E(\bar{X})=\mu,\ D(\bar{X})=\sigma^2\backslash n$，排除 A、B。根据

$E\left(S^{*2}\right)=E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right)=\sigma^2=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2\right)$，可知C 正确，D 错误。

二、单项选择题（共 40 题，每小题 1.5 分，共 60 分。）

21. 选 D。

【解析】考查导数的极限定义。$f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1-e^{\Delta x}}{\Delta x}$，利用等价无穷小代换，得 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}-\frac{1}{\Delta x}=\infty$，即不存在，选 D。

22. 选 D。

【解析】考查复合导数求导。$\frac{d}{dx}f\left(\sin^2 x\right)=f'\left(\sin^2 x\right)2\sin x\cos x$，根据$f'(x)=g(x)$

得$\frac{d}{dx}f\left(\sin^2 x\right)=f'\left(\sin^2 x\right)2\sin x\cos x=g\left(\sin^2 x\right)\sin 2x$，选D。

23. 选 D。

【解析】考查参数方程和积分变限函数的求导。$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{f(t)f\left(t^2\right)}{2tf\left(t^2\right)}=\frac{f(t)}{2t}$，选 D。

24. 选 D。

【解析】考查微分和积分中值定理。根据微分中值定理的拉格朗日中值定理可知 A 正确，根据积分中值定理，可知B 正确；根据柯西中值定理，可知C 正确，排除法选D。

25. 选 A。

【解析】考查函数的重要点（极值点、拐点）。根据拐点存在的充要条件，二阶导为零，三阶导不为零，排除C，由于 $f^{(4)}(x)<0$，可取特殊值 $f(x)=-x^4$，满足题设条件，对其分析可排除B、D，引出选A。

26. 选 D。

【解析】考查函数的不等式应用。根据 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)<0$ 以及选项特征，可以构造一个函数 $F(x)=f(x)g(x)$，则 $F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)<0$，因此

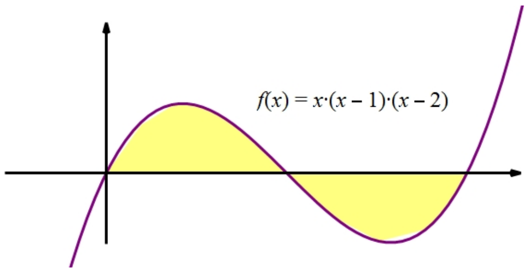
$F(x)=f(x)g(x)$ 单调递减，又因为 $x\in(a,b)$，可得 $f(x)g(x)>f(b)g(b)$，选出D。

27. 选 D。

【解析】考查函数的最值。$f(x)=\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}x, x\in R$，求一阶导得，令其大于等于 0，$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{2}\geq 0$，解得 $x\geq\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x\leq\frac{\sqrt{3}}{3}$，因此，函数单调性在 $(-\infty,+\infty)$ 上，先增，再减，最后增，有极大值和极小值，$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$，因此，在 $(-\infty,+\infty)$ 上无最值，选出D。

28. 选 D。

【解析】考查定积分的定义。根据 $y=x(x-1)(x-2)$ 的解析式，分析零点，单调性，可绘制图像数形结合，借助定积分的定义，可选出D。



29. 选 B。

【解析】考查定积分的求解方法——分部积分法。$\int_0^1 x^2 f'(2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 df'(2x)=\frac{1}{2}\left[x^2 f'(2x)\Big|_0^1-\int_0^1 f'(2x)dx^2\right]=-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(2x)dx^2$，继续分部积分，$-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(2x)dx^2=-\frac{1}{2}\int_0^1 xdf(2x)=-\frac{1}{2}\left[xf(2x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(2x)dx\right]$，由于 $\int_0^2 f(x)dx=1\overset{换元}{\Rightarrow}\int_0^1 f(2x)dx=\frac{1}{2}$，代入 $f(2)=1,f'(2)=0$，得 $\frac{1}{2}$，选出 B。

30. 选 B。

【解析】考查积分变限函数。$F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)dt=x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x tf(t)dt$，所以 $F'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-2xf(x)=\int_0^x f(t)dt-xf(x)$，根据积分中值定理，可以得其中 ξ 介于 $0,x$ 之间，$F'(x)=x\left[f(\xi)-f(x)\right]$，因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，单调增加，

当 $x>0$ 时，$F'(x)=x\lfloor f(\xi)-f(x)\rfloor<0$；当 $x=0$ 时，$F'(x)=x\lfloor f(\xi)-f(x)\rfloor=0$；

当 $x<0$ 时，$F'(x)=x\lfloor f(\xi)-f(x)\rfloor<0$；因此，$F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减，选B。

31. 选 B。

【解析】考查向量的运算。可设 $a,b=\theta$，由 $|a|=4,|b|=2,|a\cdot b|=4\sqrt{2}$ 可得 〈

$|\cos\theta|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$|a\times b|=|a||b|\sin\theta=4\sqrt{2}$，选B。

32. 选 C。

【解析】考查空间解析几何。由于 $\begin{cases}2y+3z-5=0\\x-2y-z+7=0\end{cases}$ 中的平面 $x-2y-z+7=0$ 与 $\pi:x-y+3z+8=0$ 是垂直关系，因此，所求投影直线必然落在平面 $x-2y-z+7=0$ 与 $\pi:x-y+3z+8=0$ 的交线上，所以投影方程为 $\begin{cases}x-2y-z+7=0\\x-y+3z+8=0\end{cases}$，选出C。

33. 选 A。

【解析】考查可导与连续的关系。根据连续不一定可导，可导必连续，可推出A。

34. 选 B。

【解析】考查隐函数求导。$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$ 两边分别对于 x 求导得

$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}(2x+2yy')=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\dfrac{y'x-y}{x^2}$，化简可得 $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$，选出答案B。

35. 选 B。

【解析】考查空间解析几何。由题意可知，求满足要求解 t 的个数。曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 的切向量为 $\vec{s}=(1,2t,3t^2)$，平面 $x+2y+z=4$ 的法向量为 $n=(1,2,1)$，由于是求线面平行，

因此，$\vec{s}\cdot\vec{n}=0\Rightarrow 3t^2+4t+1=0\Rightarrow t=-\frac{1}{3},-1$，验证切点不在平面上，因此，判断 2 条，选B。

36. 选 B。

【解析】考查函数梯度。增加最快的方向$n=\left(\frac{du}{dx}\Big|_{(1,-1,0)},\frac{du}{dy}\Big|_{(1,-1,0)},\frac{du}{dz}\Big|_{(1,-1,0)}\right)=(1,-1,0)$，故选择B。

37. 选 D。

【解析】考查二重积分。根据二重积分$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^2}dy$ 的定义，数形结合可知积分区域为 $y=1,x=y^2,x=0$围城，除了用 X 型表示外，还可以用 Y 型表示为$\int_0^1 e^{y^2}dy\int_0^{y^2}\frac{dx}{\sqrt{x}}$，变成好求的二次积分：$\int_0^1 e^{y^2}\left[2\sqrt{x}\right]_0^{y^2}dy=\int_0^1 e^{y^2}dy^2=\left[e^{y^2}\right]_0^1=e-1$，选D。

38. 选 D。

【解析】考查三重积分的性质。由于 $\Omega=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$，$\iiint_\Omega x^2dxdydz=\int_{-1}^1 x^2(1-x^2)dx$，由于 $f(x)=x^2(1-x^2)$ 为偶函数，所以 $\iiint_\Omega x^2dxdydz=\int_{-1}^1 x^2(1-x^2)dx\ne 0$，所以 A 错误；同理可知 B、C 错误；D 选项 $\iiint_\Omega \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dxdydz=\int_{-1}^1(1-x^2)\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$，令 $f(x)=(1-x^2)\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$，可知 $f(-x)=-f(x)$，其为奇函数，因此，$\int_{-1}^1(1-x^2)\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx=0$，即 $\iiint_\Omega \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dxdydz=0$，故选D。

39. 选 B。

【解析】考查幂级数的收敛域。由题意可知系数通项 $a_n=\frac{1}{n},a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$ 所以，$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$，当 $x=-1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛；当$x=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，

发散，因此收敛域为$[-1,1)$，即B。

40. 选 C。

【解析】考查微分方程通解和特解的关系。根据对比 $y_1=xe^x+e^{2x}$，$y_2=xe^x+e^{-x}$，$y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$，可知都有代数式 xe^x，所以其为不变量，而e^{2x},e^{-x}在变化，因此，可判断通解为$C_1e^{2x}+C_2e^{-x}+xe^x$，选C。

41. 选 C。

【解析】考查相似矩阵的定义。由于矩阵 A 与对角矩阵 $D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似，可得

$P^{-1}AP=D\Rightarrow A=PDP^{-1}\Rightarrow A^{-1}=\left(PDP^{-1}\right)^{-1}=PD^{-1}P^{-1}$，而$D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow D^{-1}=D$，

$A^{-1}=PD^{-1}P^{-1}=PDP^{-1}=A$，故选C。

42. 选 D。

【解析】考查矩阵的秩。根据秩可以根据初等变换为阶梯矩阵，判断非零行数来确定，可知 $R\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}=R(A)+R(B)$，选 D。

43. 选 D。

【解析】考查线性方程组解的问题。根据题意，$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\\a_3x+b_3y=c_3\end{cases}$ 有唯一解，

$R(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=R(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=2$，与其等价的为D。

44. 选 A。

【解析】考查线性方程组基础解系。根据基础解系线性无关， 可取特殊值

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$R(-\alpha_1,2\alpha_2,\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3)=3$，$R(\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_1-3\alpha_3,-3\alpha_2+2\alpha_3)$

线性无关，可以；$R(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3)=2<3$，$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3$ 线性相关；

$R(\alpha_1-2\alpha_2,3\alpha_3-\alpha_1,-3\alpha_3+2\alpha_2)=2<3$，$\alpha_1-2\alpha_2,3\alpha_3-\alpha_1,-3\alpha_3+2\alpha_2$ 线性相关；

$R(2\alpha_1+4\alpha_2,-2\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3)=2<3$线性相关；所以选A。

45. 选 B。

【解析】考查线性方程组解的情况。方程组$\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$有无穷多个解，则

$\begin{pmatrix}a&1&1&-2\\1&a&1&-2\\1&1&a&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&1&a&-2\\0&a-1&1-a&0\\0&0&-a^2-a+2&-2+2a\end{pmatrix}$，系数矩阵的秩等于增广矩阵的

秩，小于未知数个数，可得$\begin{cases}-a^2-a+2=0\\-2+2a=0\end{cases}$得$a=1$，选 B。

46. 选 A。

【解析】考查特征值的性质。已知三阶矩阵 A 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$，可知 A^{-1} 的特征值为

$2,3,4$，所以$A^{-1}-E$矩阵的特征值为$2-1=1,3-1=2,4-1=3$，因此$|A^{-1}-E|=1\cdot2\cdot3=6$，

所以选A。

47. 选 B。

【解析】考查二次型和特征值的性质。$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\quad(b>0)$

对应的矩阵$A=\begin{pmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{pmatrix}$由矩阵 A 的特征值之和为 1 得$a+2-2=1\Rightarrow a=1$；特征值之

积为-12得 $\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{vmatrix} = -12 \Rightarrow b = 2$，因此选择B。

48. 选 C。

【解析】考查相似矩阵的性质。矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & x \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似，而 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 是对角阵，因此可知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & x \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值相等，且为 $2, y, -1$，根据矩阵特征值的特点可 $2 + y + (-1) = 2 + 0 + x$ ①；$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & x \end{pmatrix}$ 对于的特征多项式为 $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & x-\lambda \end{vmatrix} = 0$ 即 $(2-\lambda)\left[-\lambda(x-\lambda)-4\right] = 0$ 的解有 -1，代入得 $(x+1) - 4 = 0$ ②；联立①和②得 $x = 3, y = 4$，选择答案C。

49. 选 D。

【解析】考查正交矩阵的性质。A，B 是同阶正交矩阵，则 AB、$A^{-1}B$、$A^{-1}B^{-1}$ 也是正交矩阵，A、B、C 都正确；D 反例 $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 不是正交阵，所以选择D。

50. 选 C。

【解析】考查正交矩阵的性质。因为 $A = \begin{pmatrix} -a & b \\ b & a \end{pmatrix}$，$a > b > 0$，$a^2 + b^2 = 1$，可取 $A = \begin{pmatrix} -a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ 的列向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$，$[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2] = 0, \|\boldsymbol{\alpha}_1\| = 1, \|\boldsymbol{\alpha}_2\| = 1$，因此 A 为正交矩阵，选C。

51. 选 C。

【解析】考查条件概率。目标被命中概率为$1-(1-0.6)(1-0.5)=0.8$，目标被命中这一条件下被甲射中的概率是$\frac{0.6}{0.8}=0.75$，因此选择C。

52. 选 D。

【解析】考查随机变量。随机变量 X,Y 相互独立且同分布，且$P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\frac{1}{2}$，可知，$P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=-1,Y=-1\}=\frac{1}{2}$，$P\{Z=-1\}=P\{X=1,Y=-1\}+P\{X=-1,Y=1\}=\frac{1}{2}$ 所以 A 正确；$P\{X=1,Z=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，一次类推可知 B，C 正确，$P\{X=1,Y=1,Z=1\}=\frac{1}{4}\neq P\{X=1\}P\{Y=1\}P\{Z=1\}$ 所以，D 错误，选D。

53. 选 C。

【解析】考查概率密度函数。设Y 的分布函数为$F(y)$，设随机变量$U=XY$ 的概率分布函数为$G_U(u)$，则$G_U(u)=P\{XY\le u\}=P\left\{Y\le\frac{u}{X}\right\}=P\left\{X=1,Y\le\frac{u}{1}\right\}+P\left\{X=2,Y\le\frac{u}{2}\right\}$，

即：$G_U(u)=0.6F(u)+0.4F\left(\frac{u}{2}\right)$，对分布函数求导，得对应的密度函数为

$g_U(u)=0.6\times f(u)+0.2\times f\left(\frac{u}{2}\right),-\infty<u<+\infty$，故选C。

54. 选 C。

【解析】考查随机变量。因为随机变量 X 的分布律为$P\{X=-1\}=\frac{1}{2}$，$P\{X=1\}=\frac{1}{2}$，且 X 与Y 相互独立同分布，$P\{X=Y\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=-1,Y=-1\}=\frac{1}{2}$，故选 C。

55. 选 D。

【解析】考查联合概率密度。$f(x,y)=\begin{cases}6x, 0\le x\le y\le 1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$，则

$f_X(x,y)=\begin{cases}6x(x-1), 0\le x\le y\le 1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$，$f_Y(x,y)=\begin{cases}3y^2, 0\le x\le y\le 1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$，所以

$f(x,y)\ne f_X(x,y)\cdot f_Y(x,y)$，因此 X与Y不独立，也不同分布。故选D。

56. 选 A。

【解析】考查假设检验显著水平。根据题设，可知其拒绝 5%的错误，那么，当显著性水平改为$\alpha=0.1$时，即显著性水平上升时，那么，连 5%的错误都拒绝，固然会拒绝 10% 的错误，因此选择A。

57. 选 C。

【解析】考查抽样分布。由题意 $X=\frac{Y}{\sqrt{\frac{Z}{n}}}$，其中，$Y\sim N(0,1), Z\sim\chi^2(n)$，因此

$\frac{1}{X^2}=\frac{\frac{Z}{n}}{\frac{Y^2}{1}}$，$Y^2\sim\chi^2(1), Z\sim\chi^2(n)$，所以根据 F 分布的特点，可知$\frac{1}{X^2}\sim F(n,1)$，选择答案C。

58. 选 D。

【解析】考查无偏估计。由无偏估计的性质可知$a+b=1$；又因为两个容量为n 和m 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 独立，所以 $D(\bar{X})=\frac{1}{n},D(\bar{Y})=\frac{1}{m}$，

$D(\hat{\mu})=a^2D(\bar{X})+b^2D(\bar{Y})=\frac{1}{n}a^2+\frac{1}{m}(1-a)^2=\frac{n+m}{nm}\left(a-\frac{n}{n+m}\right)^2+\frac{1}{m+n}$，所以当

$a=\frac{n}{n+m}$时，$D(\hat{\mu})$最小，此时，$b=\frac{m}{n+m}$，因此，选D。

59. 选 B。

【解析】考查抽样分布。由 $X\sim N(\mu,1), Y\sim\chi^2(n)$，得$T=\frac{X-\mu}{\sqrt{Y\backslash n}}=\frac{\frac{X-\mu}{1}}{\sqrt{Y\backslash n}}$，可令

$Z=\frac{X-u}{1}\sim N(0,1)$，根据$t(n)$分布的定义，可知$T\sim t(n)$，故选 B。

60. 选 C。

【解析】由题意得，当统计量$c\sum_{i=1}^{10}\left(X_i+X_{10+i}-2\bar{X}\right)^2$服从 χ^2-分布时，只需关注$c\left(X_1+X_{11}-2\bar{X}\right)^2$服从$\chi^2-$分布，$X_1,X_2,\cdots,X_{2n}$是来自正态总体$X\sim N\left(\mu,2^2\right)$的简单随机样本，$\bar{X}$为样本均值，因此$\bar{X}=\mu$，$c\left(X_1+X_{11}-2\bar{X}\right)^2=c\left((X_1-\mu)+(X_{11}-\mu)\right)^2$服从$\chi^2-$分布，由题意可知，$\sqrt{c}\left((X_1-\mu)+(X_{11}-\mu)\right)\sim N(0,1)$，而$D\left((X_1-\mu)+(X_{11}-\mu)\right)=8$，于是，$\frac{\left((X_1-\mu)+(X_{11}-\mu)\right)}{\sqrt{8}}\sim N(0,1)$，所以，$c=\frac{1}{8}$，选 C。

三、单项选择题（共 10 题，每小题 2 分，共 20 分。）

61. 选 D。

【解析】考查函数微积分。已知 $f(x)$ 可导，$g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数，可知$y=g(x)=f^{-1}(x)\Rightarrow x=f(y)=f(g(x))$，所以利用分部积分得$\int g(x)dx=xg(x)-\int xdg(x)=xg(x)-\int f(g(x))dg(x)$，又$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，所以$\int g(x)dx=xg(x)-\int xdg(x)=xg(x)-F(g(x))+C$，故选D。

62. 选 A。

【解析】考查二重积分。由于D_R是圆域：$x^2+y^2\le R^2$，根据所求中有$\frac{1}{\pi R^2}$这一因子，因此，可以使用积分中值定理，存在(ξ,η)使得$\iint_{D_R} f\left(\cos(x+y)\right)dxdy=\pi R^2\cdot f\left(\cos(\xi+\eta)\right)$，因此，所求$\lim_{R\to0^+}\frac{1}{\pi R^2}\iint_{D_R} f\left(\cos(x+y)\right)dxdy=\lim_{R\to0^+} f\left(\cos(\xi+\eta)\right)$，当$R\to0^+\Rightarrow(\xi,\eta)\to(0,0)$，$\lim_{R\to0^+}\frac{1}{\pi R^2}\iint_{D_R} f\left(\cos(x+y)\right)dxdy=\lim_{R\to0^+} f\left(\cos(\xi+\eta)\right)=f(1)$，所以选A。

63. 选 D。

【解析】考查积分的应用求弧长。根据参数方程，可知其表示星形曲线，因此，根据星 形曲线的对称性，可以求第一象限的曲线长。$x'(t)=12\cos^2 t(-\sin t), y'(t)=12\sin^2 t\cos t$;

根据弧长积分公式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}12\cos t\sin t dt$ 可得第一象限的曲线长为 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}12\cos t\sin t dt=-12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t d\cos t=-6\cos^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=6$，所以该封闭曲线的弧长为 24，选择D。

64. 选 B。

【解析】考查曲面积分。积分曲面为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，所以 $z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

设 $D_{xy}: x^2+y^2=2x\Rightarrow(x-1)^2+y^2=1$，$S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\iint_{D_{xy}}\sqrt{2}dxdy$，根据二重积分的几何意义，可知 $S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\iint_{D_{xy}}\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\pi$，选B。

65. 选 C。

【解析】考查傅里叶系数。根据傅里叶级数的定义变换 $F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)dt$ 如下

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\left[n(x+t)\right]+b_n\sin\left[n(x+t)\right]\right\}\right\}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\cos nt+(-a_n\sin nx+b_n\cos nx)\sin nt\right]\right\}dt$$

$$=\frac{a_0}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\cos nt+(-a_n\sin nx+b_n\cos nx)\sin nt\right]dt$$

$$=\frac{a_0}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt dt\right)+(-a_n\sin nx+b_n\cos nx)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt dt\right)\right]$$

$$=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n\cos nx+b_n\sin nx)a_n+(-a_n\sin nx+b_n\cos nx)b_n\right]$$

$$=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n^2+b_n^2)\cos nx\right]$$

所以 $A_n=a_n^2+b_n^2$，综上，选C。

66. 选 C。

【解析】考查矩阵运算。由已知：$(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2=A+B$ 又因为

$A^2=A,B^2=B$，所以 $AB+BA=O$，$AB=A^2B=A(AB)=-ABA=(-AB)A=BA^2=BA$，

所以 $AB=O,BA=O$， 故选C。

67. 选 B。

【解析】考查相似矩阵。$A\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$,，$\boldsymbol{\alpha}=E\boldsymbol{\alpha}=AA\boldsymbol{\alpha}=A\lambda\boldsymbol{\alpha}=\lambda A\boldsymbol{\alpha}=\lambda^2\boldsymbol{\alpha}\Rightarrow(\lambda^2-1)\boldsymbol{\alpha}=O$，因

此 A 有两个特征值±1。

$\because\ A^2=E,\therefore\ 0=(A-E)(A+E)\therefore\ 0=r((A+E)(A-E))\ge r(A+E)+r(A-E)-n$

$\therefore\ r(A+E)+r(A-E)\le n$

又$\because\ r(A+E)+r(A-E)=r(A+E)+r(E-A)\ge r(A+E+E-A)=r(2E)=n$

$\therefore\ r(A+E)+r(A-E)=n.$

根据相似于对角阵充要条件可知选B。

68. 选 D。

【解析】X 为离散型随机变量，X 服从参数 $p=\frac{1}{2}$ 的 $0-1$ 分布；Y 连续型随机变量，Y 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，所以 $X+Y$ 既不是连续型随机变量也不是离散型随机变量，选 D。

69. 选 A。

【解析】似然函数为$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$

它的对数为$\ln L(\mu,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$，

似然方程组为
$$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0\\[2ex]\dfrac{\partial\ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0\end{cases}$$

由第一式解得$\mu^* = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$；代入第二式得$\sigma^{*2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$，其为似然方程组有唯一解，而且它一定是最大值点，这是因为当$|\mu| \to \infty$或$\sigma^2 \to 0$或∞时，非负函数$L(\mu, \sigma^2) \to 0$。于是，σ^2的最大似然估计为$\sigma^{*2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X})^2$，所以选择A。

70. 选 D。

【解析】可令 $X \sim B(m, p)$，因此总体的一阶原点矩为 $\mu_1 = EX = np$

按矩法估计有 $mp = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$ 因此p 的矩估计 $\hat{p} = \frac{\bar{X}}{m}$

参数P 的极大似然函数为 $L(p) = \prod_{i=1}^{n} C_m^{X_i} p^{X_i}(1-p)^{m-X_i} = \left(\prod_{i=1}^{n} C_m^{X_i}\right) p^{\sum_{i=1}^{n} X_i}(1-p)^{nm-\sum_{i=1}^{n} X_i}$

$$\ln L(p) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} C_m^{X_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} X_i \ln p + (mn - \sum_{i=1}^{n} X_i)\ln(1-p)$$

令 $\frac{d\ln L(p)}{dp} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{1}{p-1}(mn - \sum_{i=1}^{n} X_i) = 0$ 即 $(p-1)n\bar{X} + p(mn - n\bar{X}) = 0$

由此得 P 的极大似然估计 $\hat{p} = \frac{\bar{X}}{m}$；由无偏估计的定义，可知选 D。