

3. 配准时, 先计算每个点落在哪个体素中, 然后建立该点与该体素的 μ_k, Σ_k 构成的残差。
4. 利用 G-N 或 L-M 方法对估计位姿进行迭代, 然后更新位姿估计。

这里最关键的是第 3 步。我们设被配准的点云中的某个点为 q_i , 它经过 R, t 变换后, 落在某个统计指标为 μ_i, Σ_i 的体素中^①, 那么我们记这个栅格中的残差为:

$$e_i = Rq_i + t - \mu_i \quad (7.12)$$

而最后的 R, t 由一个加权的最小二乘问题决定:

$$(\mathbf{R}, \mathbf{t})^* = \arg \min_{\mathbf{R}, \mathbf{t}} \sum_i (e_i^T \Sigma_i^{-1} e_i) \quad (7.13)$$

由最小二乘的知识不难看出, 上述问题相当于最大化每个点落在所在栅格的概率分布, 因此是一个最大似然估计 (MLE)^②:

$$(\mathbf{R}, \mathbf{t})^* = \arg \max_{\mathbf{R}, \mathbf{t}} \prod_i P(Rq_i + t) \quad (7.14)$$

也就是说, 既然目标栅格的点云符合某个统计形状, 那么在正确的位姿估计下, 落在其中的点也应当符合这个分布。而 Σ_i^{-1} 则相当于提供了这个最小二乘问题的权重分布。如果栅格内点云比较集中, 那么估计出来的点也应该更靠近均值; 反之, 如果栅格内点云分布比较分散, 那么即使与均值有一些偏差也可以接受。

一个加权最小二乘问题的高斯牛顿解法如下:

$$\sum_i (J_i^T \Sigma_i^{-1} J_i) \Delta x = - \sum_i J_i^T \Sigma_i^{-1} e_i \quad (7.15)$$

感觉下标有误

8.2 基于 IEKF 的 LIO 系统

8.2.1 IEKF 状态变量

在紧耦合 LIO 系统中，IMU 与雷达点云配准使用同样的状态模型、运动方程与观测方程。于是，最直接的融合方法是把它们都写到 EKF 模型中，IMU 提供运动过程的约束，雷达点云提供观测方程的约束。然而，不管是 ICP 还是 NDT，雷达点云配准往往需要多次最近邻迭代之后才能达到正确的解，这一点读者应该在前文的 ICP 和 NDT 章节中都有所体会。所以，我们也要把传统的 EKF 滤波器改成它的迭代版本：Iterated Extended Kalman Filter (IEKF)。IEKF 理论会比 EKF 稍微麻烦一些，好在我们已经在第 3 给大家推导了误差状态卡尔曼滤波器，本节将把重心放在如何迭代以及如何融合激光残差上面。

首先，我们来回顾前文介绍的 ESKF 理论。为了方便起见，我们将它的高维状态变量统一记作 \mathbf{x} 。它定义在一个高维流形空间 \mathcal{M} ：

$$\mathbf{x} = [p, \mathbf{v}, \mathbf{R}, \mathbf{b}_g, \mathbf{b}_a, \mathbf{g}]^T \in \mathcal{M} \quad (8.1)$$

我们知道它的误差状态可以定义在通常的向量空间，也就是 \mathcal{M} 在工作点附近的切空间： $\delta \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{18}$ 。在 IMU 数据到来时，滤波器根据 IMU 读数和当前的状态变量进行递推。运动过程包括两个部分：

1. 按照陀螺仪和加速度计的读数，对状态进行递推。设 t 到 $t + \Delta t$ 之间的 IMU 读数为 $\tilde{\omega}, \tilde{\mathbf{a}}$ ，那么离散时间的递推过程可以写为：

感觉这个标题改为“IEKF运动方程”更为合理，正好衔接下一节中的观测方程

3. 性化的形式为：

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t + dt)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{F}(\mathbf{x})dt + \mathbf{w} \quad (3.23)$$

其中 $\mathbf{F} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}(t)} \right|_{\mathbf{x}(t)}$ 为系数矩阵。该矩阵由运动方程和各项状态变量的导数构成。然而，这里我们遇到了一个非常现实的问题： \mathbf{F} 当中需要计算旋转矩阵 \mathbf{R} 相对于某个扰动的导数，而在不引入张量的情况下，是无法表达矩阵对向量导数的形式的。于是，传统算法往往会退一步，用欧拉角或者四元数的四个标量作为状态变量，但这样就无法优雅地使用流形上的方法了。另一方面，如果我们考虑将惯性导航系统与卫星导航系统进行融合，那么 \mathbf{x} 中的平移变量就应该使用全局坐标系。这会使得 \mathbf{x} 中的数值变得很大，在有些场合超出浮点数的有效数字范围。这将导致一些常见的运算可能会失效，例如数值计算中的“大数吃小数”现象。

于是，我们会说，能否避免直接使用 \mathbf{x} 和 \mathbf{P} 来表达状态的均值和协方差，来推导运动和观测方程？能否使用原先卡尔曼滤波器中的更新量来推导这两个方程？我们回忆卡尔曼滤波器中的观测部分：

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k,\text{pred}} + \mathbf{K}_k \underbrace{(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_{k,\text{pred}})}_{\text{更新量}} \quad (3.24)$$

4. 西刀程后, 很容易就比观测刀程变为刀下排现有刀刀排。如本排刀程按照式(7.13)那样的刀式, 计算卡尔曼增益, 势必会碰到一个很大维度的矩阵求逆。设残差维度为 m , 此时 H_k 应为 $m \times 18$ 维, 而卡尔曼增益式中的 $(H_k P_k H_k^T + V)$ 变为 $m \times m$ 维矩阵的求逆, 这显然需要避免。

在卡尔曼滤波器中, Sherman-Morrison-Woodbury 恒等式 (SMW 恒等式) (137) 是一组广泛使用的恒等变换, 对各种卡尔曼滤波器的推导都十分有用。SMW 恒等式共有四组, 它们基本上是相互等价的, 其中一项形如:

$$AB(D + CAB)^{-1} = (A^{-1} + BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \quad (8.10)$$

其中 A, B, C, D 为矩阵块, 各乘法满足矩阵乘法法则。我们可以把 P_k, H_k, V 等矩阵代入本式, 得到:

$$K_k = (P_k^{-1} + H_k^T V^{-1} H_k)^{-1} H_k^T V^{-1} \quad (8.11)$$

注意该式内部的求逆变为 18×18 维, 极大地减小了求逆矩阵的维度。所以在处理高维度观测时, 可以尽量使用本式进行卡尔曼增益的计算。同时, 如果对比 NDT 中的线性增量方程式 (7.15), 我们会发现它们有极高的相似性: 卡尔曼增益左侧部分的 $(H_k^T V^{-1} H_k)^{-1}$ 与线性方程系数完全一致, 而 $H^T V^{-1}$ 则对应 (7.15) 的右侧残差部分。这也提示了卡尔曼滤波器实际上是先验与观测进行平衡的本质。

注意到卡尔曼增益的 δx 为:

$$\delta x_k = K_k(z - h(x_k)) \quad (8.12)$$

而 NDT, ICP 等最小二乘的增量为:

$$\sum_i (J_i^T \Sigma_i^{-1} J_i) \Delta x = - \sum_i J_i^T \Sigma_i^{-1} e_i \quad (8.13)$$

左侧矩阵求逆之后, 就和没有预测的卡尔曼增益一致了。只是通常的卡尔曼增益写成了矩阵形式, 而 ICP 或 NDT 写成了求和形式。为了方便后文介绍 NDT LIO, 我们来推导将 NDT 误

多余

5. 西刀程后, 很容易就比观测刀程变为刀下排现有刀刀排。如本排刀程按照式(7.13)那样的刀式, 计算卡尔曼增益, 势必会碰到一个很大维度的矩阵求逆。设残差维度为 m , 此时 H_k 应为 $m \times 18$ 维, 而卡尔曼增益式中的 $(H_k P_k H_k^T + V)$ 变为 $m \times m$ 维矩阵的求逆, 这显然需要避免。

在卡尔曼滤波器中, Sherman-Morrison-Woodbury 恒等式 (SMW 恒等式) (137) 是一组广泛使用的恒等变换, 对各种卡尔曼滤波器的推导都十分有用。SMW 恒等式共有四组, 它们基本上是相互等价的, 其中一项形如:

$$AB(D + CAB)^{-1} = (A^{-1} + BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \quad (8.10)$$

其中 A, B, C, D 为矩阵块, 各乘法满足矩阵乘法法则。我们可以把 P_k, H_k, V 等矩阵代入本式, 得到:

$$K_k = (P_k^{-1} + H_k^T V^{-1} H_k)^{-1} H_k^T V^{-1} \quad (8.11)$$

注意该式内部的求逆变为 18×18 维, 极大地减小了求逆矩阵的维度。所以在处理高维度观测时, 可以尽量使用本式进行卡尔曼增益的计算。同时, 如果对比 NDT 中的线性增量方程式 (7.15), 我们会发现它们有极高的相似性: 卡尔曼增益左侧部分的 $(H_k^T V^{-1} H_k)^{-1}$ 与线性方程系数完全一致, 而 $H^T V^{-1}$ 则对应 (7.15) 的右侧残差部分。这也提示了卡尔曼滤波器实际上是先验与观测进行平衡的本质。

注意到卡尔曼增益的 δx 为:

$$\delta x_k = K_k(z - h(x_k)) \quad (8.12)$$

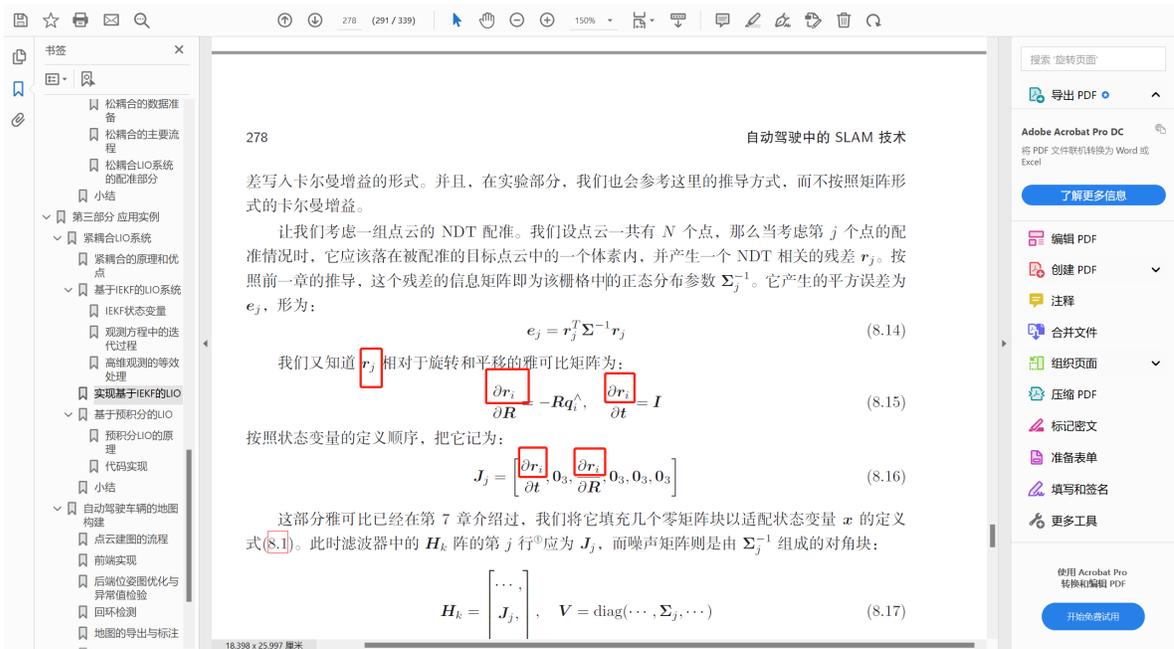
而 NDT, ICP 等最小二乘的增量为:

$$\sum_i (J_i^T \Sigma_i^{-1} J_i) \Delta x = - \sum_i J_i^T \Sigma_i^{-1} e_i \quad (8.13)$$

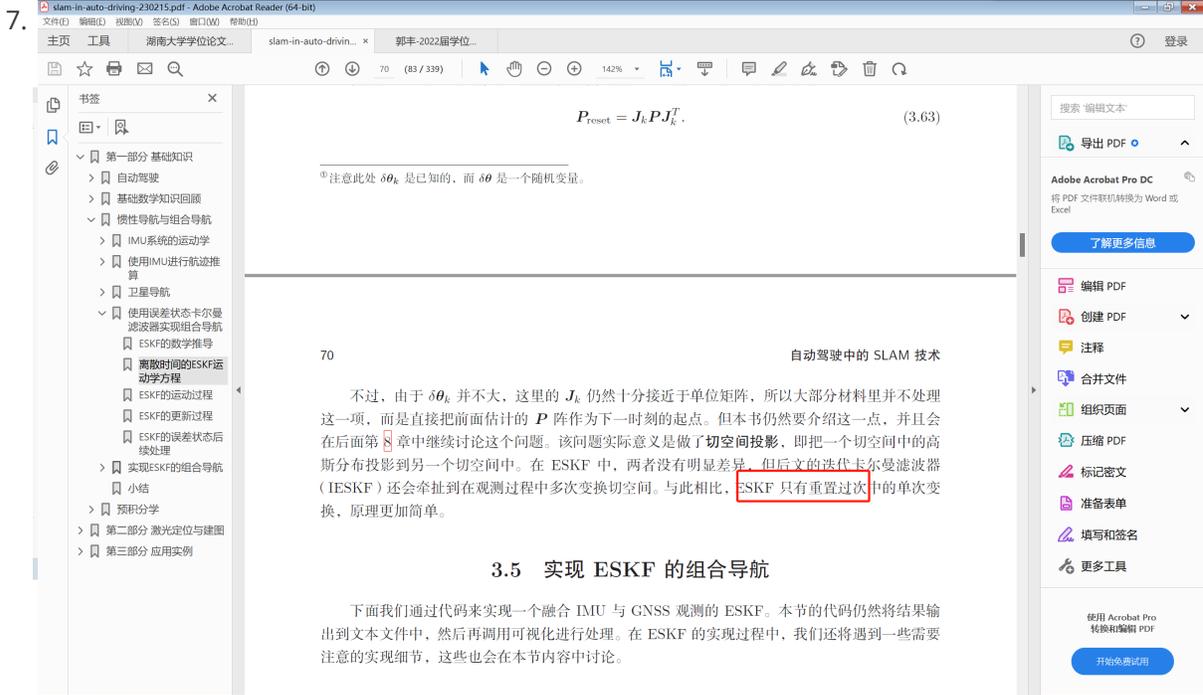
左侧矩阵求逆之后, 就和没有预测的卡尔曼增益一致了。只是通常的卡尔曼增益写成了矩阵形式, 而 ICP 或 NDT 写成了求和形式。为了方便后文介绍 NDT LIO, 我们来推导将 NDT 误

这里看着很乱, 建议把“增量方程=没有预测的卡尔曼增益的观测更新”放在前面。

6.



下标错误



重置过程？

8.

slam-in-auto-driving-230215.pdf - Adobe Acrobat Reader (64-bit)

文件(F) 编辑(E) 视图(V) 签名(S) 窗口(W) 帮助(H)

主页 工具 湖南大学学位论文... slam-in-auto-drivin... x 郭丰-2022届学位...

68 自动驾驶中的 SLAM 技术

在传统 EKF 中，我们可以直观对观测方程线性化，求出观测方程相对于状态变量的雅可比矩阵，进而更新卡尔曼滤波器。而在 ESKF 中，我们当前拥有名义状态 x 的估计以及误差状态 δx 的估计，且希望更新的是误差状态，因此要计算观测方程相比于误差状态的雅可比矩阵：

$$H = \left. \frac{\partial h}{\partial \delta x} \right|_{x_{\text{pred}}}, \quad (3.50)$$

然后再计算卡尔曼增益，进而计算误差状态的更新过程：

$$K = P_{\text{pred}} H^T (H P_{\text{pred}} H^T + V)^{-1} \quad (3.51a)$$

$$\delta x = K(z - h(x_{\text{pred}})) \quad (3.51b)$$

$$x = x_{\text{pred}} + \delta x \quad (3.51c)$$

$$P = (I - KH)P_{\text{pred}} \quad (3.51d)$$

其中 K 为卡尔曼增益， P_{pred} 为预测的协方差矩阵，最后的 P 为修正后的协方差矩阵。大部分的观测数据是对名义状态的观测^①。此时 H 可以通过链式法则来生成：

$$H = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \delta x} \quad (3.52)$$

其中第一项只需对观测方程进行线性化，第二项，根据我们之前对状态变量的定义，可以得到：

$$\frac{\partial x}{\partial \delta x} = \frac{\partial \text{Log}(R(\text{Exp}(\delta \theta)))}{\partial \delta x}$$

是不是 x_{pred} ??