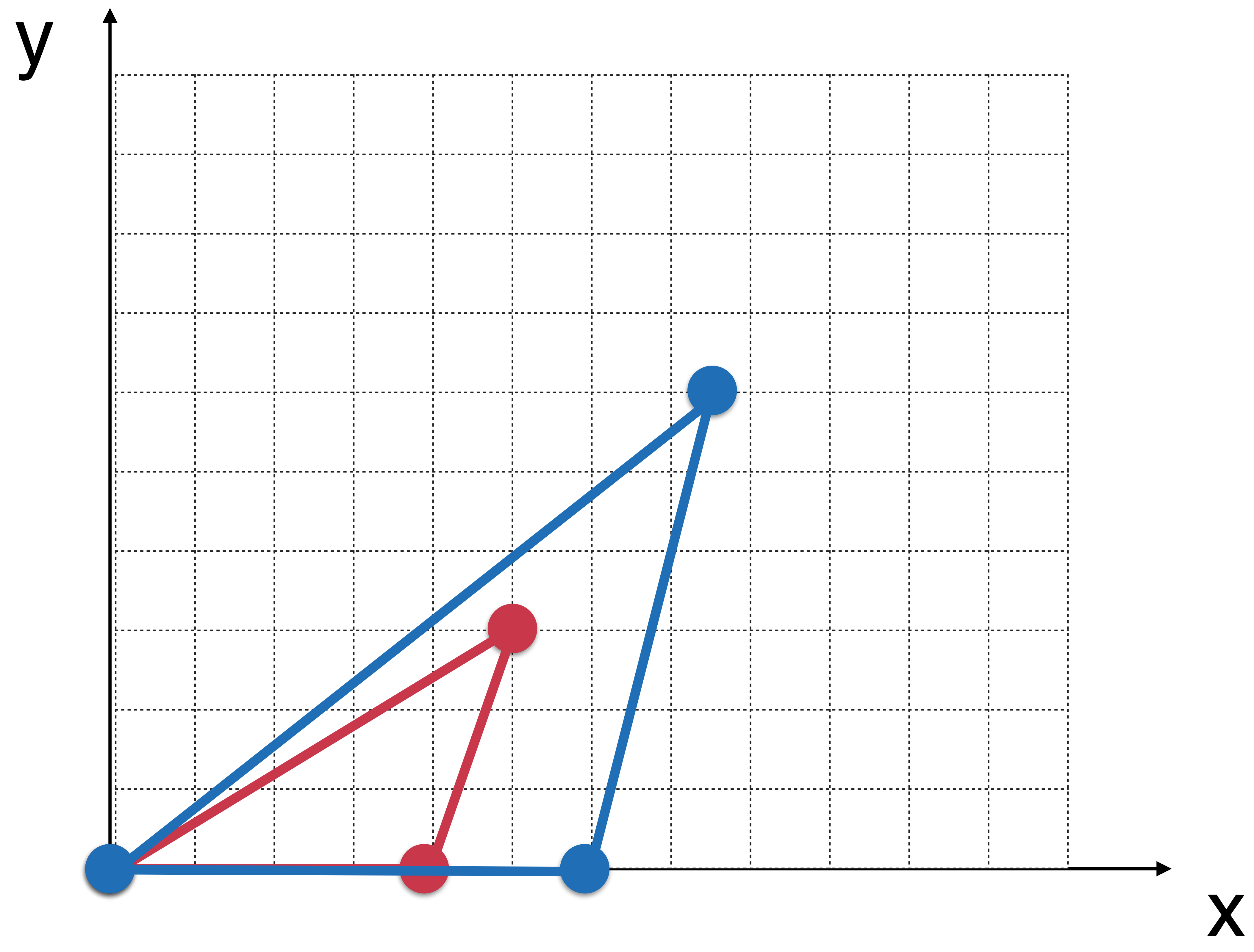
矩阵的应用和更多矩阵相关的高级话题

矩阵在图形变换中的应用

矩阵表示变换（向量的函数）

让每个点的横坐标扩大1.5倍，纵坐标扩大2倍



$$T = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$T \cdot P = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 6 & 7.5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

矩阵表示变换（向量的函数）

让每个点的横坐标扩大a倍，纵坐标扩大b倍

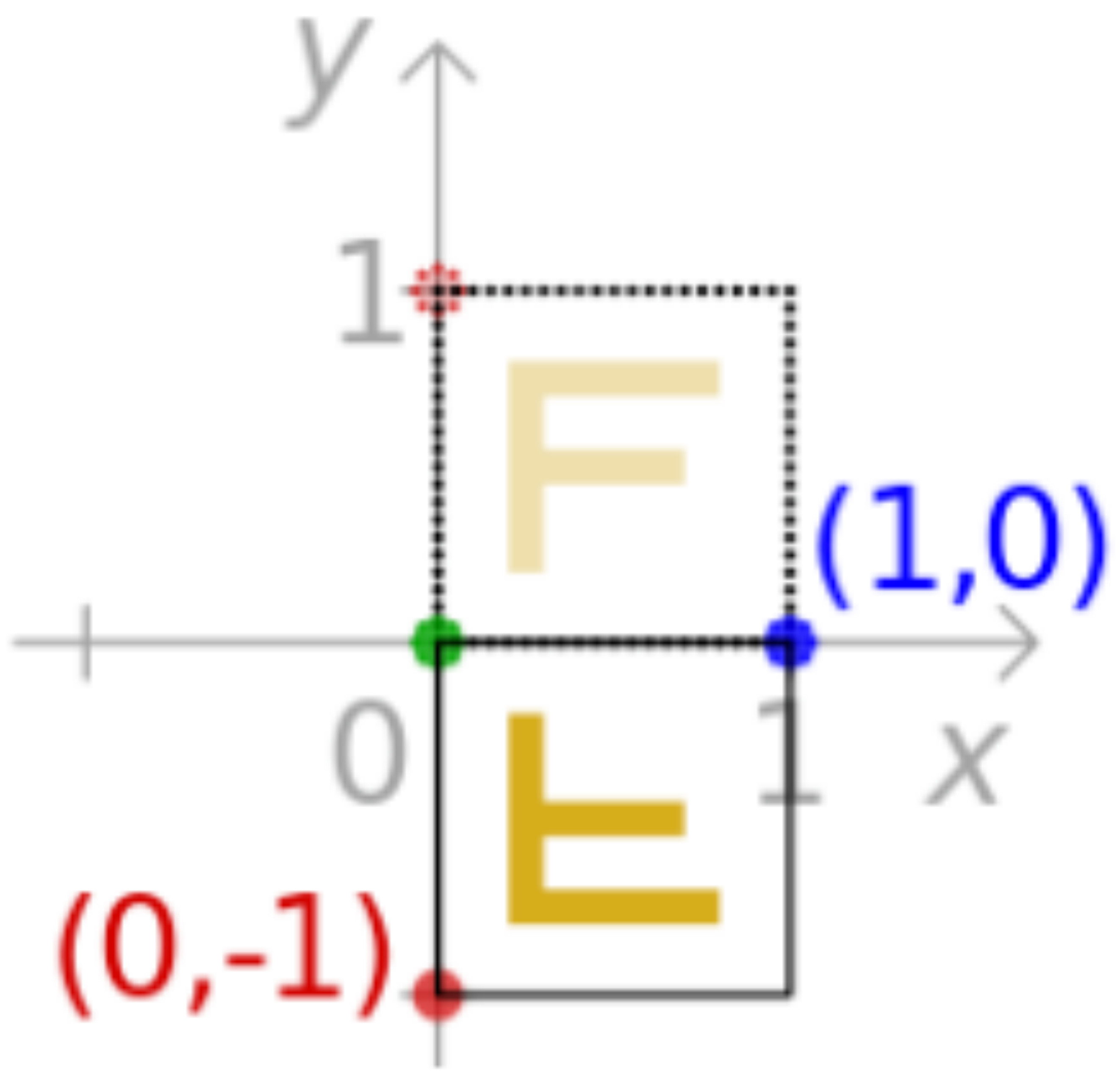
$$T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix}$$

矩阵表示变换（向量的函数）

让每个点关于x轴翻转

$$T\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$T\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

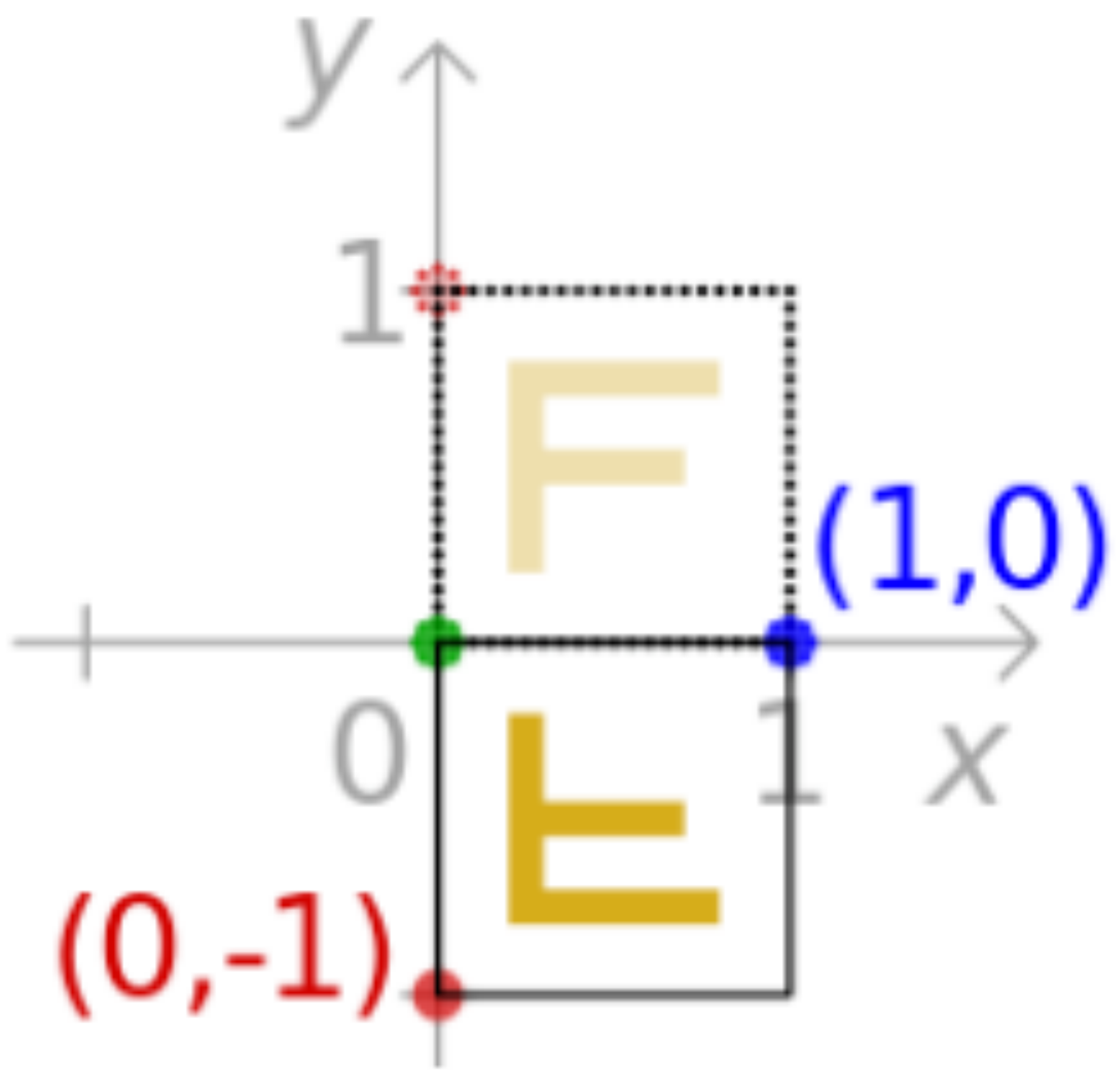


矩阵表示变换（向量的函数）

让每个点关于x轴翻转

$$T\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \qquad T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

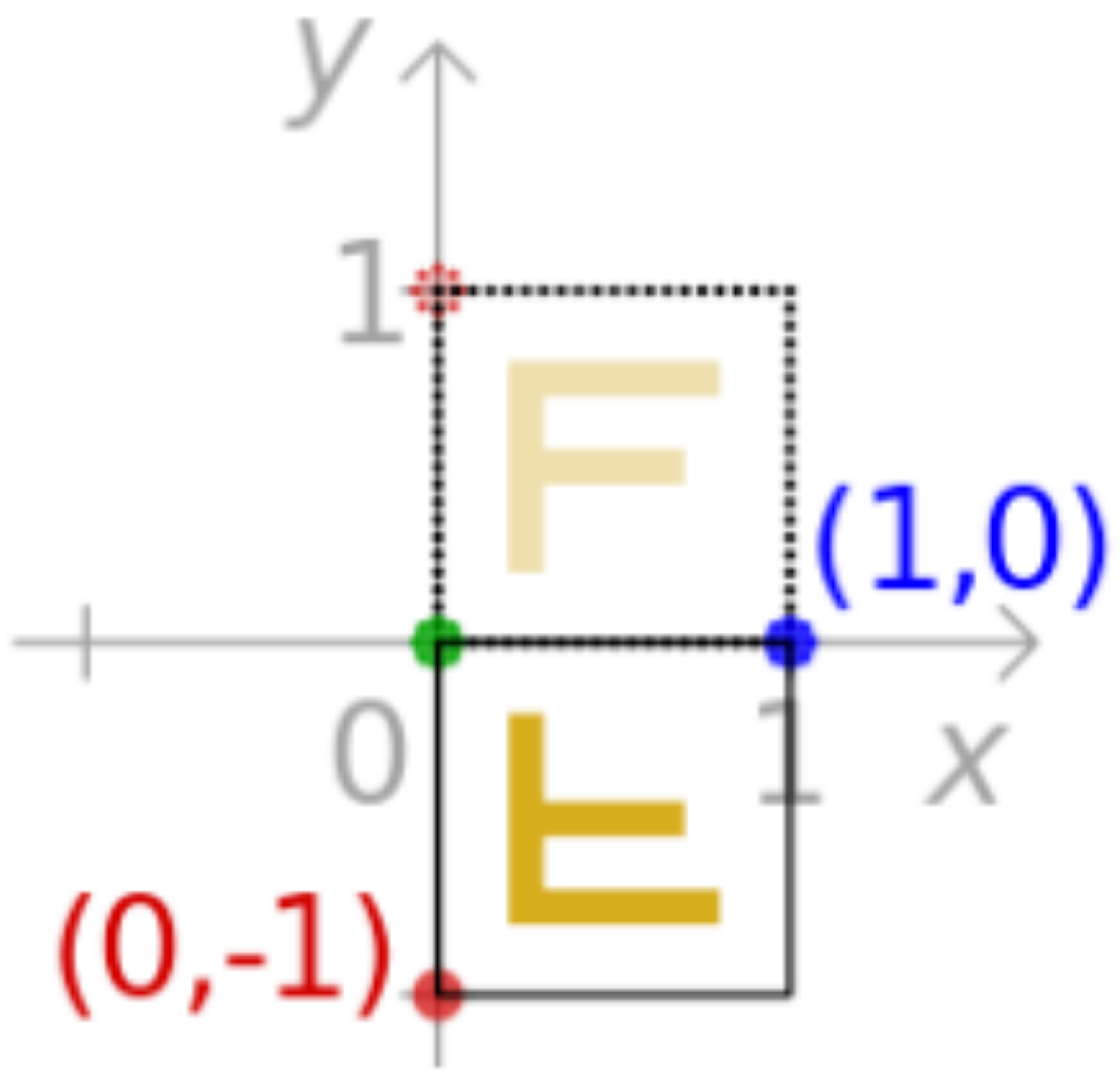


矩阵表示变换（向量的函数）

让每个点关于x轴翻转

$$T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

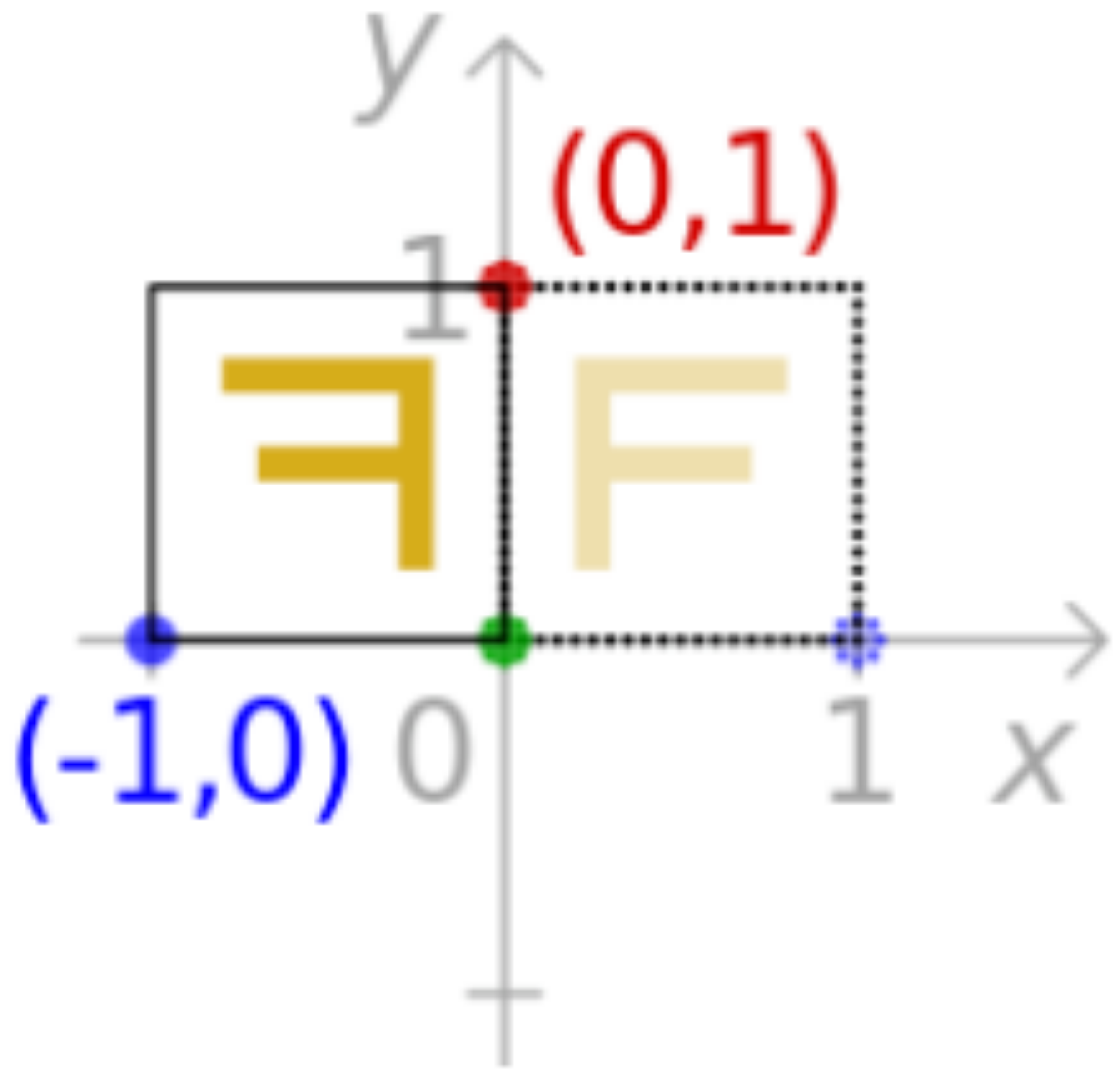


矩阵表示变换（向量的函数）

让每个点关于y轴翻转

$$T\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \qquad T=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

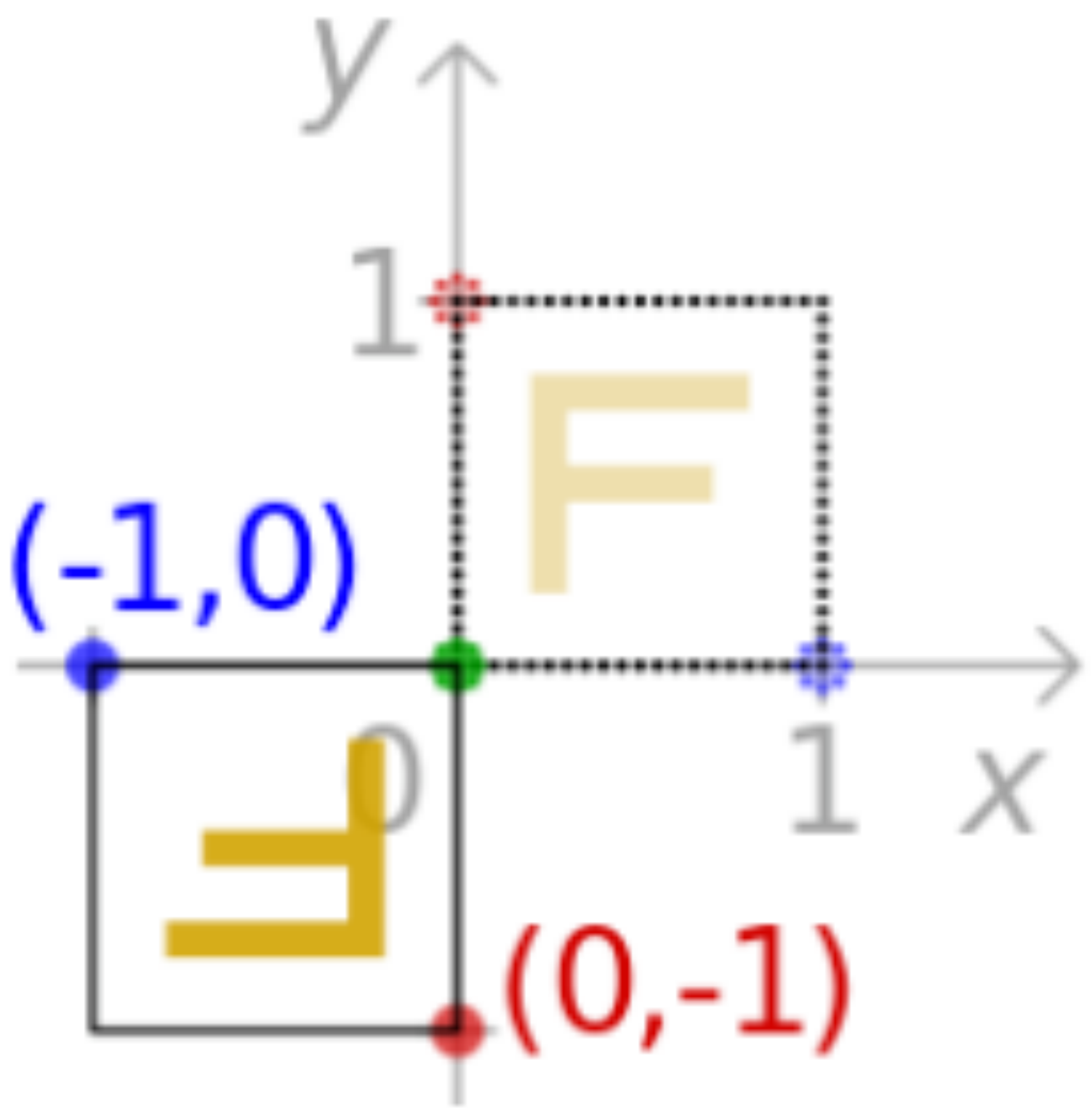


矩阵表示变换（向量的函数）

让每个点关于原点翻转（x轴，y轴均翻转）

$$T\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \qquad T=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

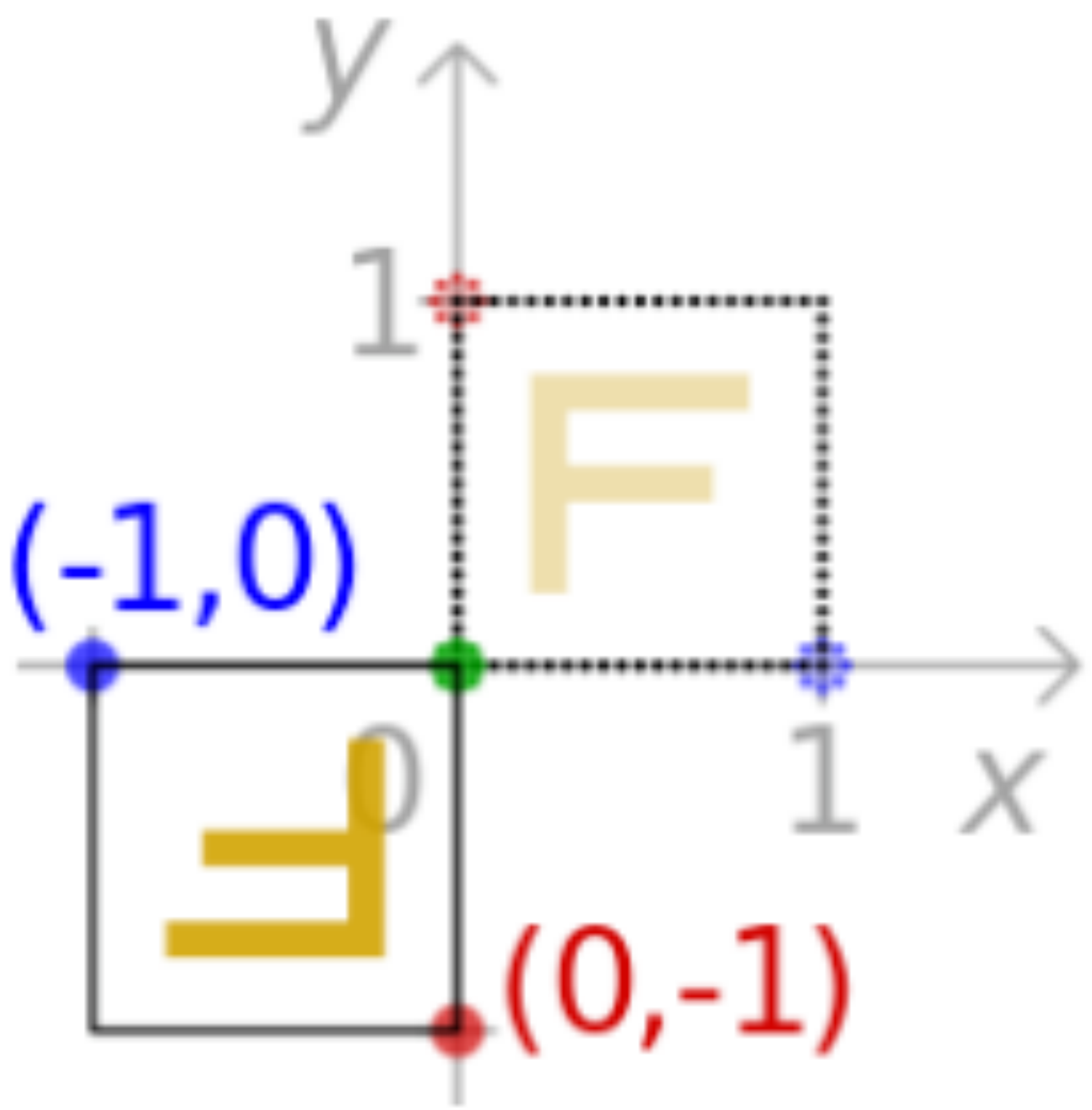


矩阵表示变换（向量的函数）

让每个点关于原点翻转（x轴，y轴均翻转）

$$T_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad T_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_y \cdot (T_x \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = (T_y \cdot T_x) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

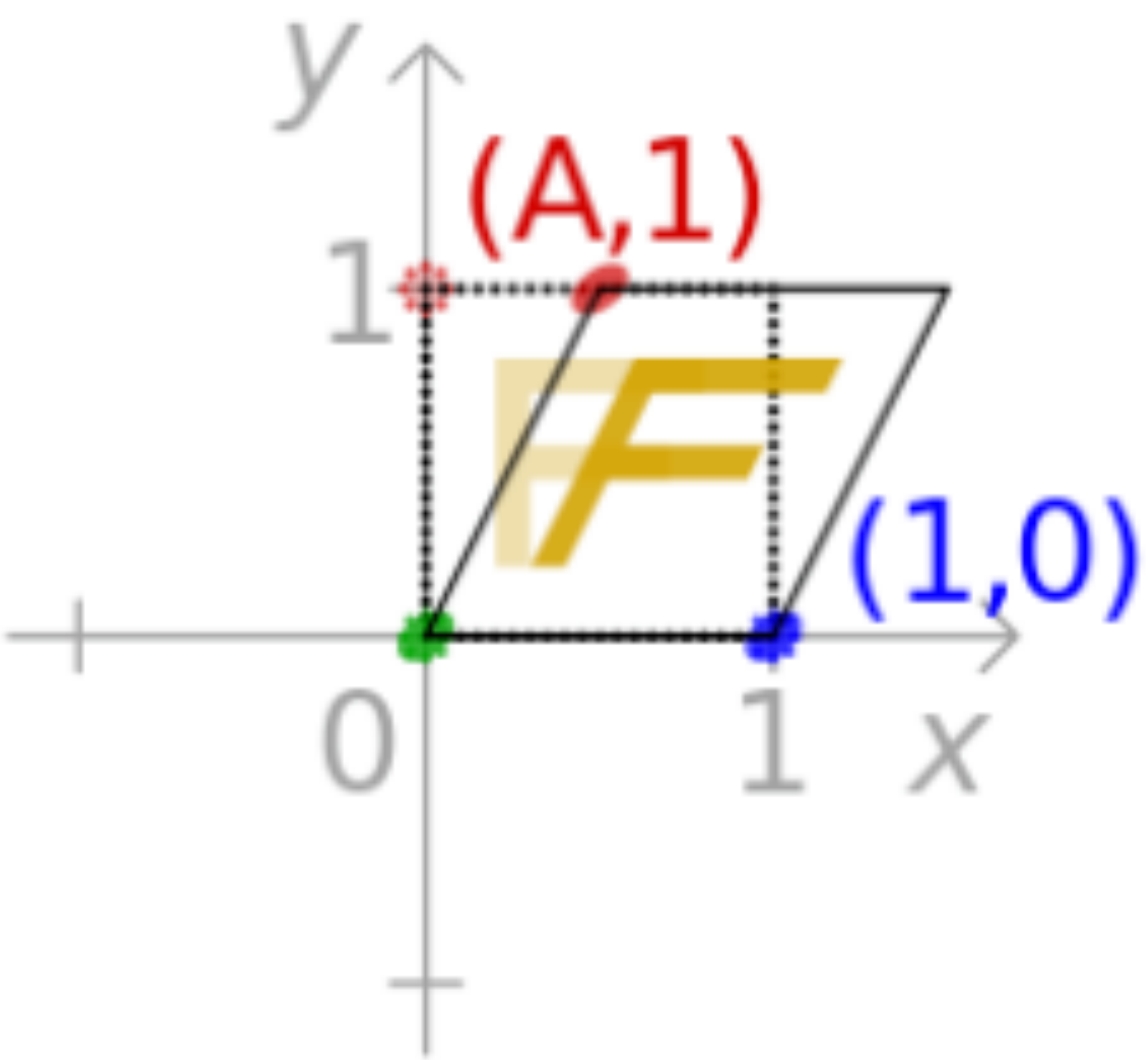


矩阵表示变换（向量的函数）

沿x方向错切

$$T\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+ay \\ y \end{pmatrix}\qquad T=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

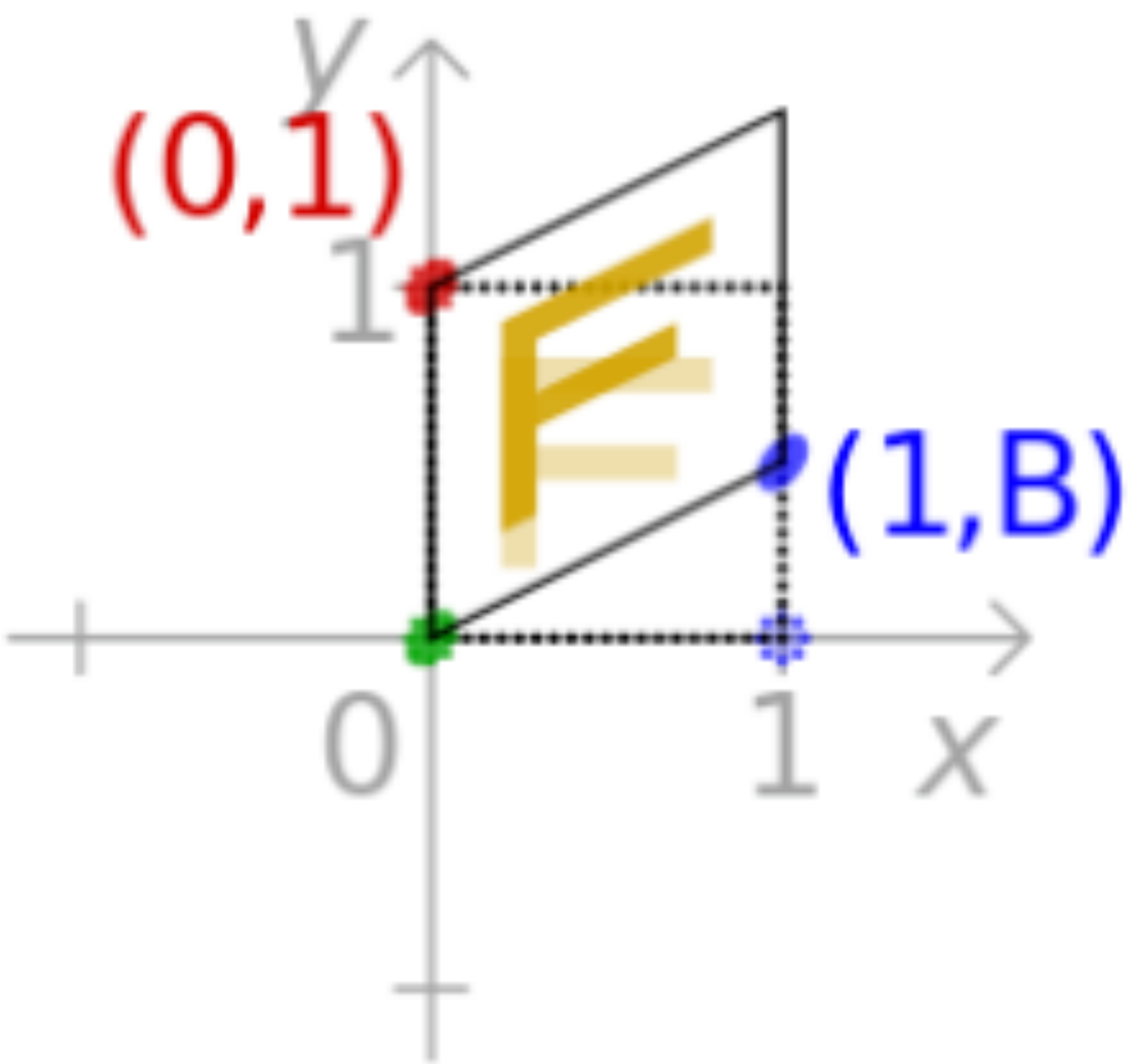
$$T\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+ay \\ y \end{pmatrix}$$



矩阵表示变换（向量的函数）

沿y方向错切

$$T\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ bx+y \end{pmatrix} \quad T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$$



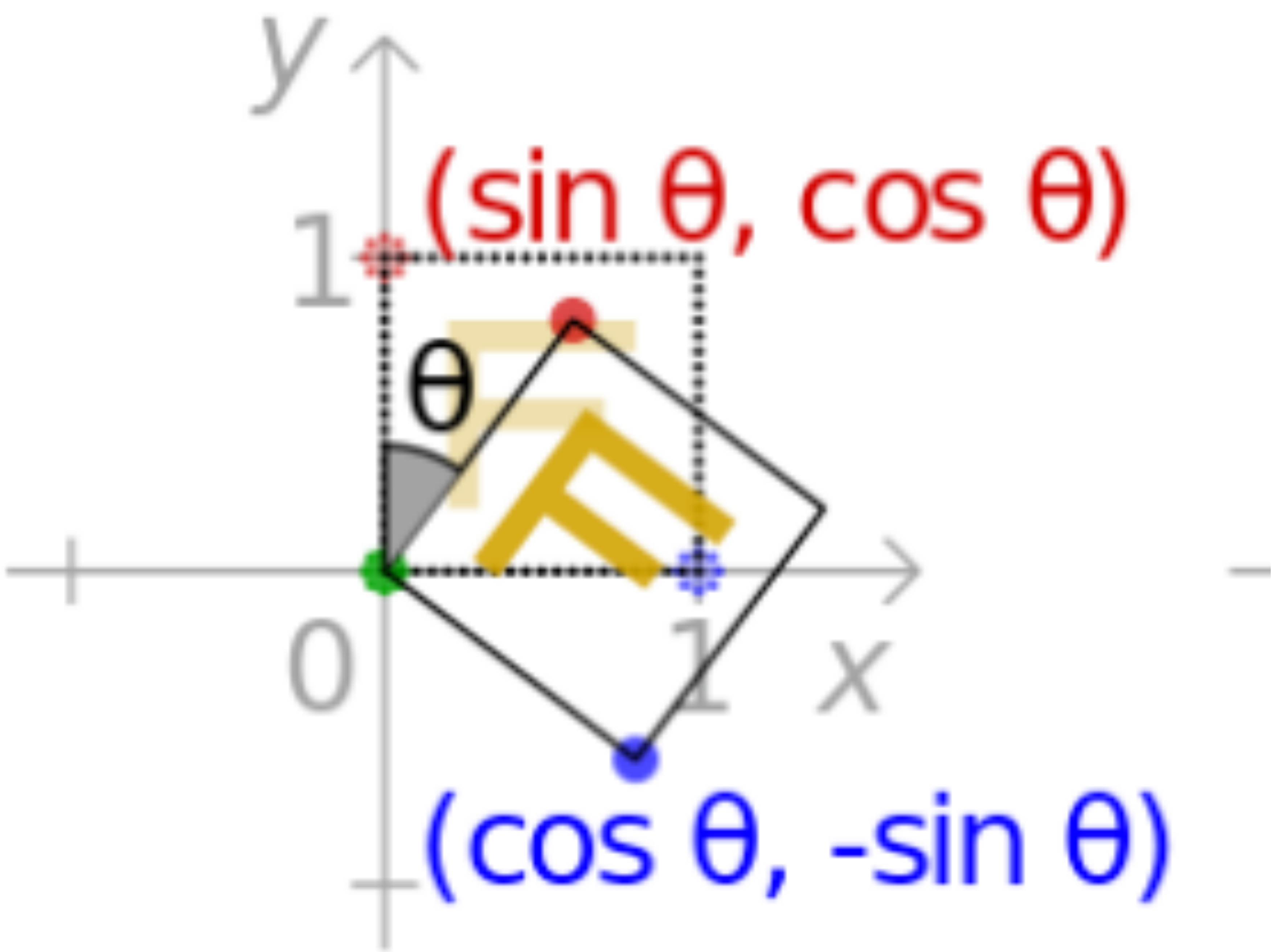
$$T\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ bx+y \end{pmatrix}$$

旋转矩阵的推导和图形学中的矩阵变换

矩阵表示变换（向量的函数）

旋转

$$T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix}$$



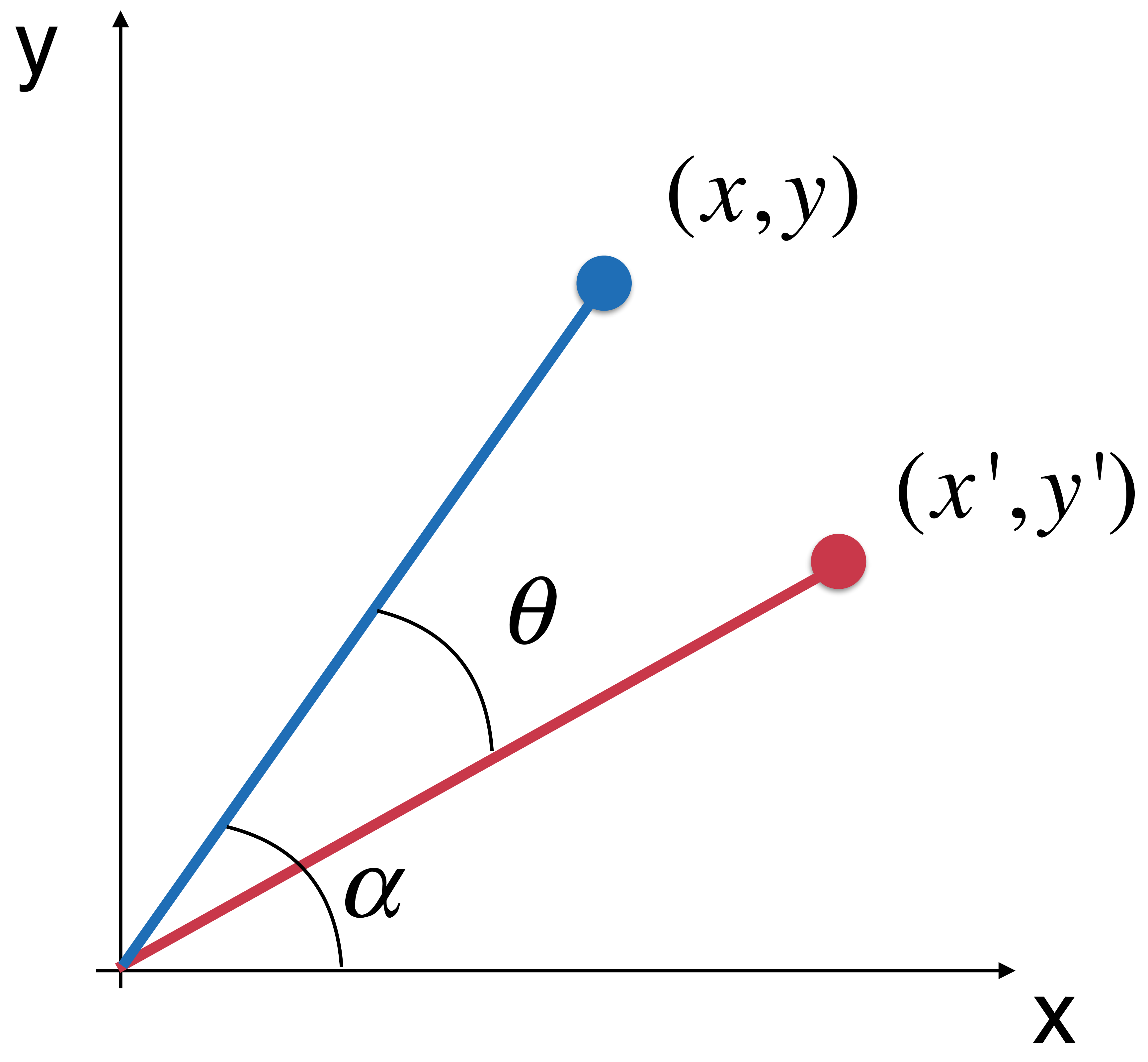
矩阵表示变换（向量的函数）

旋转 $$T\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}?\\?\end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha\cdot d=x \qquad d=\frac{x}{\cos\alpha} \qquad d=\frac{x'}{\cos(\alpha-\theta)}$$

$$\sin\alpha\cdot d=y \qquad d=\frac{y}{\sin\alpha} \qquad d=\frac{y'}{\sin(\alpha-\theta)}$$

$$x'=\frac{\cos(\alpha-\theta)}{\cos\alpha}x \qquad y'=\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin\alpha}y$$



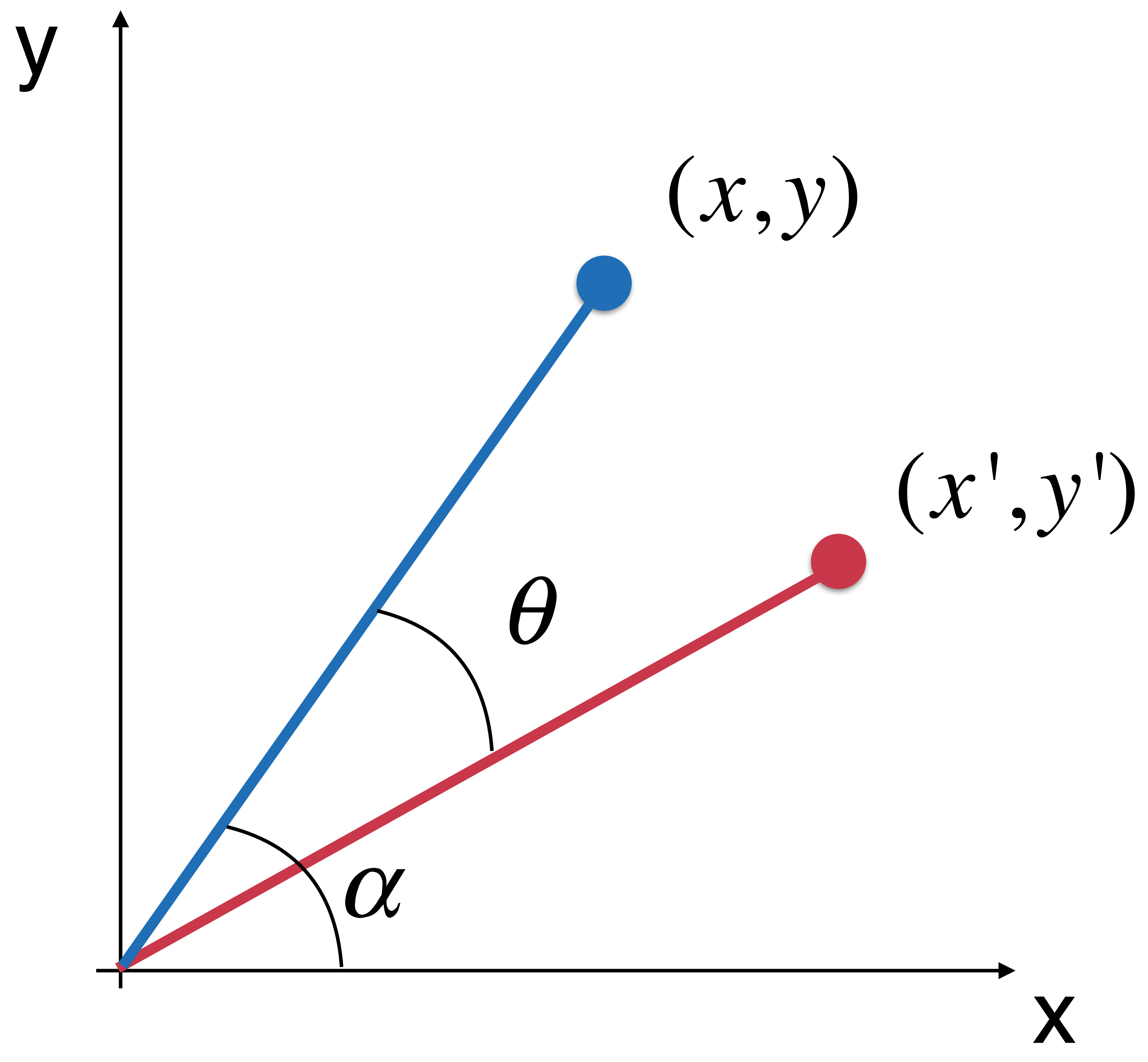
矩阵表示变换（向量的函数）

旋转 $T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix}$

$$x' = \frac{\cos(\alpha - \theta)}{\cos\alpha} x \qquad y' = \frac{\sin(\alpha - \theta)}{\sin\alpha} y$$

$$x' = \frac{\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta}{\cos\alpha} x$$

$$x' = \cos\theta \cdot x + \sin\theta \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} x \quad = \cos\theta \cdot x + \sin\theta \cdot y$$



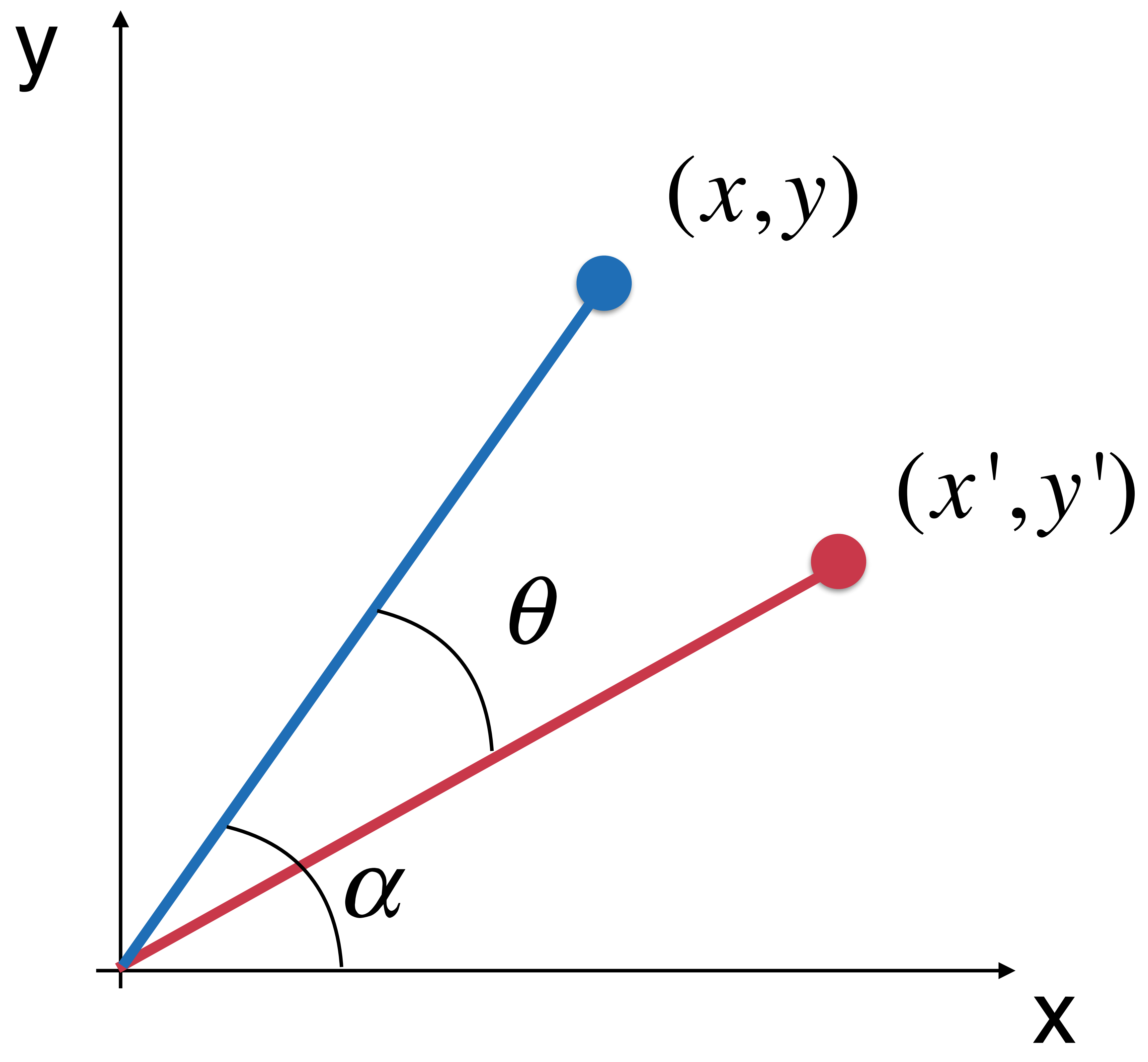
矩阵表示变换（向量的函数）

旋转　　$T\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y \\ ? \end{pmatrix}$

$$x' = \frac{\cos(\alpha-\theta)}{\cos\alpha}x \qquad y' = \frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin\alpha}y$$

$$x' = \frac{\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta}{\cos\alpha}x$$

$$x' = \cos\theta\cdot x+\sin\theta\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x \quad = \cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y$$



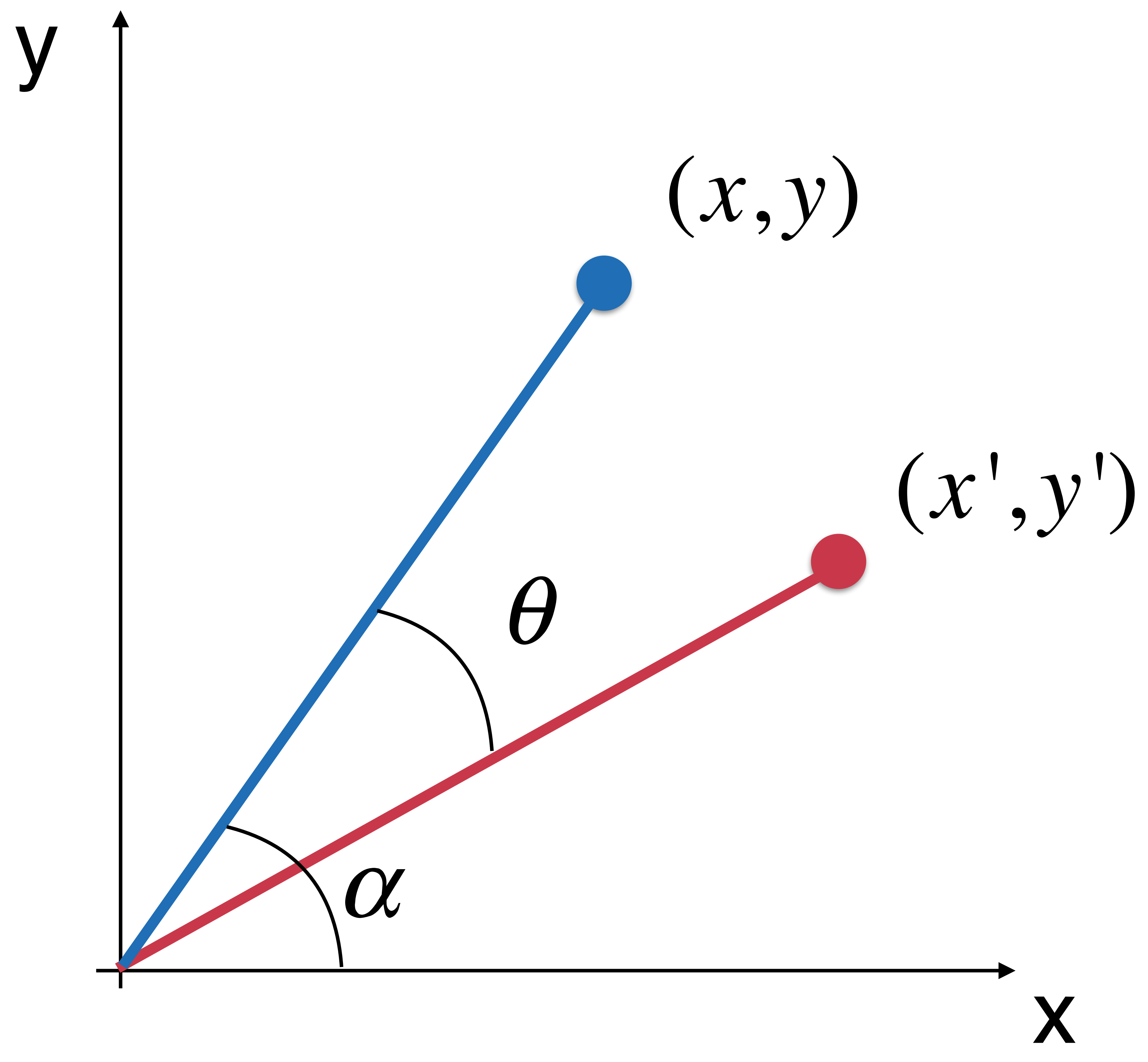
矩阵表示变换（向量的函数）

旋转 $$T\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y\\?\end{pmatrix}$$

$$x'=\frac{\cos(\alpha-\theta)}{\cos\alpha}x \qquad y'=\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin\alpha}y$$

$$y'=\frac{\sin\alpha\cos\theta-\cos\alpha\sin\theta}{\sin\alpha}y$$

$$y'=\cos\theta\cdot y-\sin\theta\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}y \quad =\cos\theta\cdot y-\sin\theta\cdot x$$



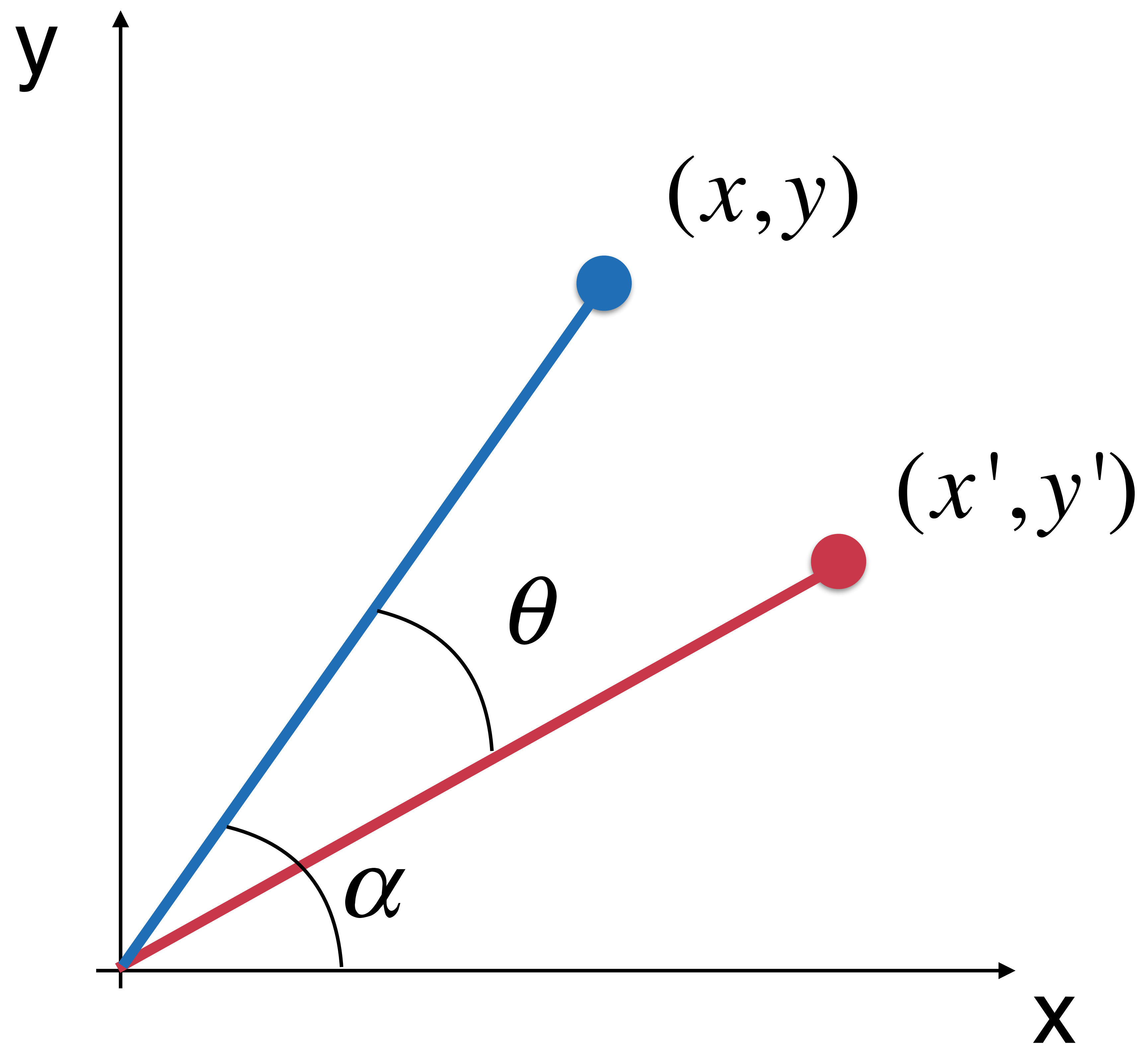
矩阵表示变换（向量的函数）

旋转 $T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot x + \sin\theta \cdot y \\ -\sin\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y \end{pmatrix}$

$$x' = \frac{\cos(\alpha - \theta)}{\cos\alpha} x \qquad y' = \frac{\sin(\alpha - \theta)}{\sin\alpha} y$$

$$y' = \frac{\sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta}{\sin\alpha} y$$

$$y' = \cos\theta \cdot y - \sin\theta \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} y \quad = \cos\theta \cdot y - \sin\theta \cdot x$$



矩阵表示变换（向量的函数）

旋转 $$T\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y \\ -\sin\theta\cdot x+\cos\theta\cdot y \end{pmatrix}$$

$$T=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$T\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y \\ -\sin\theta\cdot x+\cos\theta\cdot y \end{pmatrix}$$

矩阵表示变换（向量的函数）

在三维坐标中的应用?

平移操作?

仿射变换

图形学

实现矩阵在图形变换中的应用

实践：矩阵在图形变换中的应用

单位矩阵

单位矩阵

让每个点的横坐标扩大a倍，纵坐标扩大b倍

$$T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix}$$

单位矩阵

让每个点的横坐标扩大1倍，纵坐标扩大1倍

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

单位矩阵

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_n = (i_{kj}) \begin{cases} 1 & if \quad k = j \\ 0 & if \quad k \neq j \end{cases}$$

单位矩阵一定是方阵

单位矩阵

$$I \cdot A = A \qquad A \cdot I = A \qquad I \cdot A = A \cdot I = A$$

$$\begin{pmatrix} - & \overrightarrow{r_1} & - \\ - & \overrightarrow{r_2} & - \\ & \dots & \\ - & \overrightarrow{r_m} & - \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \overrightarrow{c_1} & \overrightarrow{c_2} & \dots & \overrightarrow{c_n} \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{r_1} \cdot \overrightarrow{c_1} & \overrightarrow{r_1} \cdot \overrightarrow{c_2} & \dots & \overrightarrow{r_1} \cdot \overrightarrow{c_n} \\ \overrightarrow{r_2} \cdot \overrightarrow{c_1} & \overrightarrow{r_2} \cdot \overrightarrow{c_2} & \dots & \overrightarrow{r_2} \cdot \overrightarrow{c_n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ \overrightarrow{r_m} \cdot \overrightarrow{c_1} & \overrightarrow{r_m} \cdot \overrightarrow{c_2} & \dots & \overrightarrow{r_m} \cdot \overrightarrow{c_n} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = \overrightarrow{r_i} \cdot \overrightarrow{c_j} = \overrightarrow{r_i}_{(j)} \qquad a_{ij} = \overrightarrow{r_i} \cdot \overrightarrow{c_j} = \overrightarrow{c_j}_{(i)}$$

单位矩阵

$$I \cdot A = A \qquad A \cdot I = A \qquad I \cdot A = A \cdot I = A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

单位矩阵

$$I \cdot A = A \qquad A \cdot I = A \qquad I \cdot A = A \cdot I = A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}$$

矩阵的逆

逆矩阵

回忆：数字系统中： $x \cdot (x^{-1}) = 1$

矩阵中 $AB = BA = I$ ，则称B是A的逆矩阵，记做：$B = A^{-1}$

A称为可逆矩阵，或者叫非奇异矩阵 (non-singular)

有些矩阵是不可逆的！称为不可逆矩阵，或者奇异矩阵 (singular)

逆矩阵

矩阵中 $AB = BA = I$ ，则称B是A的逆矩阵，记做：$B = A^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

矩阵的逆具体怎么求？以后见分晓：）

逆矩阵

矩阵中 $AB = BA = I$ ，则称B是A的逆矩阵，记做：$B = A^{-1}$

如果 $BA = I$，则称B是A的左逆矩阵。

如果 $AC = I$，则称C是A的右逆矩阵。

如果一个矩阵A既存在左逆矩阵B，又存在右逆矩阵C，则B=C

逆矩阵

如果一个矩阵A既存在左逆矩阵B，又存在右逆矩阵C，则B=C

$$BA = I \qquad AC = I$$

$$B(AC) = BI$$

$$(BA)C = B$$

$$IC = B$$

$$C = B$$

逆矩阵

如果一个矩阵A既存在左逆矩阵B，又存在右逆矩阵C，则B=C

对于矩阵A，存在矩阵B，满足 $BA = AB = I$，矩阵A可逆

可逆矩阵一定为方阵！

非方阵一定不可逆！

单位矩阵和逆矩阵

$$A^0 = I$$

$$A^{-1}$$

$$A^{-2} = (A^{-1})^2$$

实现单位矩阵和numpy中矩阵的逆

实践： 单位矩阵和numpy中矩阵的逆

矩阵的逆的性质

矩阵的逆的性质

矩阵中 $AB = BA = I$ ，则称B是A的逆矩阵，记做：$B = A^{-1}$

对于矩阵A，如果存在逆矩阵B，则B唯一。

矩阵的逆的性质

对于矩阵A，如果存在逆矩阵B，则B唯一。

反证法：　　　假设矩阵A存在两个不同的逆矩阵B和C

$$AB = AC = I$$

$$B(AB) = B(AC)$$

$$(BA)B = (BA)C$$

$$B = C$$

矩阵的逆的性质

$$(A^{-1})^{-1} = A \qquad (X)^{-1} = A$$

只需要证明：$X \cdot A = I \qquad A \cdot X = I$

$$A^{-1} \cdot A = I \qquad A \cdot A^{-1} = I$$

矩阵的逆的性质

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

只需要证明： $(AB)\cdot(B^{-1}A^{-1}) = I$ $(B^{-1}A^{-1})\cdot(AB) = I$

$$= A(B \cdot B^{-1})A^{-1}$$

$$= B^{-1}(A^{-1} \cdot A)B$$

$$= A \cdot I \cdot A^{-1}$$

$$= B^{-1} \cdot I \cdot B$$

$$= A \cdot A^{-1} = I$$

$$= B^{-1} \cdot B = I$$

矩阵的逆的性质

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

$$(A \cdot B)^{T} = B^{T} A^{T}$$

矩阵的逆的性质

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

只需要证明：

$$A^T \cdot (A^{-1})^T = I \qquad (A^{-1})^T \cdot A^T = I$$

$$= (A^{-1} \cdot A)^T \qquad = (A \cdot A^{-1})^T$$

$$= I^T \quad = I \qquad = I^T \quad = I$$

看待矩阵的关键视角：用矩阵表示空间

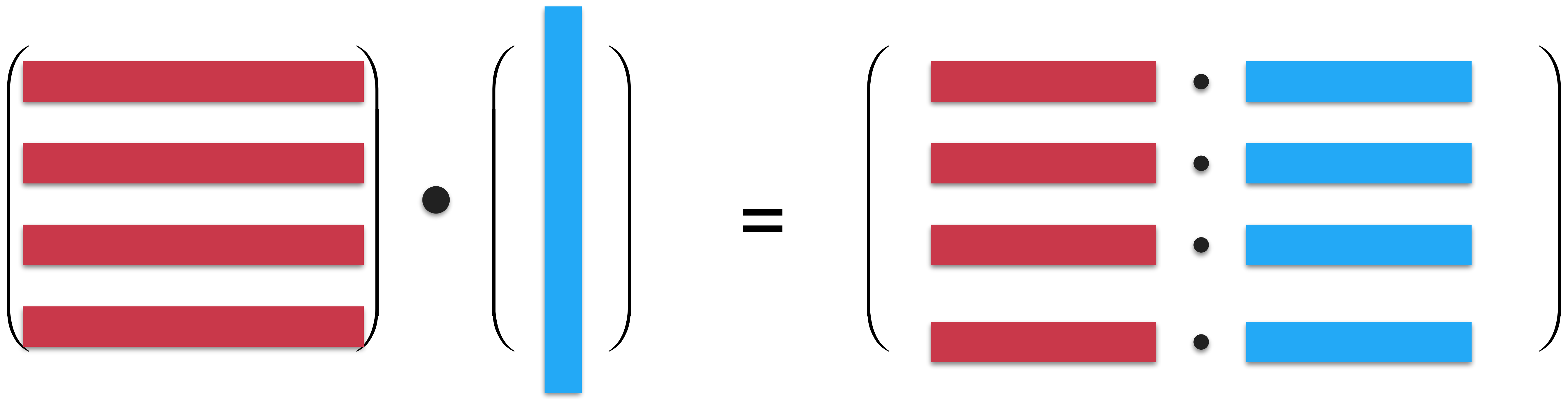
回忆：矩阵和向量相乘

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ 4x+5y=6 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 4x+5y \end{pmatrix}$$

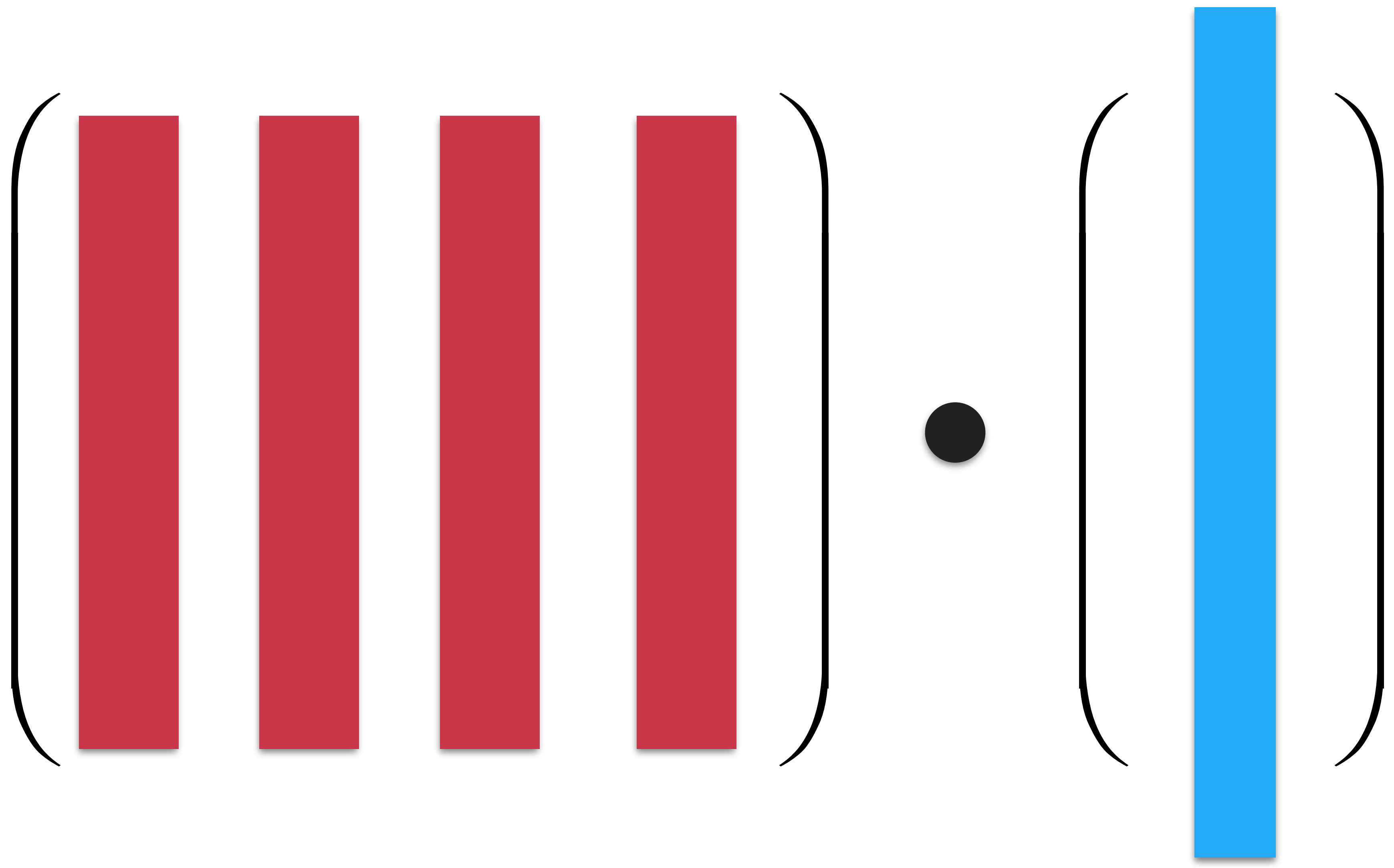
行视角



回忆：矩阵和向量相乘

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 4x+5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} y$$

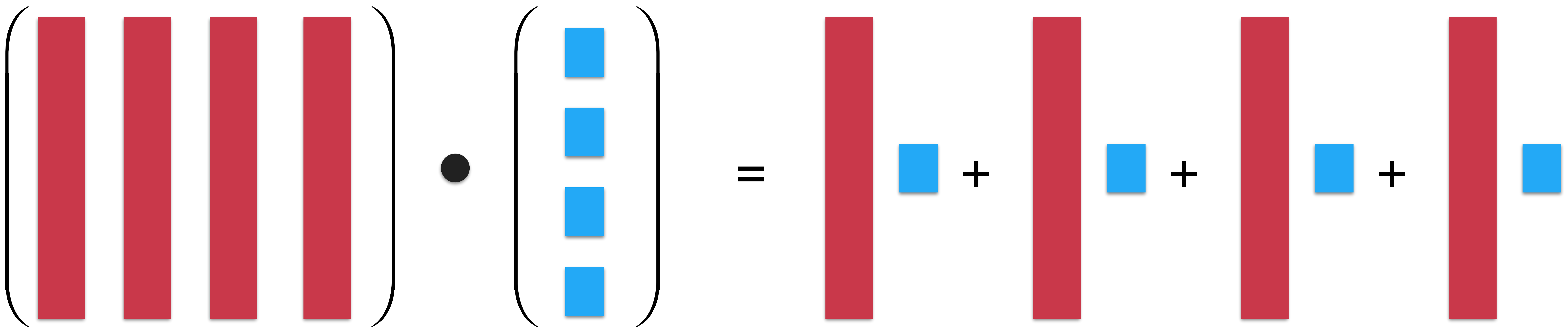
列视角



回忆：矩阵和向量相乘

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 4x+5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} y$$

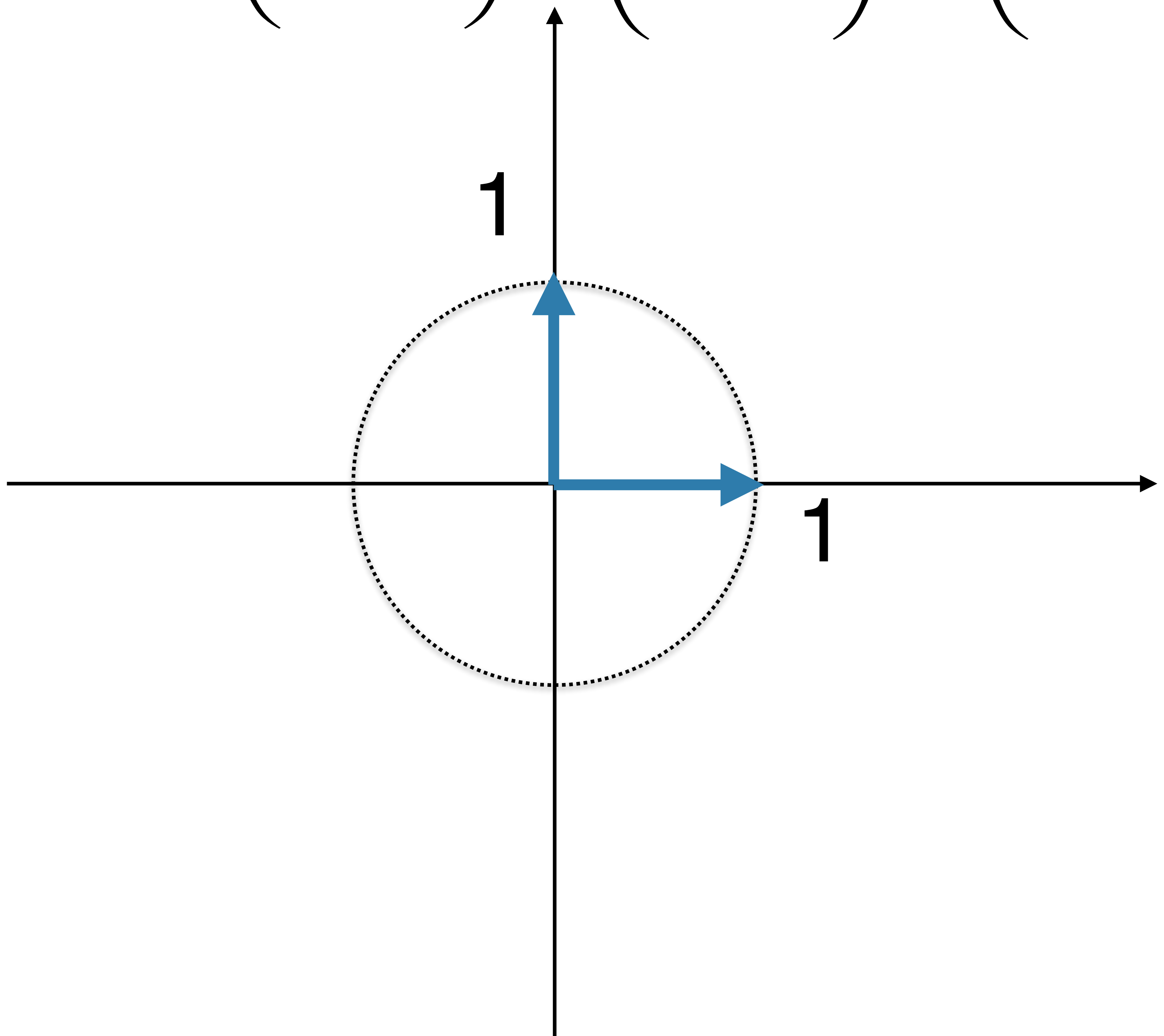
列视角



使用列视角

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

回忆：标准单位向量

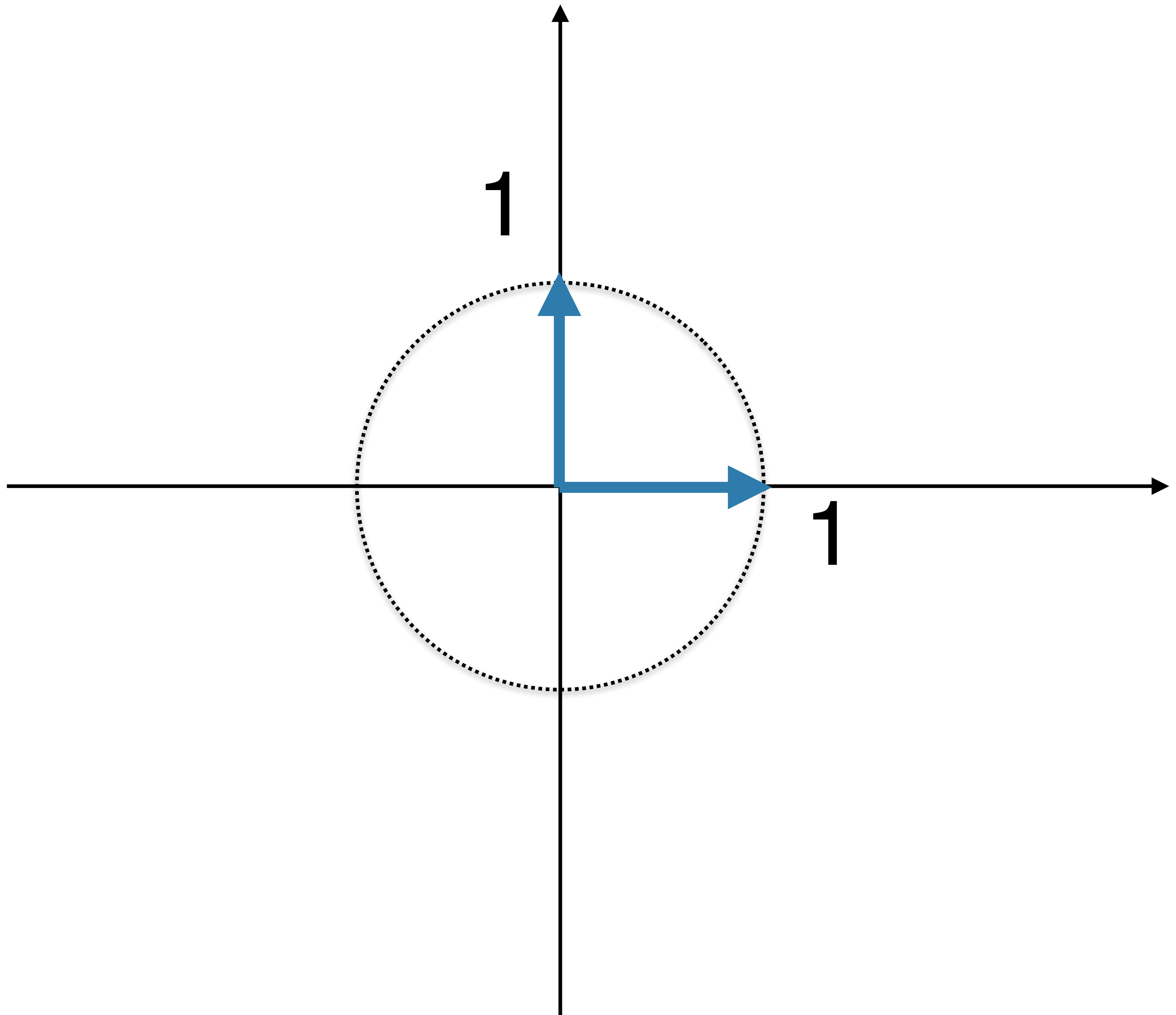


二维空间中，有两个特殊的单位向量

$\overrightarrow{e_1} = (1,0)$ $\overrightarrow{e_2} = (0,1)$

使用列视角

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



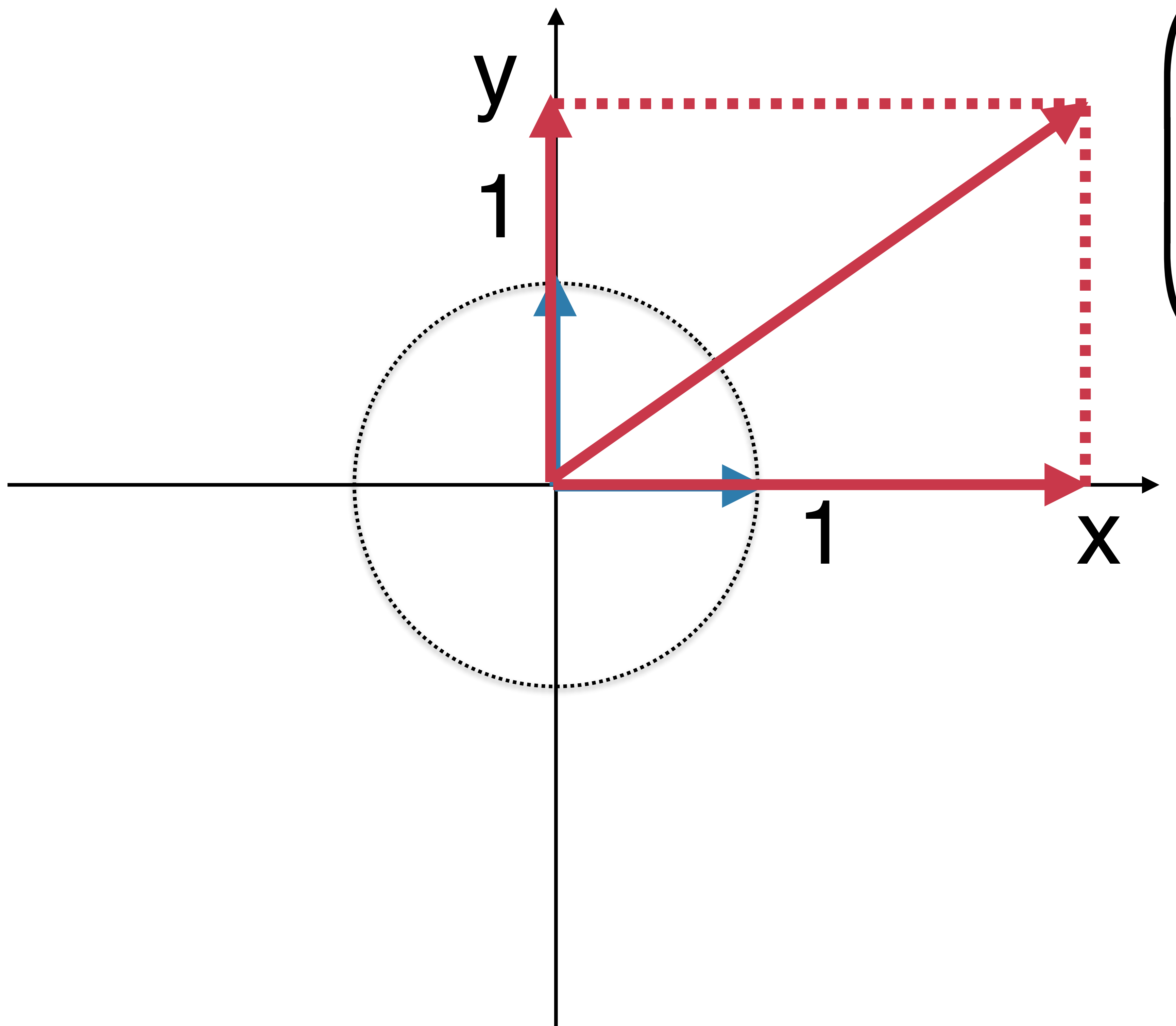
$$= x \cdot \overrightarrow{e_1} + y \cdot \overrightarrow{e_2}$$

这就是(x, y)这个点坐标的定义！

在(1,0)轴上的分量为x；在(0,1)轴上的分量为y

使用列视角

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} y = x \cdot \overrightarrow{e_1} + y \cdot \overrightarrow{e_2}$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot \overrightarrow{e_1} + y \cdot \overrightarrow{e_2}$$

矩阵表示空间

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\underset{\overrightarrow{e_1}}{\downarrow} \quad \underset{\overrightarrow{e_2}}{\downarrow}$$

矩阵定义了两个坐标轴

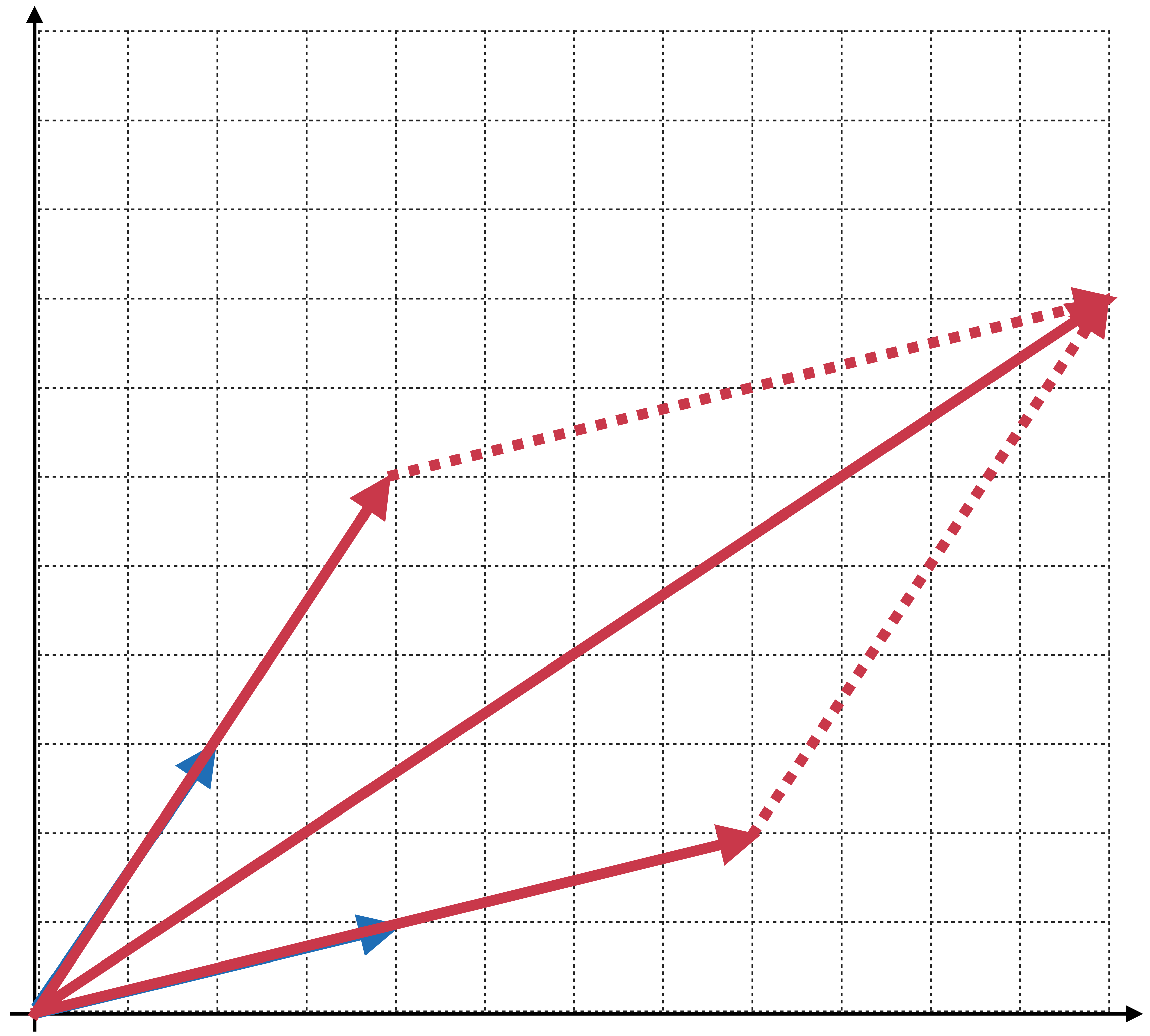
矩阵表示了整个二维空间！

矩阵表示空间

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\vec{u} \quad \vec{v}$$

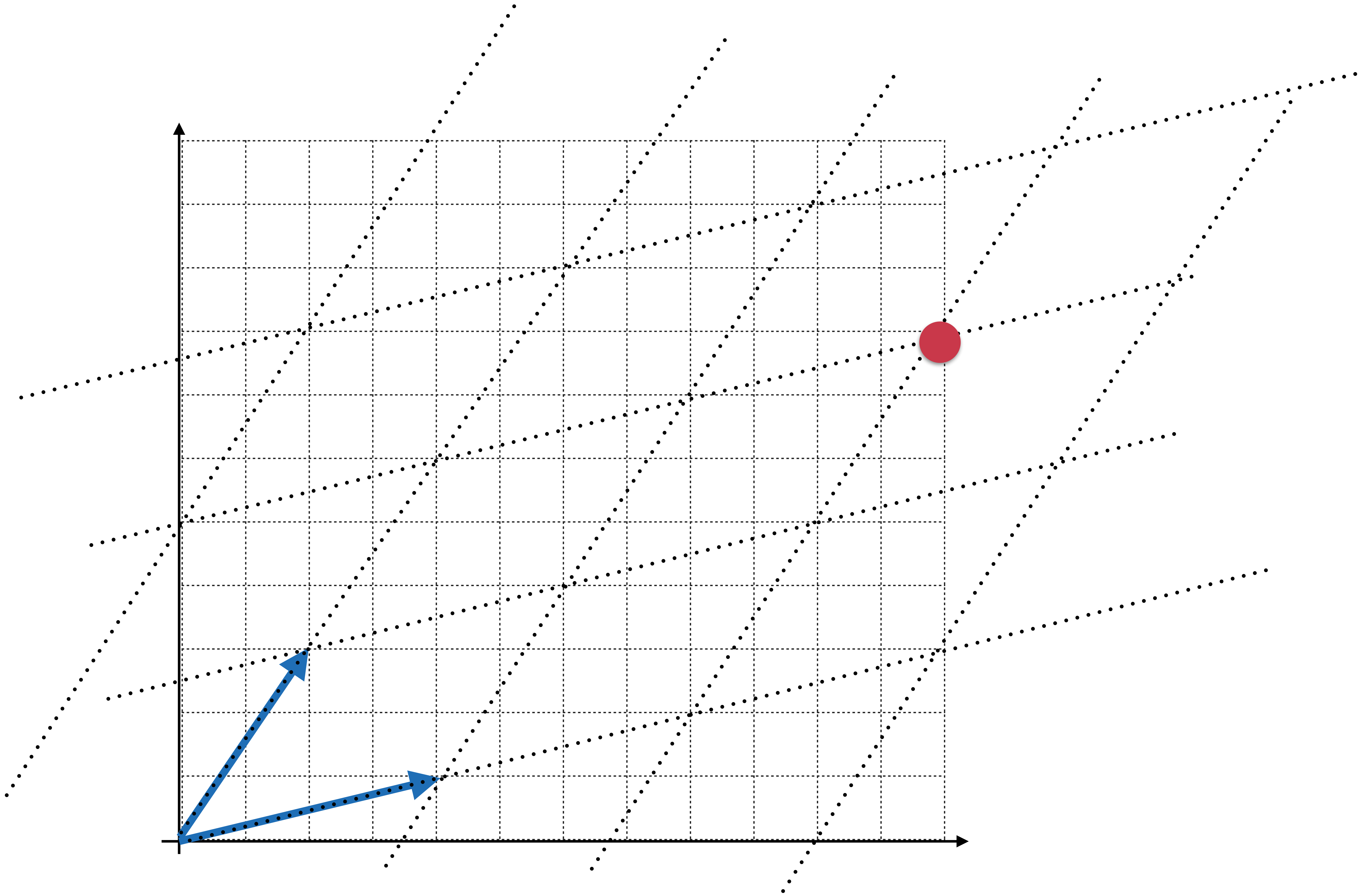


矩阵表示空间

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

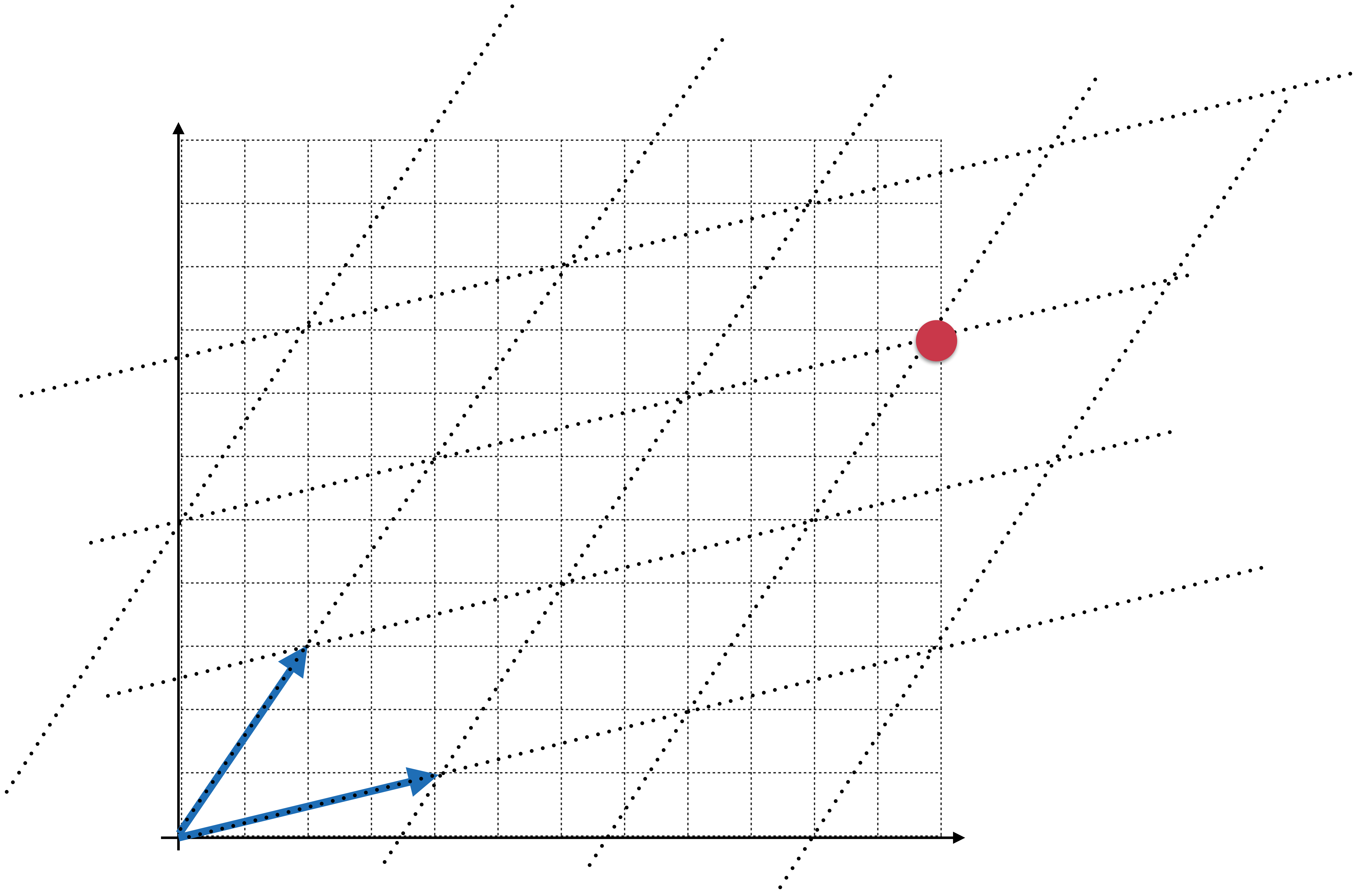
$$\vec{u} \quad \vec{v}$$



矩阵表示空间

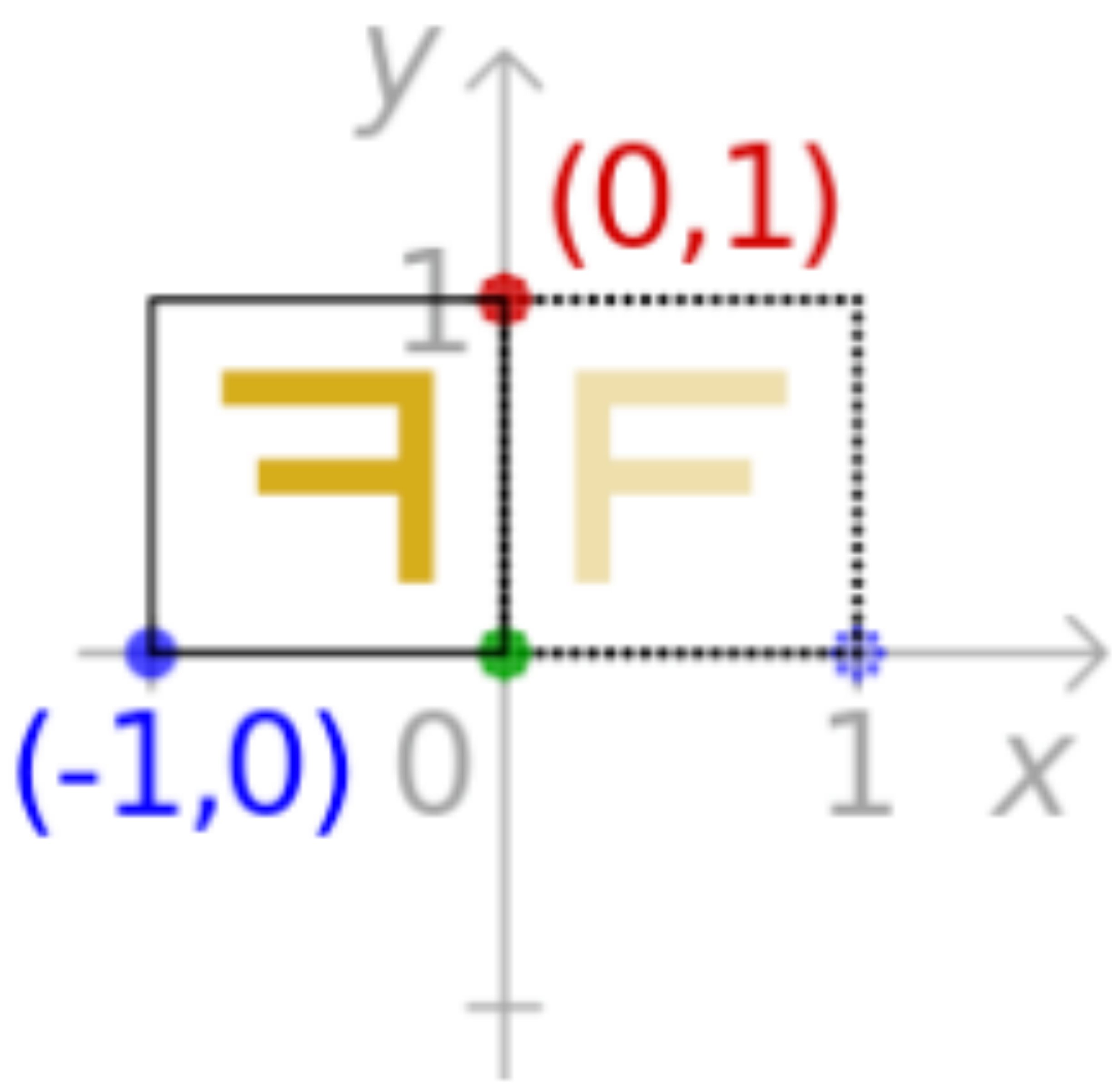
$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

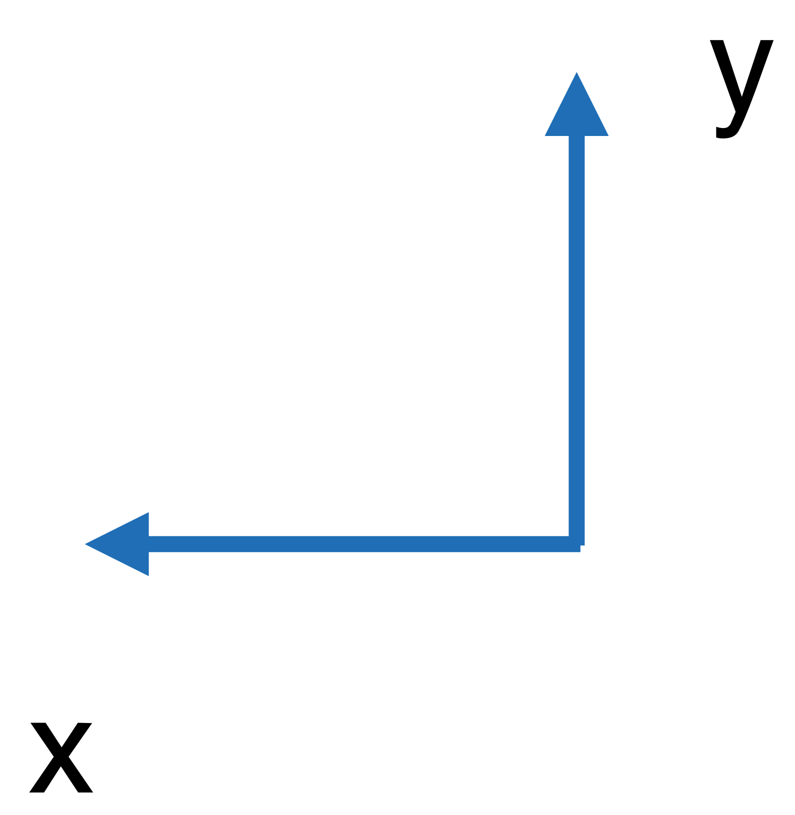
$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ \vec{u} & \vec{v} \end{matrix}$$



回头看图形变换

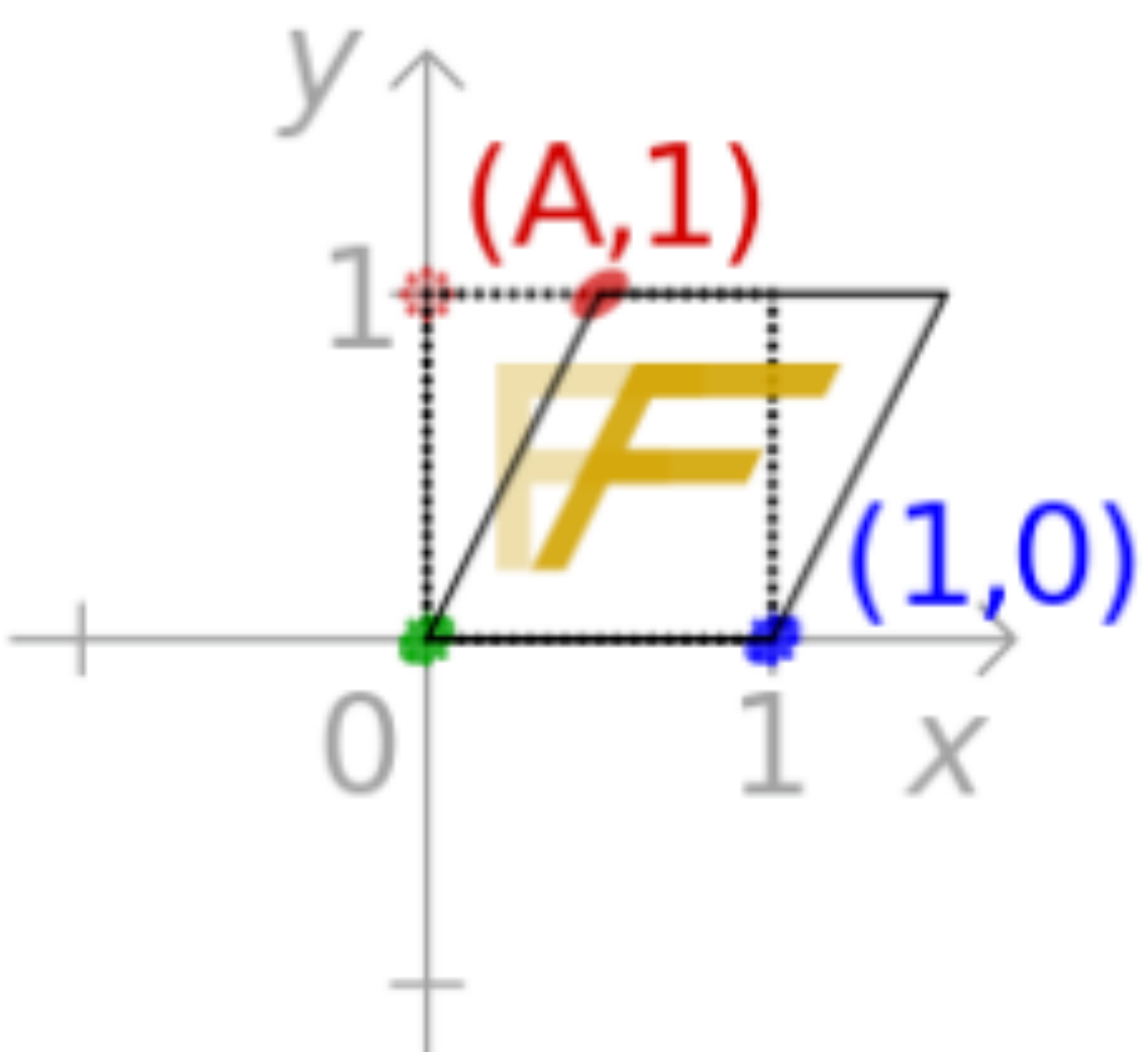
$$T=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

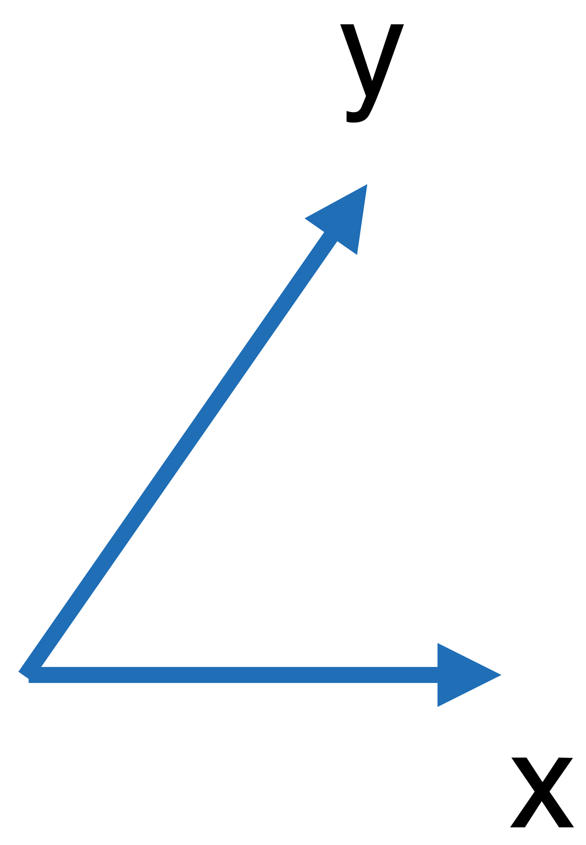




回头看图形变换

$$T = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

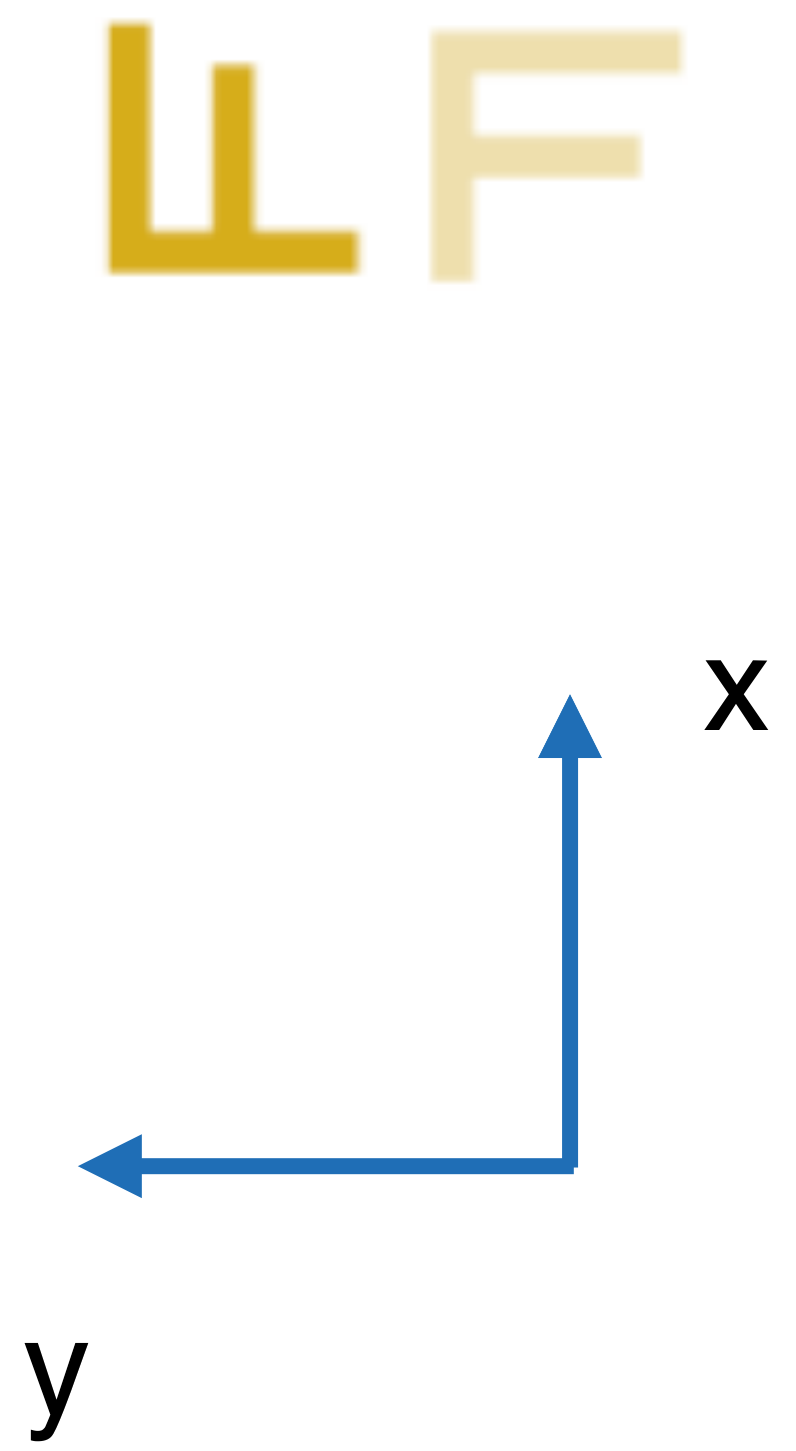




回头看图形变换

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



矩阵表示空间

$$
\begin{array}{ccc}
\multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\vec{u} & \vec{v} & \vec{w}
\end{array}
$$

n维空间应该用n个轴来定义

方阵！

更多内容，后续见分晓：）

总结：看待矩阵的四个重要视角

矩阵

矩阵的运算

- 矩阵的加法
- 矩阵的乘法（和数字；和向量；和矩阵）
- 矩阵的幂
- 矩阵的转置
- 矩阵的逆

矩阵

看待矩阵的视角（1）：数据

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \text{语文} & \text{数学} & \text{英语} & \text{物理} & \text{化学} \end{array} \\
A = & \begin{pmatrix} 90 & 76 & 88 & 92 & 90 \\ 88 & 82 & 98 & 95 & 92 \\ 86 & 68 & 70 & 80 & 77 \end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \text{张三} \\ \text{李四} \\ \text{王五} \end{array}
$$

矩阵

看待矩阵的视角（2）：系统

$$\begin{cases} x_{it} - 0.2x_e + 0.1x_m + 0.5x_h = 100 \\ -0.5x_{it} - x_e + 0.2x_m + 0.1x_h = 50 \\ -0.4x_e - x_m + 0.3x_h = 20 \\ -0.2x_{it} + x_h = 666 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.2 & 0.1 & 0.5 \\ -0.5 & -1 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & -0.4 & -1 & 0.3 \\ -0.2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{it} \\ x_e \\ x_m \\ x_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 20 \\ 666 \end{pmatrix}$$

矩阵

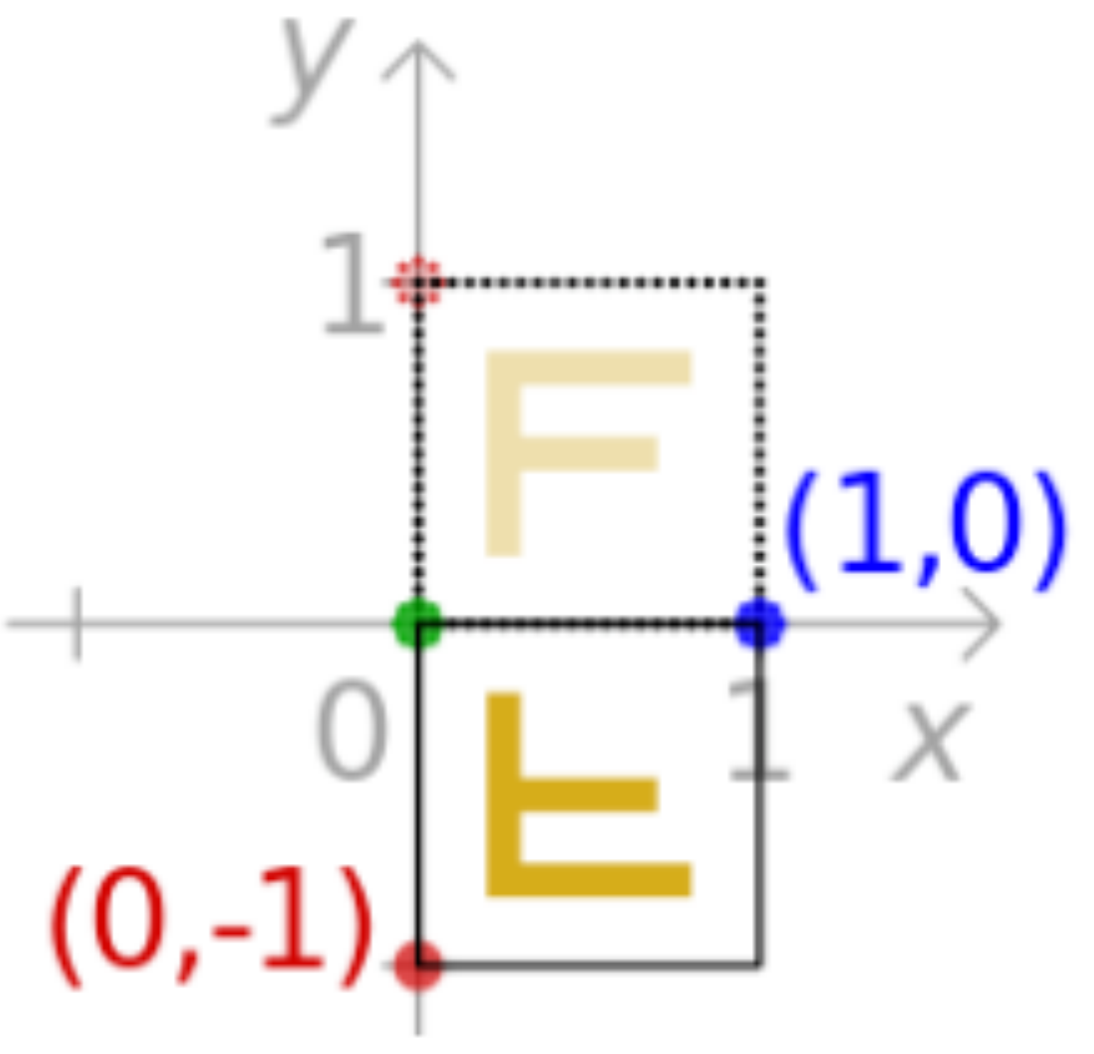
看待矩阵的视角（2）：系统

$$\begin{cases} x_{it} - 0.2x_e + 0.1x_m + 0.5x_h = 100 \\ -0.5x_{it} - x_e + 0.2x_m + 0.1x_h = 50 \\ -0.4x_e - x_m + 0.3x_h = 20 \\ -0.2x_{it} + x_h = 666 \end{cases}$$

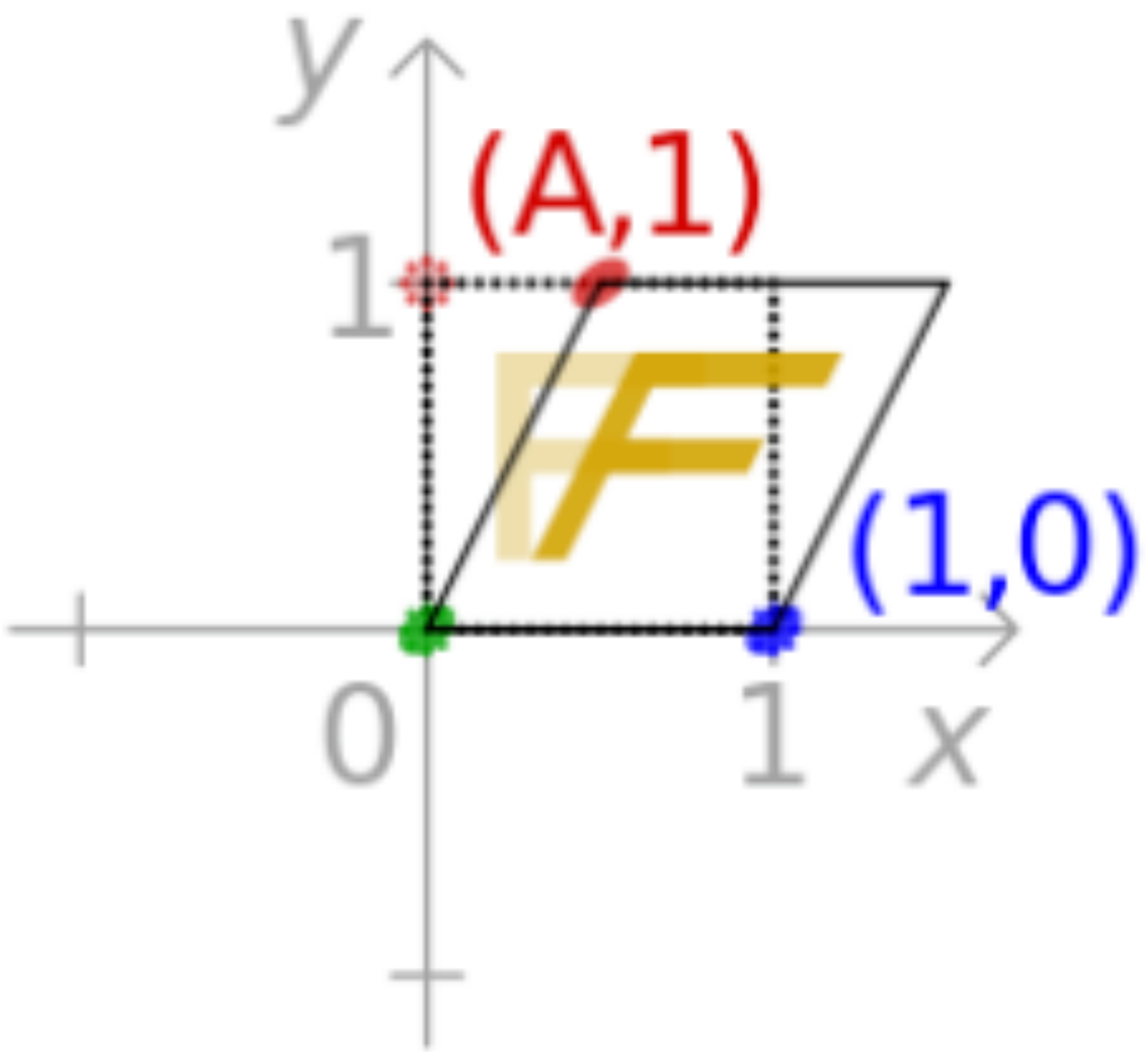
$$\begin{pmatrix} 1 & -0.2 & 0.1 & 0.5 & 100 \\ -0.5 & -1 & 0.2 & 0.1 & 50 \\ 0 & -0.4 & -1 & 0.3 & 20 \\ -0.2 & 0 & 0 & 1 & 666 \end{pmatrix}$$

矩阵

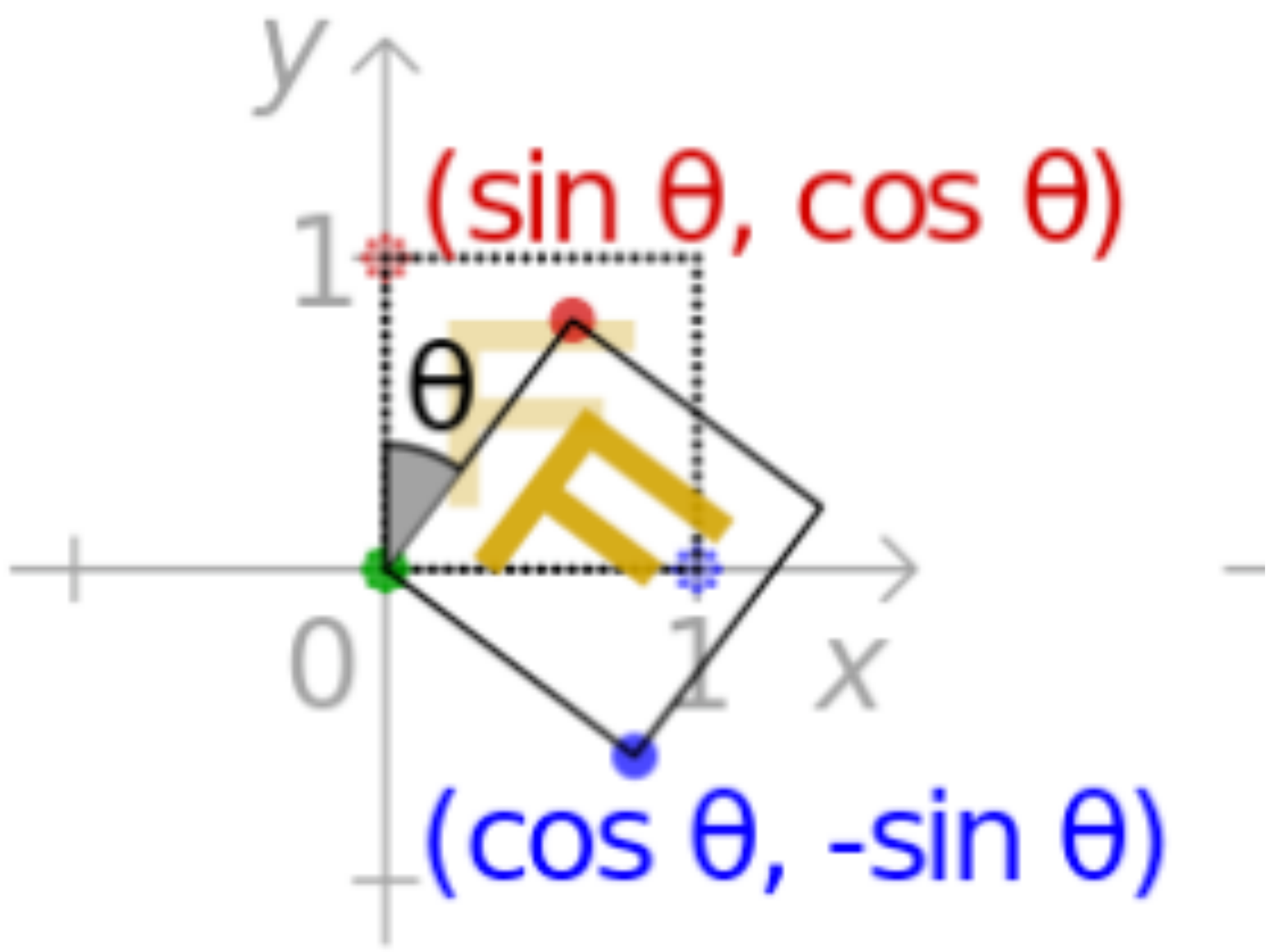
看待矩阵的视角（3）：变换（向量的函数） $T\cdot\vec{a}=\vec{b}$



$$T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



$$T=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



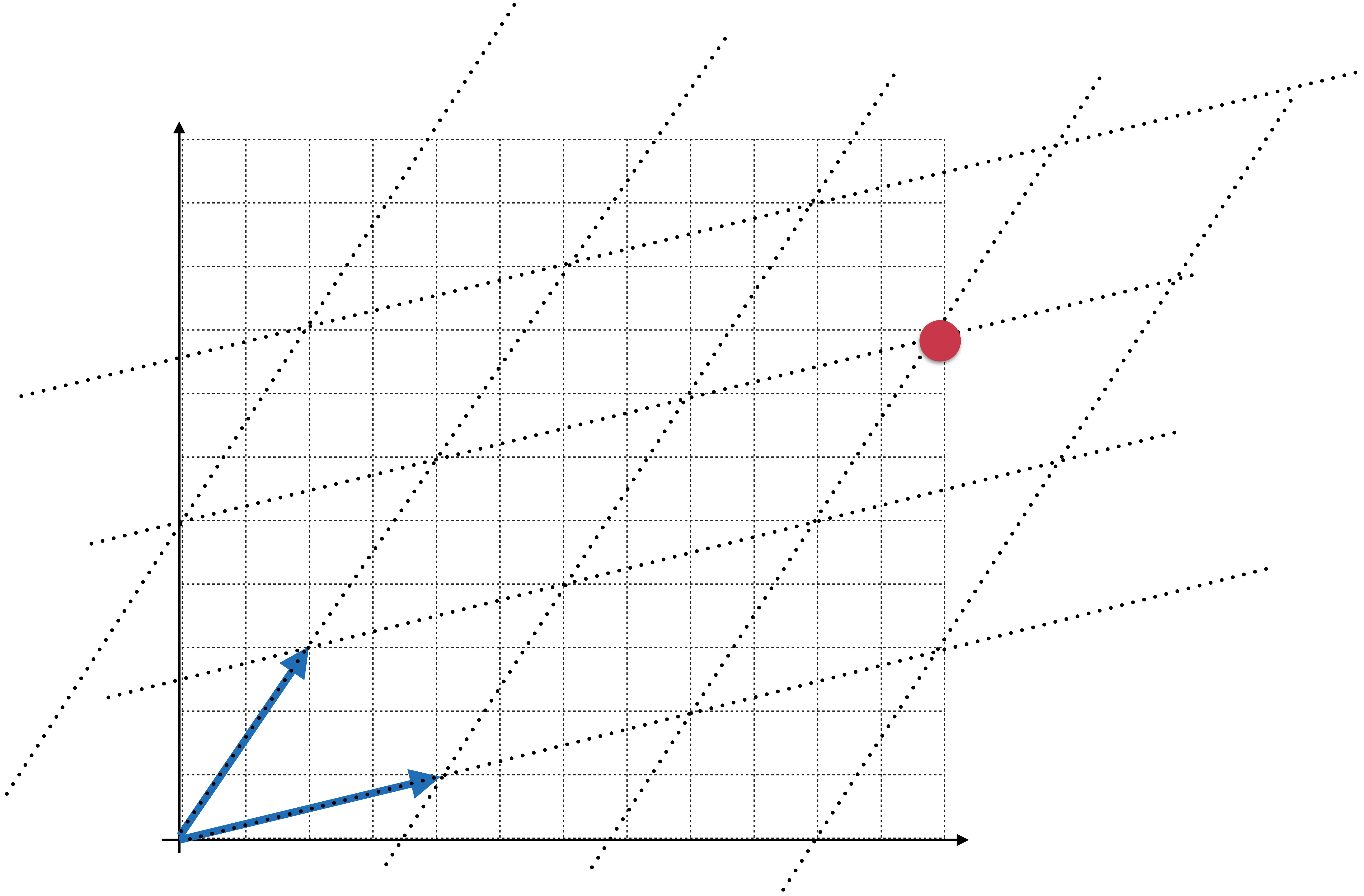
$$T=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

矩阵

看待矩阵的视角（4）：空间

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \vec{u} & \vec{v} \end{array}$$



矩阵

- 二维数据
- 系统
- 变换
- 空间