一切从向量开始

什么是向量，究竟为什么引入向量

向量

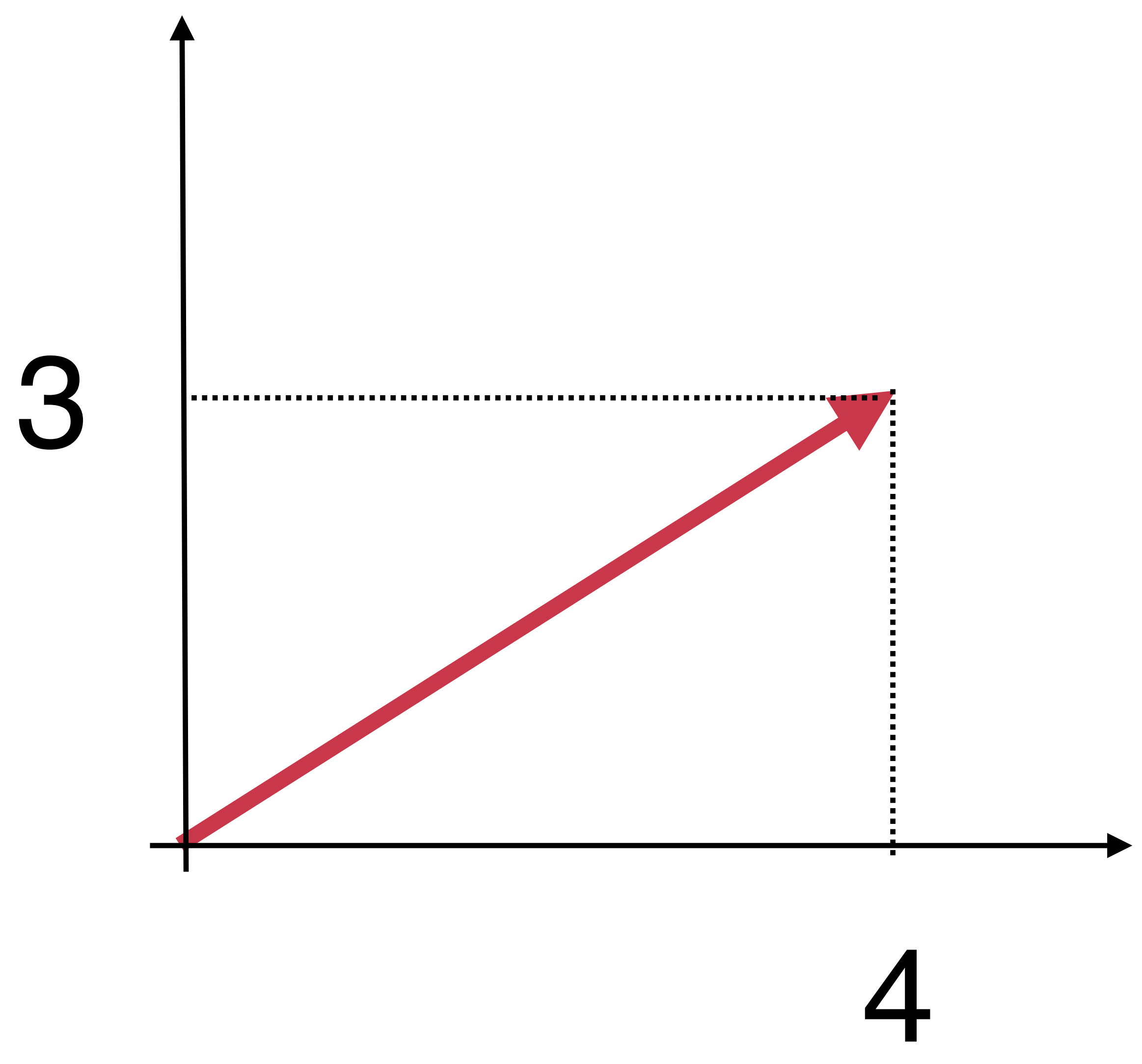
- 为什么线性代数这么重要？从研究一个数拓展到研究一组数
- 一组数的基本表示方法——向量（Vector）
- 向量（Vector）是线性代数研究的基本元素

一个数：666　　　　一组数：(6, 66, 666)

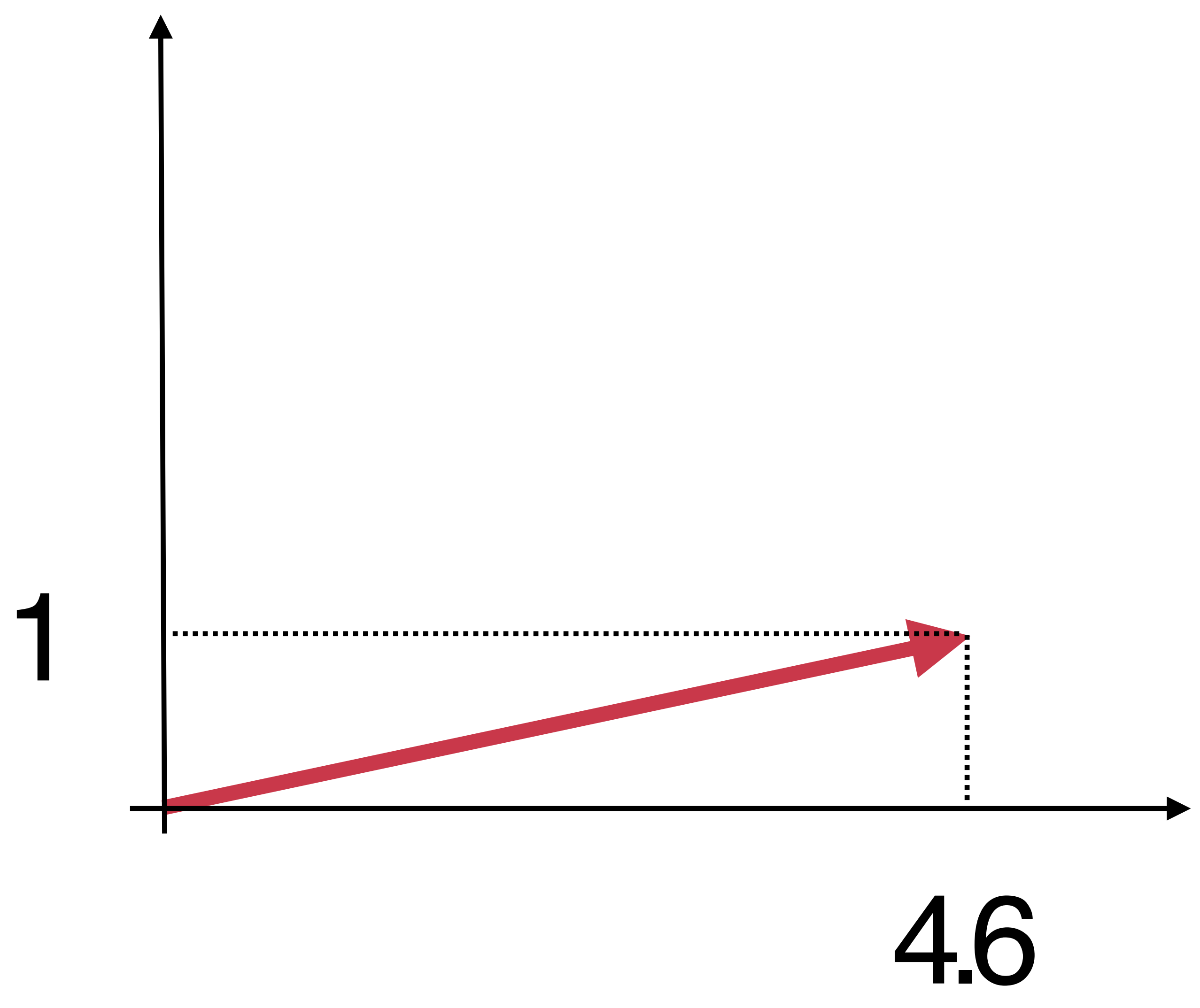
向量

- 向量（Vector）是线性代数研究的基本元素

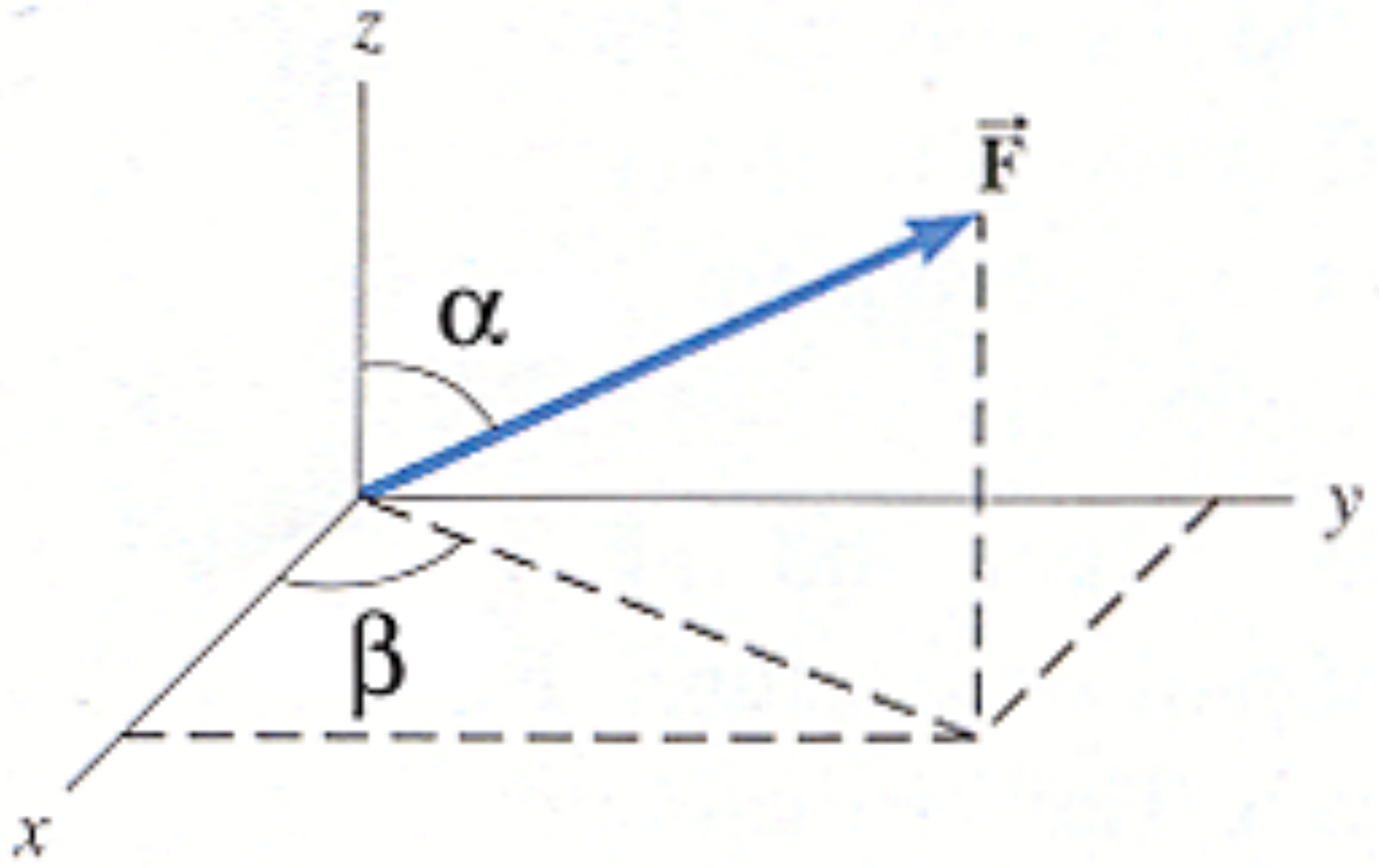
- 一组数有什么用?　　最基本的出发点：表示方向



(4, 3)



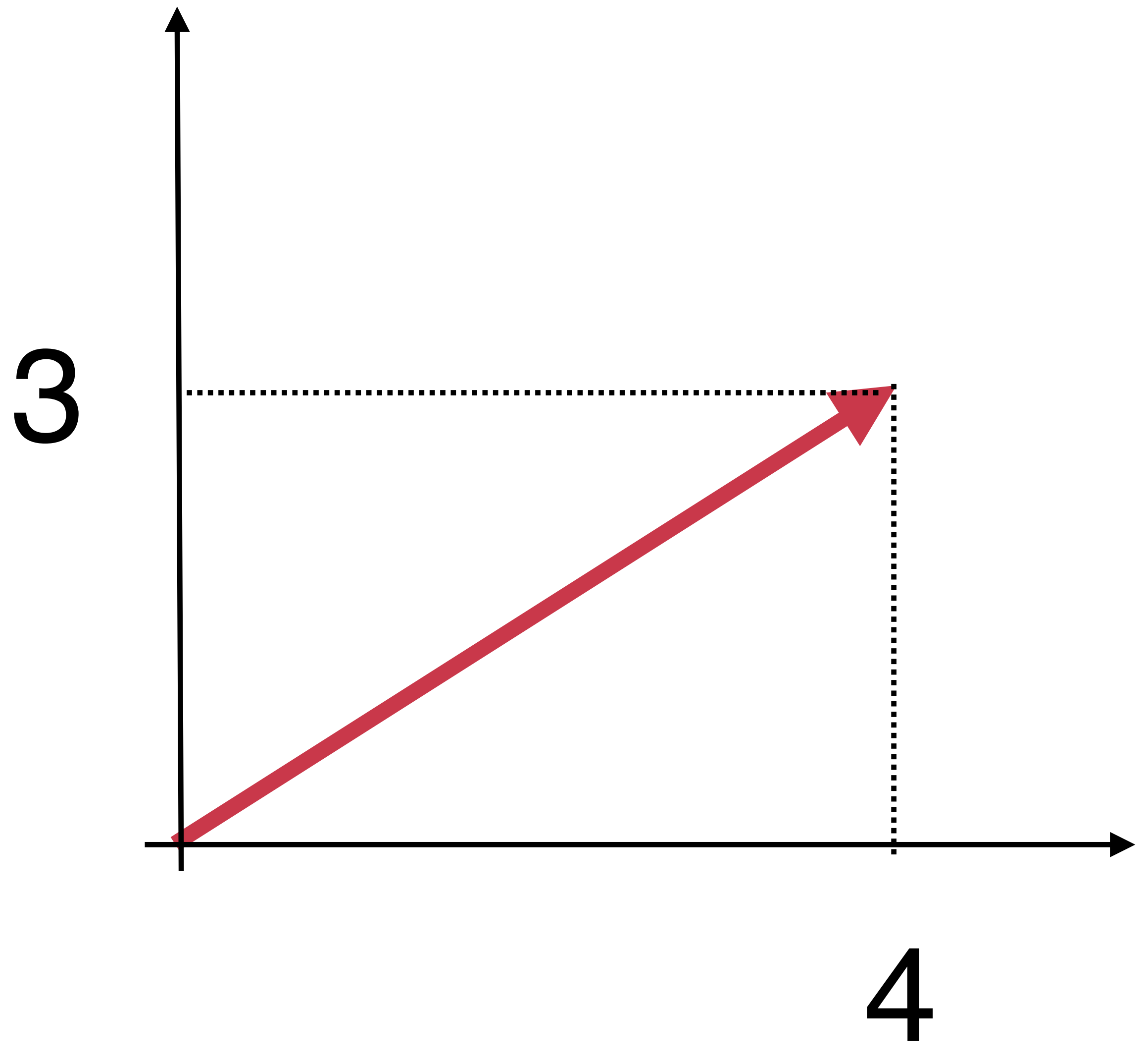
(4.6, 1)



位移，速度，加速度，力…

向量

- 向量（Vector）是线性代数研究的基本元素



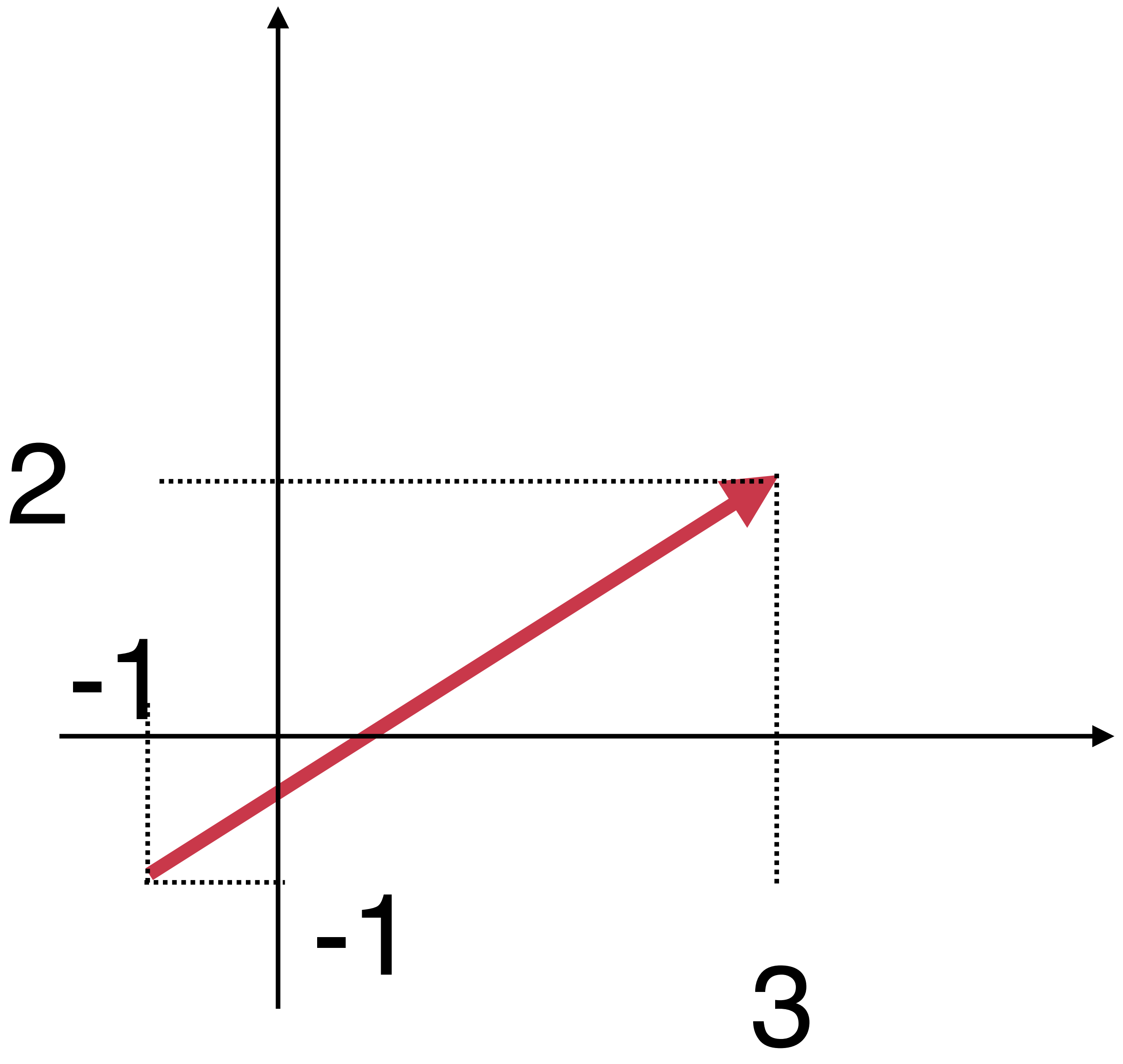
(4, 3)

起始点不重要?

从(-1, -1)到(3, 2)

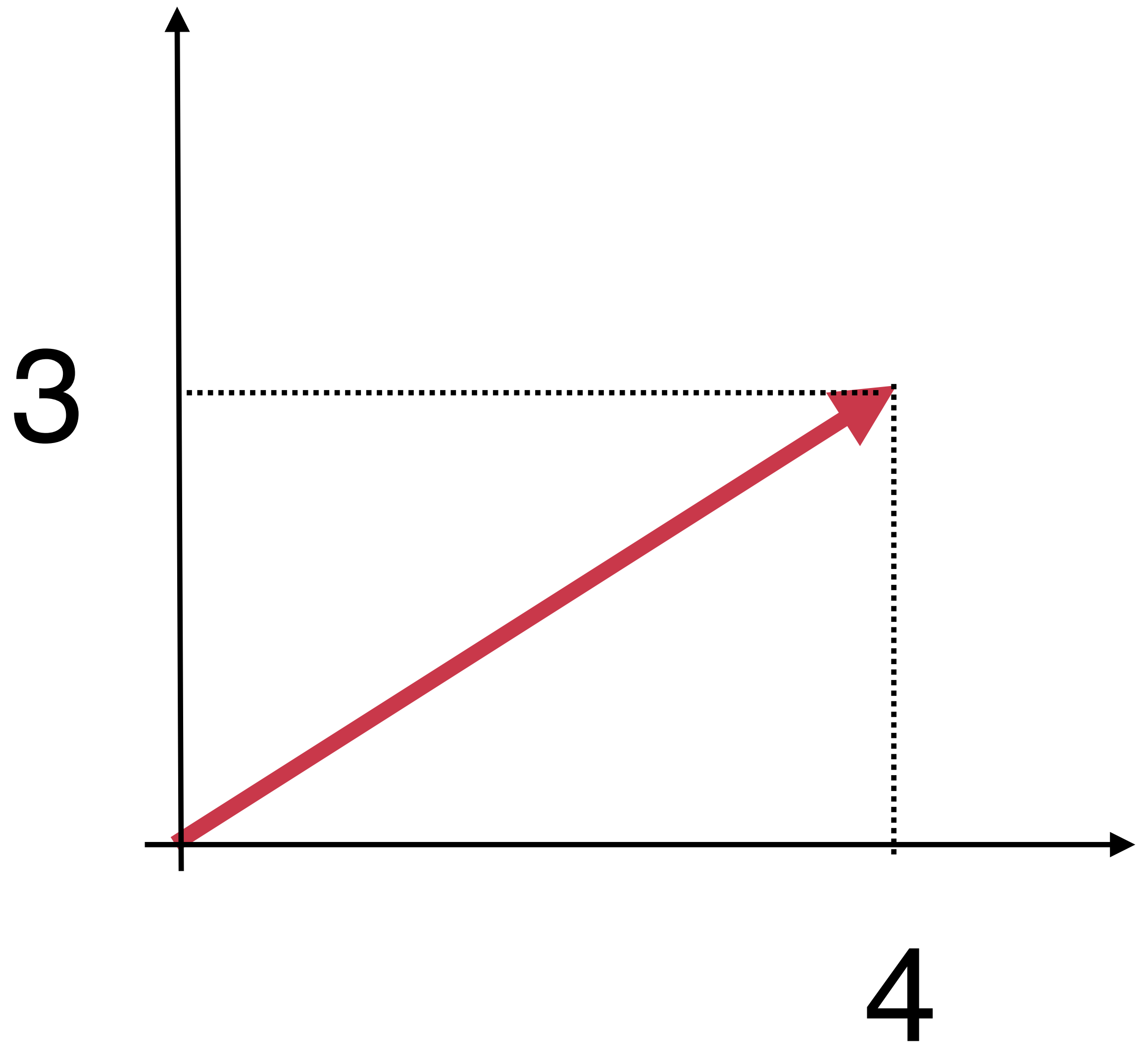
和从(0, 0)到(4, 3)是一样的

坐标系不同



向量

- 向量（Vector）是线性代数研究的基本元素



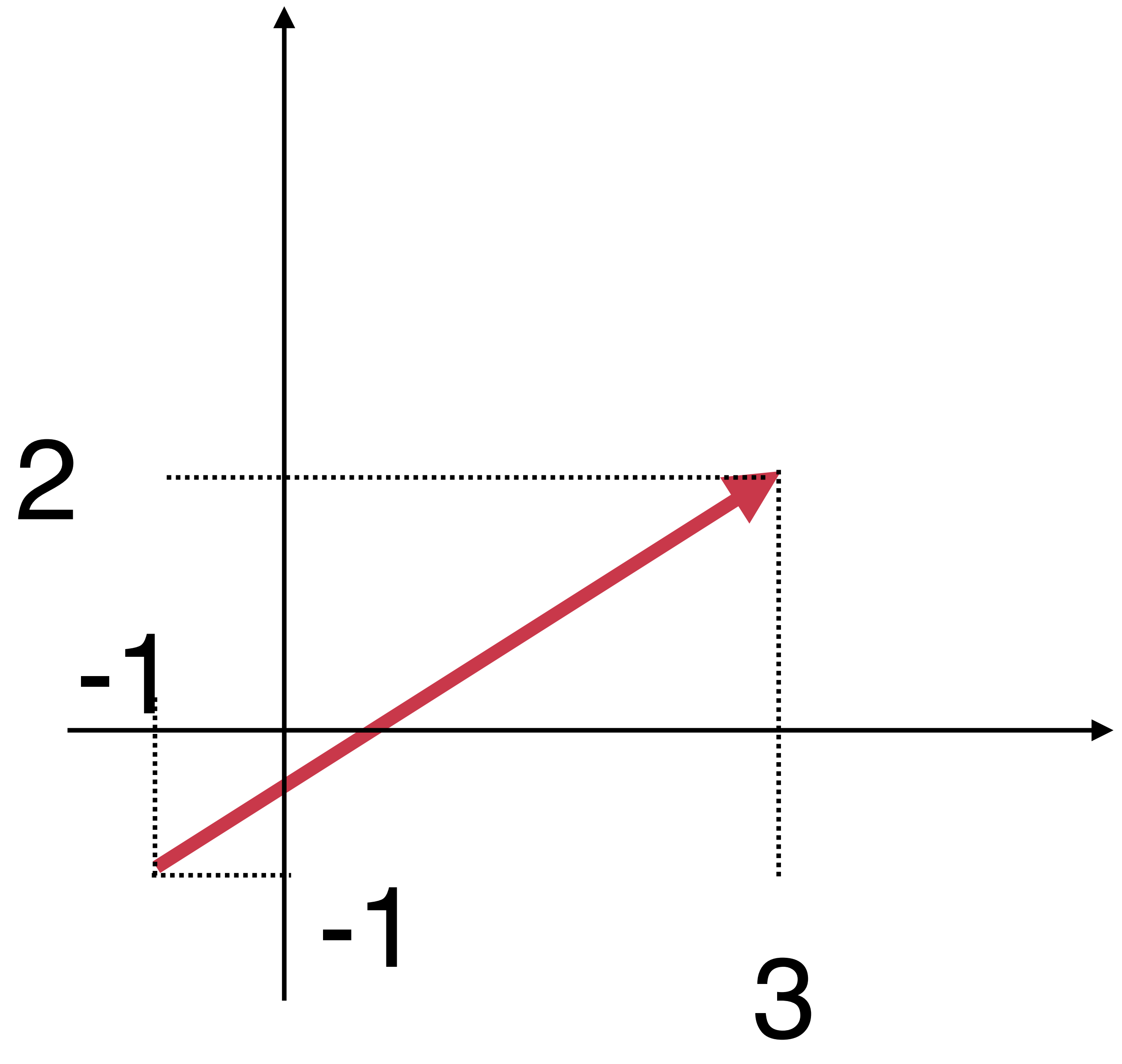
(4, 3)

起始点不重要?

从(-1, -1)到(3, 2)

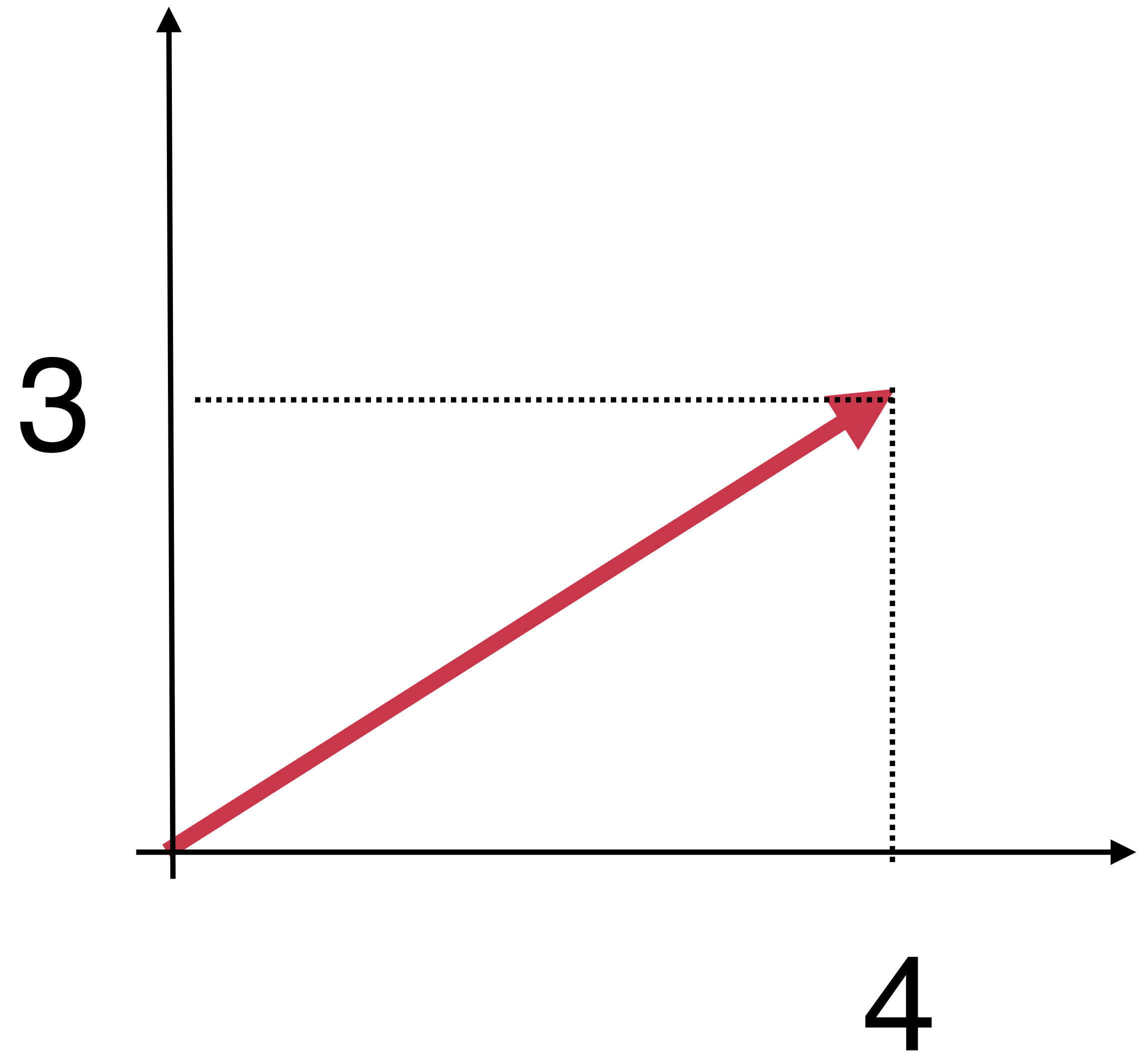
和从(0, 0)到(4, 3)是一样的

坐标系不同



向量

- 向量（Vector）是线性代数研究的基本元素



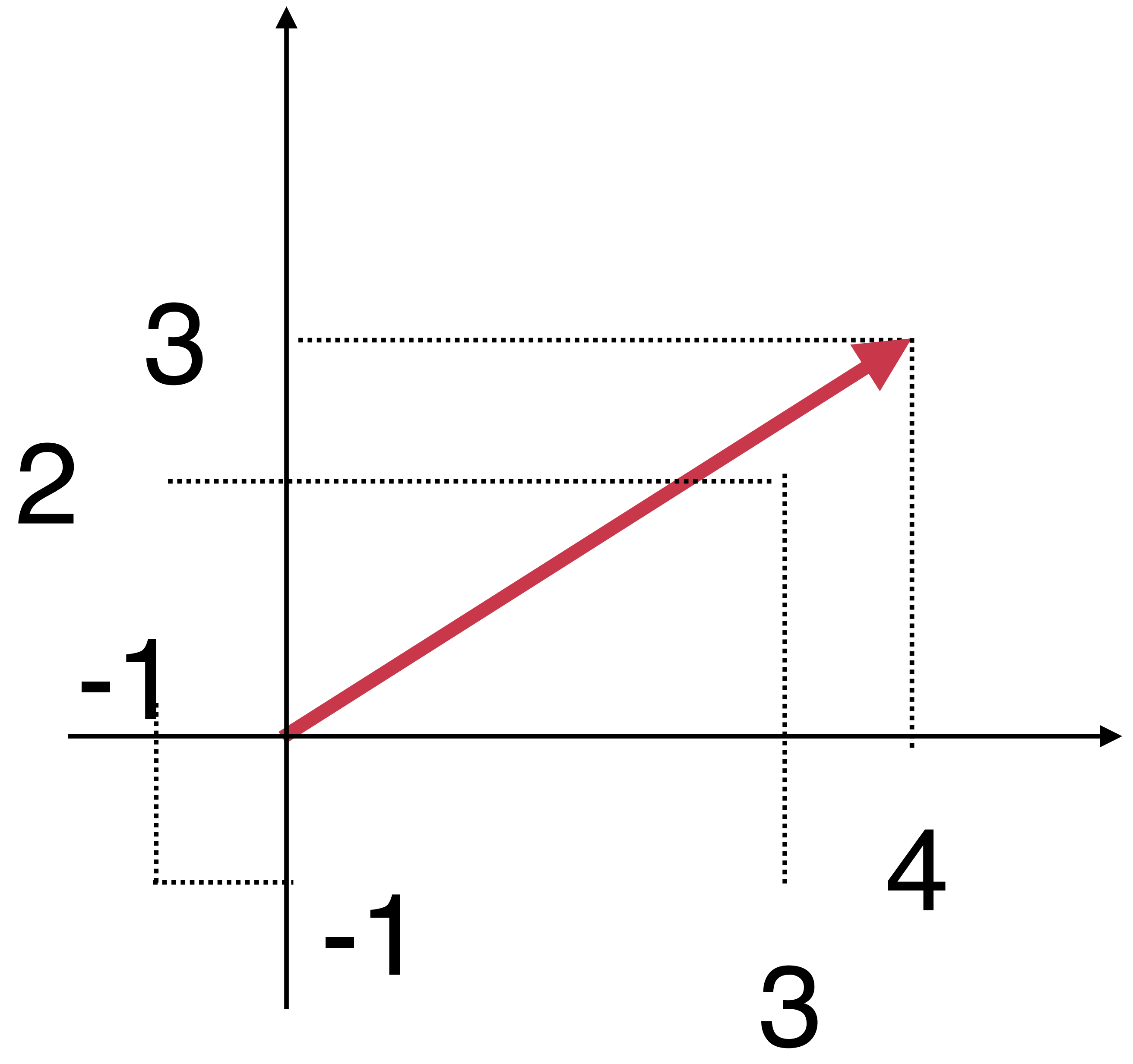
(4, 3)

起始点不重要?

从(-1, -1)到(3, 2)

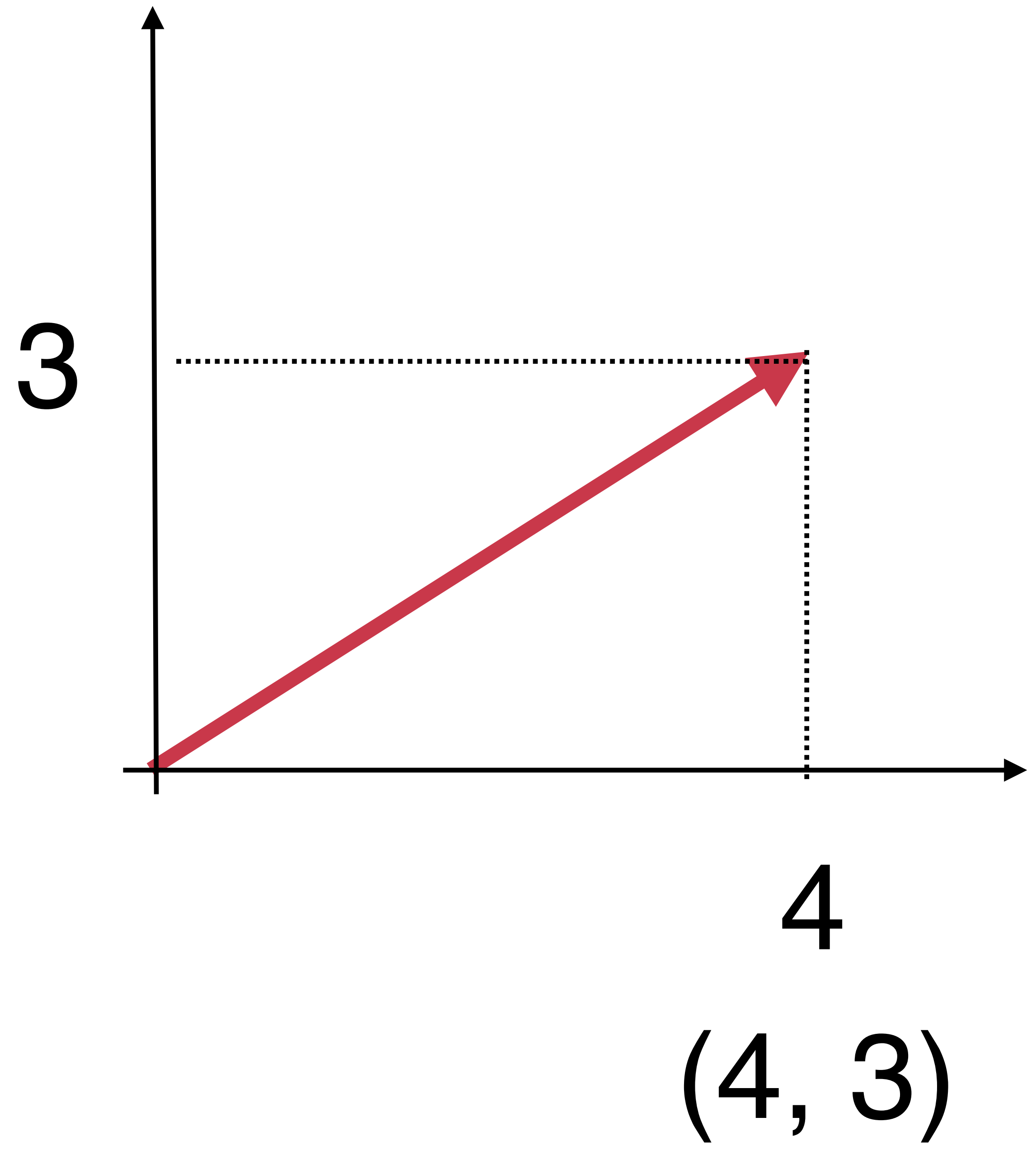
和从(0, 0)到(4, 3)是一样的

坐标系不同



向量

- 向量（Vector）是线性代数研究的基本元素



为了研究方便，我们定义向量都从原点起始

但是，顺序是重要的！

(4, 3) 和 (3, 4) 截然不同

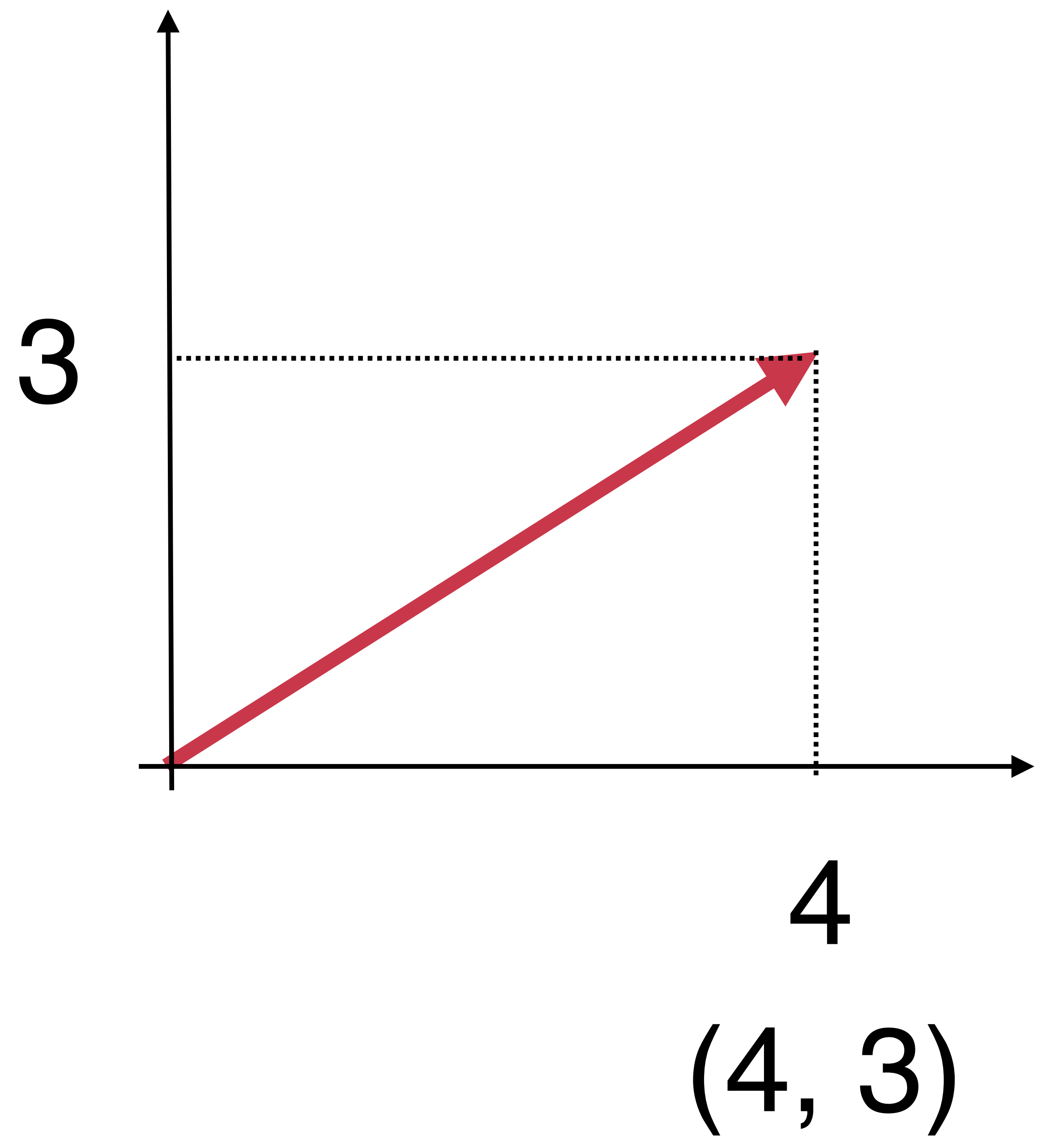
向量是一组有序的数

向量

- 向量（Vector）是线性代数研究的基本元素
- 如果只是表示方向，最多三个维度就够了
- 更加抽象的：n维向量

面积	卧室	卫生间	最近地铁站(km)	价格(万)
120	3	2	2	666

(120, 3, 2, 2, 666)　　此时，向量就是一组数，这组数的含义由使用者定义

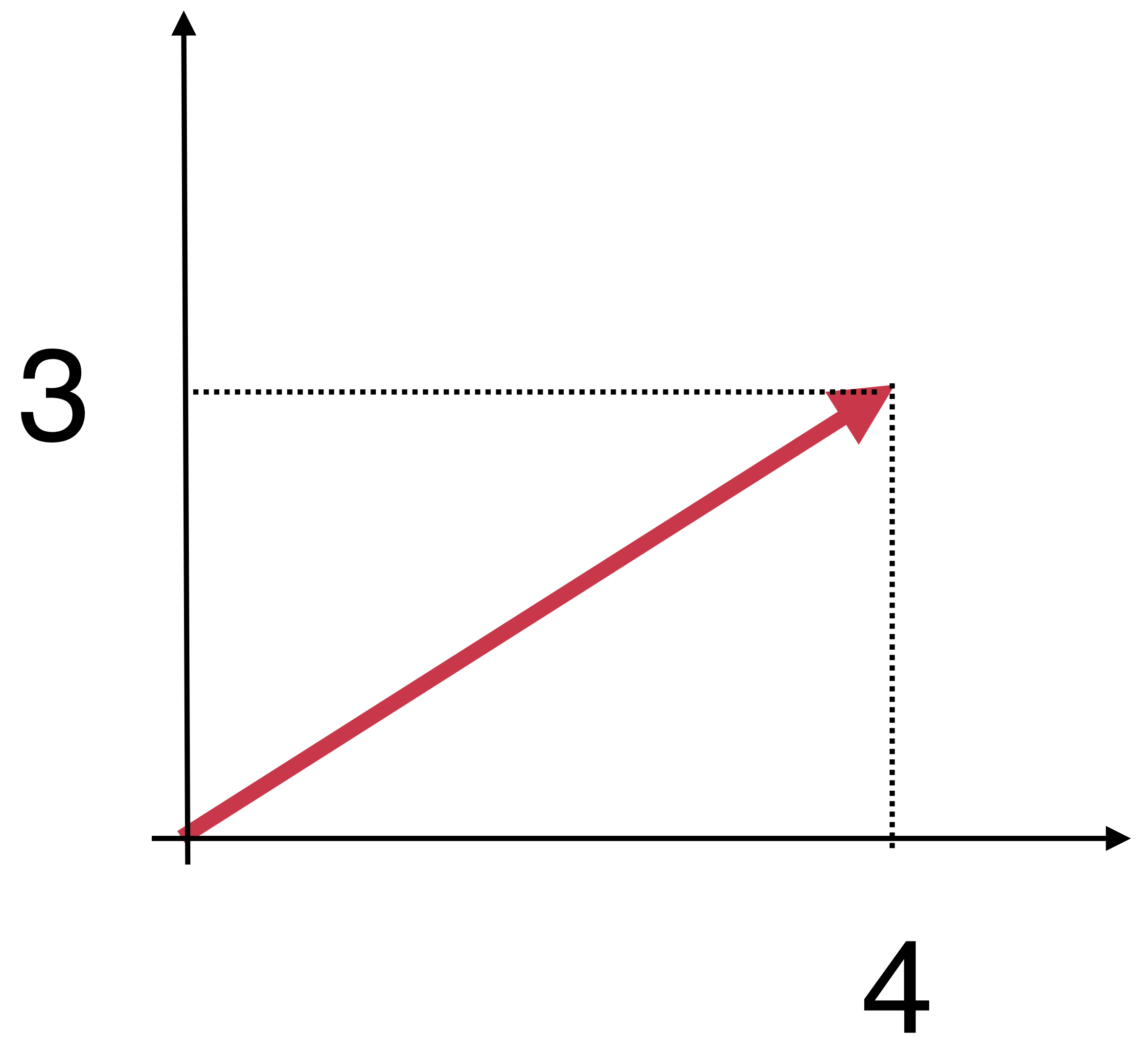


向量

面积	卧室	卫生间	最近地铁站(km)	价格(万)
120	3	2	2	666

(120, 3, 2, 2, 666)

- 两个视角看似不同，但可以互相转换
- 一个方向，就是一个点；
- 空间中的一个点，可以看做从原点指向这个点的一个方向
- 在学习初始，使用方向的视角，更直观，更形象



(4, 3)

向量

面积	卧室	卫生间	最近地铁站(km)	价格(万)
120	3	2	2	666

(120, 3, 2, 2, 666)

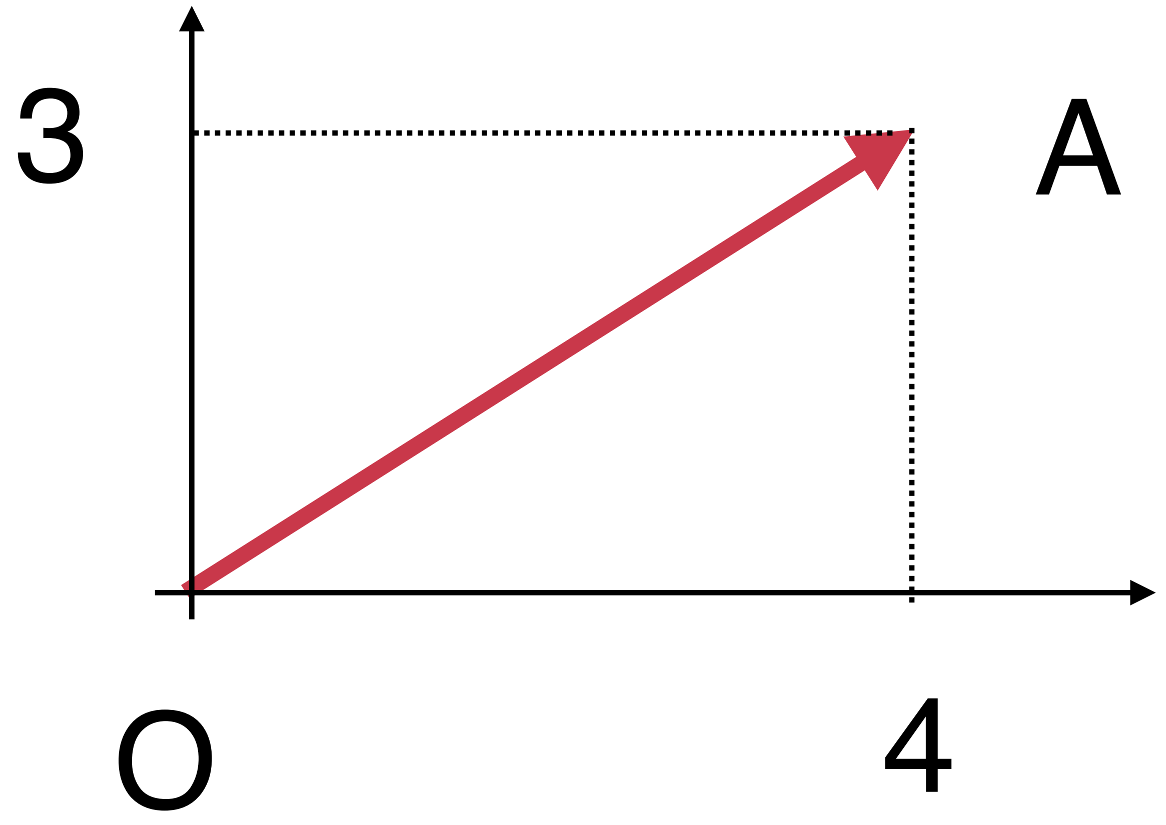
- 更关键的是：这两个视角，都不是简单的“一组数”
- 一个是一个有向线段
- 一个是空间中的点

实现属于我们自己的向量：）

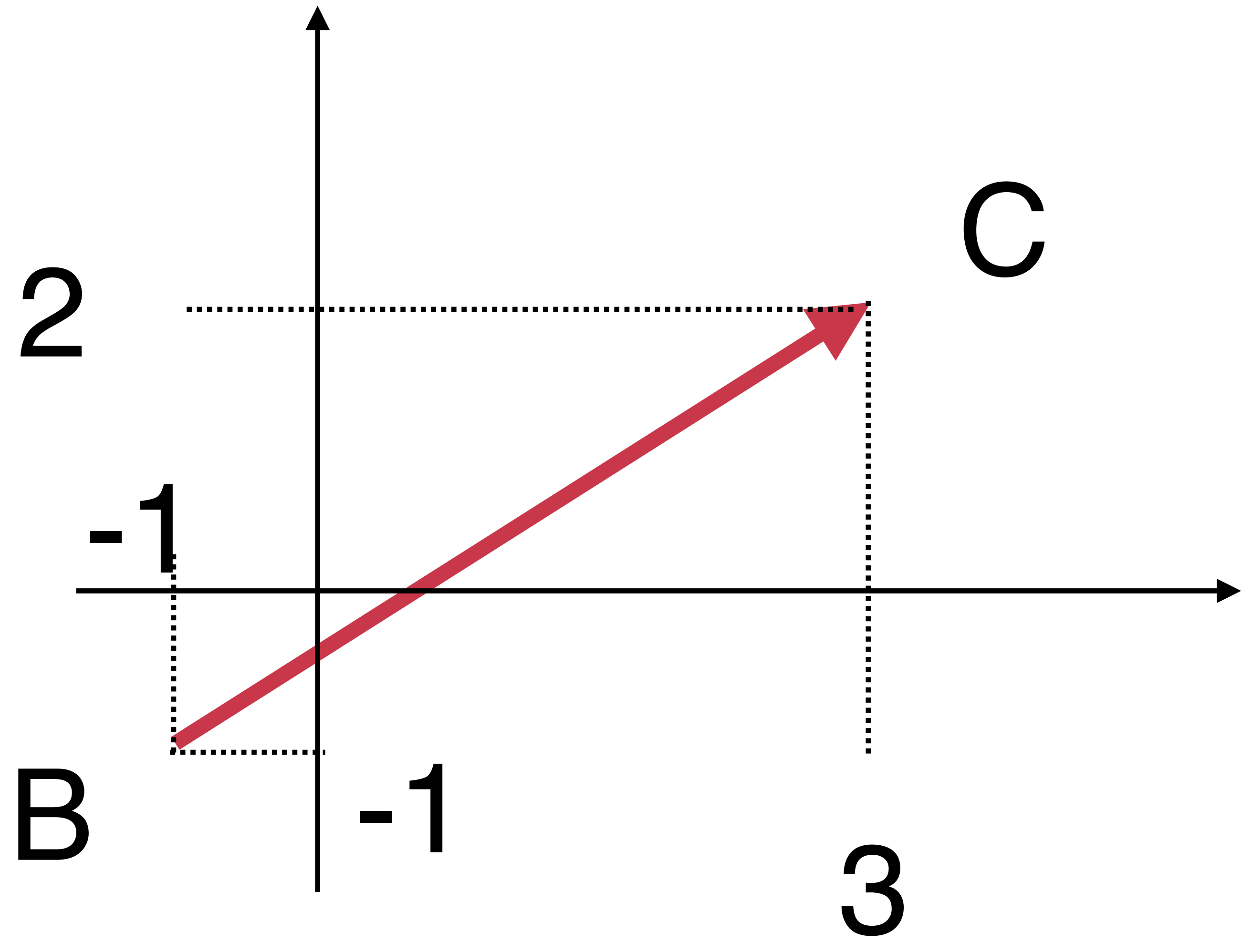
向量

更严格的一些定义：

- 和向量相对应，一个数字，称为标量
- 代数，用符号代表数。和标量相区别，向量的符号画箭头： $\vec{v}$
- 个别情况下，尤其是几何学中，我们会考虑向量的起始点



$\overrightarrow{OA}$



$\overrightarrow{BC}$

向量

行向量和列向量

$$(3,4) \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

在现阶段，没有区别

通常教材，论文，提到向量，都指列向量

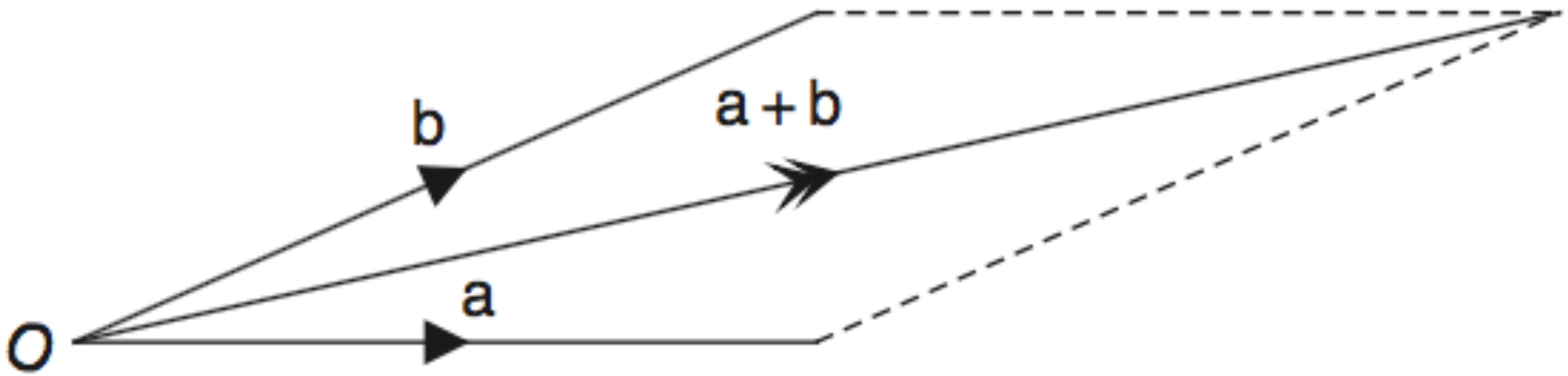
由于横版印刷原因，使用符号：$(3,4)^T$

实践：实现属于我们自己的向量

向量的基本运算

向量的两个最重要的基本运算

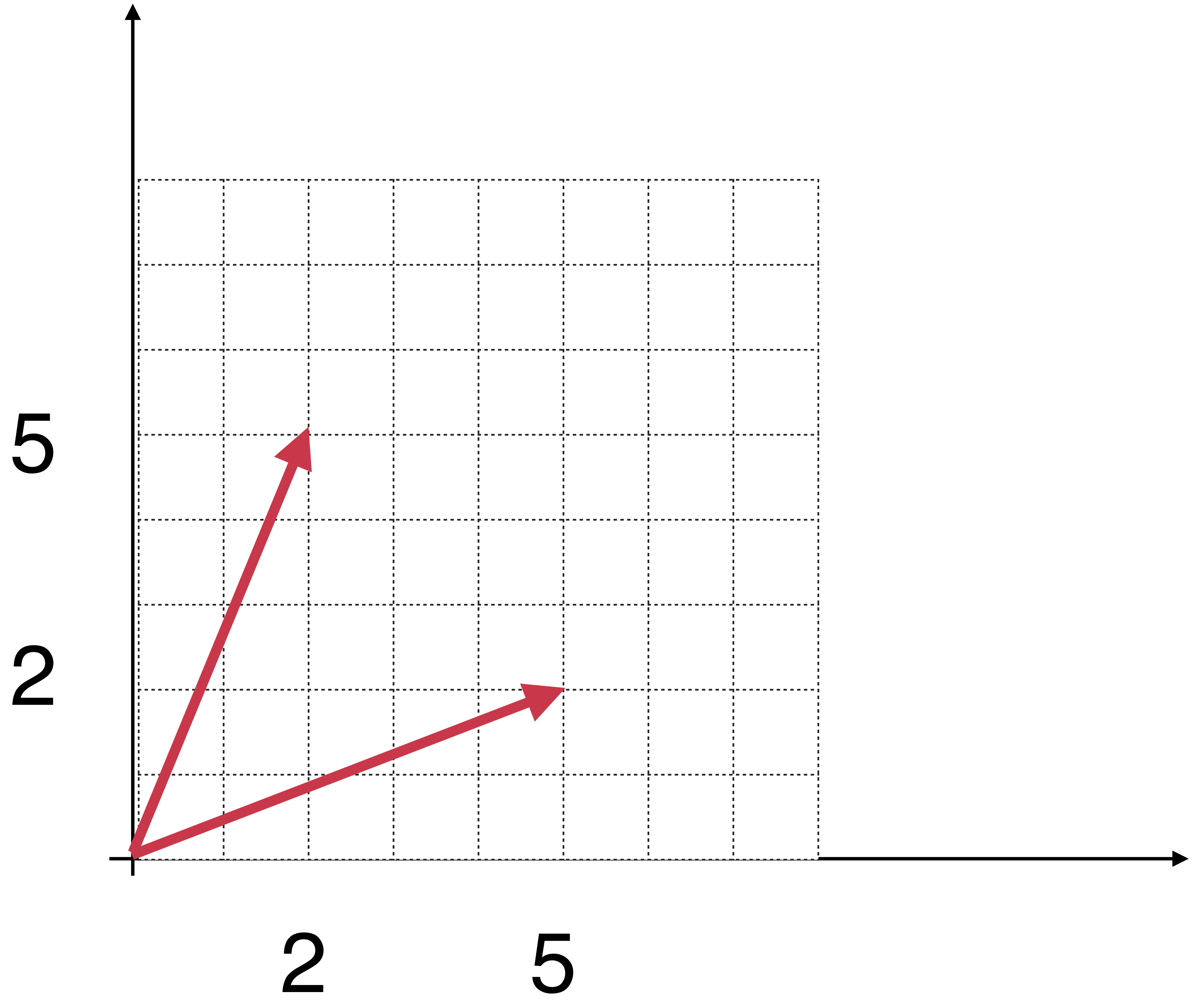
- 向量加法　　$(5,2)^T + (2,5)^T = ?$



为什么?

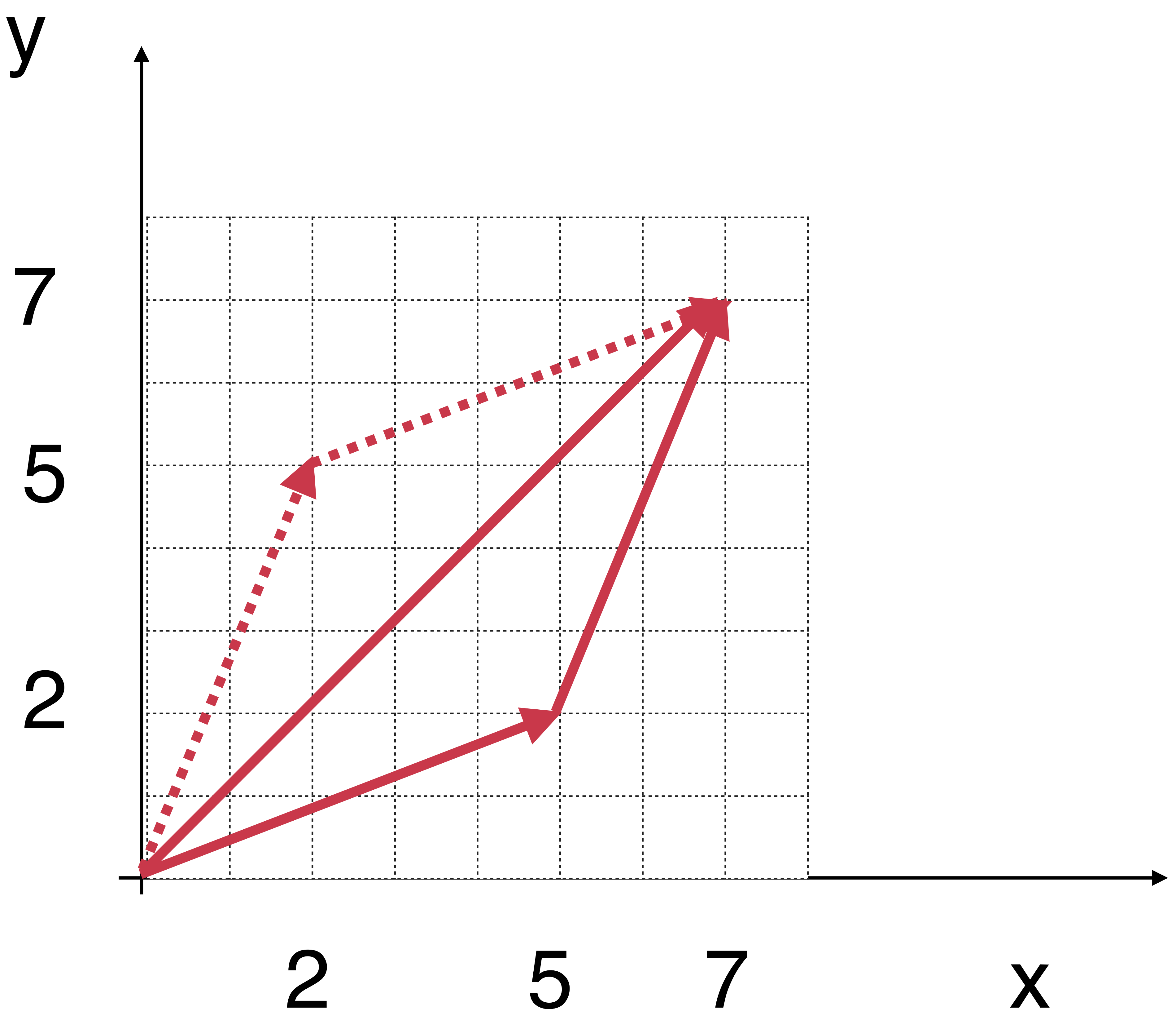
向量的两个最重要的基本运算

- 向量加法 $(5,2)^T + (2,5)^T = ?$



向量的两个最重要的基本运算

- 向量加法 $(5,2)^T + (2,5)^T = ?$ $(7,7)^T$



先向x移动5个单位

再向y移动2个单位

再向x移动2个单位

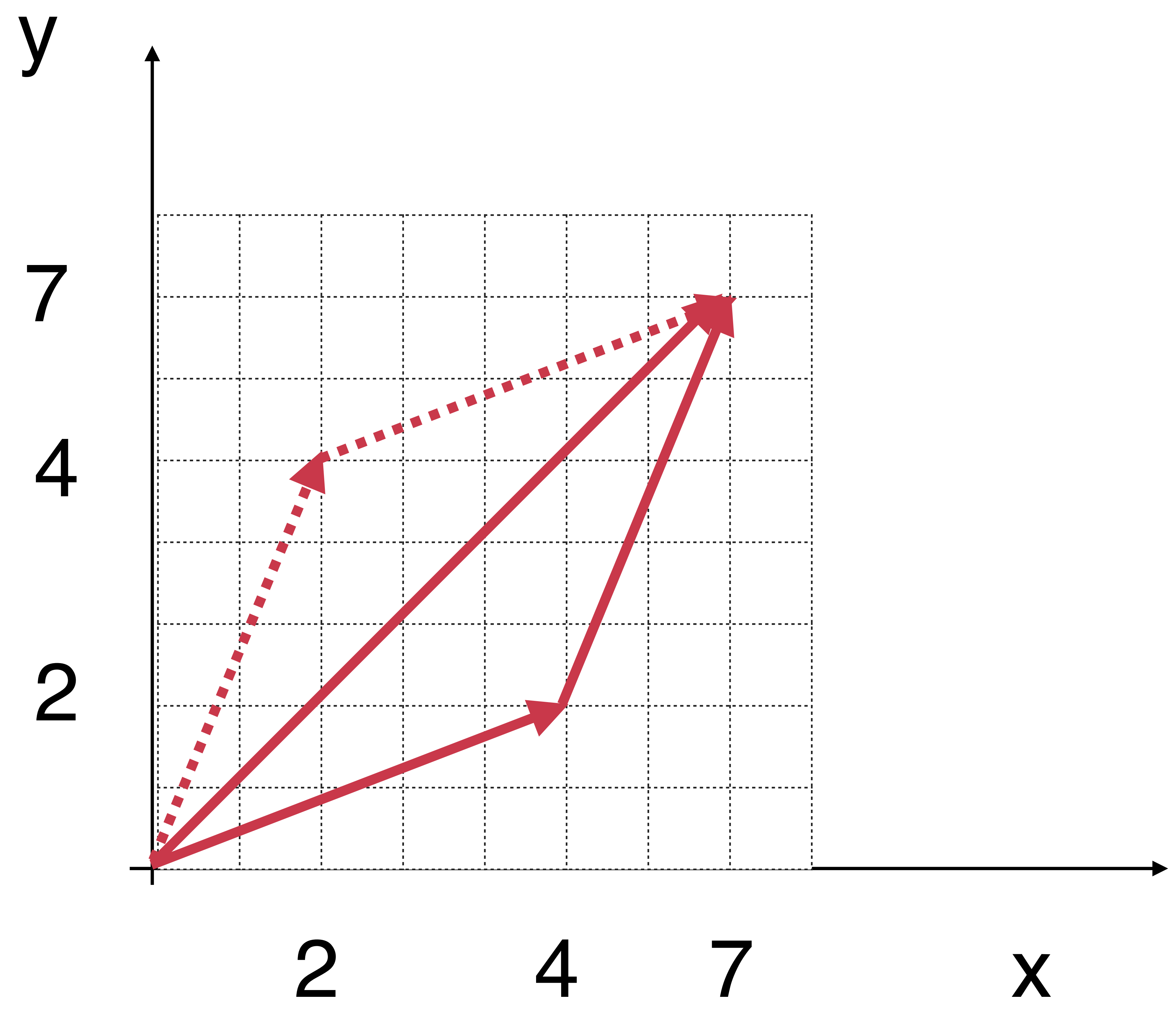
再向y移动5个单位

总共向x移动7个单位

总共向y移动7个单位

向量的两个最重要的基本运算

- 向量加法 $(a,b)^T + (c,d)^T = ?$ $(a+c, b+d)^T$



先向x移动a个单位

再向y移动b个单位

再向x移动c个单位

再向y移动d个单位

总共向x移动a+c个单位

总共向y移动b+d个单位

向量的两个最重要的基本运算

- 向量加法

三维向量同理：

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{pmatrix}$$

向量的两个最重要的基本运算

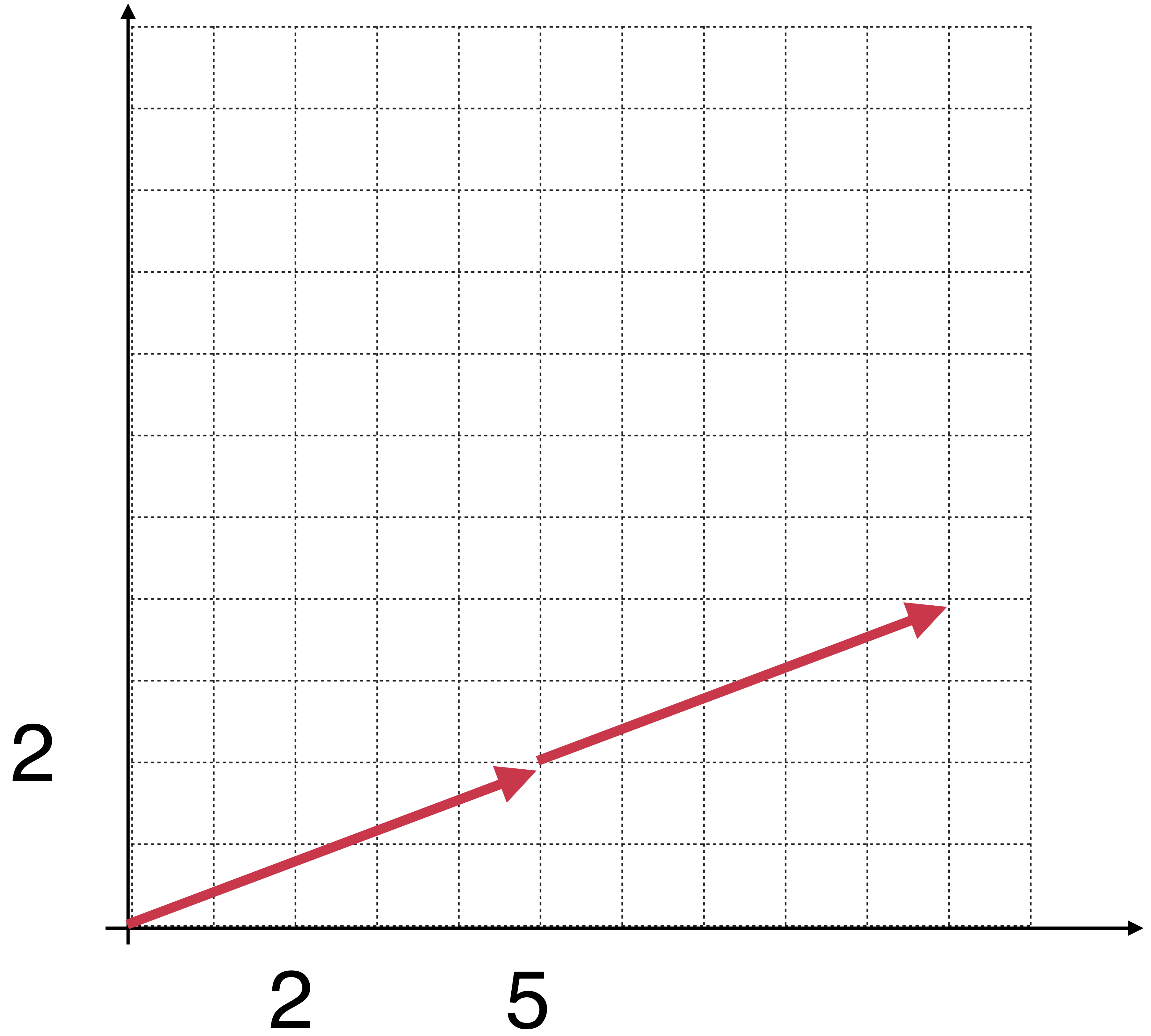
- 向量加法

n维向量同理：

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + u_1 \\ v_2 + u_2 \\ \dots \\ v_n + u_n \end{pmatrix}$$

向量的两个最重要的基本运算

- 数量乘法 $2 \times (5,2)^T = ?$



向x移动2次5个单位

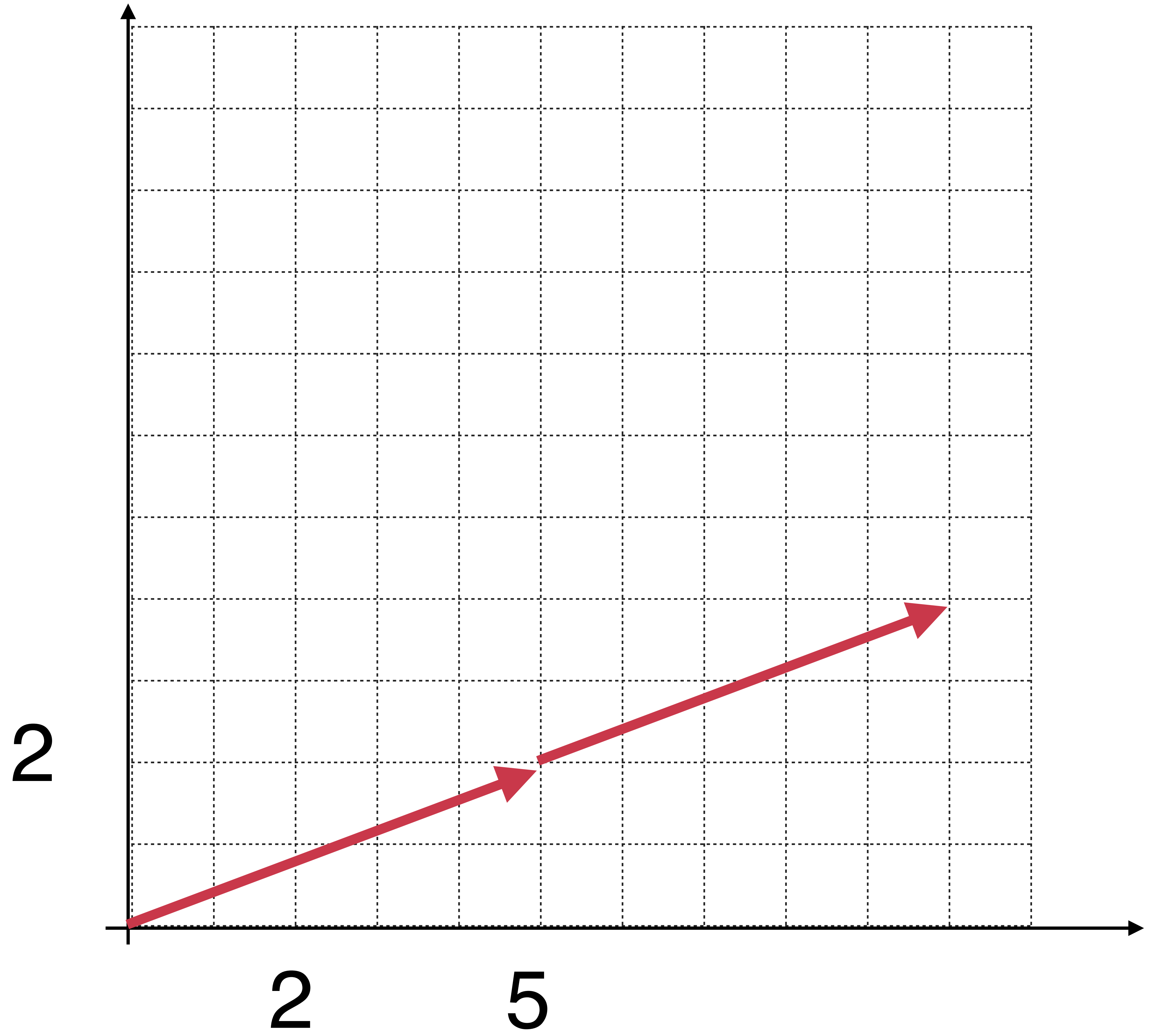
再向y移动2次2个单位

总共向x移动10个单位

总共向y移动4个单位

向量的两个最重要的基本运算

- 数量乘法 $k\times(a,b)^T=?$ $(ka,kb)^T$



向x移动k次a个单位

再向y移动k次b个单位

总共向x移动ka个单位

总共向y移动kb个单位

向量的两个最重要的基本运算

- 数量乘法

n维向量同理：

$$k \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot v_1 \\ k \cdot v_2 \\ \cdots \\ k \cdot v_n \end{pmatrix}$$

向量的两个最重要的基本运算

- 向量加法

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + u_1 \\ v_2 + u_2 \\ \dots \\ v_n + u_n \end{pmatrix}$$

- 数量乘法

$$k \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot v_1 \\ k \cdot v_2 \\ \dots \\ k \cdot v_n \end{pmatrix}$$

实现向量的基本运算

实践：实现向量的基本运算

向量运算的基本性质

向量运算的基本性质

回忆我们小学时学习的数的运算

我们也要先有数的运算的相关性质，之后才敢进行更加复杂的运算

比如：加法交换律，乘法交换律，加法结合律，乘法结合律，等等

对于向量运算，我们也要这么做!

向量运算的基本性质

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$$

$$(k+c)\vec{u}=k\vec{u}+c\vec{u}$$

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$$

$$(kc)\vec{u}=k(c\vec{u})$$

$$k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$$

$$1\vec{u}=\vec{u}$$

向量运算的基本性质

证明举例： $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$

$$k(\vec{u}+\vec{v})=k\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}\right)=k\begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ \cdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ku_1+kv_1 \\ ku_2+kv_2 \\ \cdots \\ ku_n+kv_n \end{pmatrix}$$

证明举例：　$k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$

$$k(\vec{u}+\vec{v})=k\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}\right)=k\begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ \dots \\ u_n+v_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ku_1+kv_1 \\ ku_2+kv_2 \\ \dots \\ ku_n+kv_n \end{pmatrix}$$

$$k\vec{u}+k\vec{v}=k\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ku_1 \\ ku_2 \\ \dots \\ ku_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} kv_1 \\ kv_2 \\ \dots \\ kv_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ku_1+kv_1 \\ ku_2+kv_2 \\ \dots \\ ku_n+kv_n \end{pmatrix}$$

向量运算的基本性质

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$$

$$(k+c)\vec{u}=k\vec{u}+c\vec{u}$$

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$$

$$(kc)\vec{u}=k(c\vec{u})$$

$$k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$$

$$1\vec{u}=\vec{u}$$

零向量

零向量

我们不定义什么是零向量，我们从推导出一个性质出发

对于任意一个向量 $\vec{u}$，都存在一个向量 O，满足：$\vec{u}+O=\vec{u}$

零向量

对于任意一个向量 $\vec{u}$，都存在一个向量 O，满足：$\vec{u}+O=\vec{u}$

$$\vec{u}=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} \qquad O=\begin{pmatrix} o_1 \\ o_2 \\ \dots \\ o_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}+O=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} o_1 \\ o_2 \\ \dots \\ o_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_1+o_1 \\ u_2+o_2 \\ \dots \\ u_n+o_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$$

对于任意一个向量 $\vec{u}$，都存在一个向量 O，满足：$\vec{u}+O=\vec{u}$

$$\vec{u}+O=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} o_1 \\ o_2 \\ \dots \\ o_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_1+o_1 \\ u_2+o_2 \\ \dots \\ u_n+o_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u_1+o_1=u_1 \\ u_2+o_2=u_2 \\ \dots \\ u_n+o_n=u_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} o_1=0 \\ o_2=0 \\ \dots \\ o_n=0 \end{cases} \Rightarrow O=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

零向量

对于任意一个向量 $\vec{u}$，都存在一个向量 O，满足：$\vec{u}+O=\vec{u}$

$$\Rightarrow O=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

我们称这个向量，为零向量。

注意：这个零向量O没有箭头

零向量

对于任意一个向量 $\vec{u}$，都存在一个向量 O，满足：$\vec{u}+O=\vec{u}$

对于任意一个向量 $\vec{u}$，都存在一个向量 $\overrightarrow{-u}$，满足：$\vec{u}+\overrightarrow{-u}=O$

上述 $\overrightarrow{-u}$ 唯一。

对于任意一个向量 $\vec{u}$，都存在一个向量 $\overrightarrow{-u}$，满足：$\vec{u}+\overrightarrow{-u}=O$

上述 $\overrightarrow{-u}$ 唯一。

假设存在另一个向量 $\vec{v}$，也满足 $\vec{u}+\vec{v}=O$

$$\overrightarrow{-u}+(\vec{u}+\vec{v})=\overrightarrow{-u}+O$$

$$(\overrightarrow{-u}+\vec{u})+\vec{v}=\overrightarrow{-u}$$

$$O+\vec{v}=\overrightarrow{-u}$$

$$\vec{v}=\overrightarrow{-u}$$

零向量

对于任意一个向量 $\vec{u}$，都存在一个向量 O，满足：$\vec{u}+O=\vec{u}$

对于任意一个向量 $\vec{u}$，都存在一个向量 $\overrightarrow{-u}$，满足：$\vec{u}+\overrightarrow{-u}=O$

上述 $\overrightarrow{-u}$ 唯一。

$$\overrightarrow{-u}=-1\cdot\vec{u}$$

实现零向量

实践： 零向量

小结：一切从向量开始

一切从向量开始

什么是向量

两个视角：有向线段；数据点

基本运算：向量加法，数量乘法

基本性质

零向量