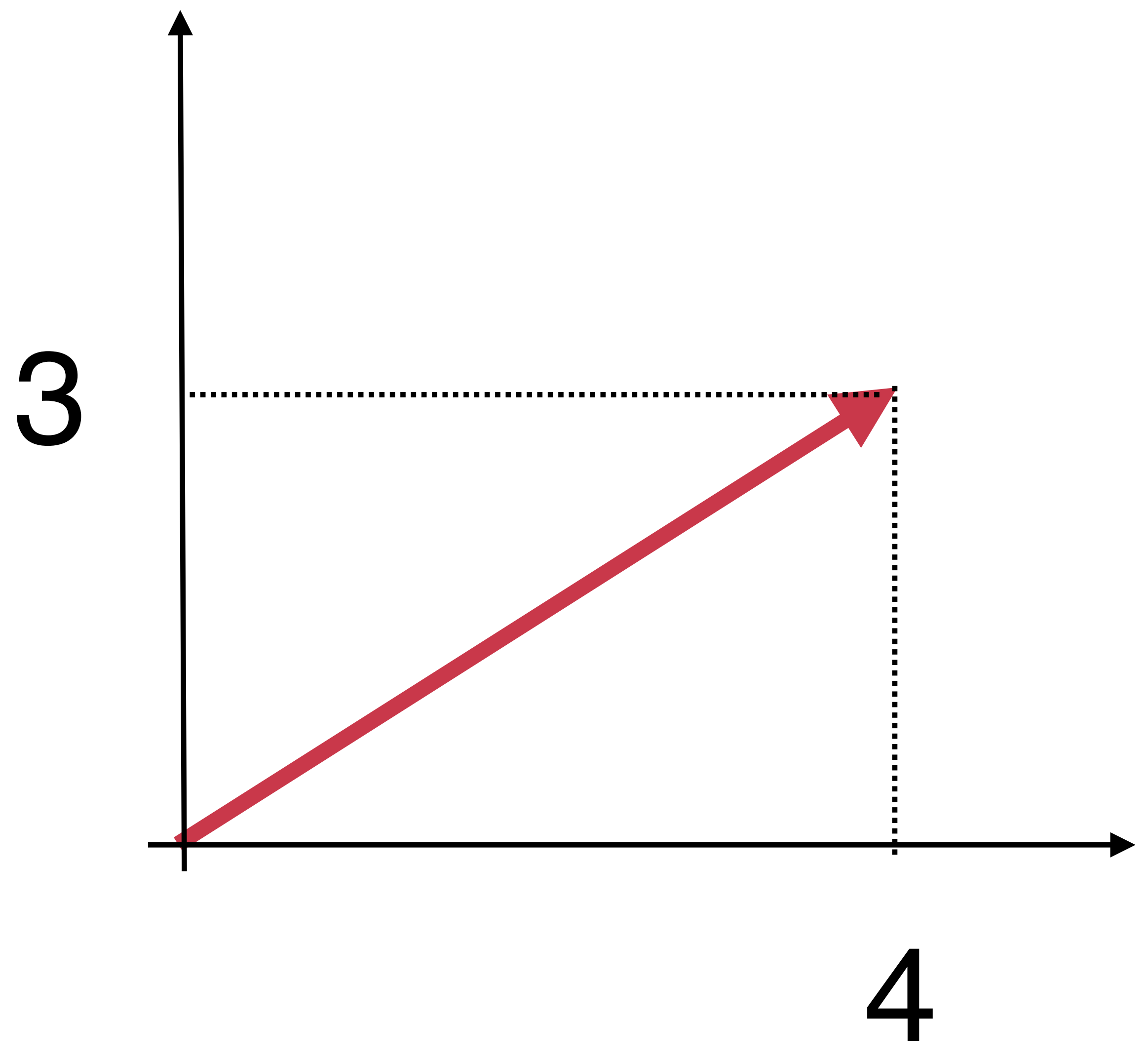
更多向量的高级话题

向量的长度和单位向量

向量的长度



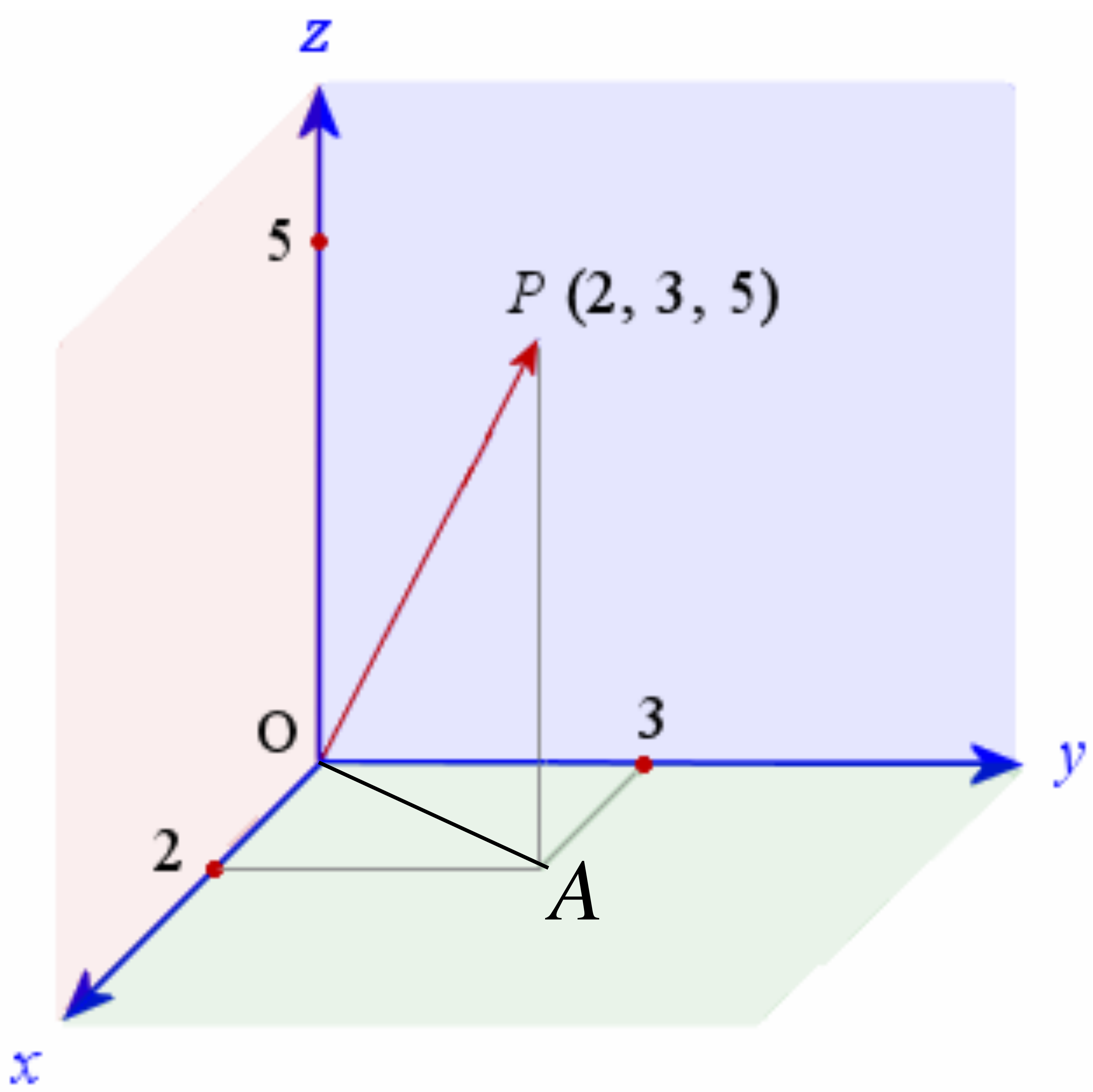
$\vec{u} = (3,4)$ $\vec{u}$ 的大小是多少?

根据勾股定理, $\vec{u}$ 的大小 $= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

向量的**模**

向量的模



$$\vec{u} = \overrightarrow{OP} = (2,3,5)$$

$\vec{u}$ 的大小是多少?

$$\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = \sqrt{2^2 + 3^2}$$

$$\left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \sqrt{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AP}\right\|^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2}$$

$$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2}$$

向量的模

n维向量同理：

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T$$

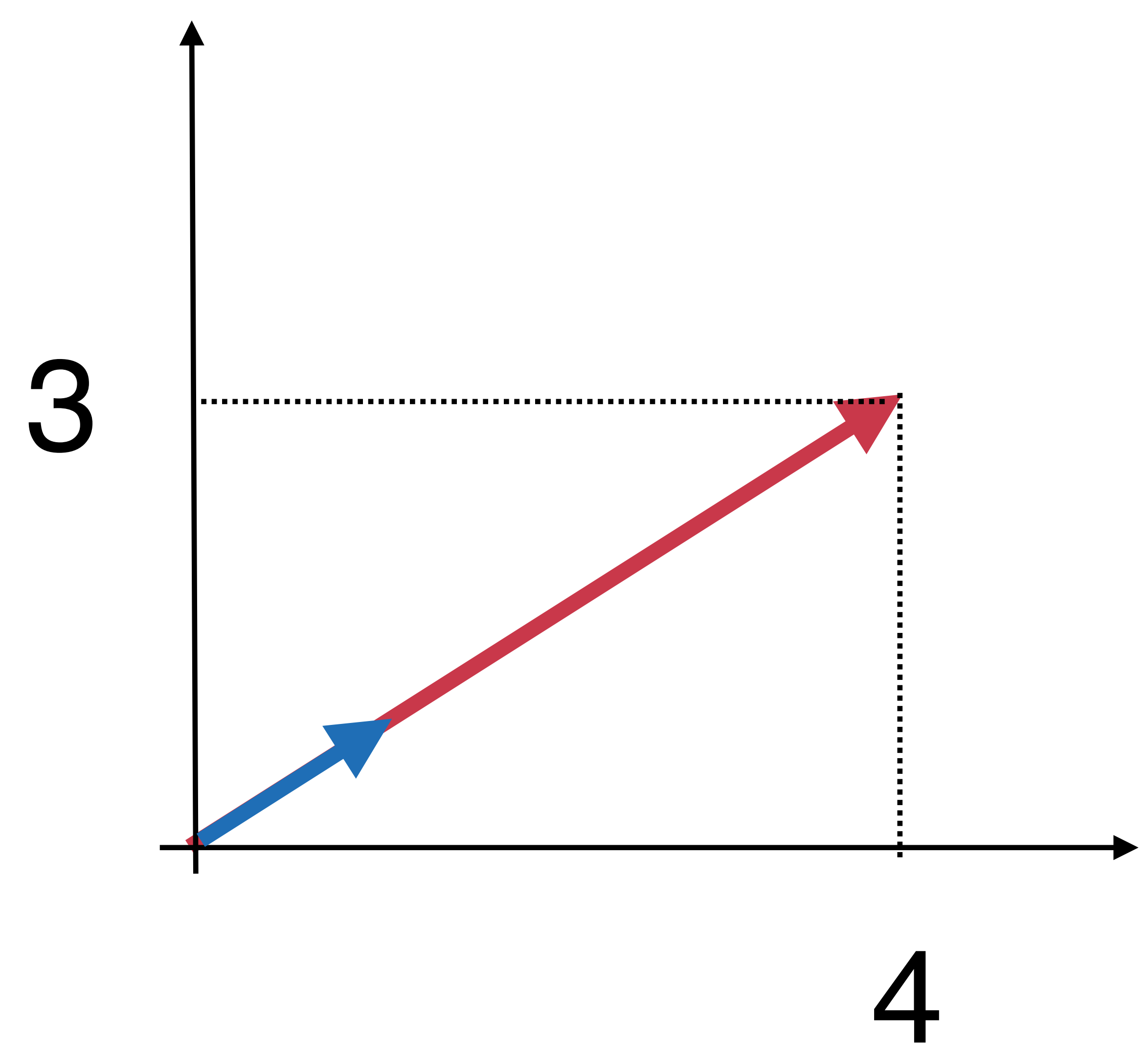
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}$$

单位向量 unit vector

单位向量：

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T$$

$$\hat{u} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u} = \left(\frac{u_1}{\|\vec{u}\|}, \frac{u_2}{\|\vec{u}\|}, \ldots, \frac{u_n}{\|\vec{u}\|}\right)$$

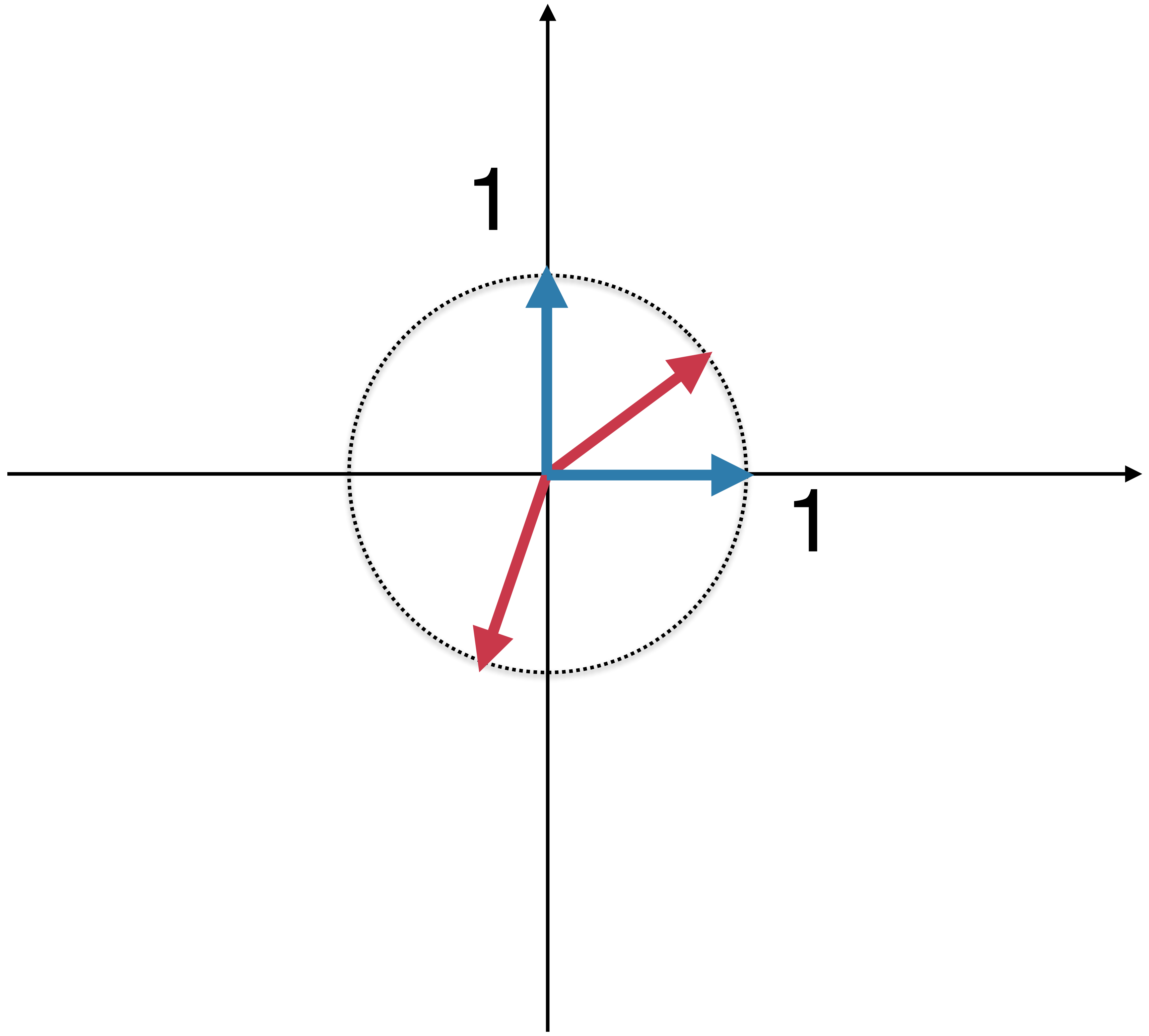


$\|\hat{u}\| = 1$ 只表示方向

根据 $\vec{u}$ 求出 $\hat{u}$ 的过程：归一化，规范化（normalize）

单位向量 unit vector

单位向量有无数个



二维空间中，有两个特殊的单位向量

$$\overrightarrow{e_1} = (1,0) \qquad \overrightarrow{e_2} = (0,1)$$

只由0，1组成的单位向量：

标准单位向量 Standard Unit Vector

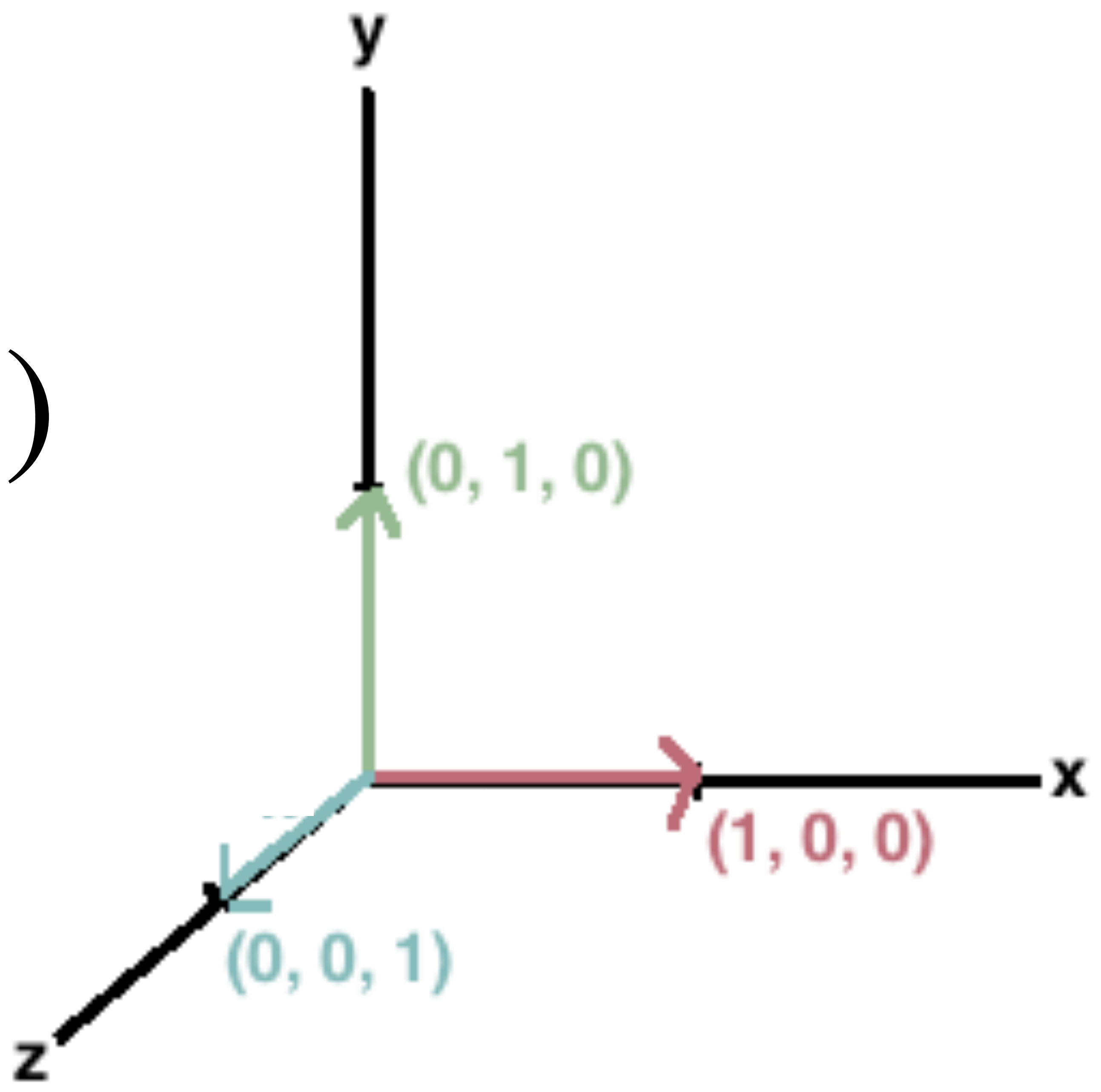
标准单位向量指向坐标轴的正方向

标准单位向量 standard unit vector

二维空间中，有两个标准单位向量 $\overrightarrow{e_1} = (1,0)$ $\overrightarrow{e_2} = (0,1)$

三维空间中，有三个标准单位向量

$\overrightarrow{e_1} = (1,0,0)$ $\overrightarrow{e_2} = (0,1,0)$ $\overrightarrow{e_3} = (0,0,1)$



标准单位向量 standard unit vector

二维空间中，有两个标准单位向量 $\vec{e_1} = (1,0)$ $\vec{e_2} = (0,1)$

三维空间中，有三个标准单位向量

$\vec{e_1} = (1,0,0)$ $\vec{e_2} = (0,1,0)$ $\vec{e_3} = (0,0,1)$

n维空间中，有n个标准单位向量

$\vec{e_1} = (1,0,\dots,0)$ $\vec{e_2} = (0,1,\dots,0)$ $\dots$ $\vec{e_n} = (0,0,\dots,1)$

实现向量规范化

实践：实现向量规范化

向量的点乘

两个向量相乘

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=?$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_1\cdot v_1 \\ u_2\cdot v_2 \\ \dots \\ u_n\cdot v_n \end{pmatrix}$$

为什么不这么定义？后续分晓

两个向量相乘

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\cdots\\u_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\cdots\\v_n\end{pmatrix}=sum(\begin{pmatrix}u_1\cdot v_1\\u_2\cdot v_2\\\cdots\\u_n\cdot v_n\end{pmatrix})=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+\ldots+u_n\cdot v_n$$

两个向量“相乘”，结果是一个数！（标量）

更严格的说法：两个向量的点乘

两个向量的内积

为什么这么定义？后续分晓

向量的点乘

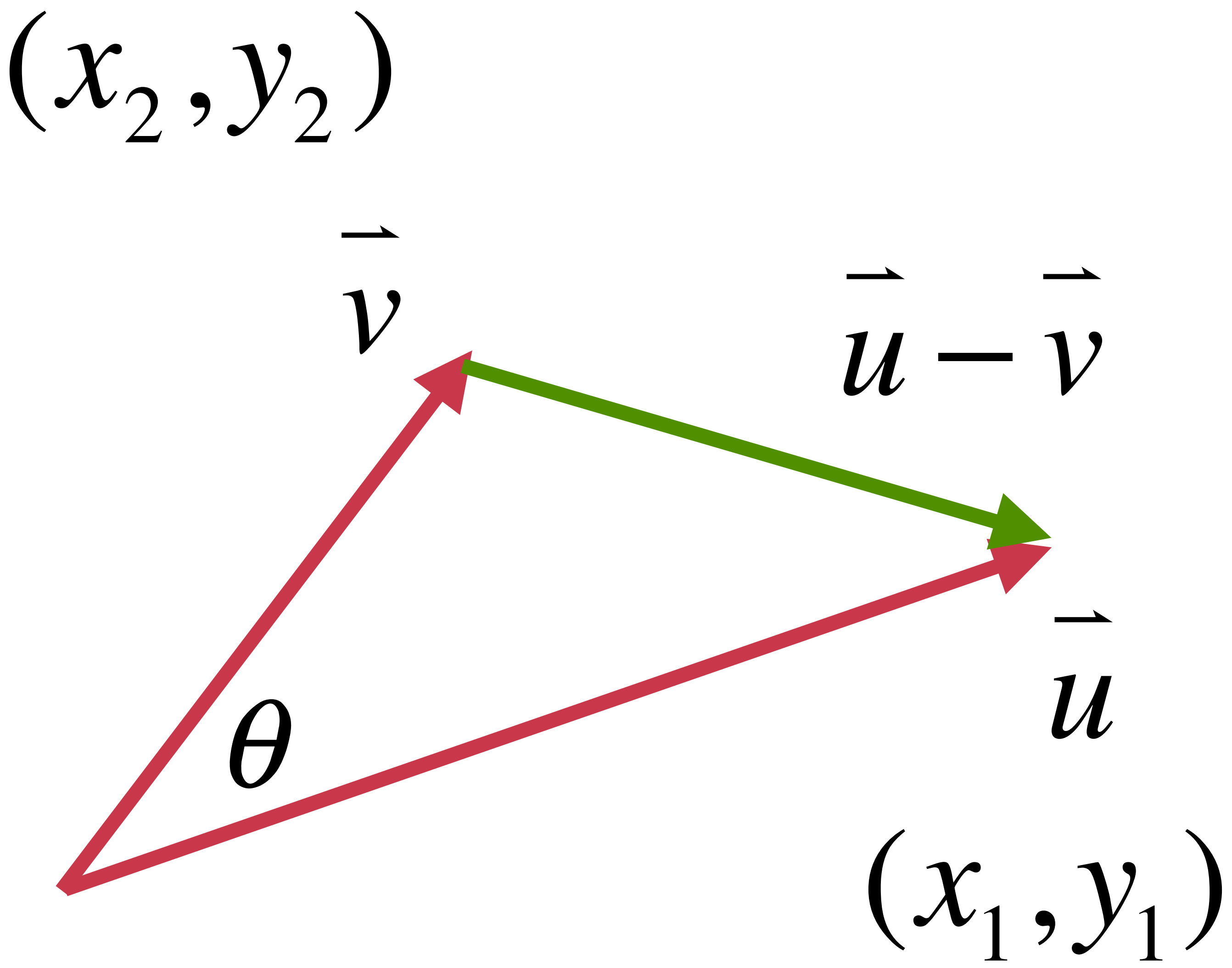
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \ldots \\ u_n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+\ldots+u_n\cdot v_n$$

$$=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\theta$$

向量的点乘

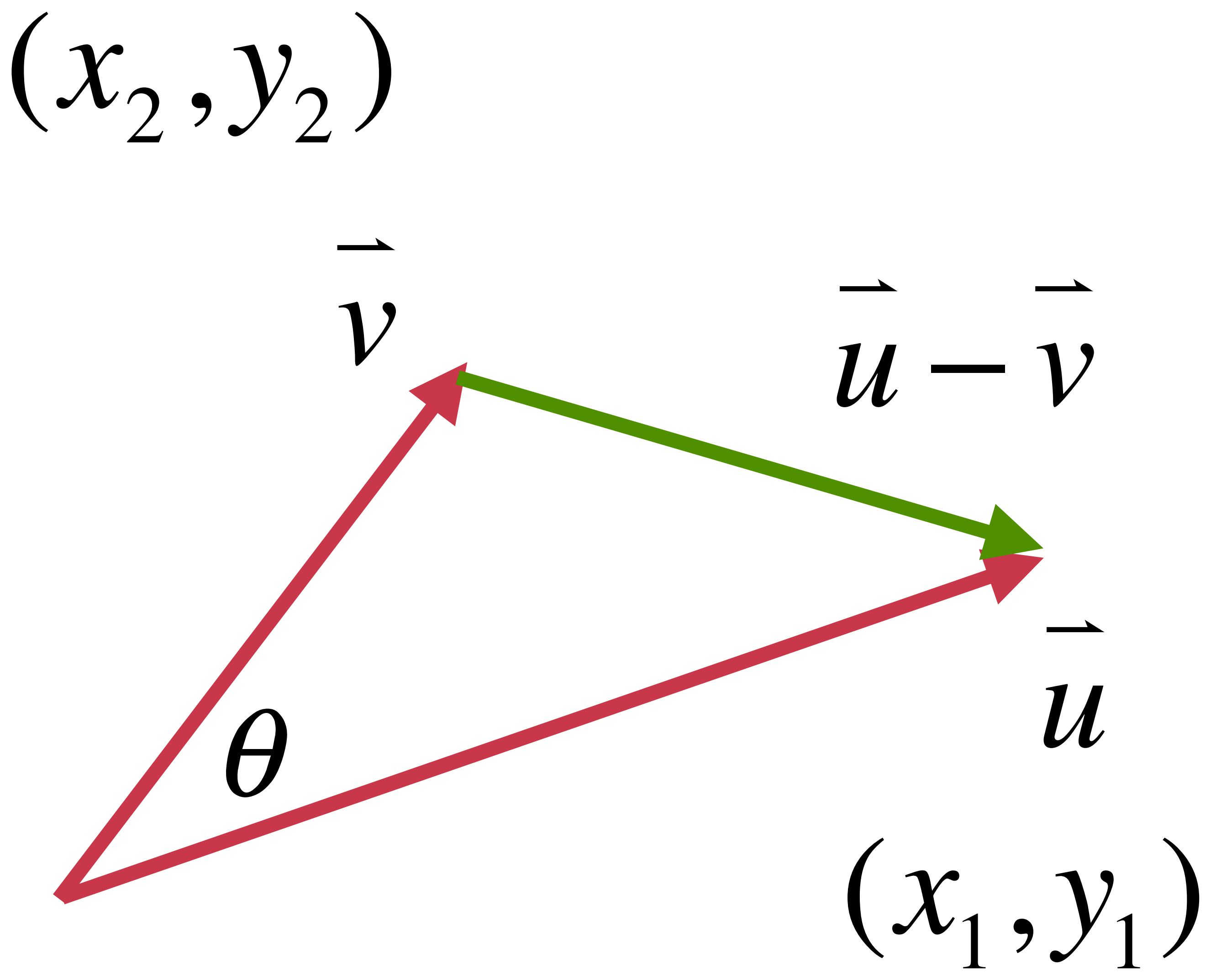
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+\ldots+u_n\cdot v_n=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\theta$$

二维空间中: $\vec{u}\cdot\vec{v}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\theta$



向量的点乘

二维空间中: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$



$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2 \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$$

$$\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

$$= \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2)$$

$$= \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - y_1^2 + 2y_1y_2 - y_2^2)$$

$$= x_1x_2 + y_1y_2$$

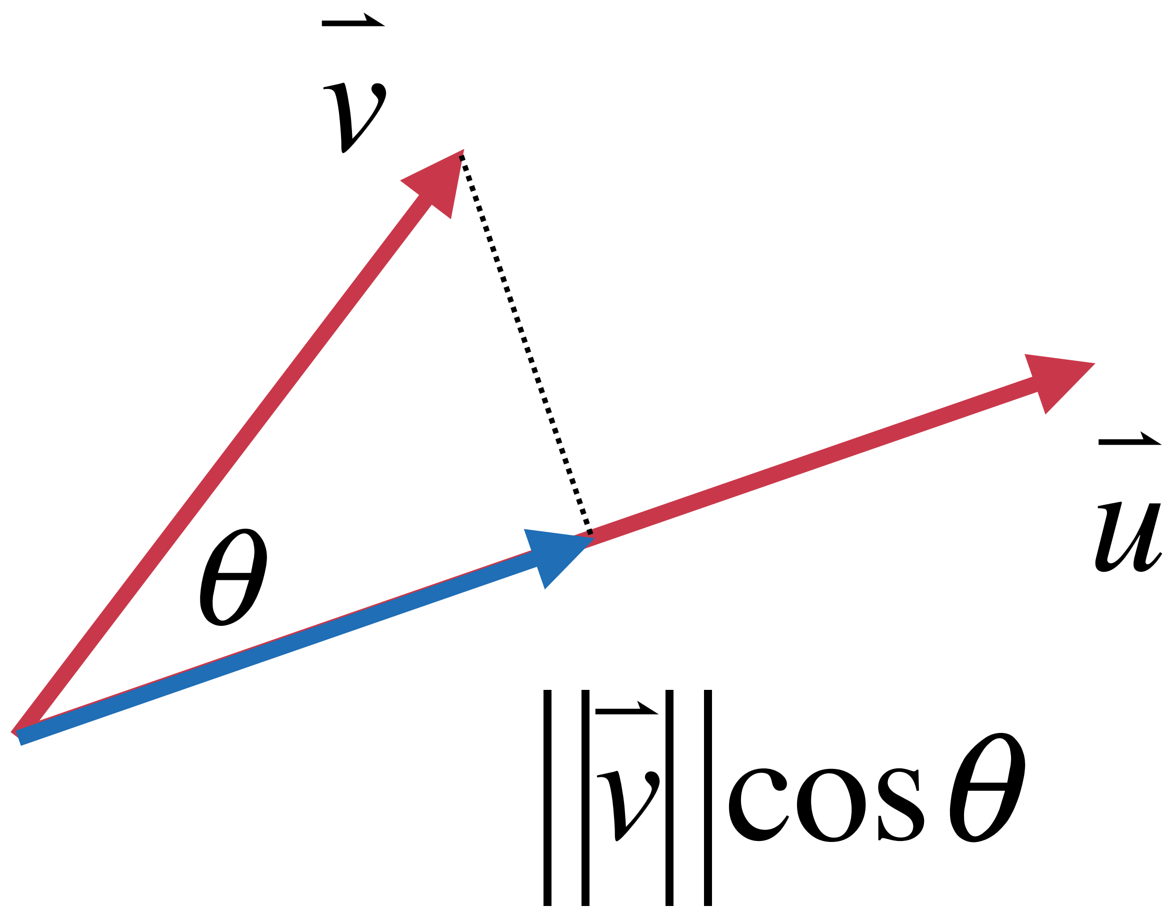
向量的点乘

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \ldots + u_n \cdot v_n = \left\|\vec{u}\right\| \cdot \left\|\vec{v}\right\| \cdot \cos\theta$$

向量点乘的直观理解和实现

向量的点乘

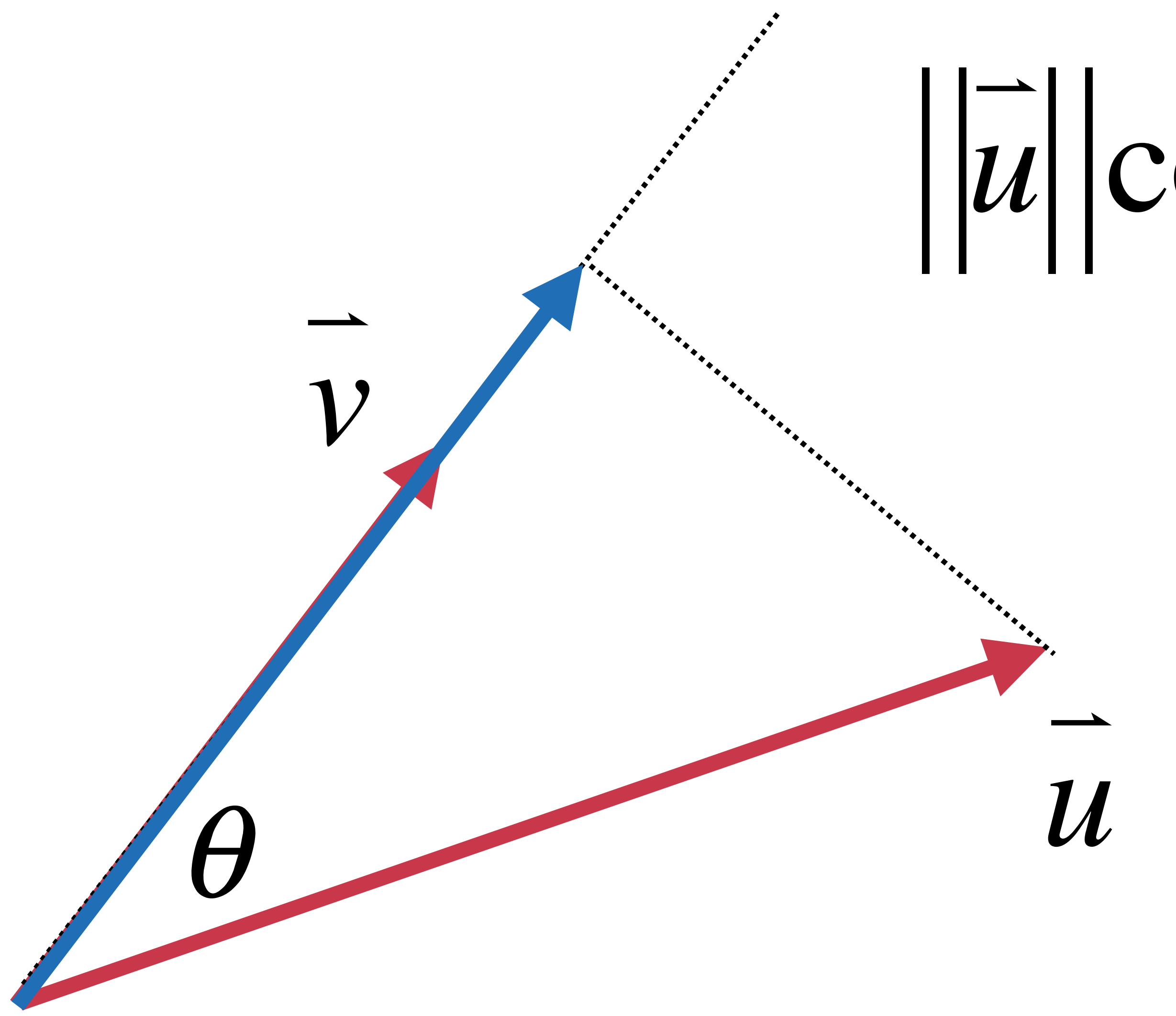
二维空间中: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$



$$\|\vec{u}\| \cdot (\|\vec{v}\| \cdot \cos\theta)$$

向量的点乘

二维空间中: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$

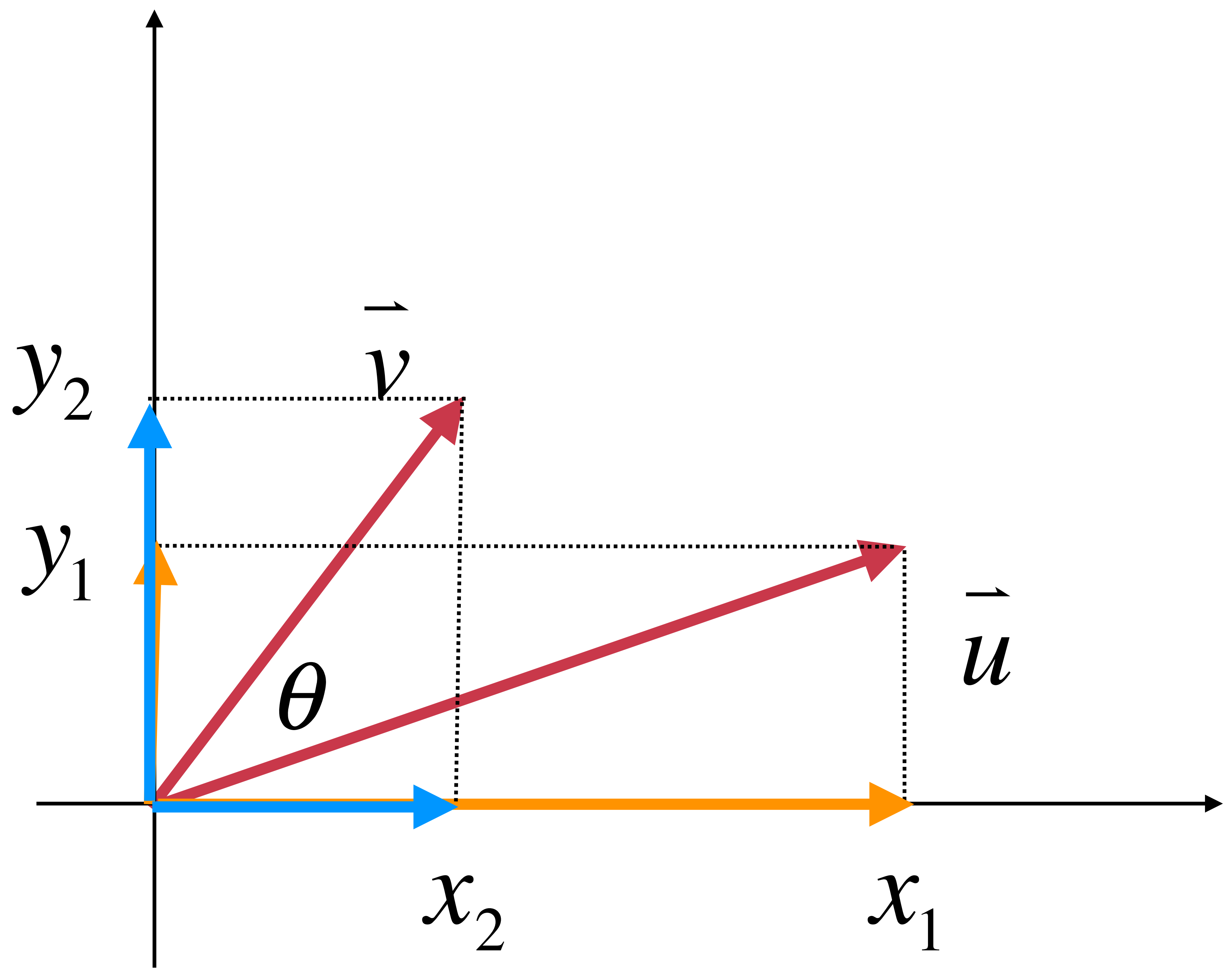


$\|\vec{u}\|\cos\theta$

$(\|\vec{u}\| \cdot \cos\theta) \cdot \|\vec{v}\|$

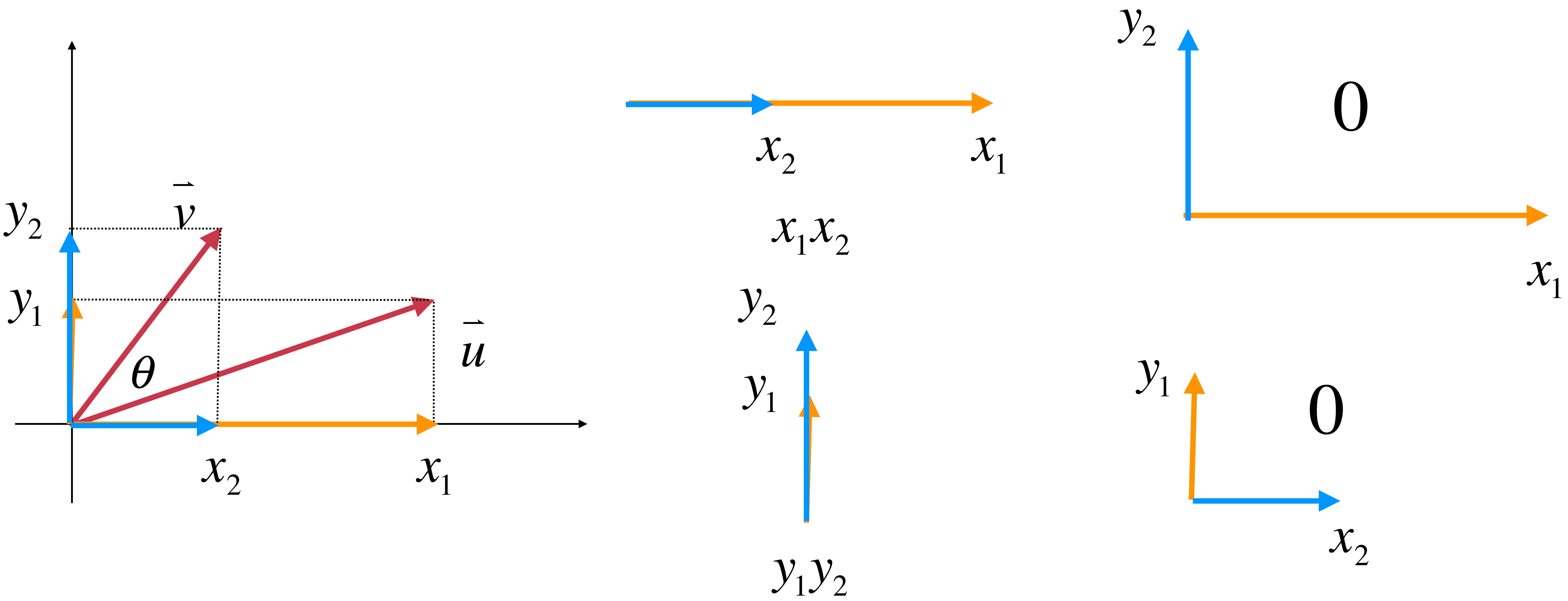
向量的点乘

二维空间中: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = \left\|\vec{u}\right\| \cdot \left\|\vec{v}\right\| \cdot \cos\theta$



向量的点乘

二维空间中: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$



实现向量的点乘

实践：实现向量的点乘

实现向量点乘

有些数学库会将 u * v 定义为逐元素相乘的向量，即

$$\vec{u} * \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \cdot v_1 \\ u_2 \cdot v_2 \\ \dots \\ u_n \cdot v_n \end{pmatrix}$$

element-wise multiplication

由于这个计算不具备数学含义，在我们的实现中不取：）

向量的点乘的应用

向量点乘的应用

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \ldots + u_n \cdot v_n = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

向量点乘的应用

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+\ldots+u_n\cdot v_n=\left\|\vec{u}\right\|\cdot\left\|\vec{v}\right\|\cdot\cos\theta$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\cdot\left\|\vec{v}\right\|}$$

特别的，如果 $\theta=90^\circ$，$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

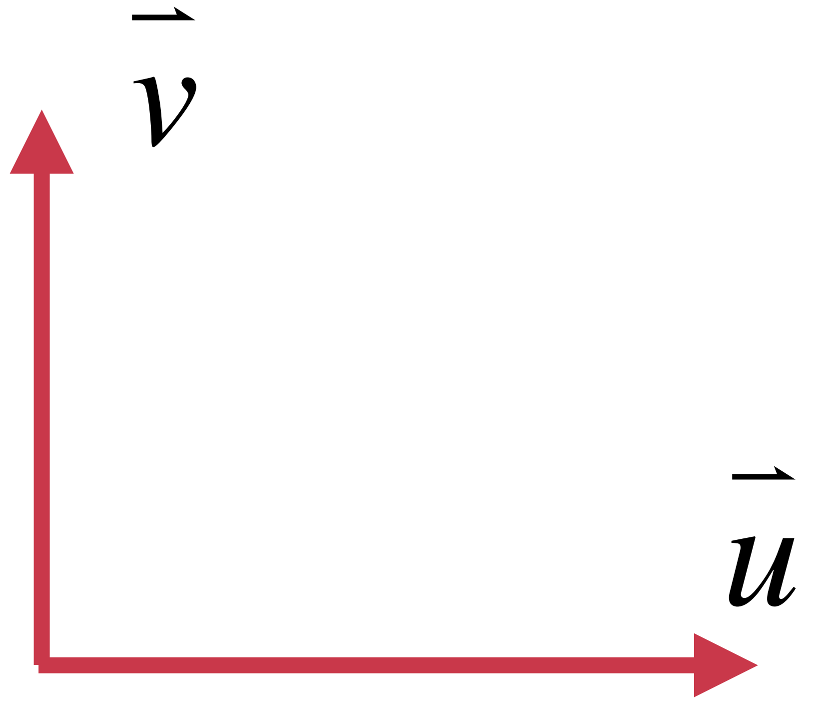
如果 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$，两个向量垂直；

如果 $\vec{u}\cdot\vec{v}>0$，两个向量夹角为锐角；

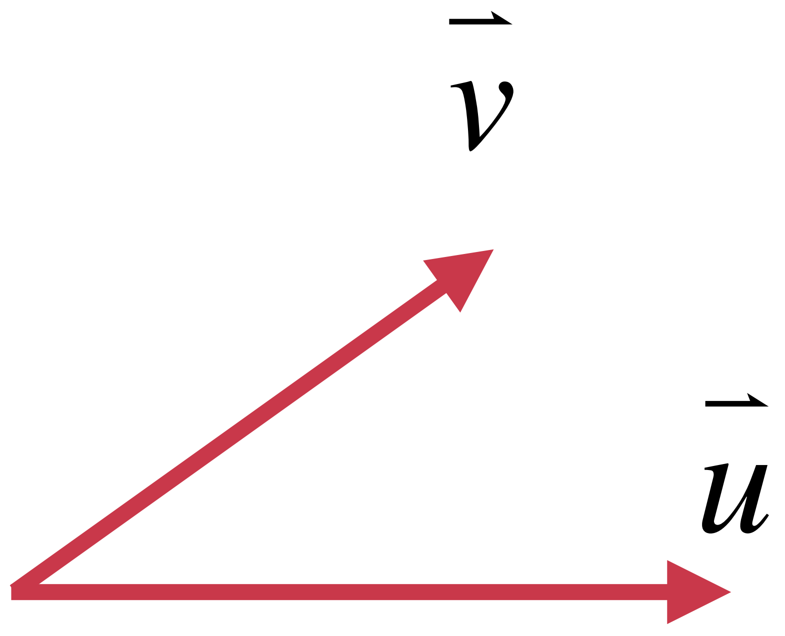
如果 $\vec{u}\cdot\vec{v}<0$，两个向量夹角为钝角；

向量点乘的应用

如果 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ ，两个向量垂直；



如果 $\vec{u}\cdot\vec{v}>0$ ，两个向量夹角为锐角；



如果 $\vec{u}\cdot\vec{v}<0$ ，两个向量夹角为钝角；

向量点乘的应用

回忆标准单位向量：

二维空间：

$\overrightarrow{e_1} = (1,0)$ $\overrightarrow{e_2} = (0,1)$ $\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} = 0$

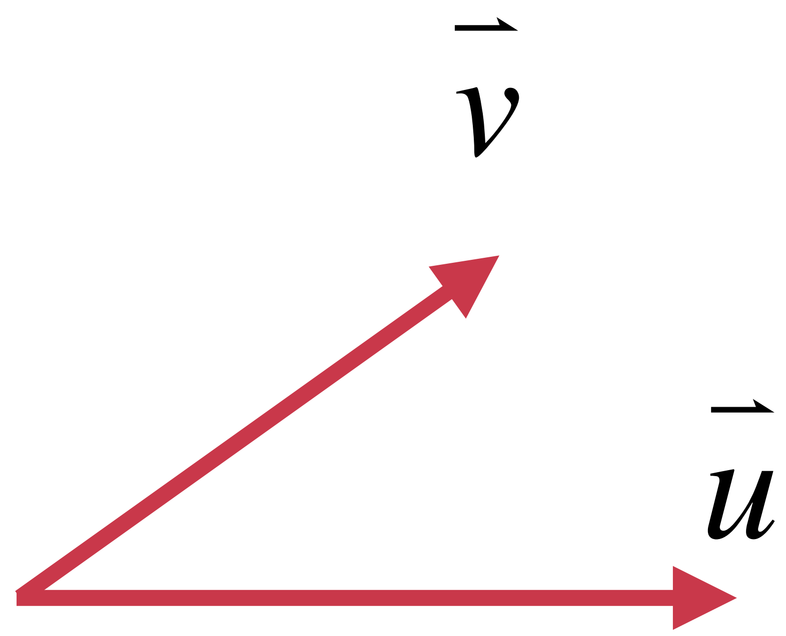
三维空间：

$\overrightarrow{e_1} = (1,0,0)$ $\overrightarrow{e_2} = (0,1,0)$ $\overrightarrow{e_3} = (0,0,1)$

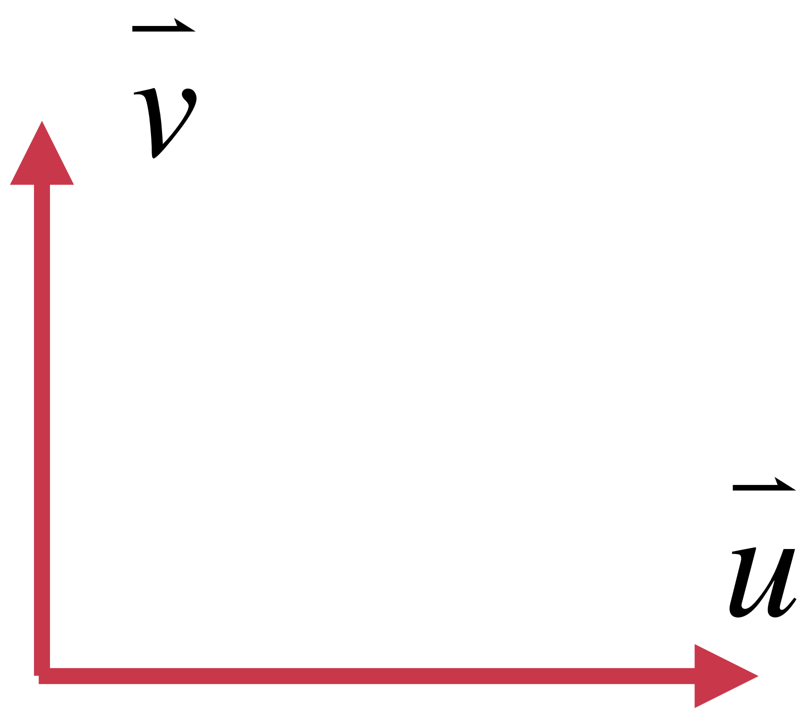
$\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} = 0$ $\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_3} = 0$ $\overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_3} = 0$

向量点乘的应用

判断两个向量的相似程度（推荐系统）



相似

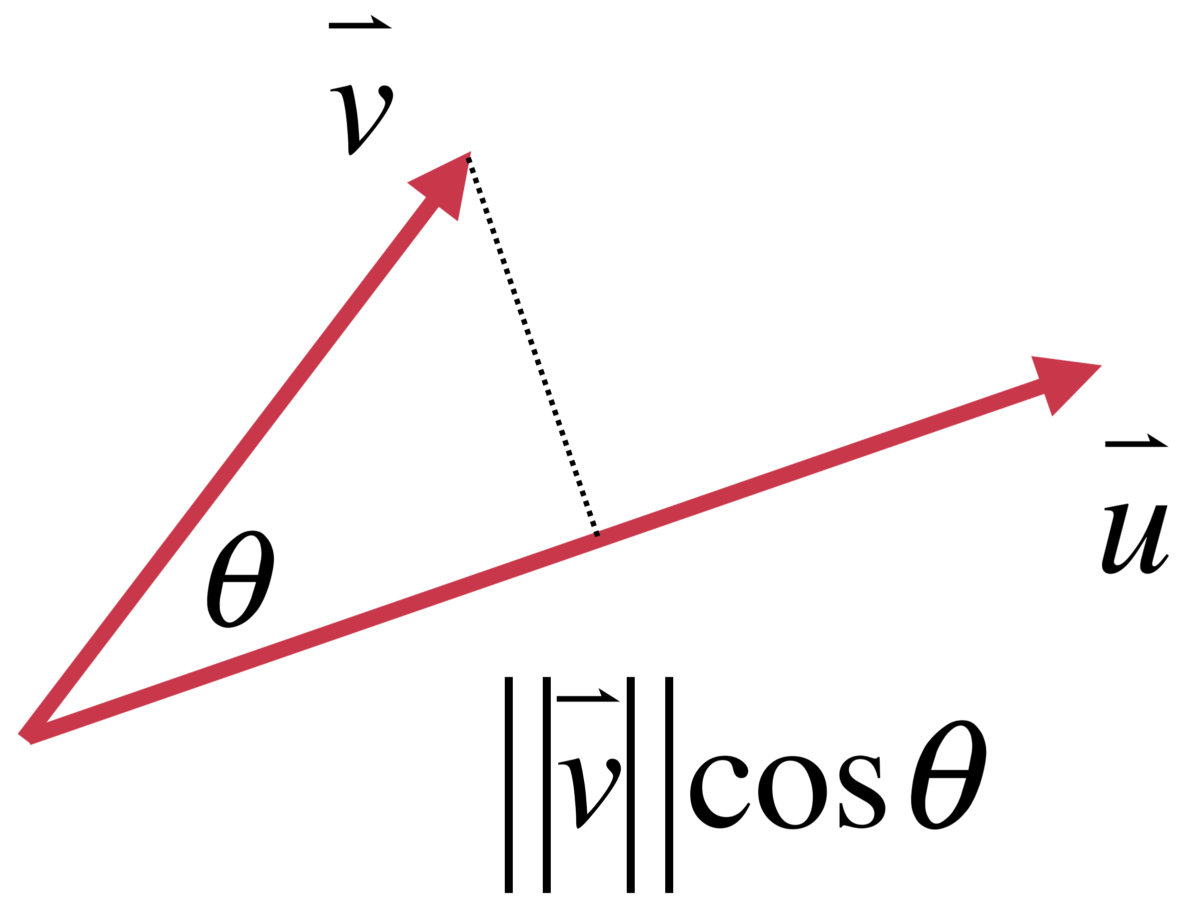


无关

背离

向量点乘的应用

几何计算



投影点的坐标?

投影点的距离 $d = \|\vec{v}\|\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|}$

投影点的方向 $\hat{u}$

投影点的坐标 $P_v = d\cdot\hat{u}$