线性系统

线性系统与消元法

什么是线性系统

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x+4y=6 \end{cases}$$

什么是线性?

未知数只能是一次方项

非线性方程：

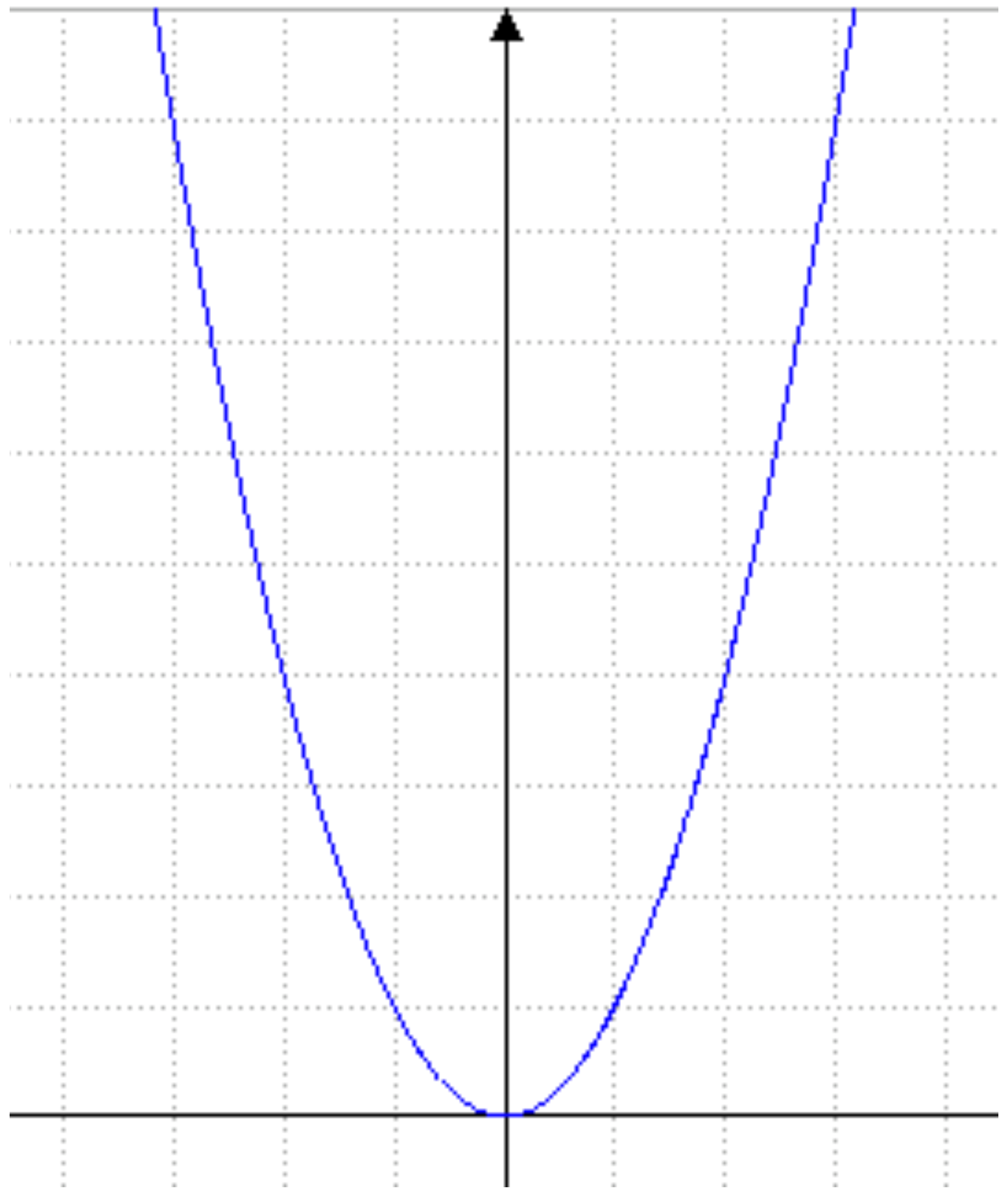
$$x^2-1=0 \qquad \sqrt{z}-4=0 \qquad \sin(x)=\pi$$

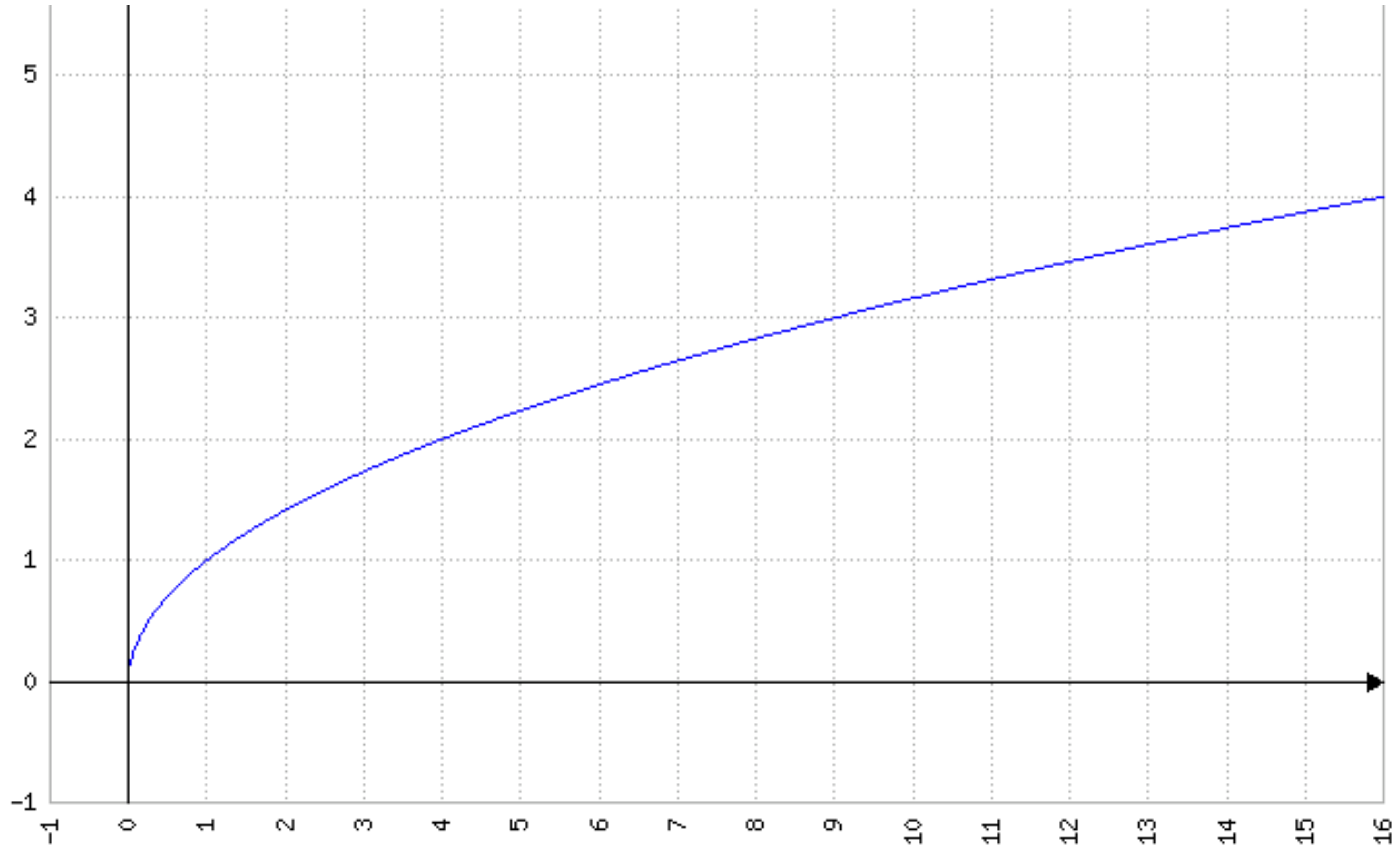
什么是线性系统

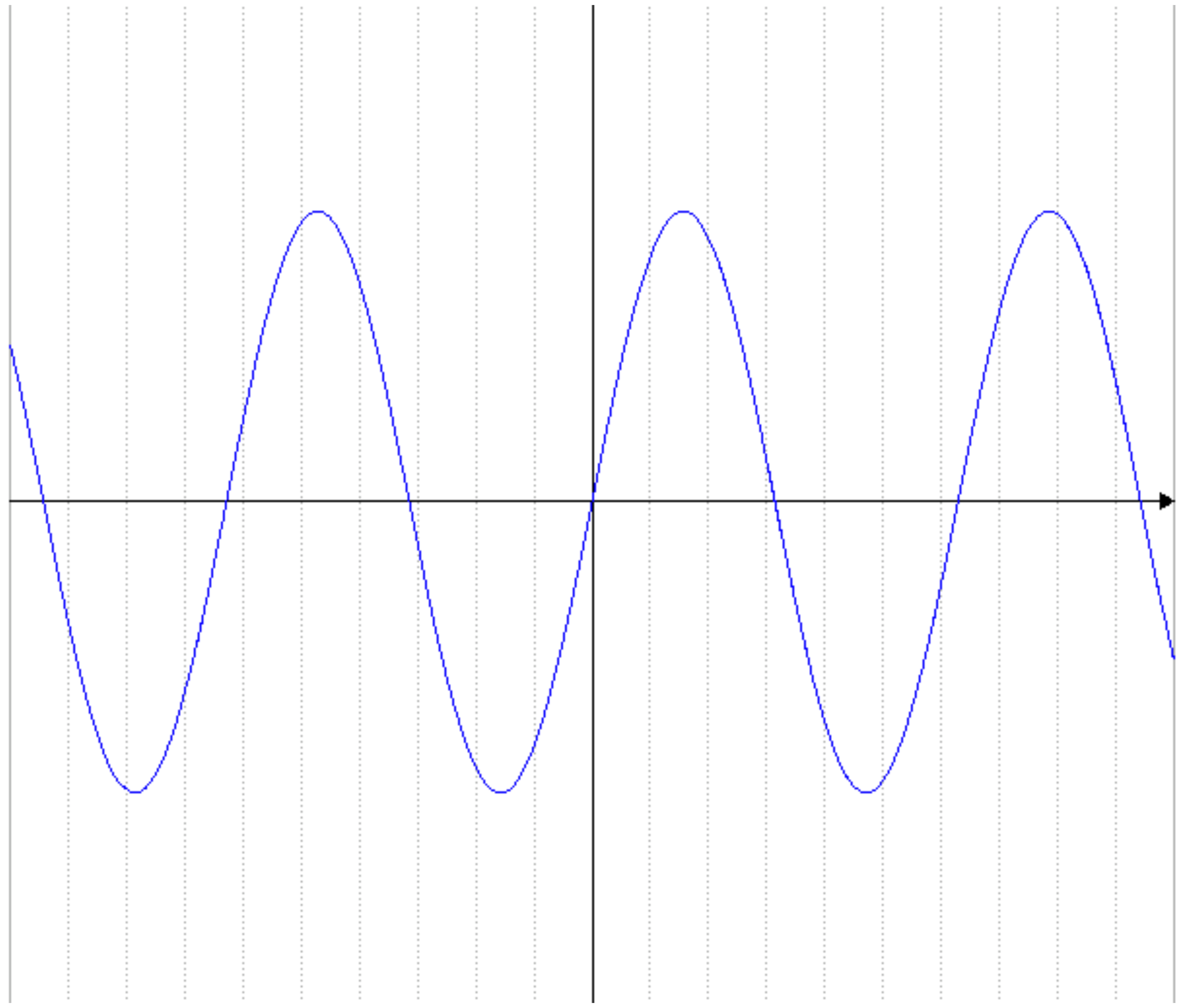
$$x^2 - 1 = 0$$

$$\sqrt{z} - 4 = 0$$

$$\sin(x) = \pi$$

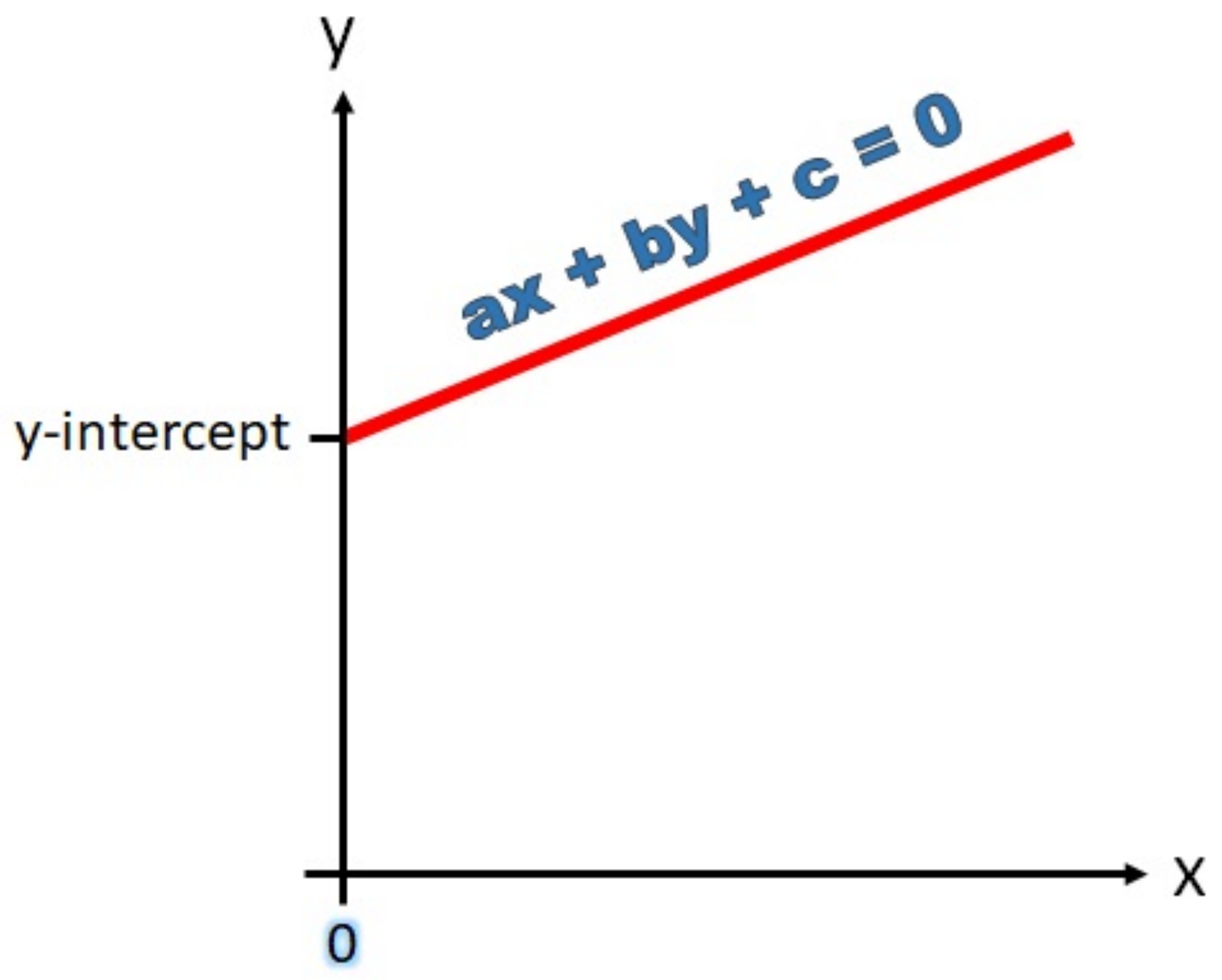






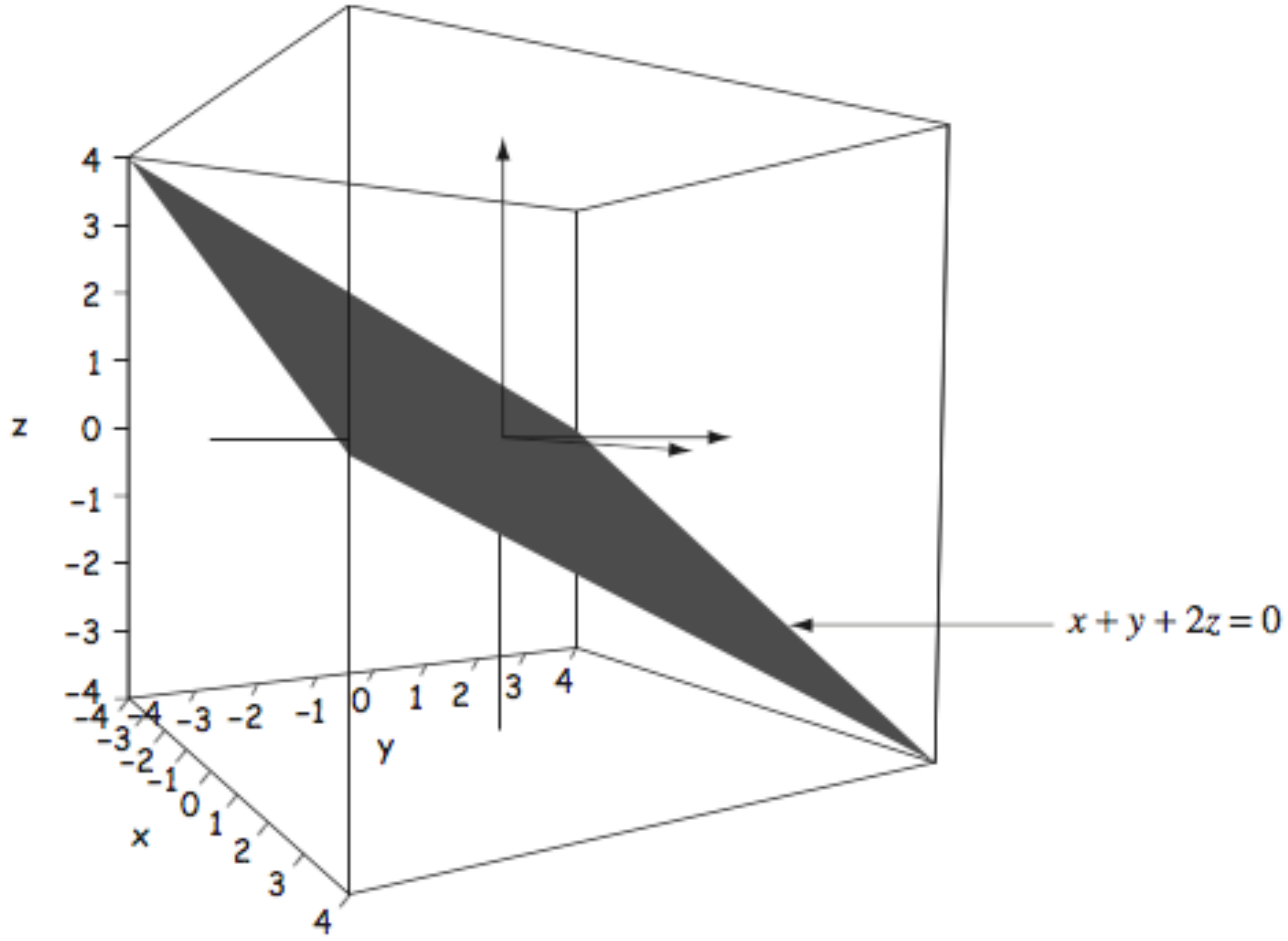
什么是线性系统

$$ax + by = c \qquad\qquad ax + by + c = 0$$



什么是线性系统

$$x + y + 2z = 0$$



什么是线性系统

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x+4y=6 \end{cases} \qquad (3x+4y)-3(x+2y)=6-3*5$$

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ -2y=-9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y=5 \\ y=4.5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-4 \\ y=4.5 \end{cases}$$

什么是线性系统

$$\begin{cases} x+2y+4z=7 \\ 3x+7y+2z=-11 \\ 2x+3y+3z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y+4z=7 \\ y-10z=-32 \\ 2x+3y+3z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y+4z=7 \\ y-10z=-32 \\ -y-5z=-13 \end{cases}$$

什么是线性系统

$$\begin{cases} x+2y+4z=7 \\ 3x+7y+2z=-11 \\ 2x+3y+3z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+4z=7 \\ y-10z=-32 \\ -y-5z=-13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+4z=7 \\ y-10z=-32 \\ -15z=-45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+4z=7 \\ y-10z=-32 \\ z=3 \end{cases}$$

什么是线性系统

$$\begin{cases} x+2y+4z=7 \\ 3x+7y+2z=-11 \\ 2x+3y+3z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+4z=7 \\ y-10z=-32 \\ -y-5z=-13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+4z=7 \\ y-10z=-32 \\ z=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+4z=7 \\ y=-2 \\ z=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \\ z=3 \end{cases}$$

消元法

$$\begin{cases} x+2y+4z=7 \\ 3x+7y+2z=-11 \\ 2x+3y+3z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y+4z=7 \\ y-10z=-32 \\ -y-5z=-13 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y+4z=7 \\ y-10z=-32 \\ z=3 \end{cases}$$

一个方程的左右两边同时乘以一个常数

一个方程加（减）另一个方程

交换两个方程的位置

高斯消元法

消元法

$$\begin{cases} x+2y+4z=7 \\ 3x+7y+2z=-11 \\ 2x+3y+3z=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y+4z=7 \\ y-10z=-32 \\ -y-5z=-13 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y+4z=7 \\ y-10z=-32 \\ z=3 \end{cases}$$

一个方程的左右两边同时乘以一个常数

一个方程加（减）另一个方程

交换两个方程的位置

消元法

$$\begin{cases} x+2y+4z=7 \\ 3x+7y+2z=-11 \\ 2x+3y+3z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y+4z=7 \\ y-10z=-32 \\ -y-5z=-13 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y+4z=7 \\ y-10z=-32 \\ z=3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

消元法

$$\begin{cases} x+2y+4z=7 \\ 3x+7y+2z=-11 \\ 2x+3y+3z=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y+4z=7 \\ y-10z=-32 \\ -y-5z=-13 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y+4z=7 \\ y-10z=-32 \\ z=3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & -11 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & -1 & -5 & -13 \end{array}\right)$$

增广矩阵

消元法

$$\begin{cases} x+2y+4z=7 \\ 3x+7y+2z=-11 \\ 2x+3y+3z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y+4z=7 \\ y-10z=-32 \\ -y-5z=-13 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y+4z=7 \\ y-10z=-32 \\ z=3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & -11 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & -1 & -5 & -13 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & 0 & -15 & -45 \end{array}\right)$$

消元法

$$\begin{cases} x+2y+4z=7 \\ 3x+7y+2z=-11 \\ 2x+3y+3z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y+4z=7 \\ y-10z=-32 \\ -y-5z=-13 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y+4z=7 \\ y-10z=-32 \\ z=3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & -11 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & -1 & -5 & -13 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

高斯消元法

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & -11 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & -1 & -5 & -13 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

一个方程的左右两边同时乘以一个常数

一个方程加（减）另一个方程

交换两个方程的位置

高斯消元法

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & -11 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & -1 & -5 & -13 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

一个方程的左右两边同时乘以一个常数

一个方程加（减）另一个方程

交换两个方程的位置

高斯消元法

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & -11 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & -1 & -5 & -13 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

矩阵的某一行乘以一个常数

一个方程加（减）另一个方程

交换两个方程的位置

高斯消元法

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & -11 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & -1 & -5 & -13 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

矩阵的某一行乘以一个常数

矩阵的一行加（减）另一行

交换两个方程的位置

高斯消元法

主元 pivot

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & -11 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & -1 & -5 & -13 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

矩阵的某一行乘以一个常数

矩阵的一行加（减）另一行

交换矩阵的两行

高斯消元法

$$\begin{cases} 2x-3y=35 \\ x-y=2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc:c} 2 & -3 & 35 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

高斯消元法

主元 pivot

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

高斯消元法

$$\begin{cases} -3y+4z=5 \\ x-y+2z=8 \\ 3x+8y-2z=11 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 0 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 8 \\ 3 & 8 & -2 & 11 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 3 & 8 & -2 & 11 \\ 1 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & -3 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

高斯消元法

主元 pivot

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & -11 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & -1 & -5 & -13 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

矩阵的某一行乘以一个常数

矩阵的一行加（减）另一行

交换矩阵的两行

高斯-约旦消元法

高斯消元法

$$\begin{cases} x+2y+4z=7 \\ 3x+7y+2z=-11 \\ 2x+3y+3z=1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & -11 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & -1 & -5 & -13 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

高斯消元法

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & -11 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x+2y+4z=7 \\ y-10z=-32 \\ z=3 \end{cases}$$

高斯消元法

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & -11 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x+2y+4z=7 \\ y-10z=-32 \\ z=3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

高斯消元法

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & -11 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -10 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x+2y=-5 \\ y=-2 \\ z=3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

高斯消元法

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

高斯-约旦消元法 Gauss-Jordan Elimination

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

前向过程（从上到下）

1. 选择最上的主元，化为1

2. 主元下面的所有行减去主元所在行的某个倍数，使得主元下面所有元素都为0

后向过程（从下到上）

1. 选择最下的主元

2. 主元上面的所有行减去主元所在行的某个倍数，使得主元上面所有元素都为0

实现高斯-约旦消元法

实践：实现高斯-约旦消元法

线性方程组解的结构

线性方程组解的结构

$$\begin{cases} x+y+2z=3 \\ -x+3y-5z=7 \\ 2x-2y+7z=1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & -2 & 7 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 10 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \to \quad 0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=5$$

无解!

线性方程组解的结构

$$\begin{cases} -x+2y+3z=0 \\ x-4y-13z=0 \\ -3x+5y+4z=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & -13 & 0 \\ -3 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -10 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

线性方程组解的结构

$$\begin{cases} -x+2y+3z=0 \\ x-4y-13z=0 \\ -3x+5y+4z=0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} -x-7z=0 \\ y+5z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-7z \\ y=-5z \end{cases}$$

z任意取值，都能得到一组x, y, z，满足方程组

方程组有无数组解！

线性方程组解的结构

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

线性方程组解的结构

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

方程组有唯一解

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

方程组无解

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

方程组有无数解

线性方程组解的结构

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

阶梯型矩阵

非零行的第一个元素（主元）为1

主元所在列的其他元素均为0

行最简形式

reduced row echelon form (RREF)

线性方程组解的结构

行最简形式

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

线性方程组解的结构

行最简形式

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

不是行最简形式!

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

线性方程组解的结构

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

方程组有唯一解

方程组无解

方程组有无数解

线性方程组解的结构

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 \neq 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

方程组有唯一解　　方程组无解　　方程组有无数解

线性方程组解的结构

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \end{array}\right)$$

方程组有唯一解

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 \neq 0 \end{array}\right)$$

方程组无解

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

方程组有无数解

A非零行 = 未知数个数

系数矩阵非零行 <
行最简形式非零行

A非零行 < 未知数个数

线性方程组解的结构

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \end{array}\right)$$

方程组有唯一解 A非零行 = 未知数个数

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & c_3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

方程组有无数解 A非零行 < 未知数个数

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

直观理解线性方程组解的结构

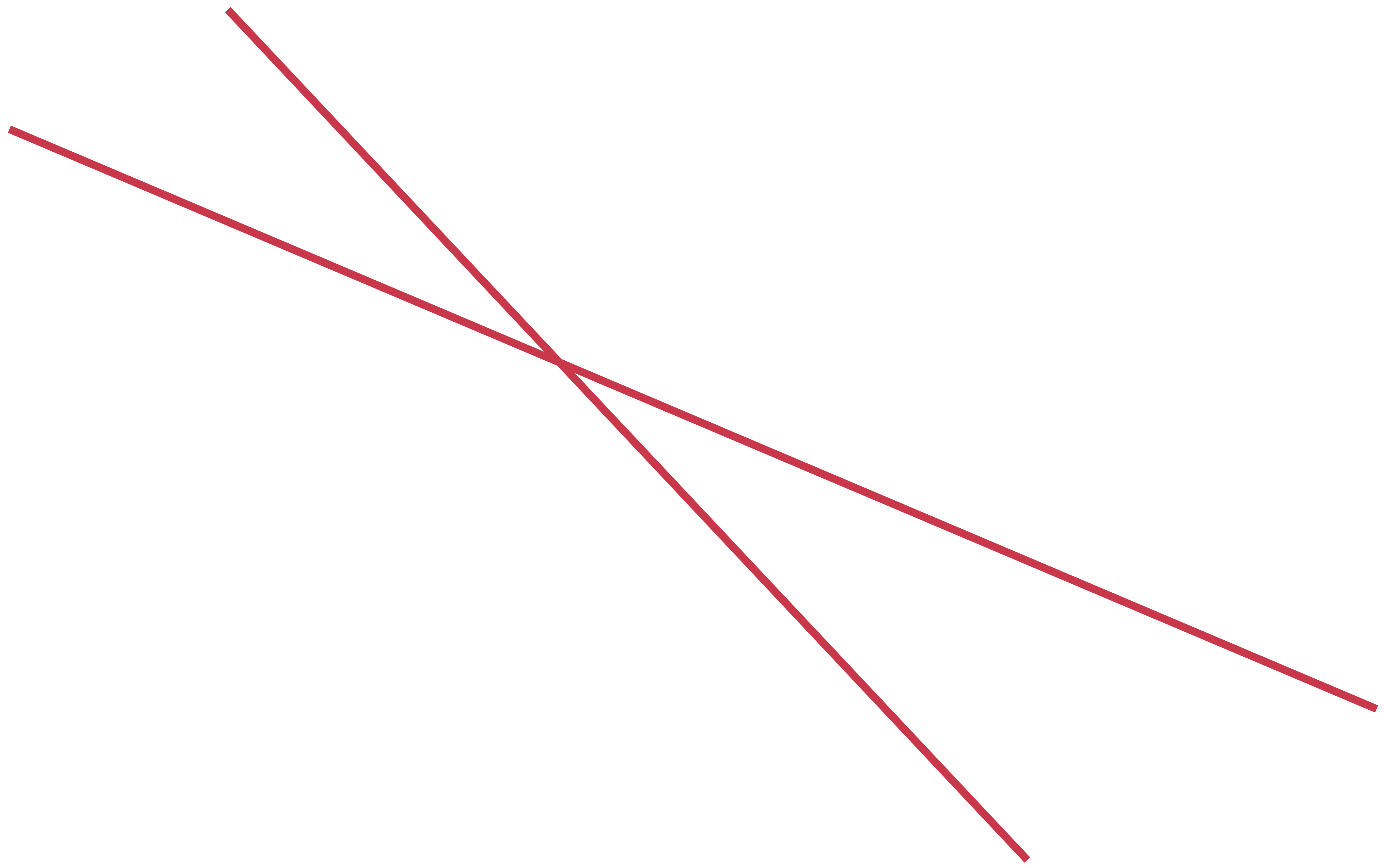
线性方程组解的结构

方程的个数

n个未知数有n个方程，才可能有唯一解

$$2x+2y=3$$

$$2x+y=2$$



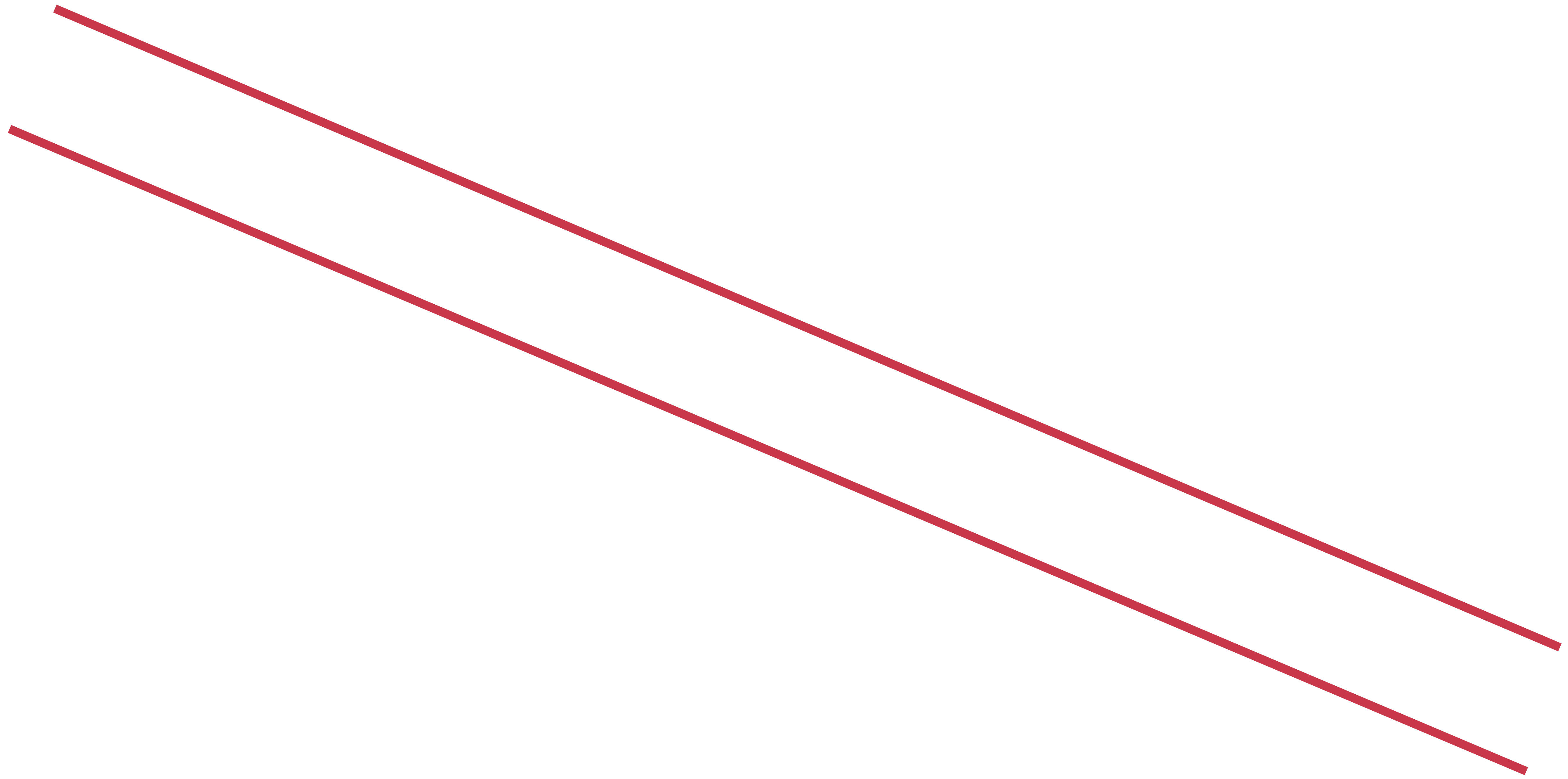
线性方程组解的结构

方程的个数

n个未知数有n个方程，才可能有唯一解

$$2x+2y=3$$

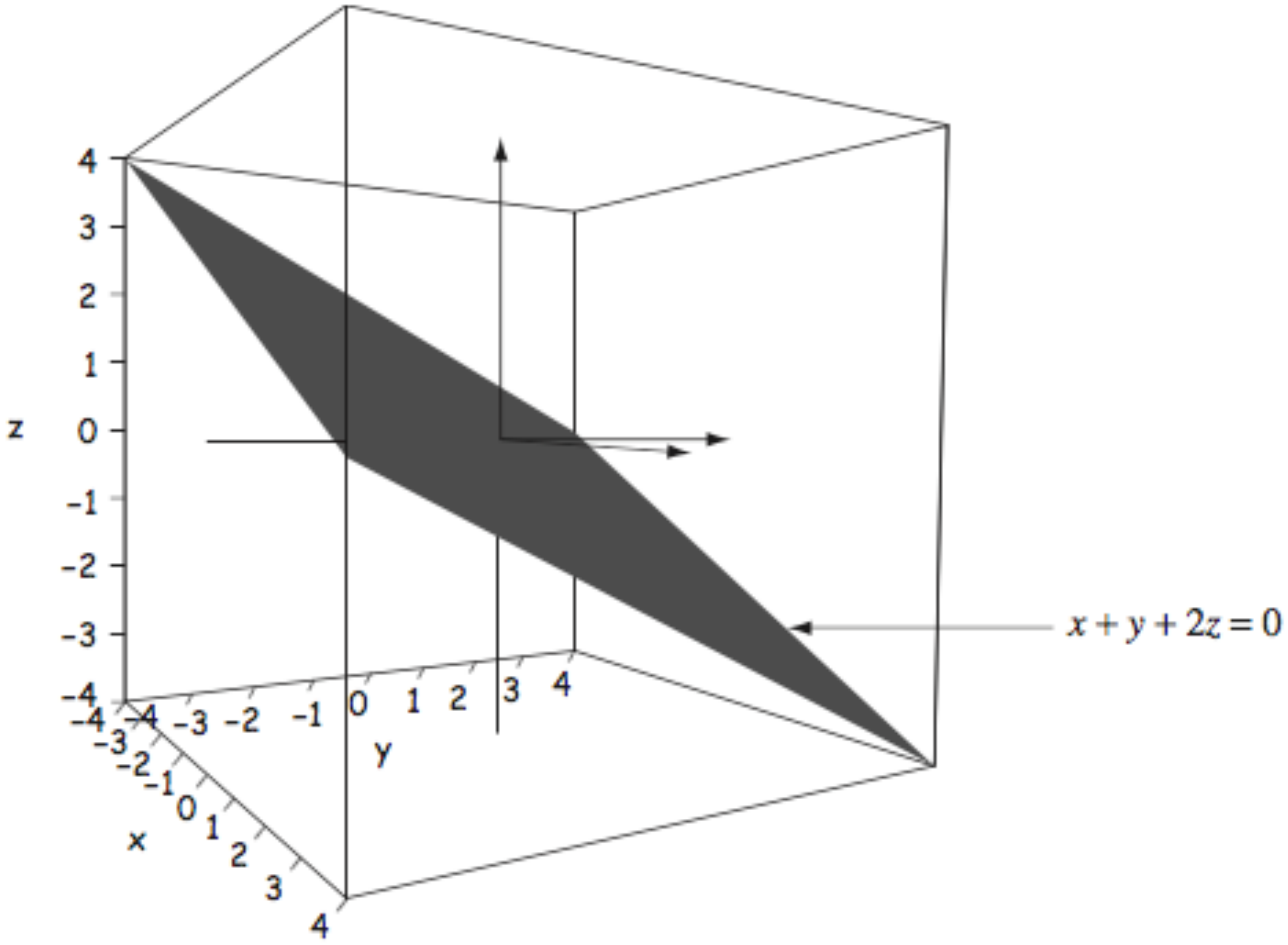
$$2x+2y=2$$



线性方程组解的结构

方程的个数　　　　n个未知数有n个方程，才可能有唯一解

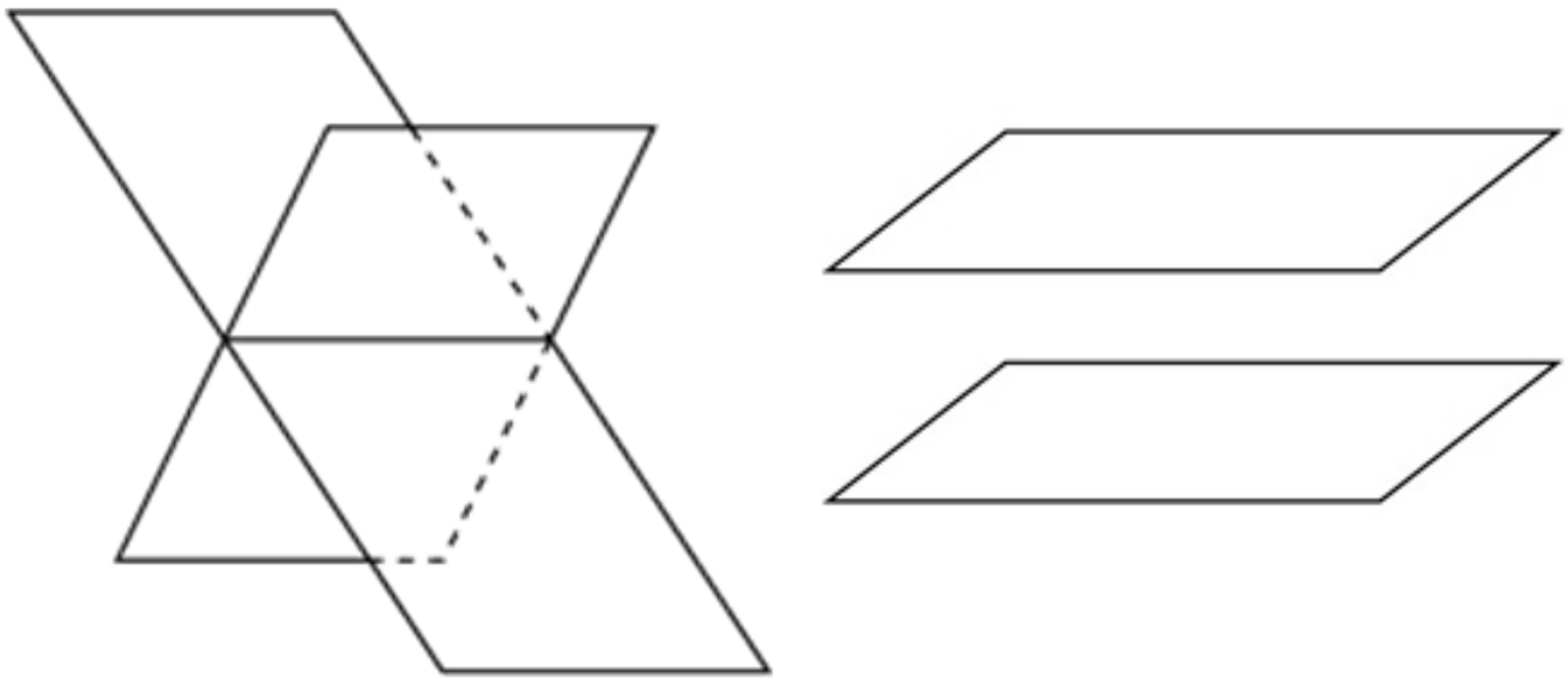
$$x+y+2z=0$$



线性方程组解的结构

方程的个数　　n个未知数有n个方程，才可能有唯一解

两个三元方程联立



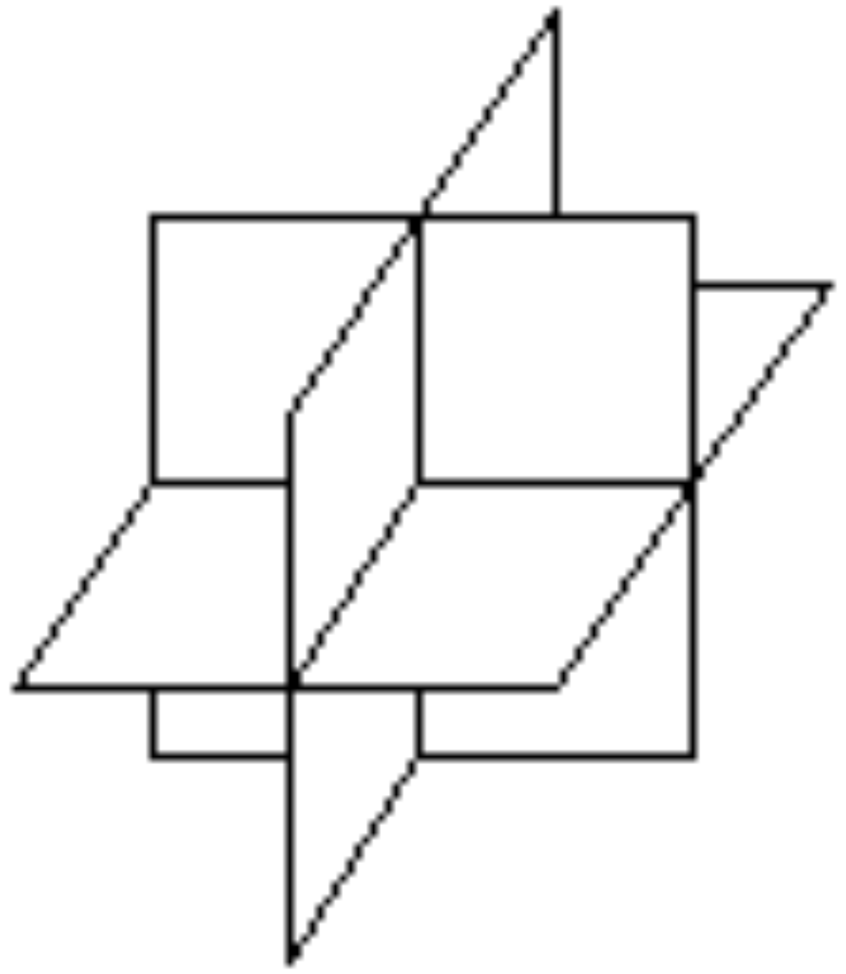
方程组个数小于未知数个数，
一定没有唯一解

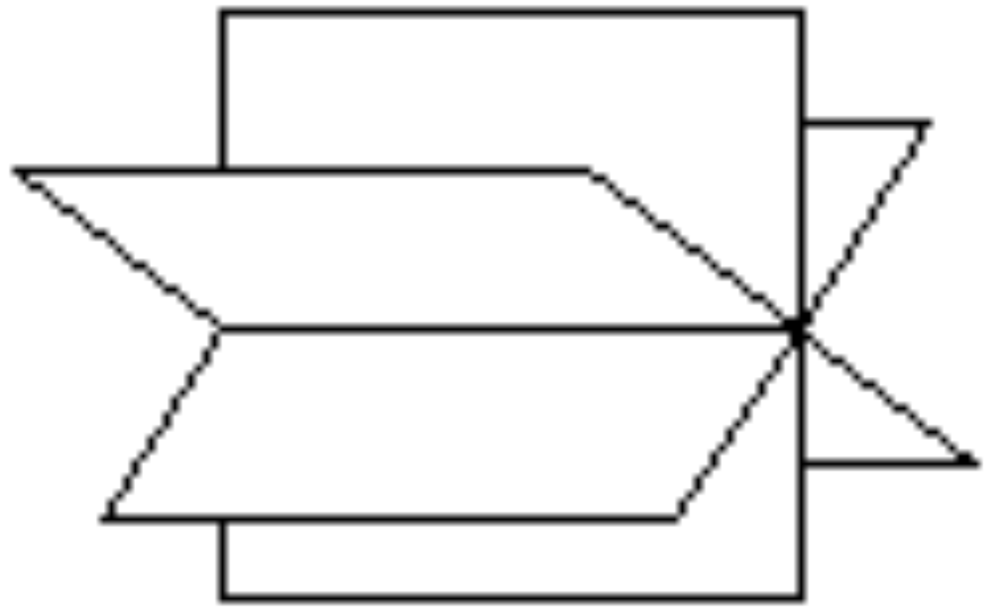
可能无解

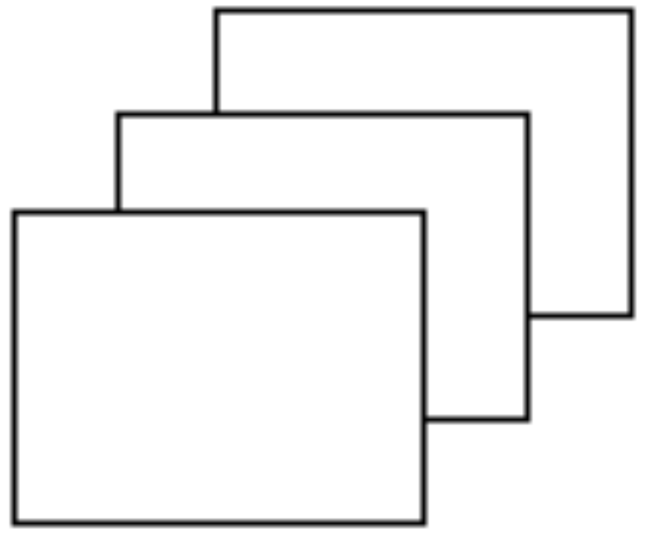
线性方程组解的结构

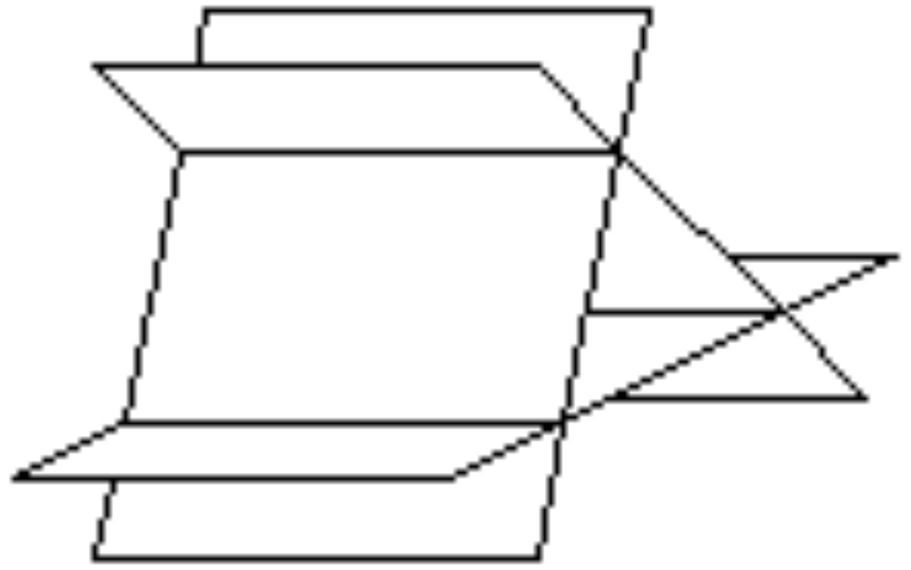
方程的个数　　　　　n个未知数有n个方程，才可能有唯一解

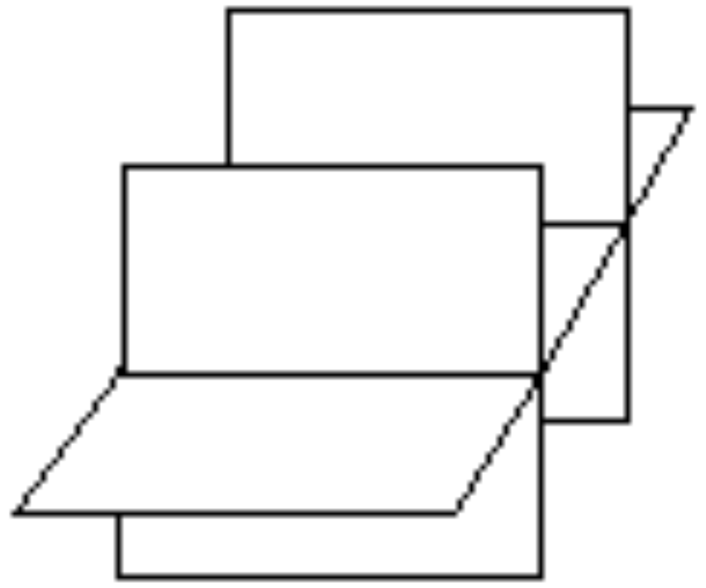
三个三元方程联立







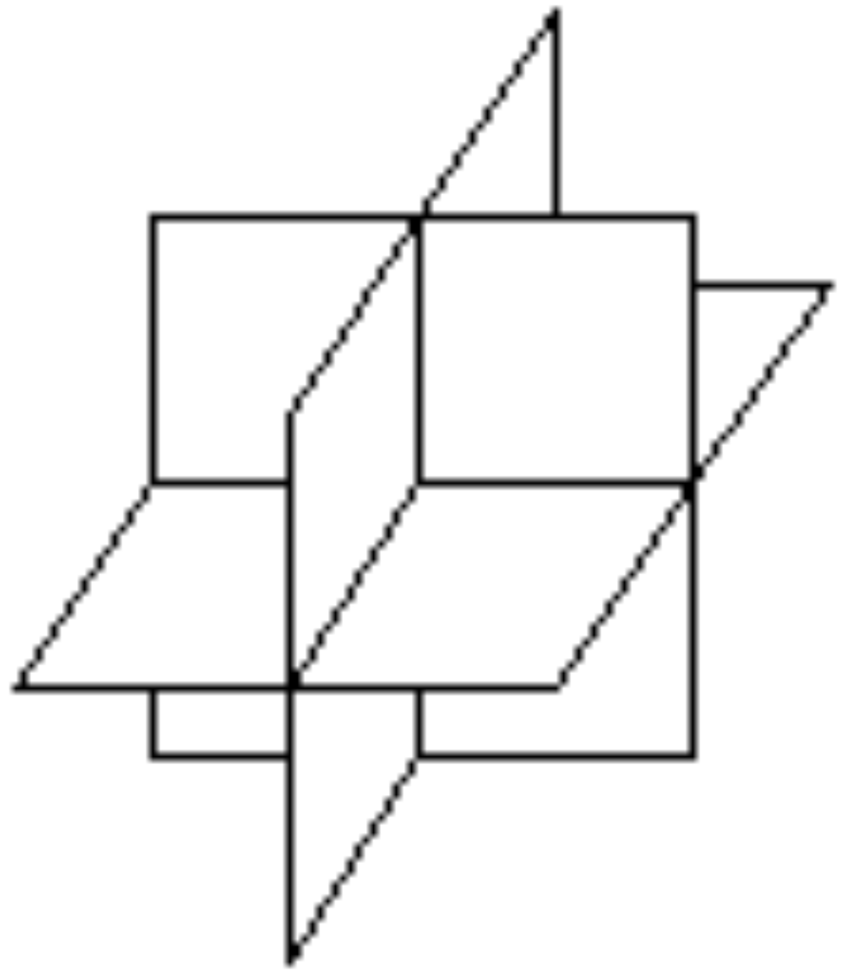


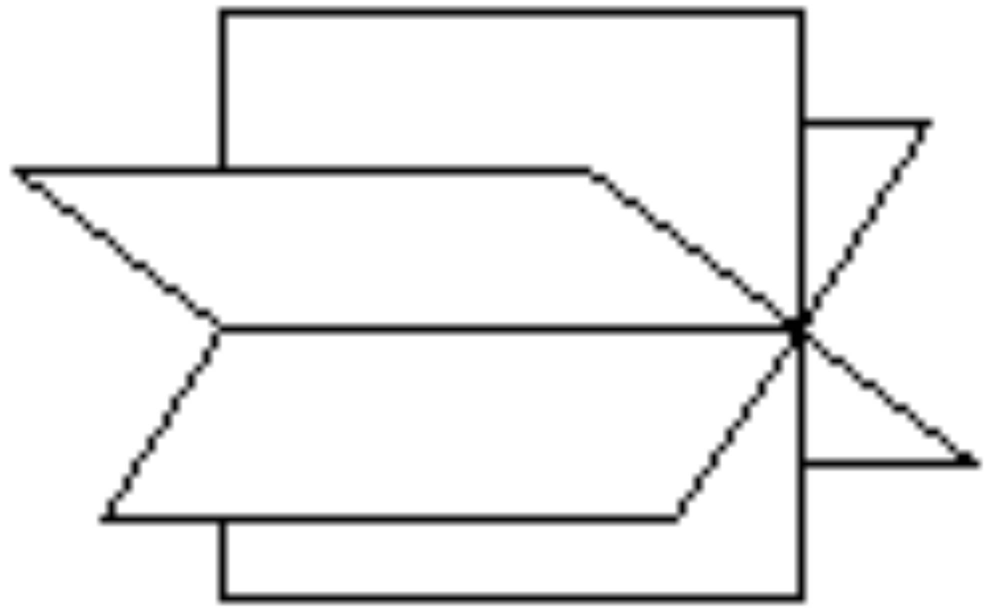


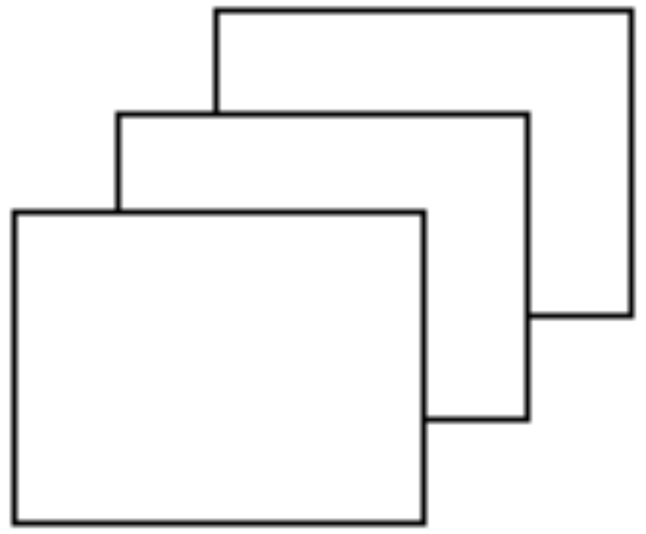
线性方程组解的结构

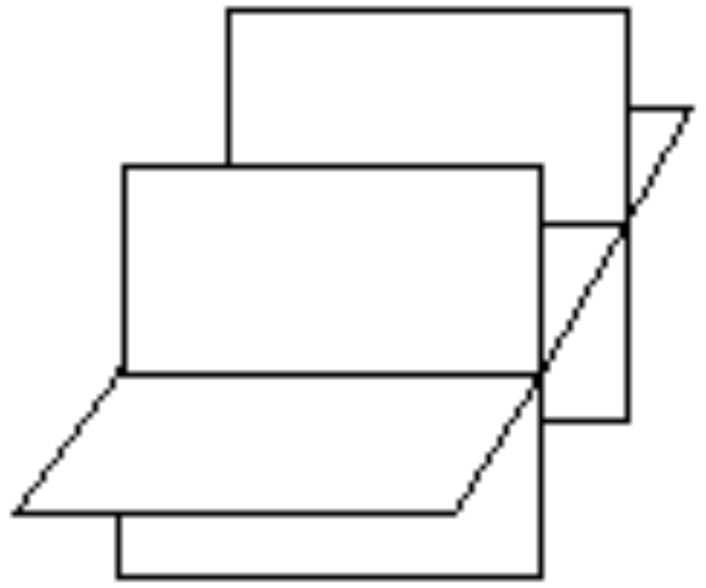
方程的个数　　　　　　n个未知数有n个方程，才可能有唯一解

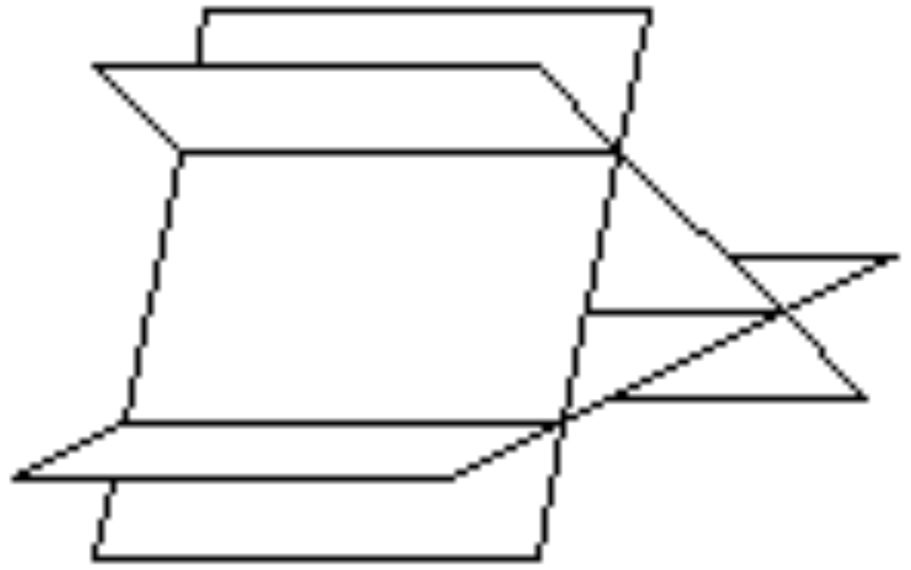
四个三元方程联立?







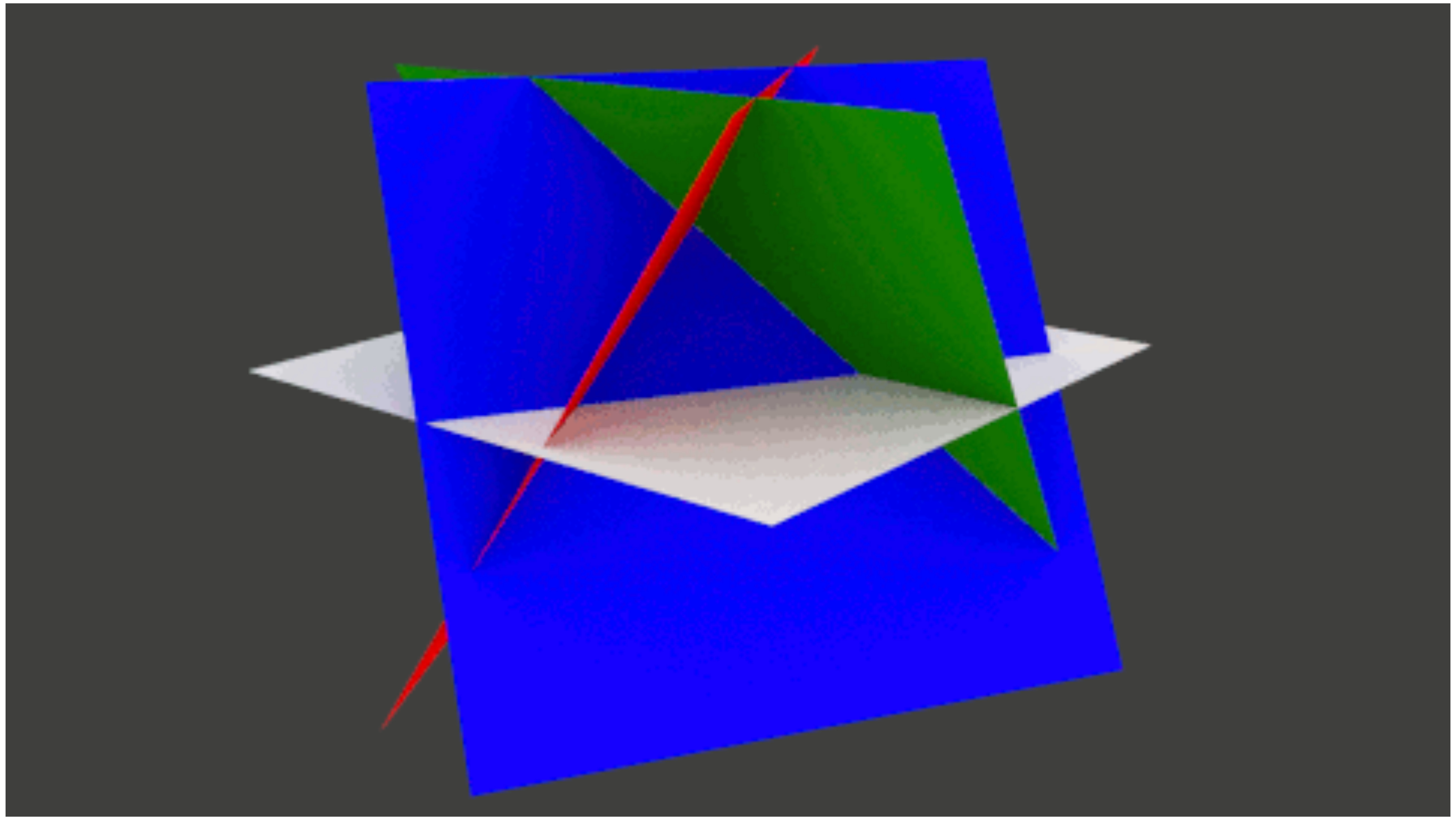




线性方程组解的结构

方程的个数　　　　　n个未知数有n个方程，才可能有唯一解

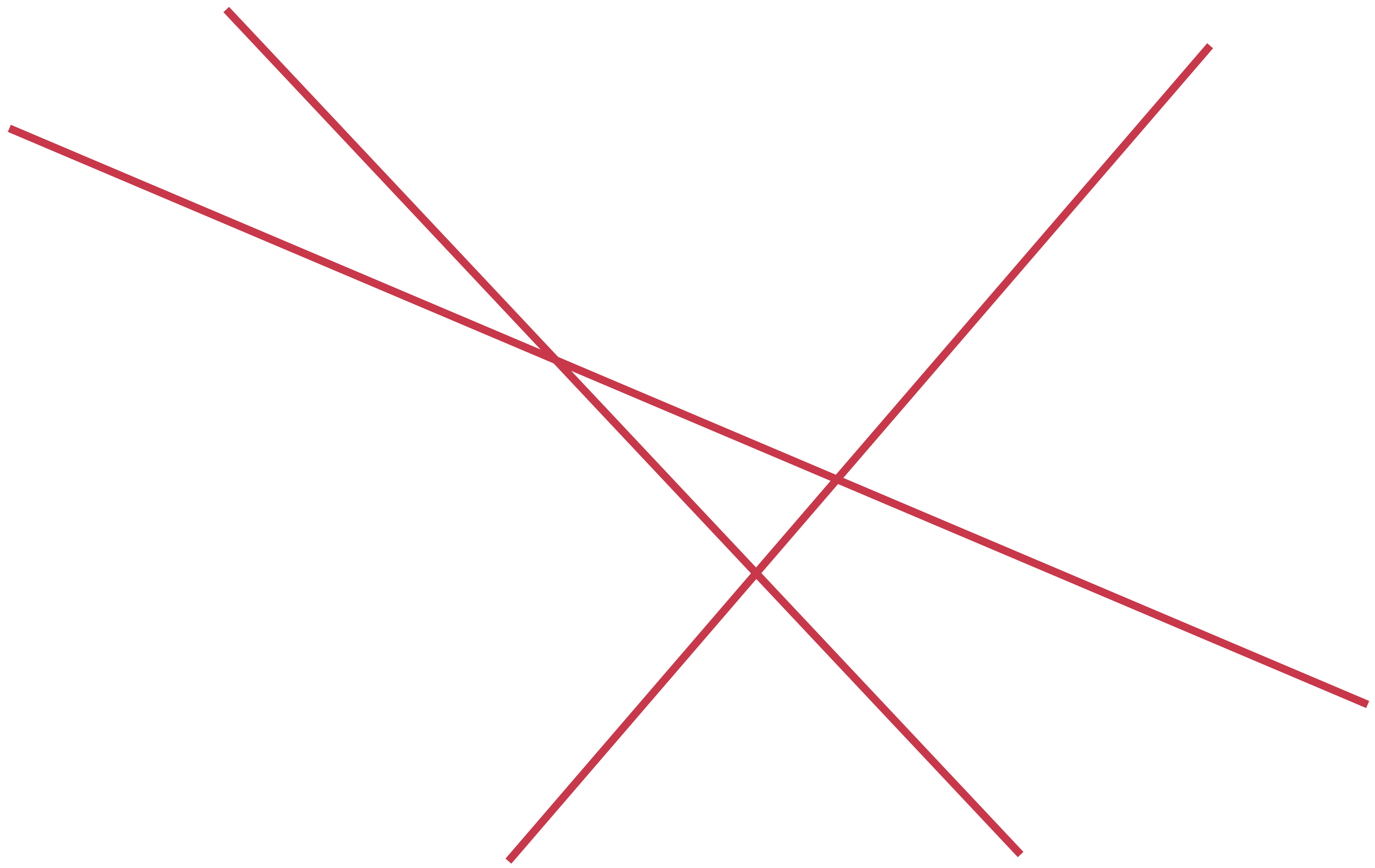
四个三元方程联立?



线性方程组解的结构

方程的个数　　　　n个未知数有n个方程，才可能有唯一解

三个二元方程联立?

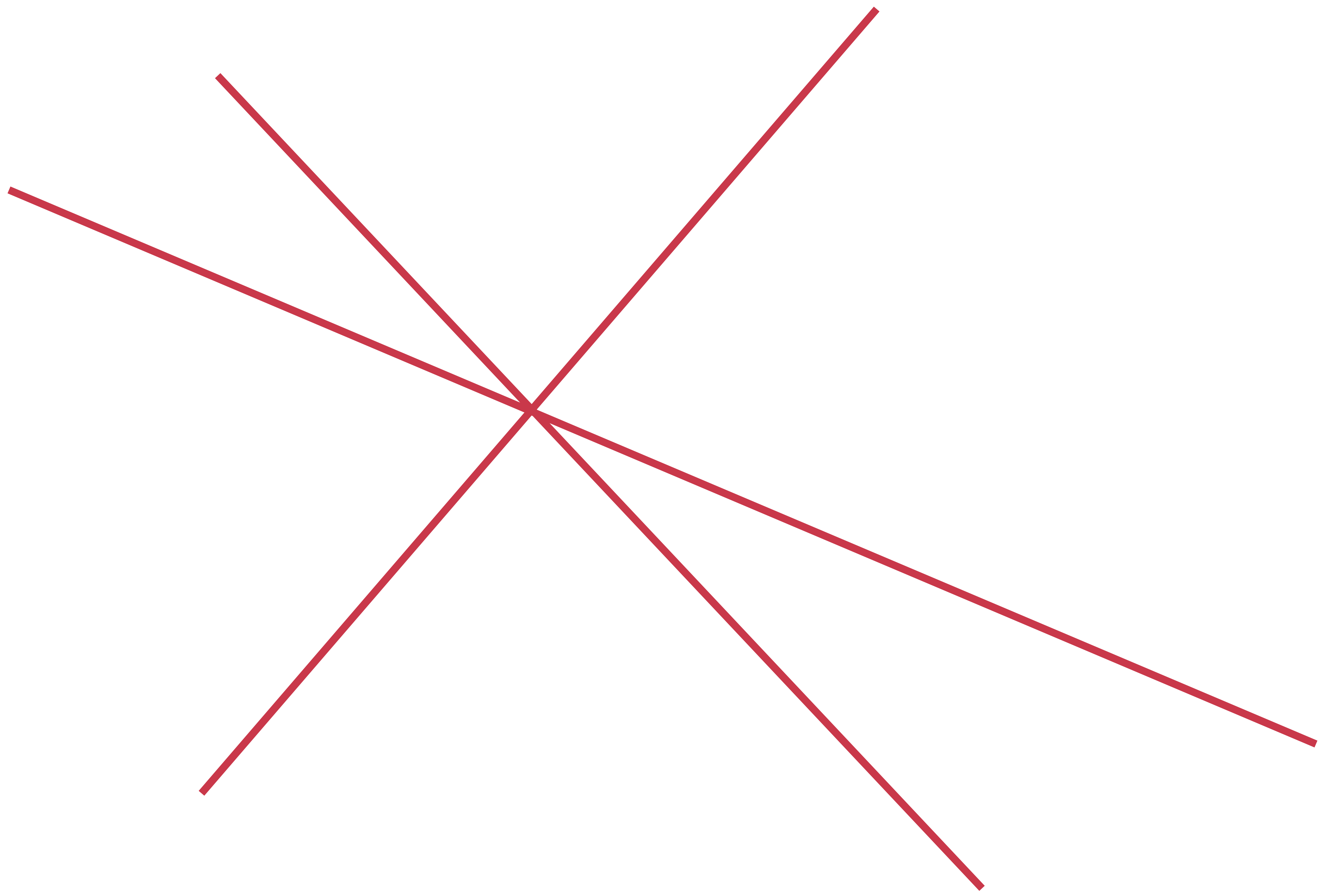


线性方程组解的结构

方程的个数

n个未知数有n个方程，才可能有唯一解

三个二元方程联立?



线性方程组解的结构

方程的个数　　　　　n个未知数有n个方程，才可能有唯一解

三个二元方程联立?

方程个数多于未知数个数

可能唯一解；可能无解；可能无数解

线性方程组解的结构

方程个数 < 未知数	方程个数 = 未知数	方程个数 > 未知数
无解	无解	无解
	唯一解	唯一解
无数解	无数解	无数解

线性方程组解的结构

方程个数 > 未知数

无解

唯一解

无数解

对于行最简形式，
系数矩阵的非零行不可能大于未知数个数

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{array}\right)$$

线性方程组解的结构

方程个数 < 未知数	方程个数 = 未知数	方程个数 > 未知数
无解	无解	无解
	唯一解	唯一解
无数解	无数解	无数解

线性方程组解的结构

行最简形式A非零行 < 未知数	行最简形式A非零行 = 未知数
无解	无解
	唯一解
无数解	无数解

线性方程组解的结构

行最简形式A非零行 < 未知数	行最简形式A非零行 = 未知数
	唯一解
无数解	无数解

线性方程组解的结构

行最简形式A非零行 = 未知数

唯一解

无数解

行最简形式，
系数矩阵的非零行等于未知数个数：
一定有唯一解

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

线性方程组解的结构

行最简形式A非零行 < 行最简形式Ab非零行：无解

行最简形式A非零行 < 未知数	行最简形式A非零行 = 未知数
无数解	唯一解

更一般的线性系统求解

高斯-约旦消元法 Gauss-Jordan Elimination

前向过程（从上到下）

1. 选择最上的主元，化为1

2. 主元下面的所有行减去主元所在行的某个倍数，使得主元下面所有元素都为0

后向过程（从下到上）

1. 选择最下的主元

2. 主元上面的所有行减去主元所在行的某个倍数，使得主元上面所有元素都为0

更一般的线性系统求解

$$\begin{cases} x & -y & +2z & & +3u & = & 1 \\ -x & +y & & +2w & -5u & = & 5 \\ x & -y & +4z & +2w & +4u & = & 13 \\ -2x & +2y & -5z & -w & -3u & = & -1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -5 & 5 \\ 1 & -1 & 4 & 2 & 4 & 13 \\ -2 & 2 & -5 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

更一般的线性系统求解

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -5 & 5 \\ 1 & -1 & 4 & 2 & 4 & 13 \\ -2 & 2 & -5 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

更一般的线性系统求解

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -5 & 5 \\ 1 & -1 & 4 & 2 & 4 & 13 \\ -2 & 2 & -5 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

更一般的线性系统求解

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -5 & 5 \\ 1 & -1 & 4 & 2 & 4 & 13 \\ -2 & 2 & -5 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

更一般的线性系统求解

$$\begin{cases} x - y + 2z + 3u = 1 \\ -x + y + 2w - 5u = 5 \\ x - y + 4z + 2w + 4u = 13 \\ -2x + 2y - 5z - w - 3u = -1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x - y - 2w = -15 \\ z + w = 5 \\ u = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -15 + 2w + y \\ z = 5 - w \\ u = 2 \end{cases}$$

主元列

自由列

更一般的线性系统求解

$$
\left\{
\begin{array}{rrrrrcr}
x & -y & +2z & & +3u & = & 1 \\
-x & +y & & +2w & -5u & = & 5 \\
x & -y & +4z & +2w & +4u & = & 13 \\
-2x & +2y & -5z & -w & -3u & = & -1
\end{array}
\right.
\longrightarrow
\left(
\begin{array}{ccccc:c}
1 & -1 & 0 & -2 & 0 & -15 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\right)
$$

$$
\left\{
\begin{array}{c}
x - y - 2w = -15 \\
z + w = 5 \\
u = 2
\end{array}
\right.
\longrightarrow
\left\{
\begin{array}{c}
x = -15 + 2w + y \\
z = 5 - w \\
u = 2
\end{array}
\right.
\longrightarrow
\begin{pmatrix} x \\ z \\ u \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} -15 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} y
+
\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} w
$$

更一般的线性系统求解

$$\begin{cases} 2x+2y=3 \\ 2x+y=2.5 \\ x+2y=7 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cc:c} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2.5 \\ 1 & 2 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 1.5 \\ 2 & 1 & 2.5 \\ 1 & 2 & 7 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 1.5 \\ 0 & -1 & -0.5 \\ 0 & 1 & 5.5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 1 & 5.5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

实现更一般的线性系统求解

实践：实现更一般的线性系统求解

齐次线性方程组

齐次线性方程组

$$\begin{cases} -x+2y+3z=0 \\ x-4y-13z=0 \\ -3x+5y+4z=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & -13 & 0 \\ -3 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -10 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

齐次线性方程组

$$\begin{cases} -x+2y+3z=0 \\ x-4y-13z=0 \\ -3x+5y+4z=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & -13 & 0 \\ -3 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -10 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

齐次线性方程组

$$\begin{cases} -x+2y+3z=0 \\ x-4y-13z=0 \\ -3x+5y+4z=0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & -13 & 0 \\ -3 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

肯定有解

最后一列肯定永远为零

齐次线性方程组

$$\begin{cases} -x+2y+3z=0 \\ x-4y-13z=0 \\ -3x+5y+4z=0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -13 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

肯定有解

最后一列肯定永远为零

解的过程可以只对系数矩阵做操作

齐次线性方程组

$$\begin{cases} -x+2y+3z=0 \\ x-4y-13z=0 \\ -3x+5y+4z=0 \end{cases}$$

齐次线性方程组

$$\begin{cases} -x+2y+3z=1 \\ x-4y-13z=2 \\ -3x+5y+4z=3 \end{cases}$$

非齐次线性方程组