矩阵不是简单的 m*n 个数

什么是矩阵

矩阵 Matrix


THE
MATRIX
MUSIC FROM THE MOTION PICTURE
PARENTAL ADVISORY EXPLICIT CONTENT

矩阵 Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

向量是对数的拓展，
一个向量表示一组数

矩阵是对向量的拓展，
一个矩阵表示一组向量

矩阵 Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

行向量

列向量

4 * 4 矩阵

行数为4，列数为4

矩阵 Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

3 * 4 矩阵

行数为3，列数为4

矩阵 Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

行数 = 列数 $\longrightarrow$ 方阵

方阵有很多特殊的性质

有很多特殊的矩阵是方阵

矩阵 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

a_{ij}

第i行　　第j列

和计算机中的二维数组的表示一样！

矩阵 Matrix

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \text{语文} & \text{数学} & \text{英语} & \text{物理} & \text{化学} \end{array} \\
A = & \left(\begin{array}{ccccc} 90 & 76 & 88 & 92 & 90 \\ 88 & 82 & 98 & 95 & 92 \\ 86 & 68 & 70 & 80 & 77 \end{array} \right) \begin{array}{c} \text{张三} \\ \text{李四} \\ \text{王五} \end{array}
\end{array}
$$

实现属于我们自己的矩阵类

实践： 实现属于我们自己的矩阵类

矩阵的基本运算

矩阵的基本运算

回忆向量的基本运算　$\vec{u}+\vec{v}$　$k\cdot\vec{u}$

矩阵的基本运算　$A+B$　$k\cdot A$

矩阵的基本运算

矩阵加法：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1c} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2c} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rc} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1c} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2c} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rc} \end{pmatrix}$$

$$A+B$$

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1c}+b_{1c} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2c}+b_{2c} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1}+b_{r1} & a_{r2}+b_{r2} & \dots & a_{rc}+b_{rc} \end{pmatrix}$$

矩阵的基本运算

矩阵加法： $A+B$

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{语文} & \text{数学} & \text{英语} & \text{物理} & \text{化学} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 90 & 76 & 88 & 92 & 90 \\ 88 & 82 & 98 & 95 & 92 \\ 86 & 68 & 70 & 80 & 77 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{张三} \\ \text{李四} \\ \text{王五} \end{array}$$

上学期成绩

$$B=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{语文} & \text{数学} & \text{英语} & \text{物理} & \text{化学} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 92 & 74 & 96 & 92 & 95 \\ 88 & 92 & 94 & 86 & 78 \\ 82 & 74 & 80 & 88 & 80 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{张三} \\ \text{李四} \\ \text{王五} \end{array}$$

下学期成绩

矩阵的基本运算

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1c} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2c} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rc} \end{pmatrix}$$

矩阵数量乘法：

$$k \cdot A$$

$$k \cdot A = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \dots & k \cdot a_{1c} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \dots & k \cdot a_{2c} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k \cdot a_{r1} & k \cdot a_{r2} & \dots & k \cdot a_{rc} \end{pmatrix}$$

矩阵的基本运算

矩阵数量乘法： $k \cdot A$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} 语文 & 数学 & 英语 & 物理 & 化学 \end{array} \\
A = & \begin{pmatrix} 90 & 76 & 88 & 92 & 90 \\ 88 & 82 & 98 & 95 & 92 \\ 86 & 68 & 70 & 80 & 77 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 张三 \\ 李四 \\ 王五 \end{array}
\end{array}
$$

上学期成绩

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} 语文 & 数学 & 英语 & 物理 & 化学 \end{array} \\
B = & \begin{pmatrix} 92 & 74 & 96 & 92 & 95 \\ 88 & 92 & 94 & 86 & 78 \\ 82 & 74 & 80 & 88 & 80 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 张三 \\ 李四 \\ 王五 \end{array}
\end{array}
$$

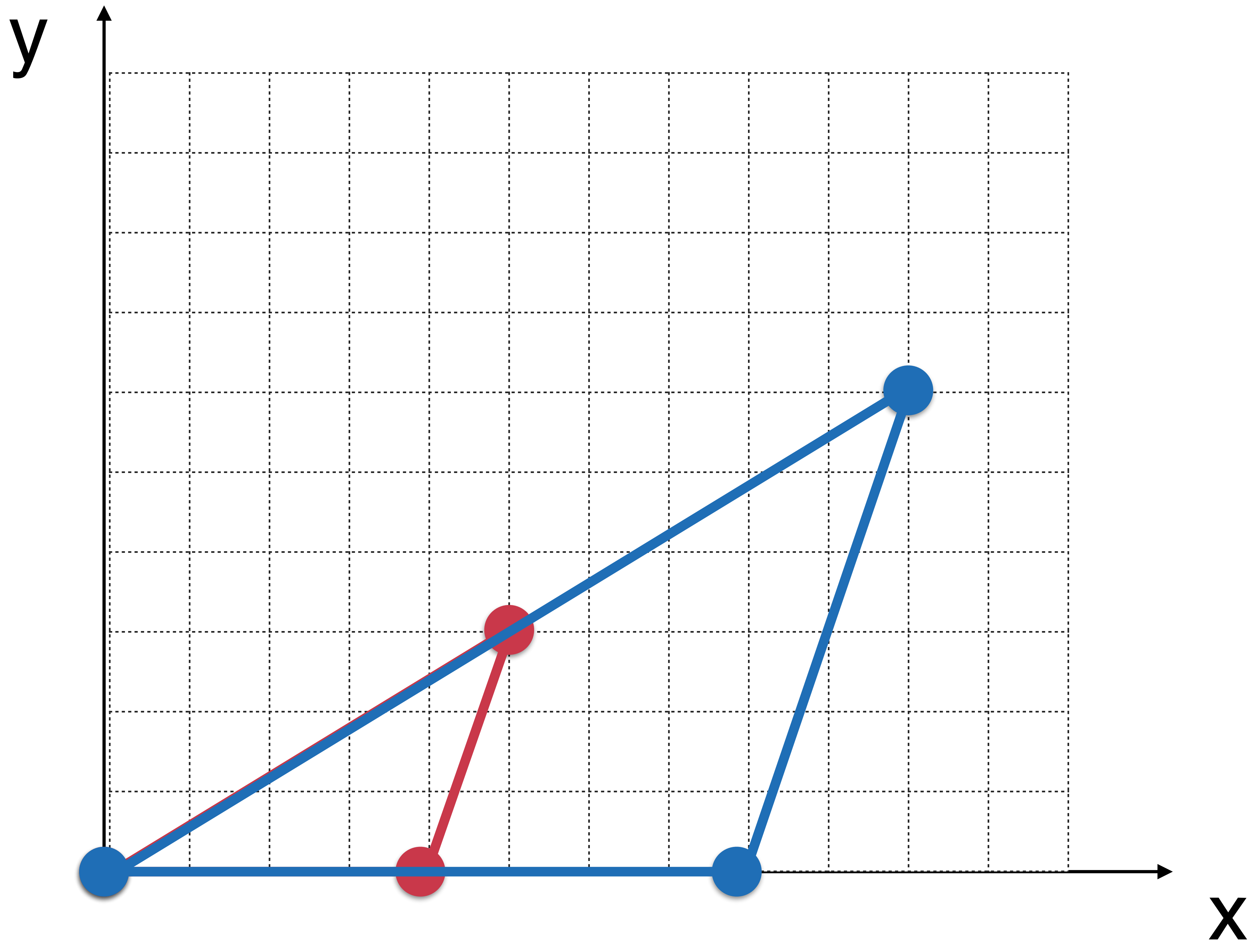
下学期成绩

$$\frac{1}{2} \cdot (A + B)$$

两学期成绩的平均分

矩阵的基本运算

矩阵数量乘法： $k \cdot A$



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 0 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$$

矩阵的基本运算性质

矩阵的基本运算 $A+B$ $k\cdot A$

矩阵的基本运算性质 $A+B=B+A$

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

存在矩阵O，满足：$A+O=A$

存在矩阵-A，满足：$A+(-A)=O$

$-A$ 唯一；$-A=-1\cdot A$

矩阵的基本运算性质

矩阵的基本运算性质

$$(ck)A = c(kA)$$

$$k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$$

$$(c + k) \cdot A = c \cdot A + k \cdot A$$

矩阵的基本运算性质

$$k\cdot(A+B)=k\cdot A+k\cdot B$$

基本证明思路：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1c} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2c} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rc} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1c} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2c} \\ \dots & \dots & & \dots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rc} \end{pmatrix}$$

矩阵的基本运算性质

$$k\cdot(A+B)=k\cdot A+k\cdot B$$

基本证明思路：

$$k\cdot(A+B)=\begin{pmatrix} k(a_{11}+b_{11}) & k(a_{12}+b_{12}) & \dots & k(a_{1c}+b_{1c}) \\ k(a_{21}+b_{21}) & k(a_{22}+b_{22}) & \dots & k(a_{2c}+b_{2c}) \\ \dots & \dots & & \dots \\ k(a_{r1}+b_{r1}) & k(a_{r2}+b_{r2}) & \dots & k(a_{rc}+b_{rc}) \end{pmatrix}$$

$$k\cdot A+k\cdot B=\begin{pmatrix} ka_{11}+kb_{11} & ka_{12}+kb_{12} & \dots & ka_{1c}+kb_{1c} \\ ka_{21}+kb_{21} & ka_{22}+kb_{22} & \dots & ka_{2c}+kb_{2c} \\ \dots & \dots & & \dots \\ ka_{r1}+kb_{r1} & ka_{r2}+kb_{r2} & \dots & ka_{rc}+kb_{rc} \end{pmatrix}$$

矩阵的基本运算性质

$$A+B=B+A$$

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

$$(ck)A=c(kA)$$

存在矩阵O，满足： $A+O=A$

$$(c+k)\cdot A=c\cdot A+k\cdot A$$

存在矩阵-A，满足： $A+(-A)=O$

$$k\cdot(A+B)=k\cdot A+k\cdot B$$

$-A$ 唯一； $-A=-1\cdot A$

实现矩阵的基本运算

实践：实现矩阵的基本运算

看待矩阵的另一个视角：系统

矩阵 Matrix

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \text{语文} & \text{数学} & \text{英语} & \text{物理} & \text{化学} & \\
A = & \left(\begin{matrix} 90 \\ 88 \\ 86 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 76 \\ 82 \\ 68 \end{matrix} & \begin{matrix} 88 \\ 98 \\ 70 \end{matrix} & \begin{matrix} 92 \\ 95 \\ 80 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 90 \\ 92 \\ 77 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} \text{张三} \\ \text{李四} \\ \text{王五} \end{matrix}
\end{array}
$$

之前，我们的例子中，矩阵式一个数据表格

矩阵还可以表示一个系统

矩阵 Matrix

矩阵还可以表示一个系统

经济系统中，对IT，电子，矿产，房产的投入 x_{it} x_e x_m x_h

$$x_{it} = 100 + 0.2x_e + 0.1x_m + 0.5x_h$$

$$x_e = 50 + 0.5x_{it} + 0.2x_m + 0.1x_h$$

$$x_m = 20 + 0.4x_e + 0.3x_h$$

$$x_h = 666 + 0.2x_{it}$$

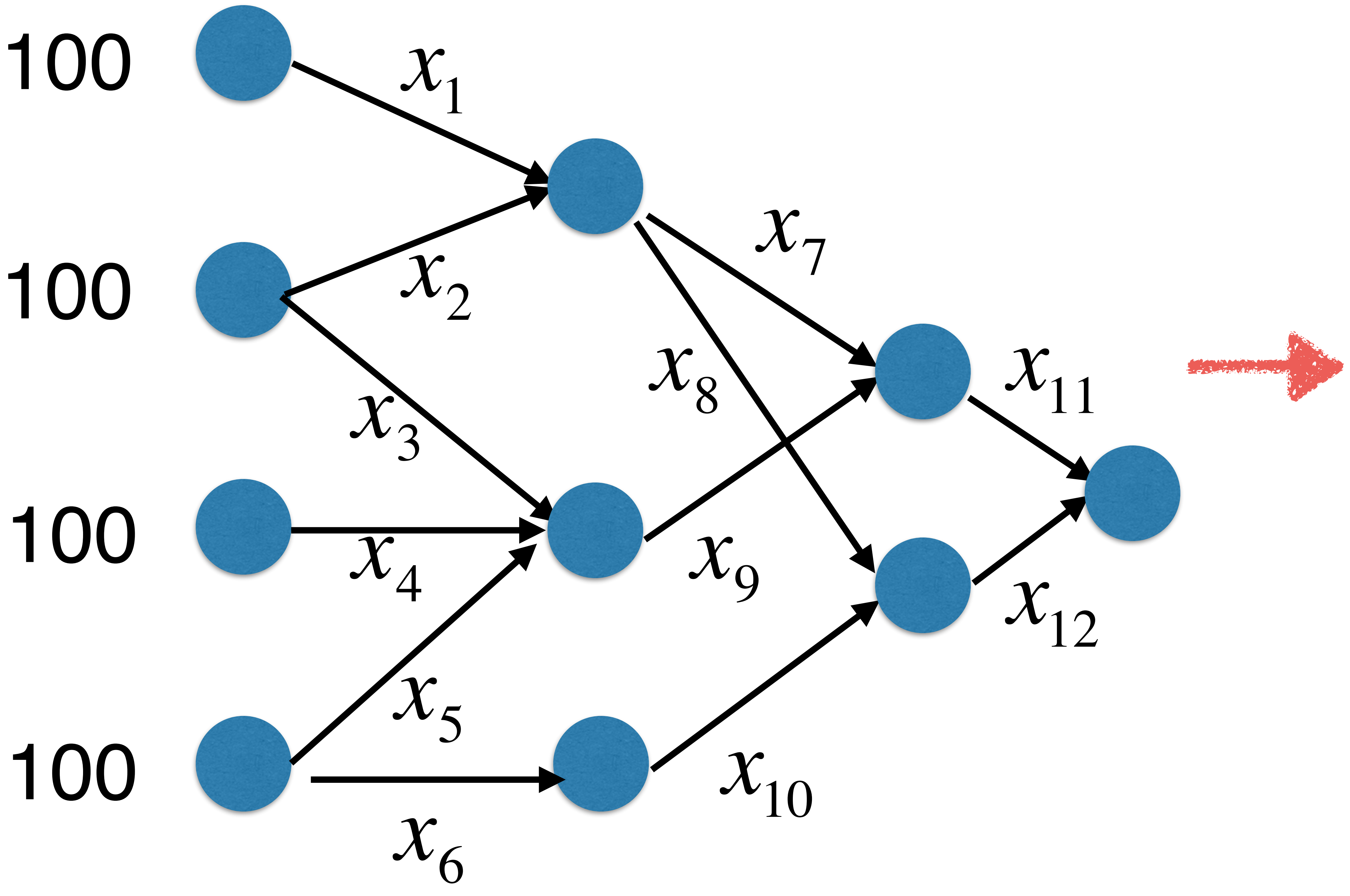
矩阵 Matrix

经济系统中，对IT，电子，矿产，房产的投入　x_{it}　x_e　x_m　x_h

$$
\begin{aligned}
x_{it} &= 100 + 0.2x_e + 0.1x_m + 0.5x_h \\
x_e &= 50 + 0.5x_{it} + 0.2x_m + 0.1x_h \\
x_m &= 20 + 0.4x_e + 0.3x_h \\
x_h &= 666 + 0.2x_{it}
\end{aligned}
\quad \rightarrow \quad
\begin{cases}
x_{it} - 0.2x_e + 0.1x_m + 0.5x_h = 100 \\
-0.5x_{it} - x_e + 0.2x_m + 0.1x_h = 50 \\
-0.4x_e - x_m + 0.3x_h = 20 \\
-0.2x_{it} + x_h = 666
\end{cases}
$$

矩阵 Matrix

网络中（交通网络，信息网络...）



$$x_1 = 100$$

$$x_2 + x_3 = 100$$

$$x_4 = 100$$

$$x_5 + x_6 = 100$$

$$x_7 + x_8 = x_1 + x_2$$

$$x_9 = x_3 + x_4 + x_5$$

$$x_{10} = x_6$$

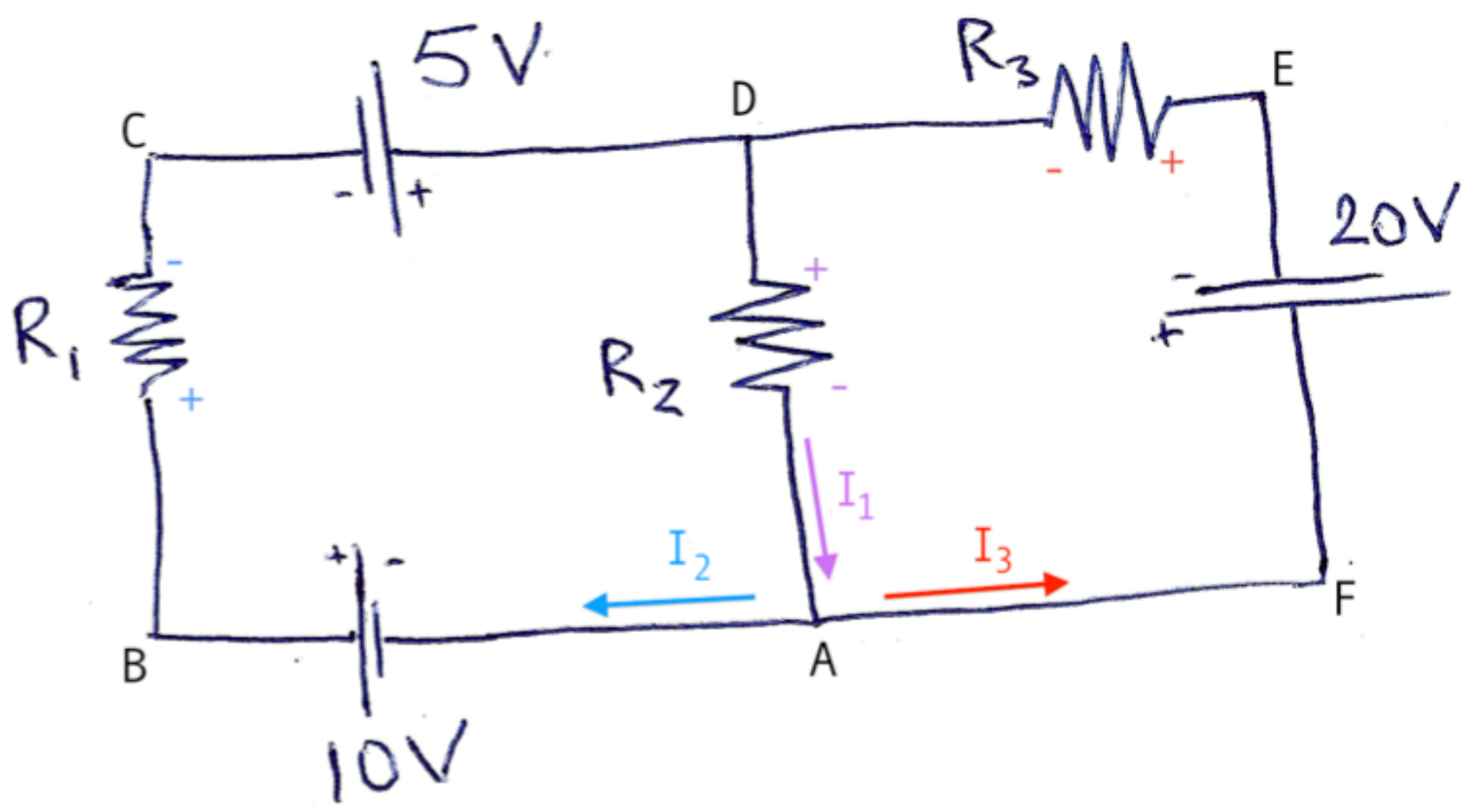
$$x_{11} = x_7 + x_9$$

$$x_{12} = x_8 + x_{10}$$

$$x_{11} + x_{12} = 400$$

矩阵 Matrix

电路系统中



$$10 - R_1 I_2 + 5 - R_2 I_1 = 0$$

$$-20 - R_3 I_3 - R_2 I_1 = 0$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$

矩阵 Matrix

化学方程式中

$$CH_4 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$$

$$aCH_4 + bO_2 \Rightarrow cCO_2 + dH_2O$$

$$a = c$$

$$4a = 2d$$

$$2b = 2c + d$$

矩阵 Matrix

线性方程组在各个领域，有着重要的应用

在线性代数中，称为线性系统

矩阵 Matrix

$$\begin{cases} x_{it} - 0.2x_e + 0.1x_m + 0.5x_h = 100 \\ -0.5x_{it} - x_e + 0.2x_m + 0.1x_h = 50 \\ -0.4x_e - x_m + 0.3x_h = 20 \\ -0.2x_{it} + x_h = 666 \end{cases}$$

矩阵 Matrix

$$\begin{cases} x_{it} - 0.2x_e + 0.1x_m + 0.5x_h = 100 \\ -0.5x_{it} - x_e + 0.2x_m + 0.1x_h = 50 \\ -0.4x_e - x_m + 0.3x_h = 20 \\ -0.2x_{it} + x_h = 666 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.2 & 0.1 & 0.5 \\ -0.5 & -1 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & -0.4 & -1 & 0.3 \\ -0.2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 20 \\ 666 \end{pmatrix}$$

列向量！

矩阵和向量的乘法

矩阵 Matrix

$$
\begin{cases}
x_{it} - 0.2x_e + 0.1x_m + 0.5x_h = 100 \\
-0.5x_{it} - x_e + 0.2x_m + 0.1x_h = 50 \\
-0.4x_e - x_m + 0.3x_h = 20 \\
-0.2x_{it} + x_h = 666
\end{cases}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & -0.2 & 0.1 & 0.5 \\
-0.5 & -1 & 0.2 & 0.1 \\
0 & -0.4 & -1 & 0.3 \\
-0.2 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x_{it} \\ x_e \\ x_m \\ x_h
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
100 \\ 50 \\ 20 \\ 666
\end{pmatrix}
$$

列向量！

矩阵和向量相乘

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.2 & 0.1 & 0.5 \\ -0.5 & -1 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & -0.4 & -1 & 0.3 \\ -0.2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{it} \\ x_e \\ x_m \\ x_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 20 \\ 666 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

矩阵和向量相乘

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.2 & 0.1 & 0.5 \\ -0.5 & -1 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & -0.4 & -1 & 0.3 \\ -0.2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{it} \\ x_e \\ x_m \\ x_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 20 \\ 666 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{it} - 0.2x_e + 0.1x_m + 0.5x_h \\ -0.5x_{it} - x_e + 0.2x_m + 0.1x_h \\ -0.4x_e - x_m + 0.3x_h \\ -0.2x_{it} + x_h \end{pmatrix}$$

矩阵和向量相乘

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.2 & 0.1 & 0.5 \\ -0.5 & -1 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & -0.4 & -1 & 0.3 \\ -0.2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{it} \\ x_e \\ x_m \\ x_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{it} - 0.2x_e + 0.1x_m + 0.5x_h \\ -0.5x_{it} - x_e + 0.2x_m + 0.1x_h \\ -0.4x_e - x_m + 0.3x_h \\ -0.2x_{it} + x_h \end{pmatrix}$$

矩阵和向量相乘

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.2 & 0.1 & 0.5 \\ -0.5 & -1 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & -0.4 & -1 & 0.3 \\ -0.2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{it} \\ x_e \\ x_m \\ x_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{it} - 0.2x_e + 0.1x_m + 0.5x_h \\ -0.5x_{it} - x_e + 0.2x_m + 0.1x_h \\ -0.4x_e - x_m + 0.3x_h \\ -0.2x_{it} + x_h \end{pmatrix}$$

矩阵和向量相乘

$$
\begin{pmatrix} 1 & -0.2 & 0.1 & 0.5 \\ -0.5 & -1 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & -0.4 & -1 & 0.3 \\ -0.2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_{it} \\ x_e \\ x_m \\ x_h \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} x_{it} - 0.2x_e + 0.1x_m + 0.5x_h \\ -0.5x_{it} - x_e + 0.2x_m + 0.1x_h \\ -0.4x_e - x_m + 0.3x_h \\ -0.2x_{it} + x_h \end{pmatrix}
$$

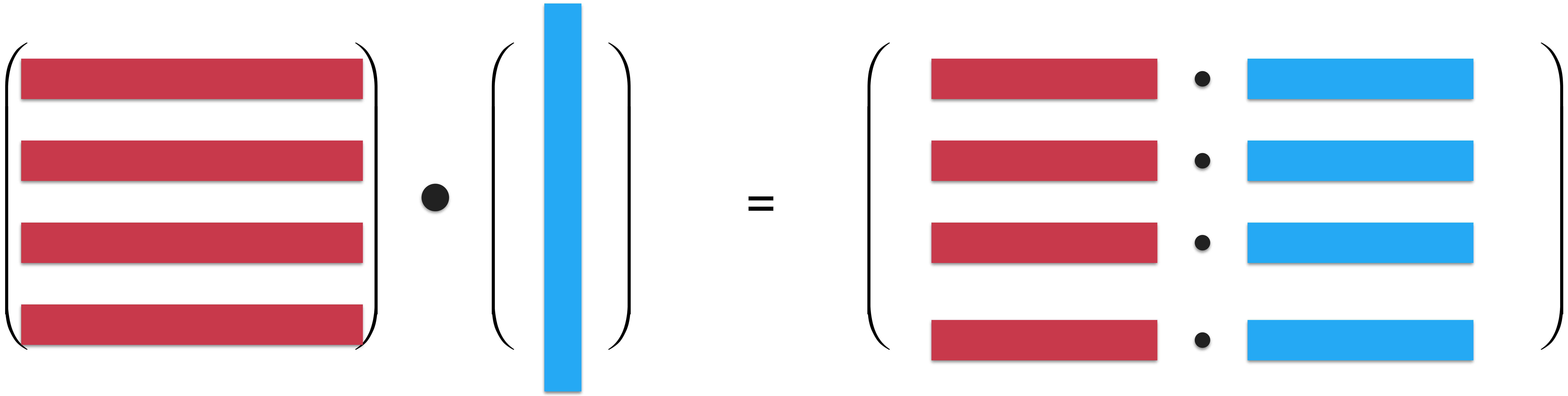
矩阵和向量相乘

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.2 & 0.1 & 0.5 \\ -0.5 & -1 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & -0.4 & -1 & 0.3 \\ -0.2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{it} \\ x_e \\ x_m \\ x_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{it} - 0.2x_e + 0.1x_m + 0.5x_h \\ -0.5x_{it} - x_e + 0.2x_m + 0.1x_h \\ -0.4x_e - x_m + 0.3x_h \\ -0.2x_{it} + x_h \end{pmatrix}$$

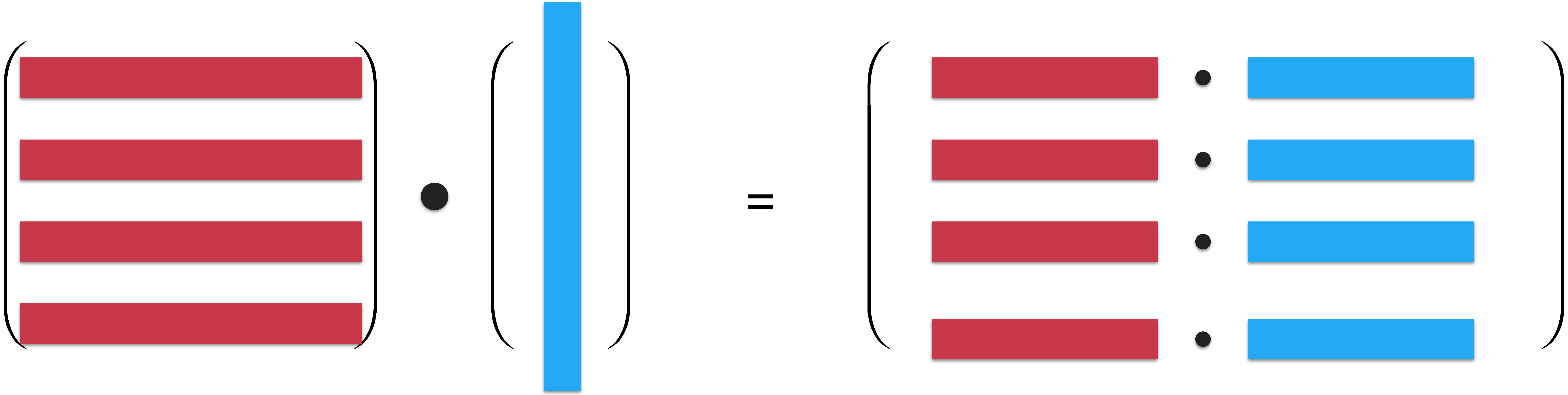
矩阵和向量相乘

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.2 & 0.1 & 0.5 \\ -0.5 & -1 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & -0.4 & -1 & 0.3 \\ -0.2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{it} \\ x_e \\ x_m \\ x_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{it} - 0.2x_e + 0.1x_m + 0.5x_h \\ -0.5x_{it} - x_e + 0.2x_m + 0.1x_h \\ -0.4x_e - x_m + 0.3x_h \\ -0.2x_{it} + x_h \end{pmatrix}$$

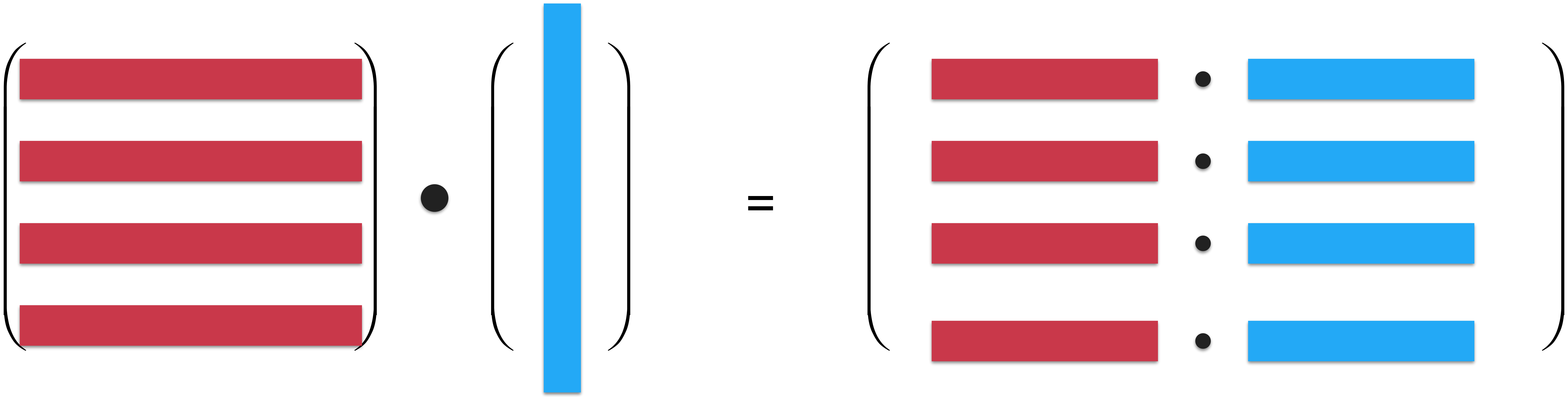
矩阵和向量相乘



矩阵和向量相乘



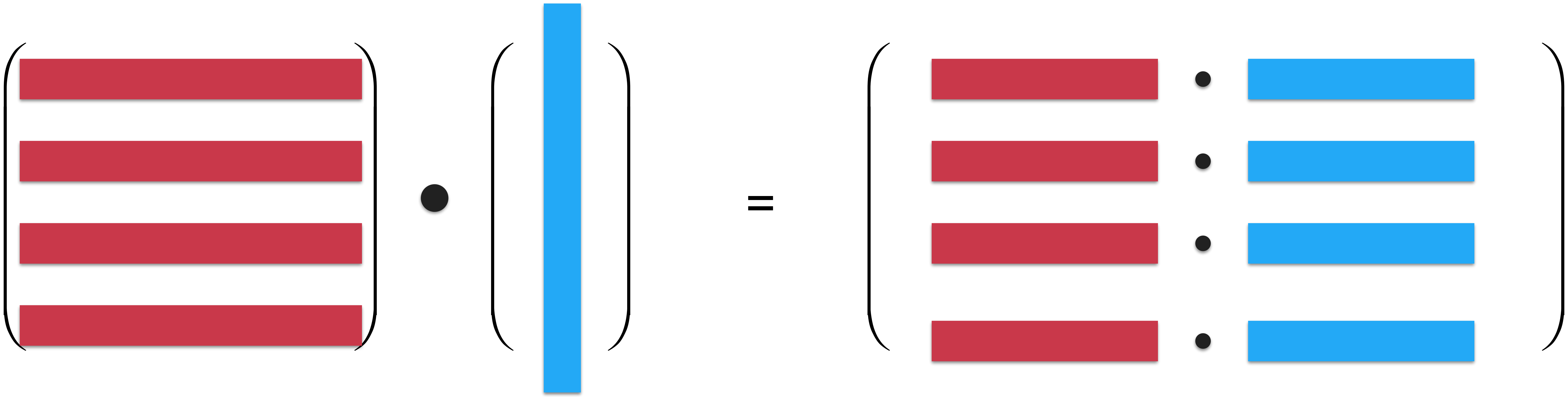
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n \\ a_{21}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{2n}u_n \\ \dots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \dots + a_{mn}u_n \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n \\ a_{21}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{2n}u_n \\ \dots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \dots + a_{mn}u_n \end{pmatrix}$$

矩阵A的列数必须和向量u的元素个数一致！

矩阵A的行数没有限制。



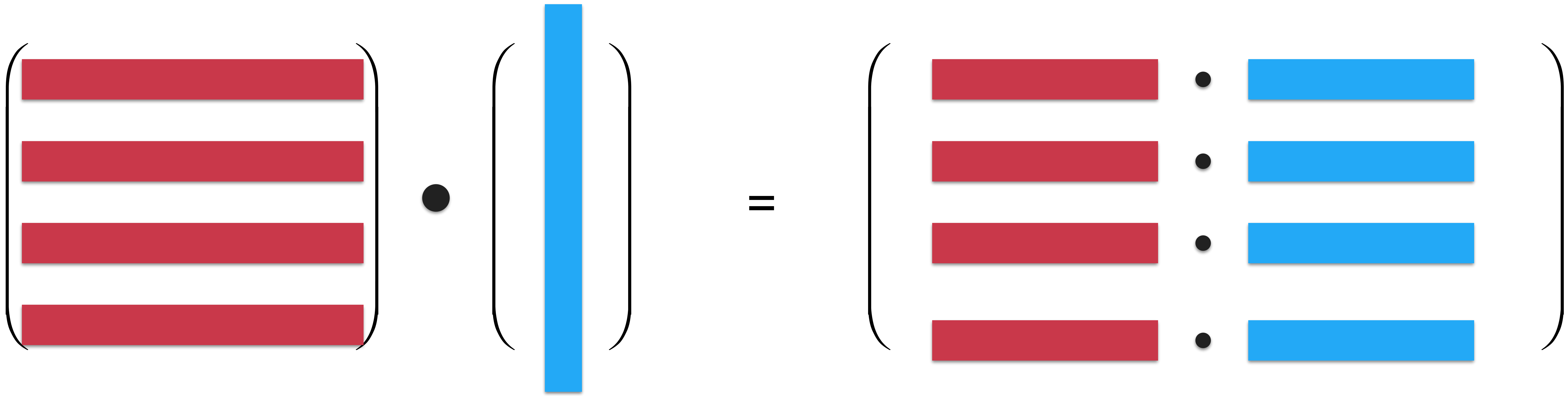
$$\begin{pmatrix} --\vec{r_1}-- \\ --\vec{r_2}-- \\ \cdots \\ --\vec{r_m}-- \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} \vec{r_1}\cdot\vec{u} \\ \vec{r_2}\cdot\vec{u} \\ \cdots \\ \vec{r_m}\cdot\vec{u} \end{pmatrix}$$

行视角

矩阵A的列数必须和向量u的元素个数一致！

矩阵A的行数没有限制。

再看向量的点乘

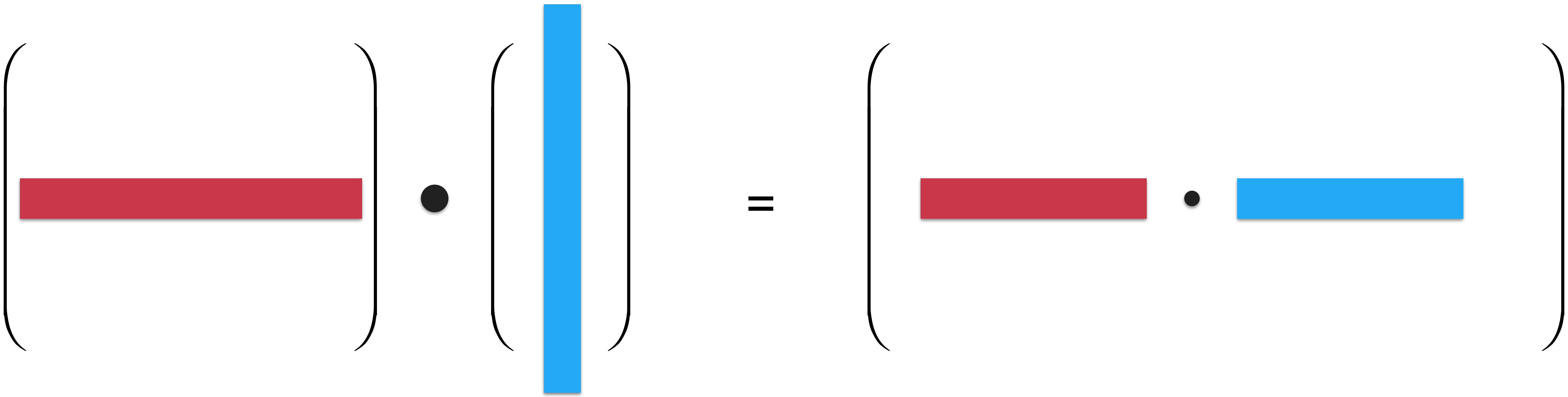


矩阵A的列数必须和向量u的元素个数一致！

矩阵A的行数没有限制。

A的行数为1

再看向量的点乘

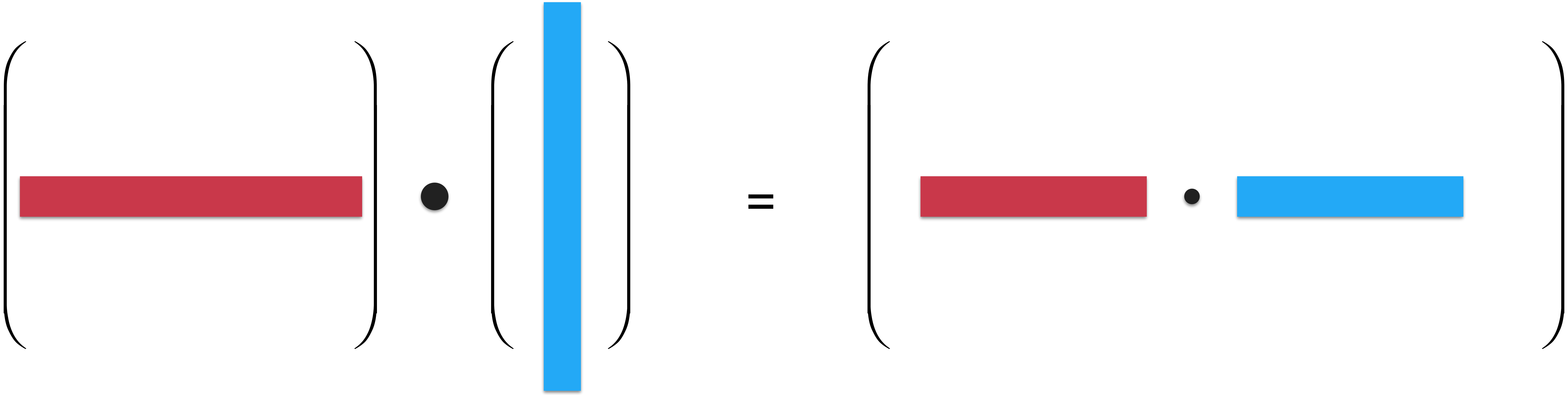


矩阵A的列数必须和向量u的元素个数一致！

矩阵A的行数没有限制。

A的行数为1

再看向量的点乘



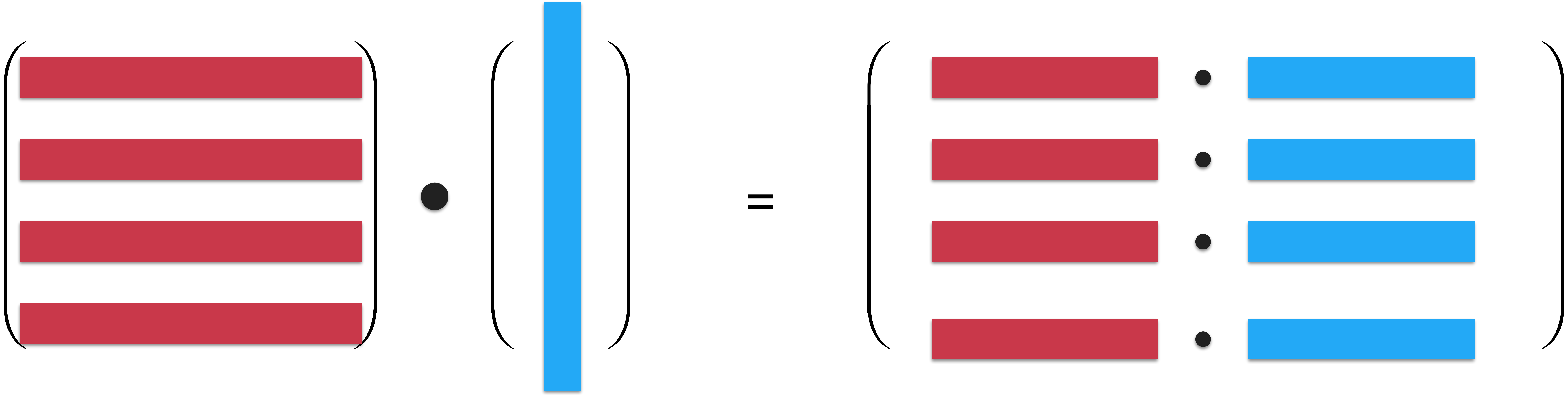
矩阵A的列数必须和向量u的元素数一致！

矩阵A的行数没有限制。

A的行数为1

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+\ldots+u_n\cdot v_n$$

矩阵和向量的乘法



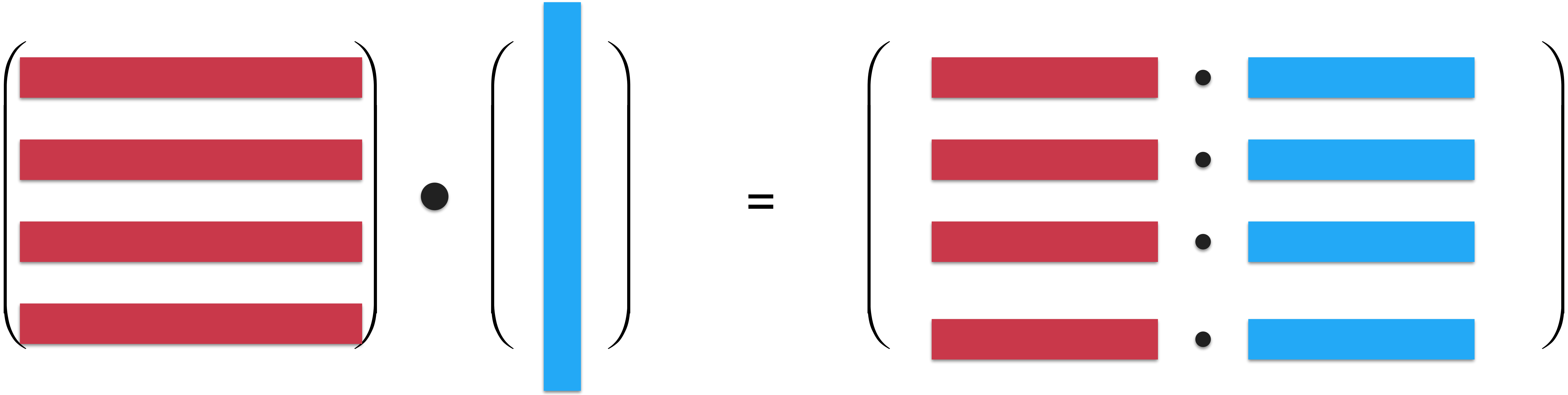
$$T \cdot \vec{a} = \vec{b}$$

矩阵T实际上将向量a转换成了向量b!

可以把矩阵理解成向量的函数!

矩阵和矩阵的乘法

矩阵和向量的乘法



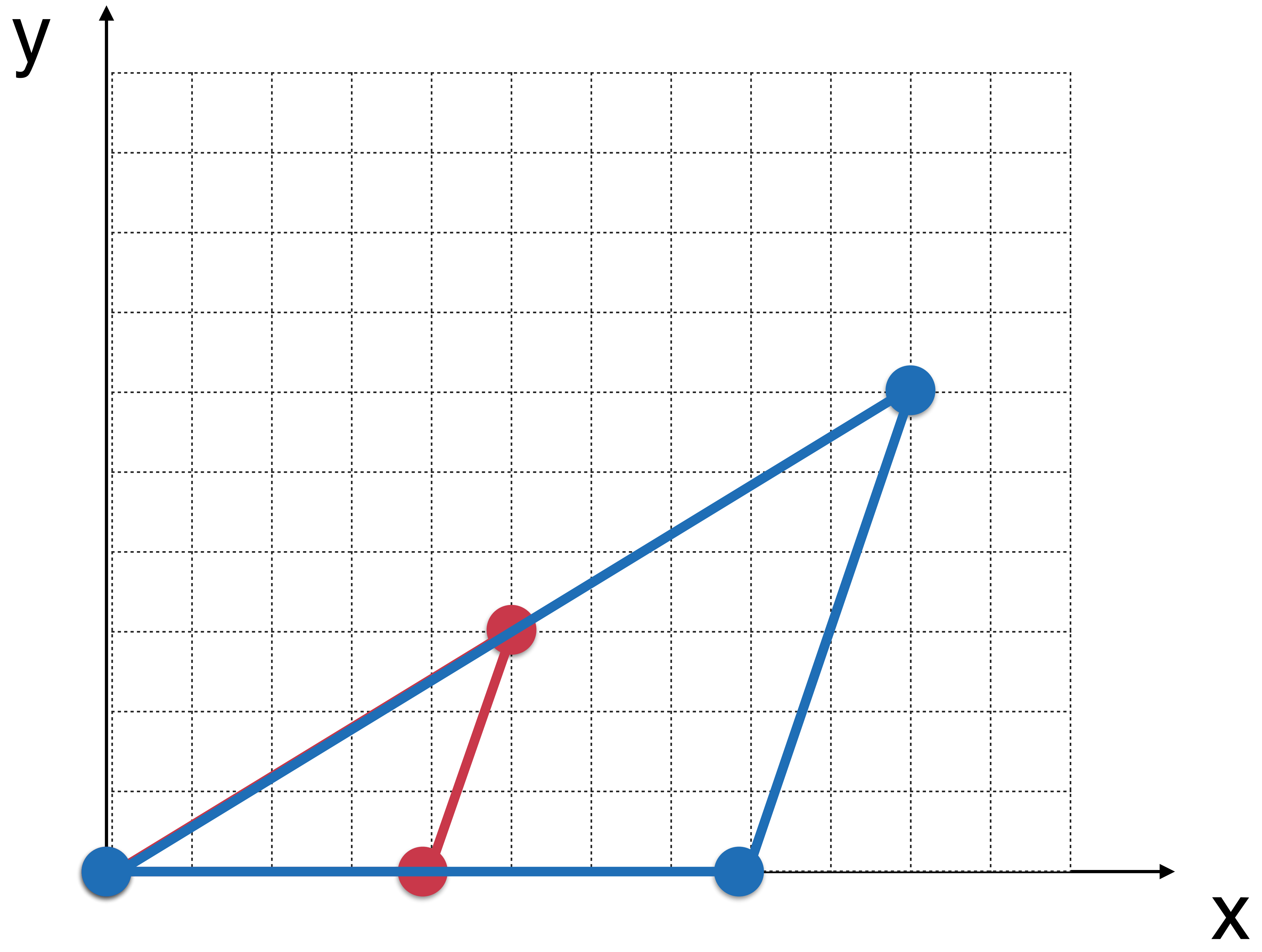
$$T \cdot \vec{a} = \vec{b}$$

矩阵T实际上将向量a转换成了向量b!

可以把矩阵理解成向量的函数!

矩阵在图形变换中的应用

让每个点的横坐标扩大1.5倍，纵坐标扩大2倍

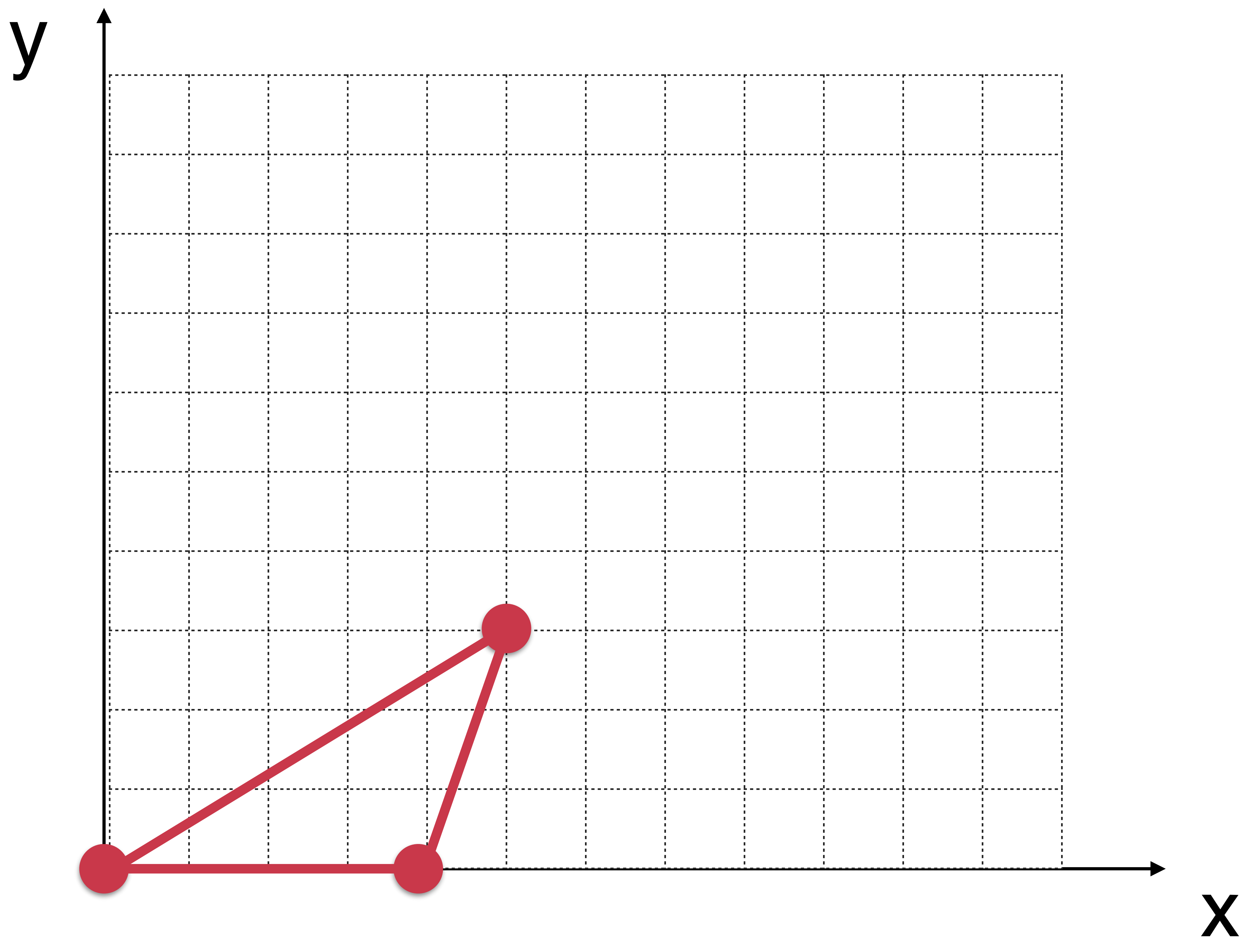


$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 0 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$$

矩阵在图形变换中的应用

让每个点的横坐标扩大1.5倍，纵坐标扩大2倍



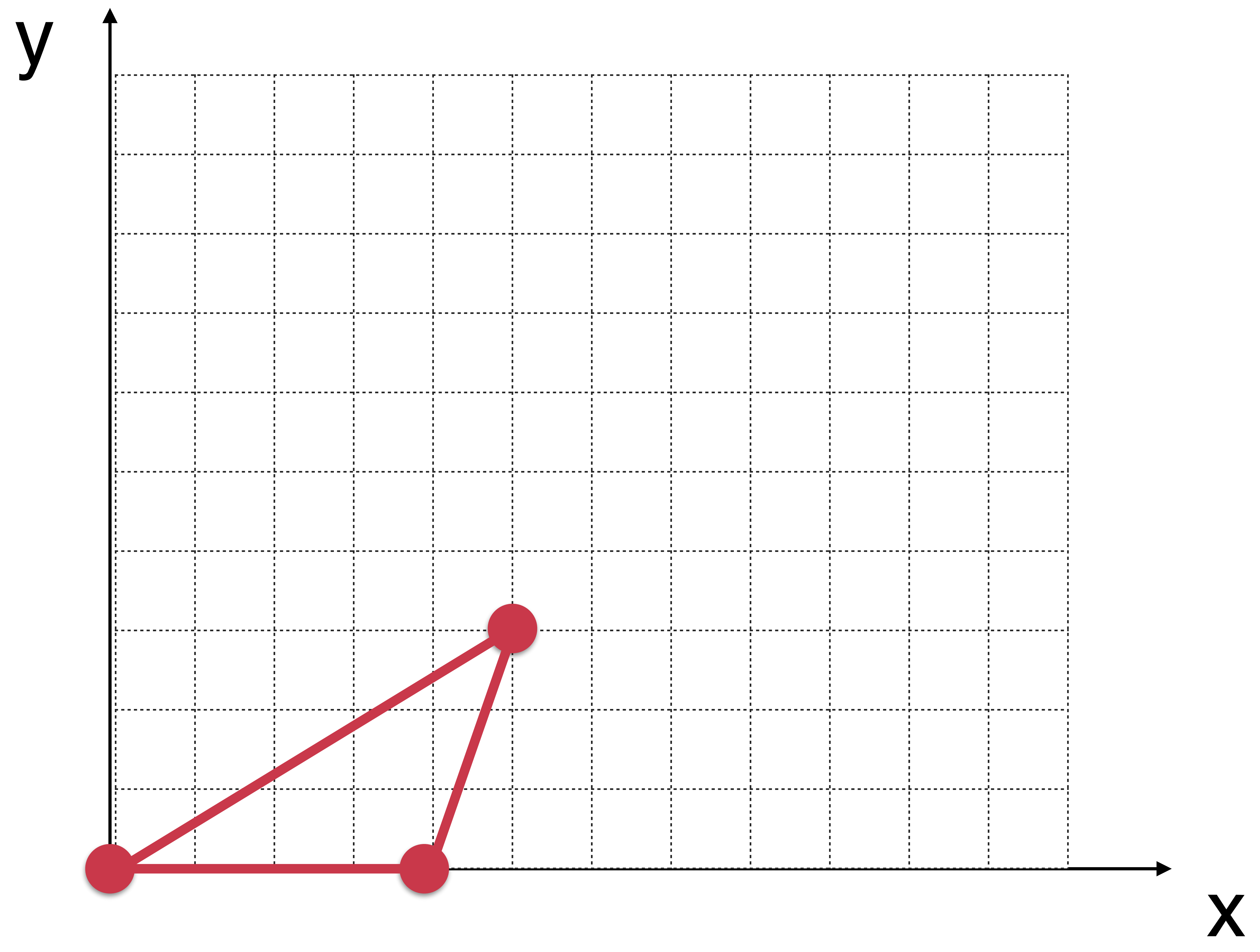
$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

矩阵在图形变换中的应用

让每个点的横坐标扩大1.5倍，纵坐标扩大2倍



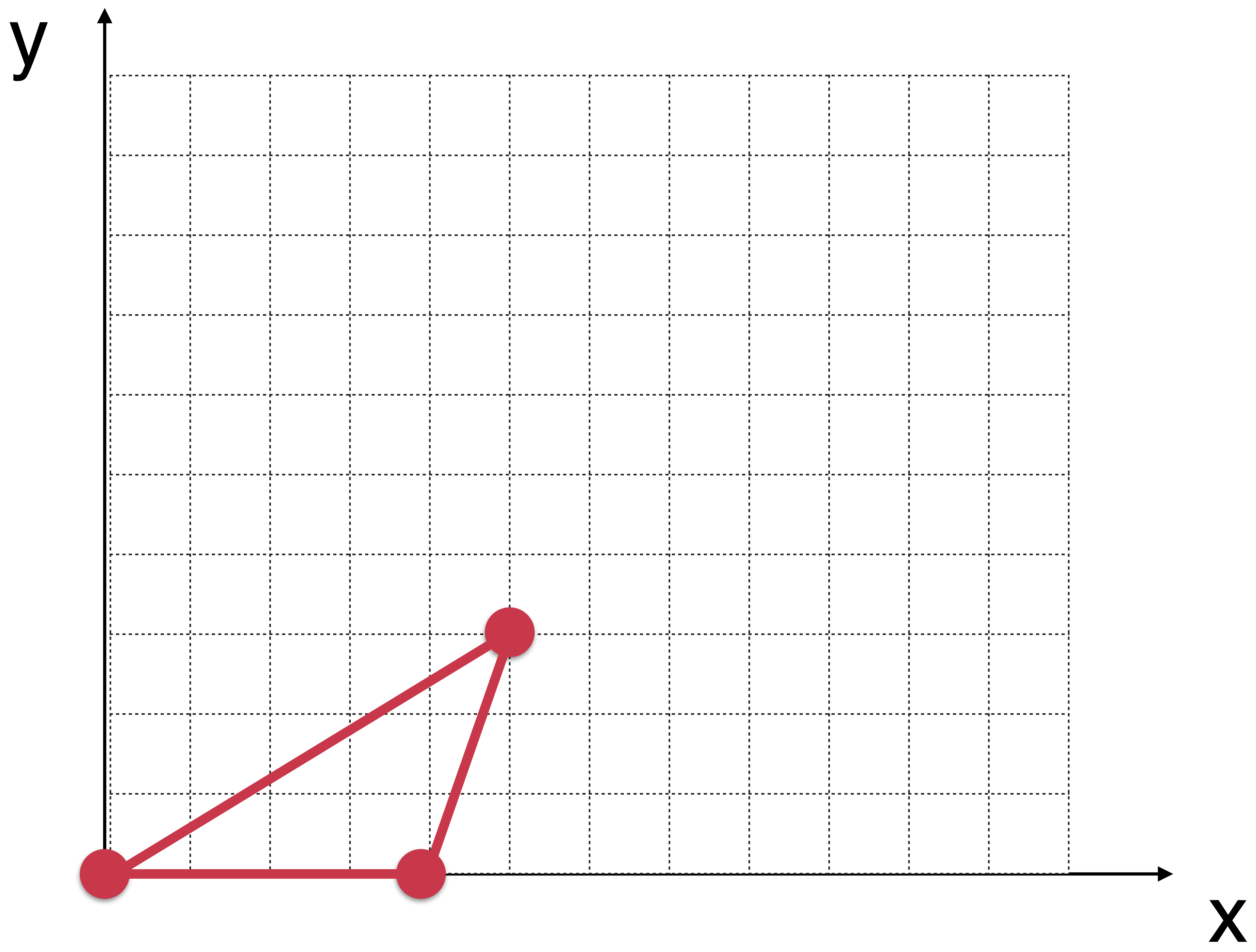
$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5x \\ 2y \end{pmatrix}$$

矩阵在图形变换中的应用

让每个点的横坐标扩大1.5倍，纵坐标扩大2倍



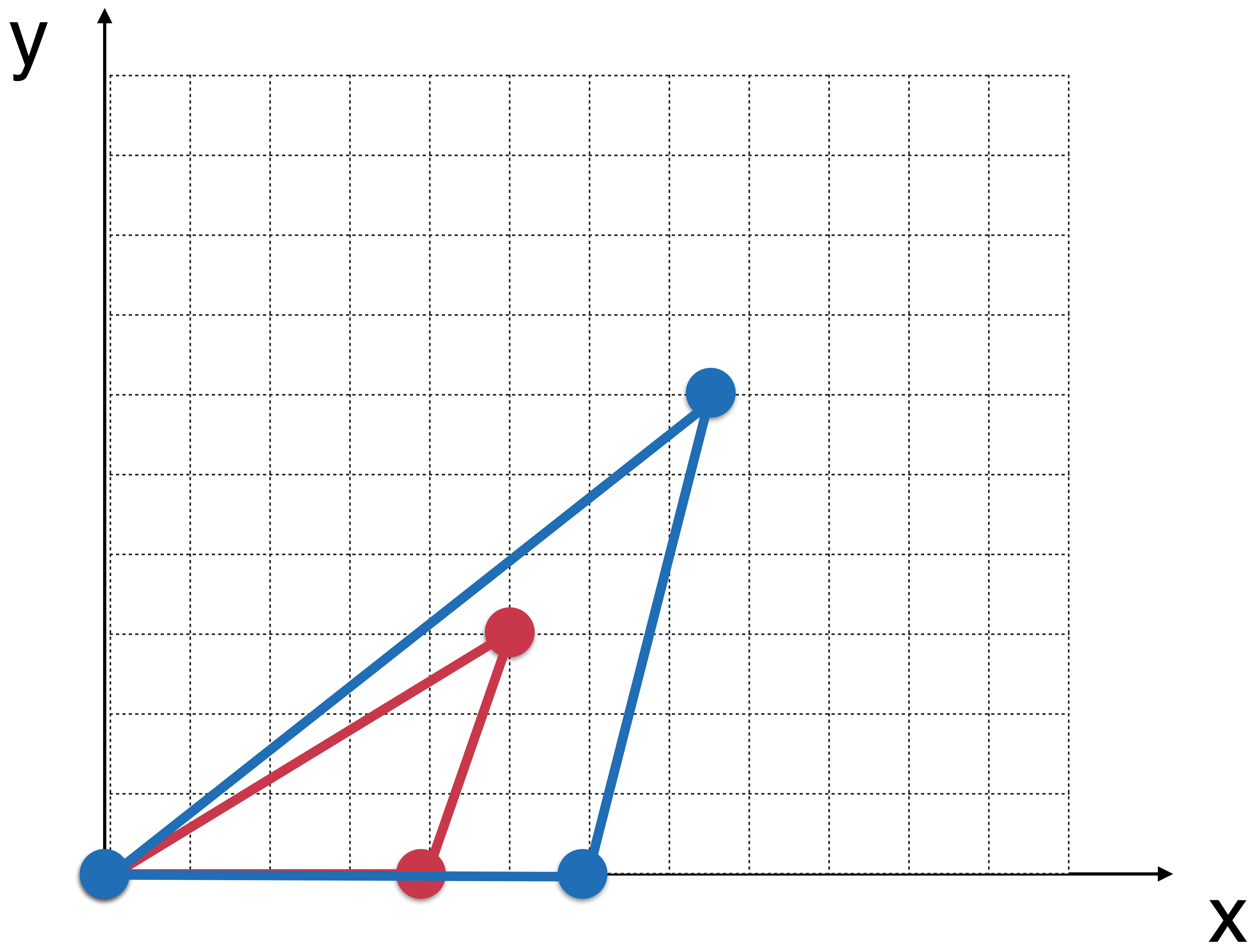
$$T = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$p_1 \quad p_2 \quad p_3$$

矩阵在图形变换中的应用

让每个点的横坐标扩大1.5倍，纵坐标扩大2倍



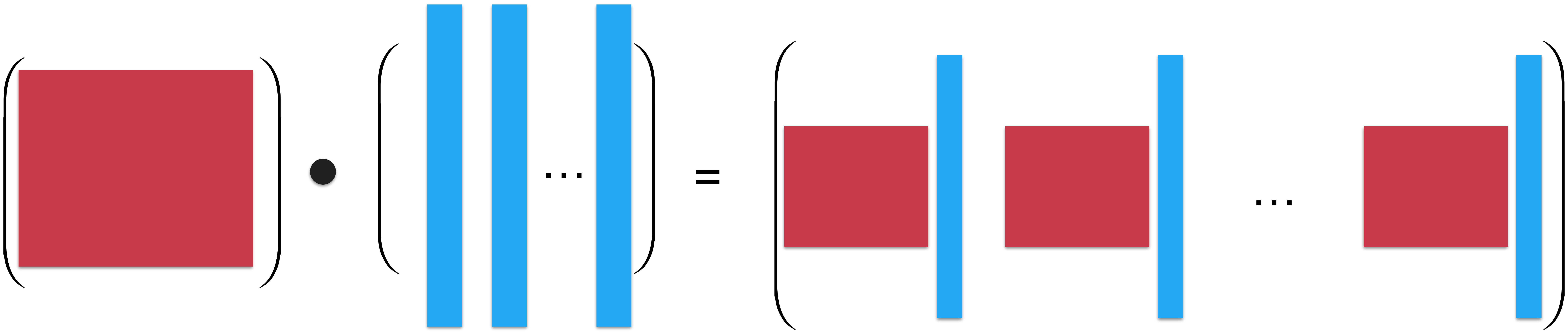
$$T = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$T \cdot P = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 6 & 7.5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

矩阵乘法

$$T \cdot P = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 7.5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$



矩阵A的列数必须和矩阵B的行数一致！

矩阵乘法

$$A \cdot B = A \cdot \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{c_1} & \vec{c_2} & \ldots & \vec{c_n} \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ A \cdot \vec{c_1} & A \cdot \vec{c_2} & \ldots & A \cdot \vec{c_n} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} - & \vec{r_1} & - \\ - & \vec{r_2} & - \\ & \ldots & \\ - & \vec{r_m} & - \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{c_1} & \vec{c_2} & \ldots & \vec{c_n} \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{r_1} \cdot \vec{c_1} & \vec{r_1} \cdot \vec{c_2} & \ldots & \vec{r_1} \cdot \vec{c_n} \\ \vec{r_2} \cdot \vec{c_1} & \vec{r_2} \cdot \vec{c_2} & \ldots & \vec{r_2} \cdot \vec{c_n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ \vec{r_m} \cdot \vec{c_1} & \vec{r_m} \cdot \vec{c_2} & \ldots & \vec{r_m} \cdot \vec{c_n} \end{pmatrix}$$

矩阵乘法

$$\begin{pmatrix} - & \vec{r_1} & - \\ - & \vec{r_2} & - \\ & \cdots & \\ - & \vec{r_m} & - \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{c_1} & \vec{c_2} & \cdots & \vec{c_n} \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{r_1}\cdot\vec{c_1} & \vec{r_1}\cdot\vec{c_2} & \cdots & \vec{r_1}\cdot\vec{c_n} \\ \vec{r_2}\cdot\vec{c_1} & \vec{r_2}\cdot\vec{c_2} & \cdots & \vec{r_2}\cdot\vec{c_n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \vec{r_m}\cdot\vec{c_1} & \vec{r_m}\cdot\vec{c_2} & \cdots & \vec{r_m}\cdot\vec{c_n} \end{pmatrix}$$

矩阵A的列数必须和矩阵B的行数一致！

A是m*k的矩阵；B是k*n的矩阵，则结果矩阵为m*n的矩阵

矩阵乘法

A是m*k的矩阵；B是k*n的矩阵，则结果矩阵为m*n的矩阵

矩阵乘法不遵守交换律！ $A \cdot B \neq B \cdot A$

很有可能根本不能相乘！

即使可以相乘，结果也不一样

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

实现矩阵的乘法

实践： 实现矩阵和向量的乘法

实践：实现矩阵和矩阵的乘法

矩阵乘法的更多性质和矩阵的幂

矩阵乘法的性质

矩阵乘法不遵守交换律！ $A \cdot B \neq B \cdot A$

矩阵乘法遵守： $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$$

对任意r*c的矩阵A，存在c*x的矩阵O，满足：$A \cdot O_{cx} = O_{rx}$

对任意r*c的矩阵A，存在x*r的矩阵O，满足：$O_{xr} \cdot A = O_{xc}$

矩阵乘法的性质

证明思路： $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

假设A, B, C是任意矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ \dots & \dots & & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nl} \end{pmatrix}$$

矩阵乘法的性质

矩阵的幂： $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k}$

只有方阵才可以进行矩阵的幂运算！

A^0 ？ A^{-1}？ A^{-2}？

下一章见分晓：）

矩阵乘法的性质

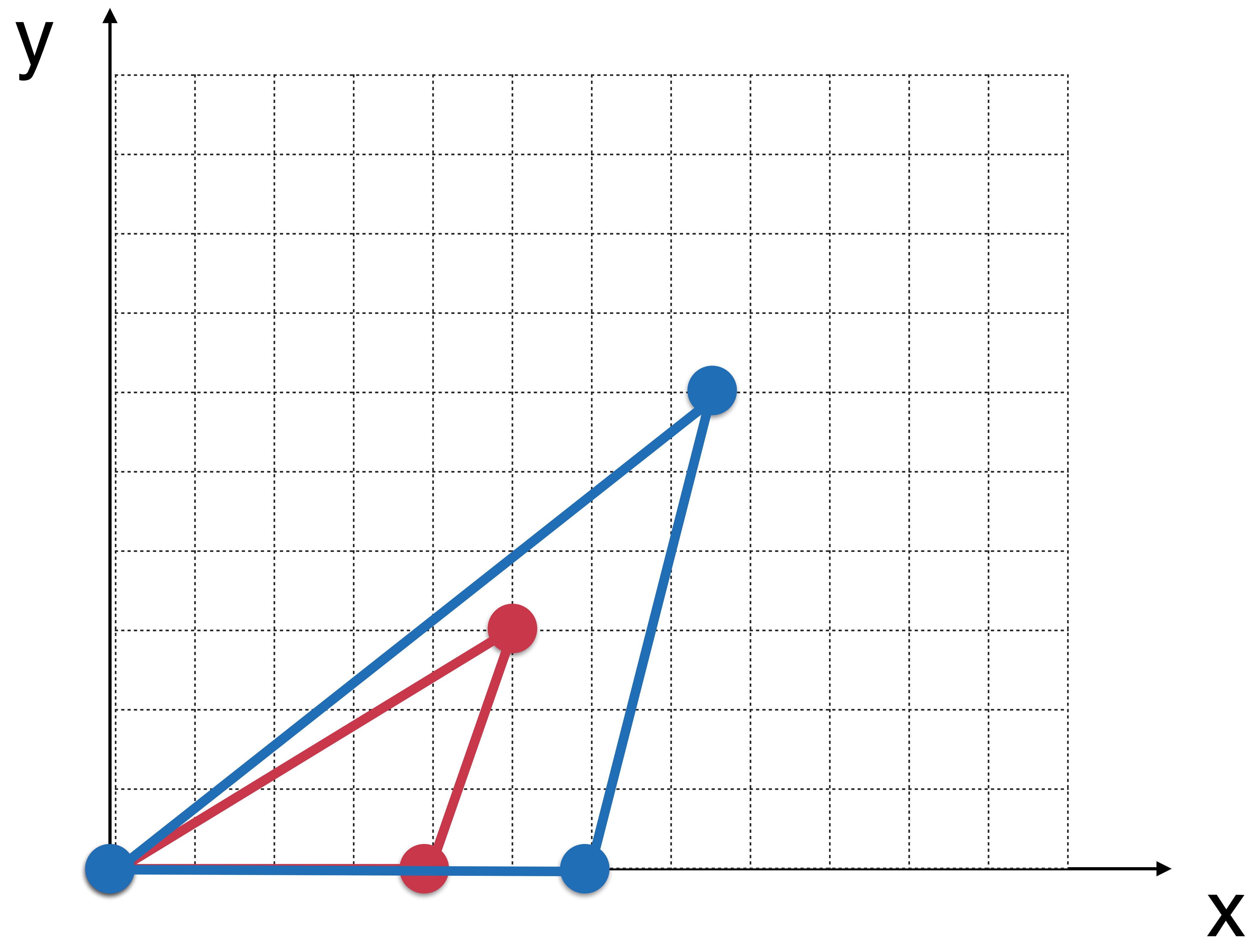
$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)\cdot(A+B) \\ &= A\cdot(A+B) + B\cdot(A+B) \\ &= A\cdot A + A\cdot B + B\cdot A + B\cdot B \\ &= A^2 + A\cdot B + B\cdot A + B^2 \quad \neq A^2 + 2AB + B^2\end{aligned}$$

矩阵的转置

矩阵的转置

让每个点的横坐标扩大1.5倍，纵坐标扩大2倍



$$T = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$T \cdot P = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 6 & 7.5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

矩阵的转置

$$T=\begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

矩阵的转置：行变成列；列变成行

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad P^T=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A=(a_{ij})$$

$$A^T=(a_{ji})$$

矩阵的转置

回忆：　　行向量和列向量　　$(3,4)$　　$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

由于横版印刷原因，使用符号：$(3,4)^T$

矩阵转置的性质

$$(A^T)^T = A$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$$

矩阵转置的性质

证明思路： $(A+B)^T = A^T + B^T$

假设A, B是任意矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵转置的性质

$$(A^T)^T = A$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

矩阵转置的性质

证明思路：$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

A是m*k的矩阵，B是k*n的矩阵

AB是m*n的矩阵，AB的转置是n*m的矩阵

A的转置是k*m的矩阵，B的转置是n*k的矩阵

(B的转置)(A的转置)是n*m的矩阵