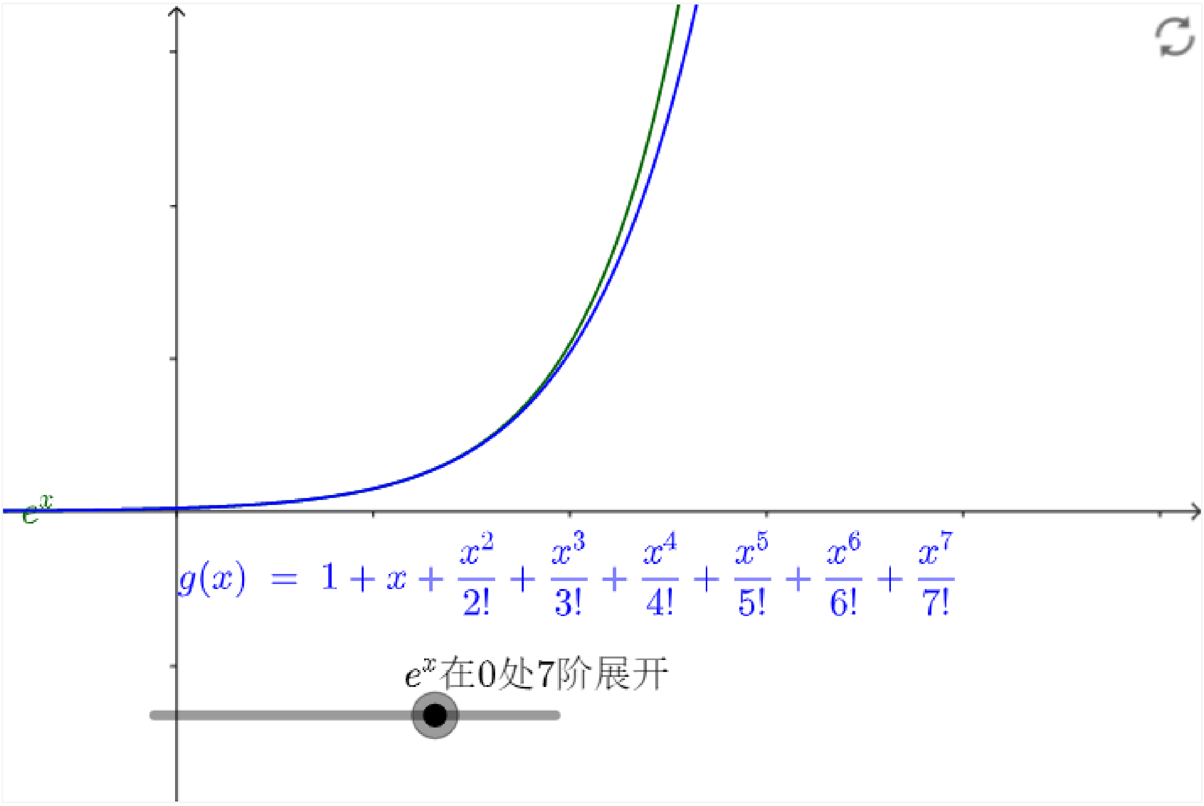
如何通俗地解释泰勒公式?

泰勒公式一句话描述：就是用多项式函数去逼近光滑函数。

先来感受一下：



Created with GeoGebra

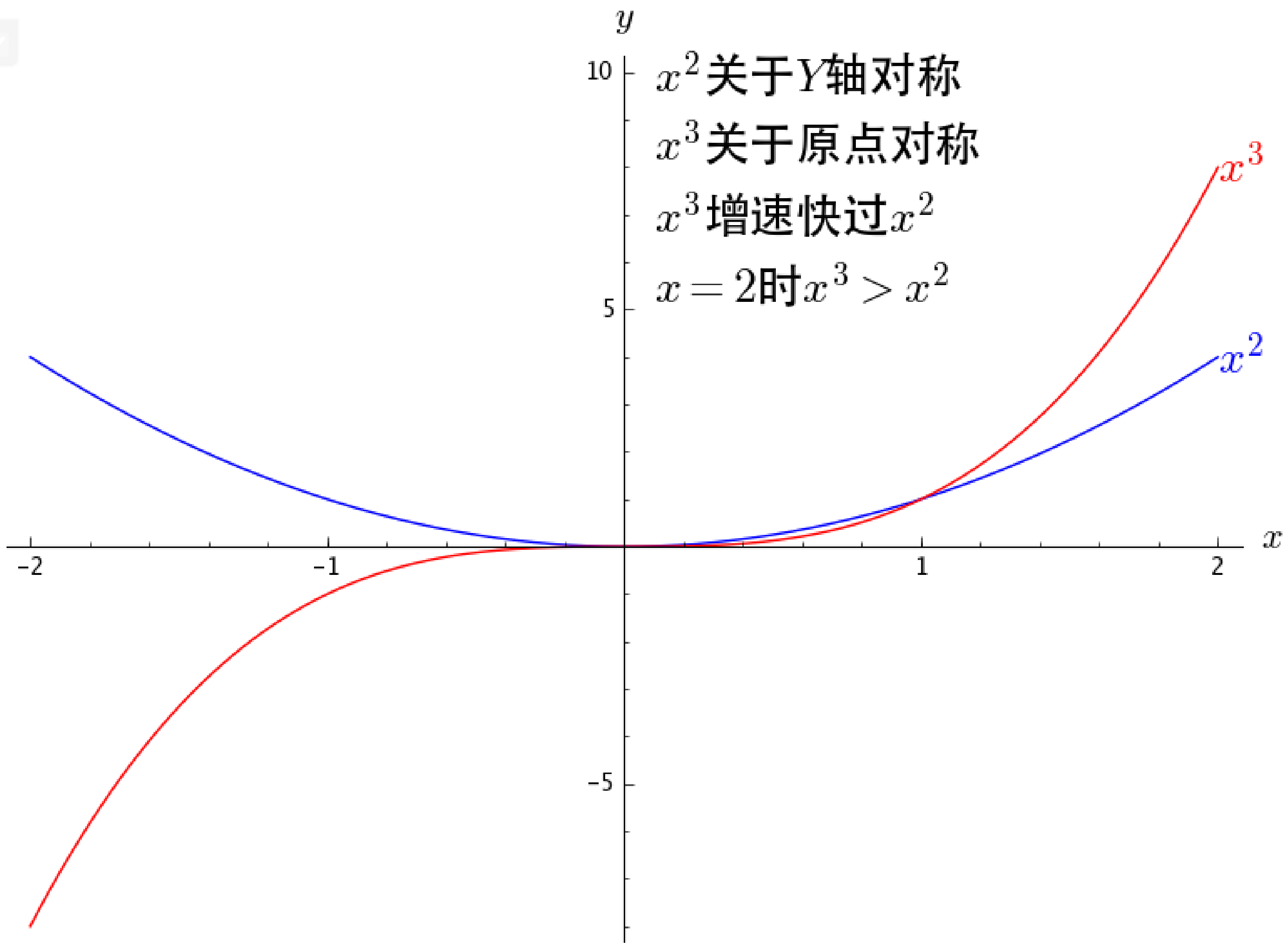
设n是一个正整数。如果定义在一个包含a的区间上的函数f在a点处$n+1$次可导，那么对于这个区间上的任意x都有：$f(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$，其中的多项式称为函数在$a$处的泰勒展开式，$R_n(x)$是泰勒公式的余项且是$(x-a)^n$的高阶无穷小。

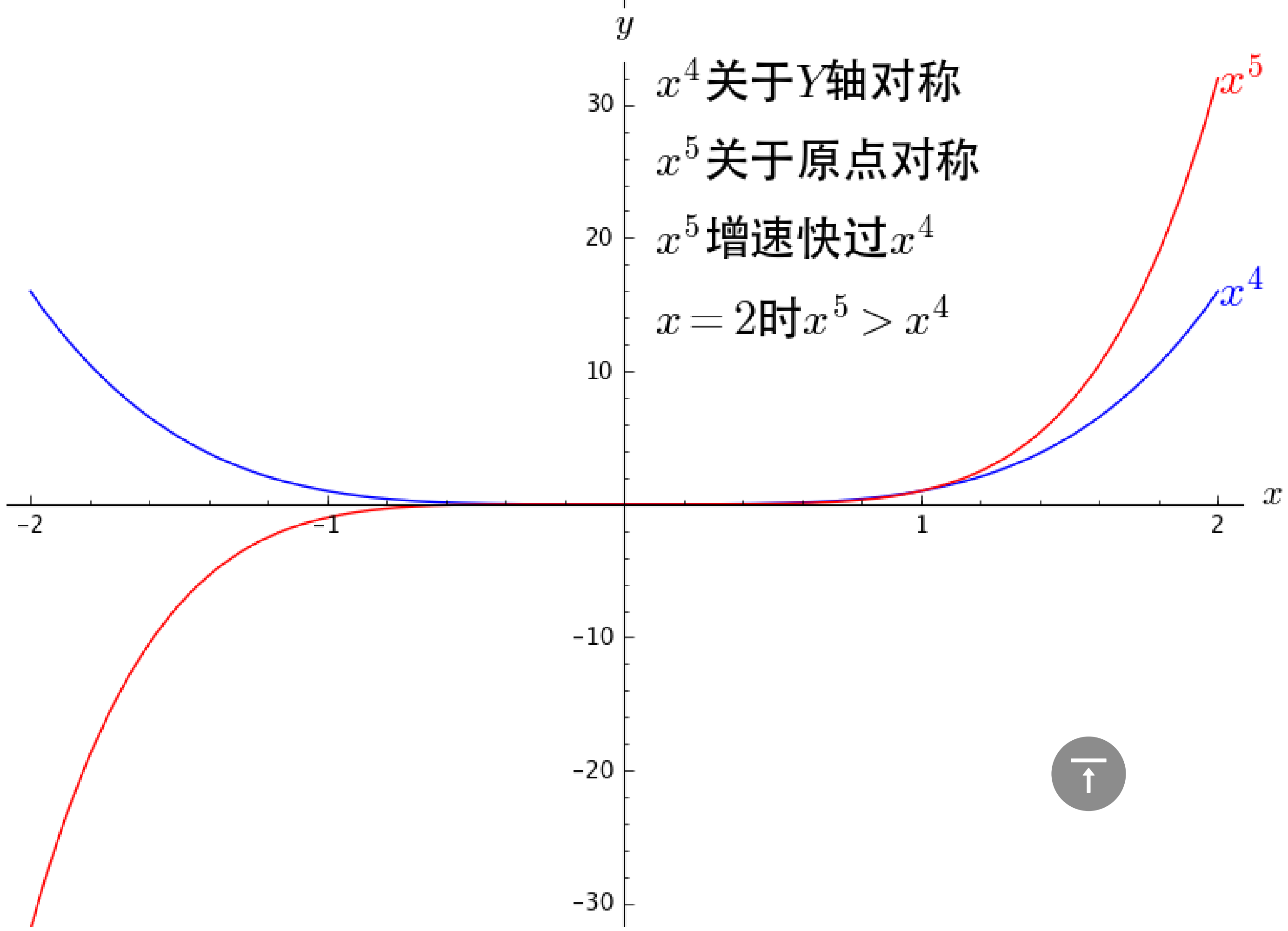
----维基百科

泰勒公式的定义看起来气势磅礴，高端大气。如果$a=0$的话，就是麦克劳伦公式，即$f(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$，这个看起来简单一点，**我们下面只讨论麦克劳伦公式**，可以认为和泰勒公式等价。

1 多项式的函数图像特点

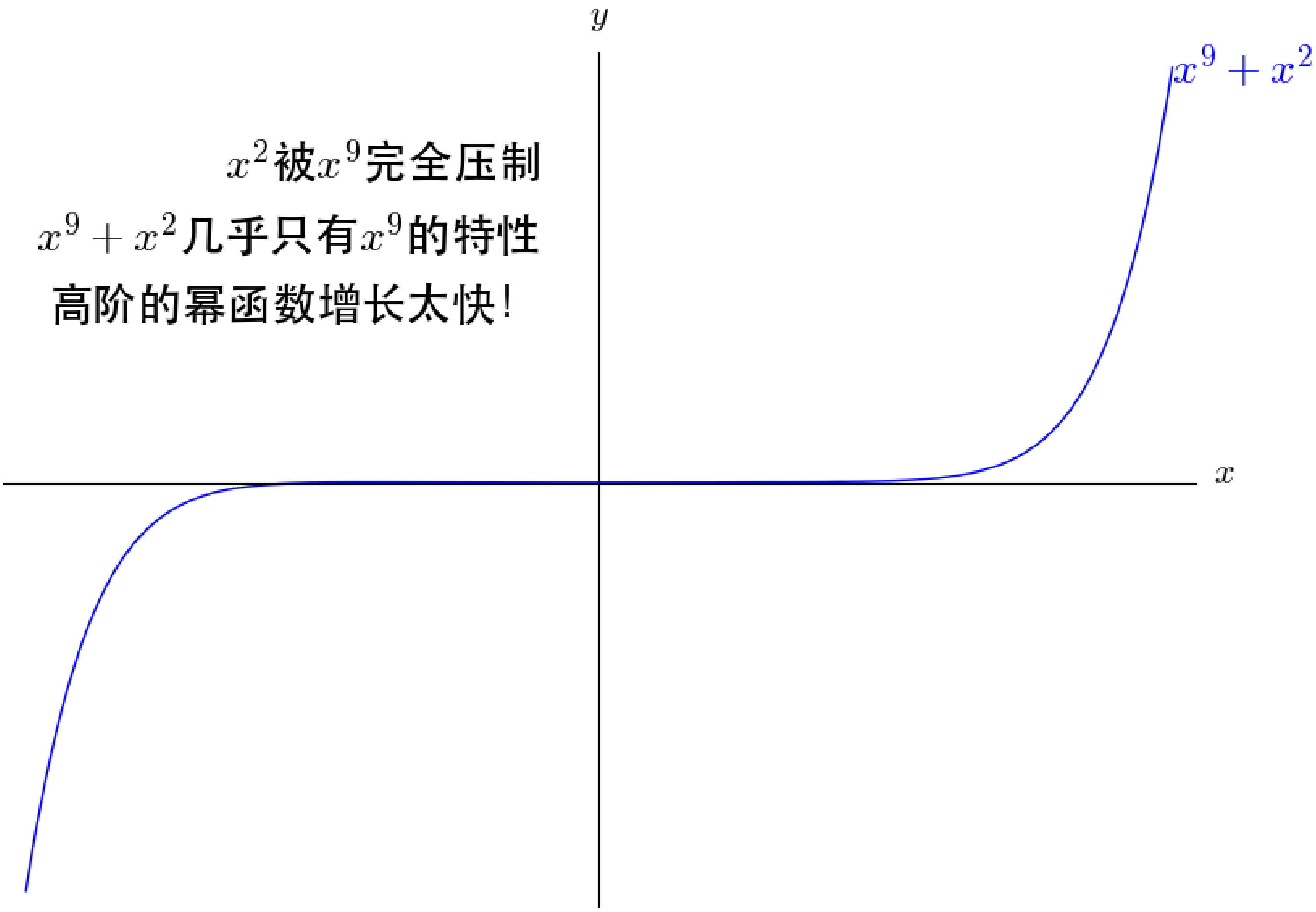
$\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$展开来就是$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，$f(0)$，$\frac{f''(0)}{2!}$这些都是常数，我们暂时不管，先看看其中最基础的组成部分，幂函数有什么特点。


y
10
5
-5
-2
-1
1
2
x
x^2关于Y轴对称
x^3关于原点对称
x^3增速快过x^2
x=2时x^3 > x^2
x^3
x^2

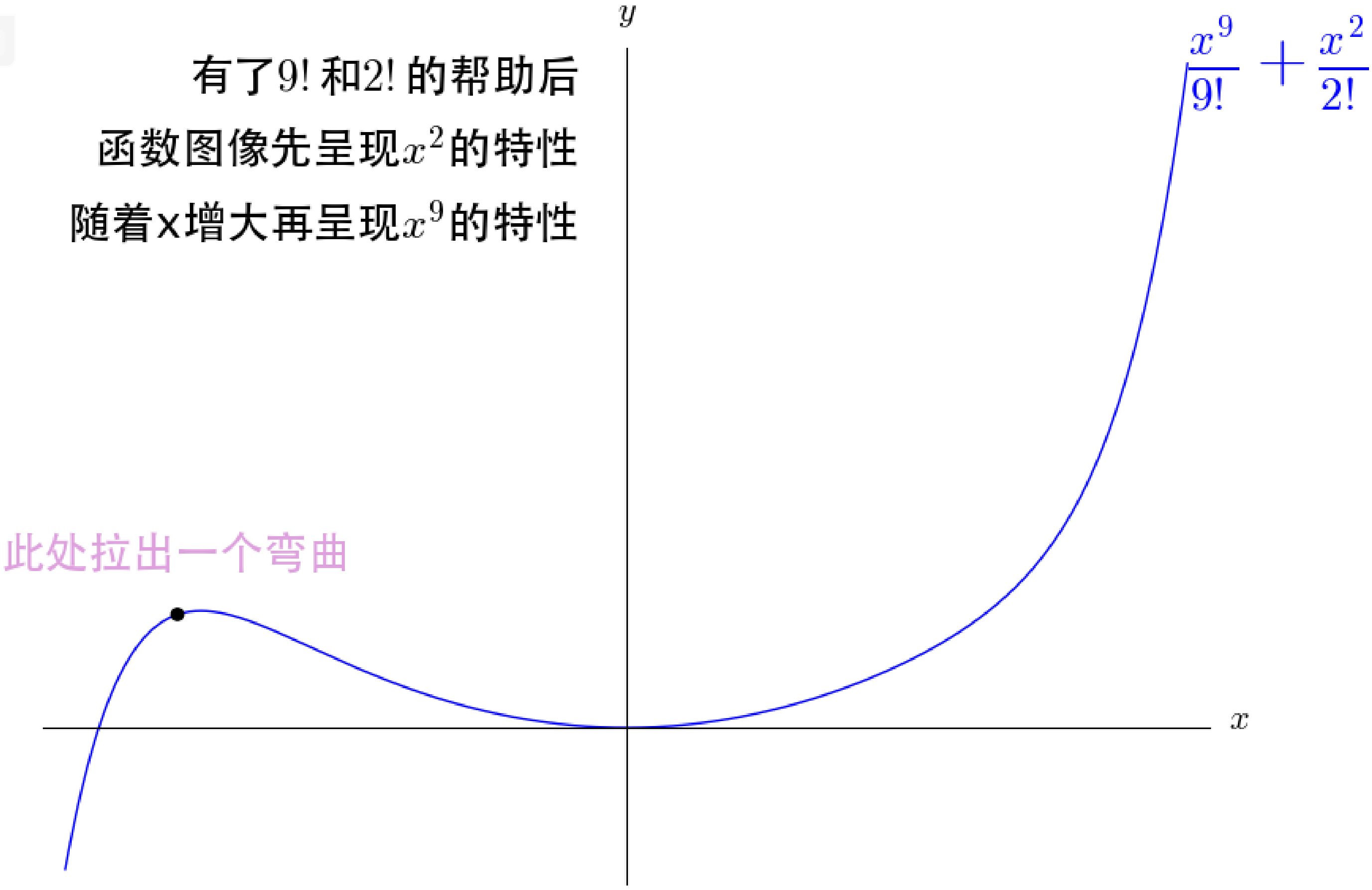

y
30
20
10
-10
-20
-30
-2
-1
1
2
x
x^4关于Y轴对称
x^5关于原点对称
x^5增速快过x^4
x=2时x^5 > x^4
x^5
x^4

可以看到，幂函数其实只有两种形态，一种是关于Y轴对称，一种是关于原点对称，并且指数越大，增长速度越大。

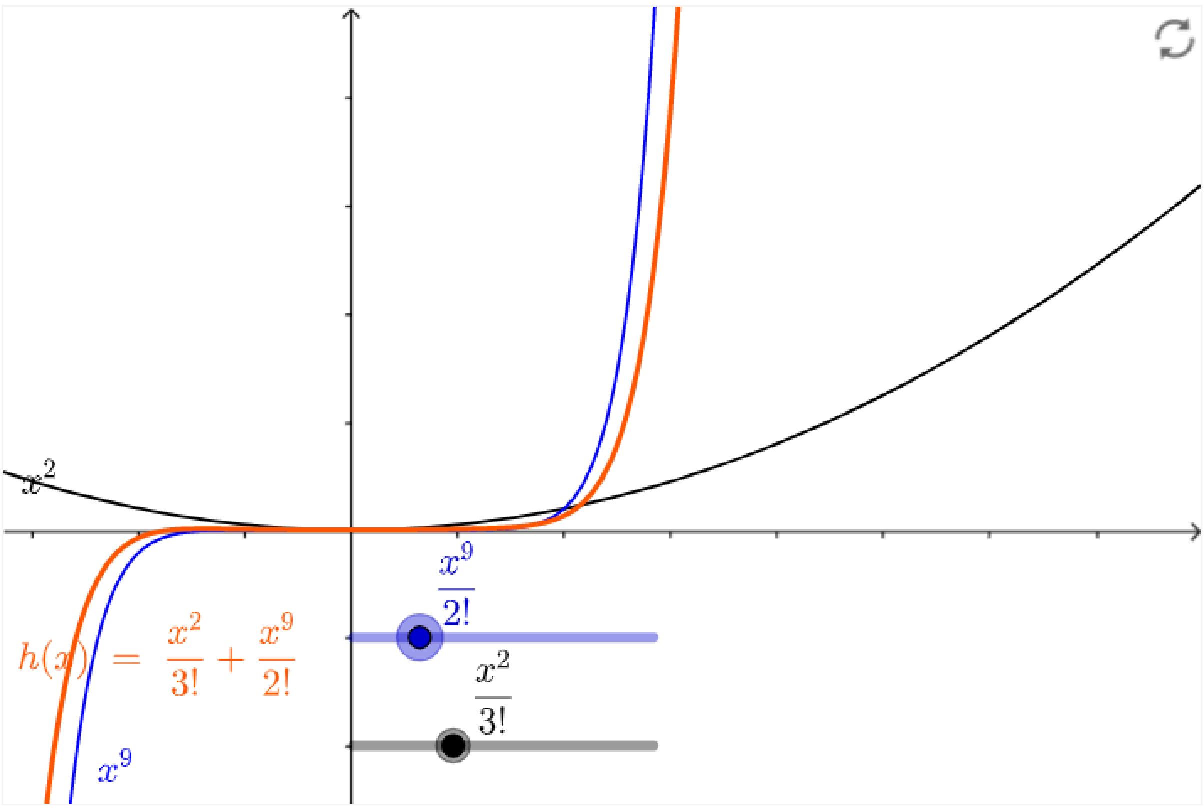
那幂函数组成的多项式函数有什么特点呢？



怎么才能让x^2和x^9的图像特性能结合起来呢？



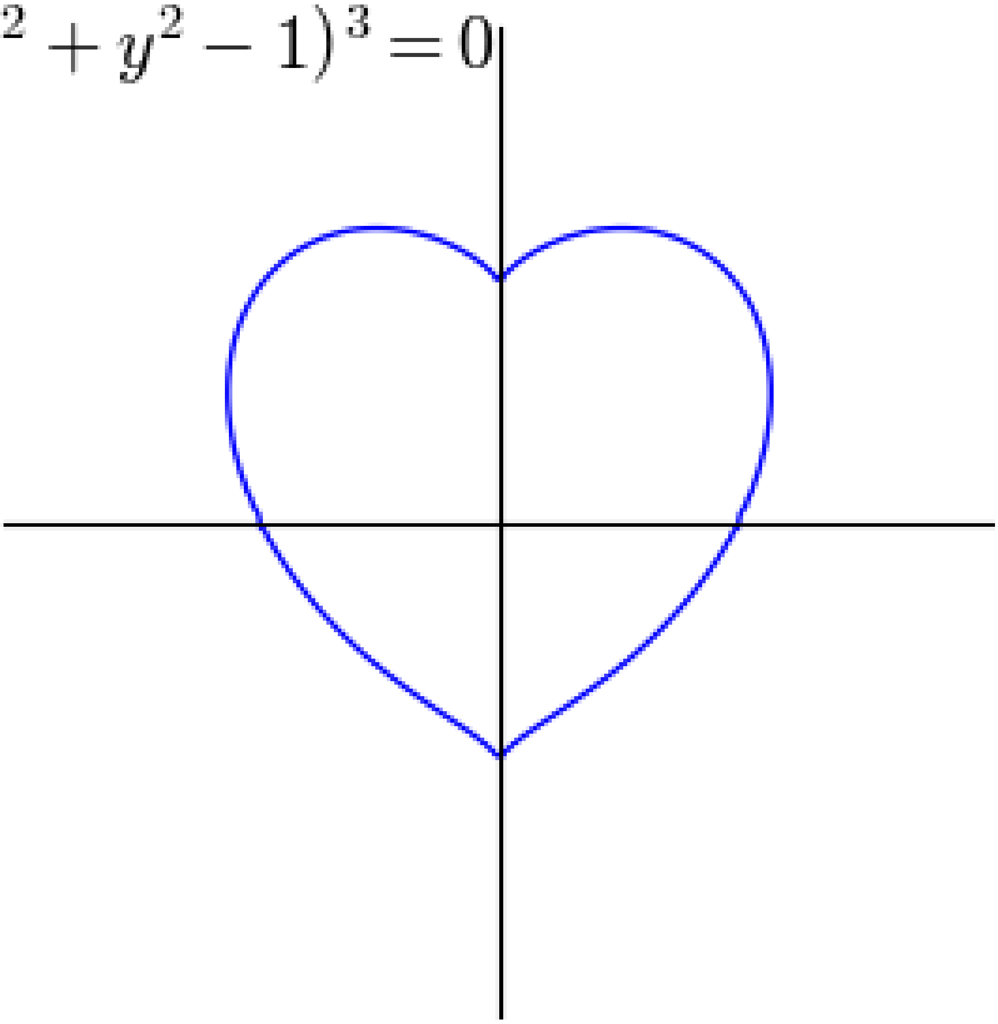
我们来动手试试看看系数之间如何压制的：



Created with GeoGebra

通过改变系数，多项式可以像铁丝一样弯成任意的函数曲线。送你一颗心（虽然是隐函数，意思一下）：

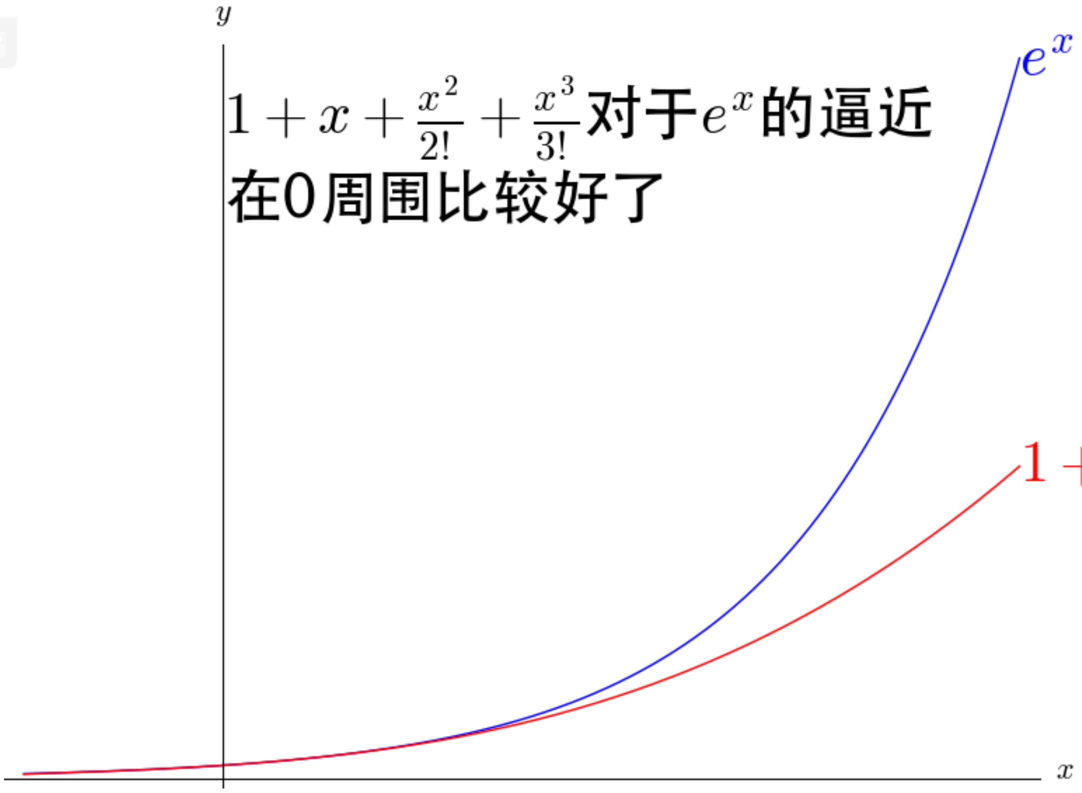
$$-x^2y^3+(x^2+y^2-1)^3=0$$



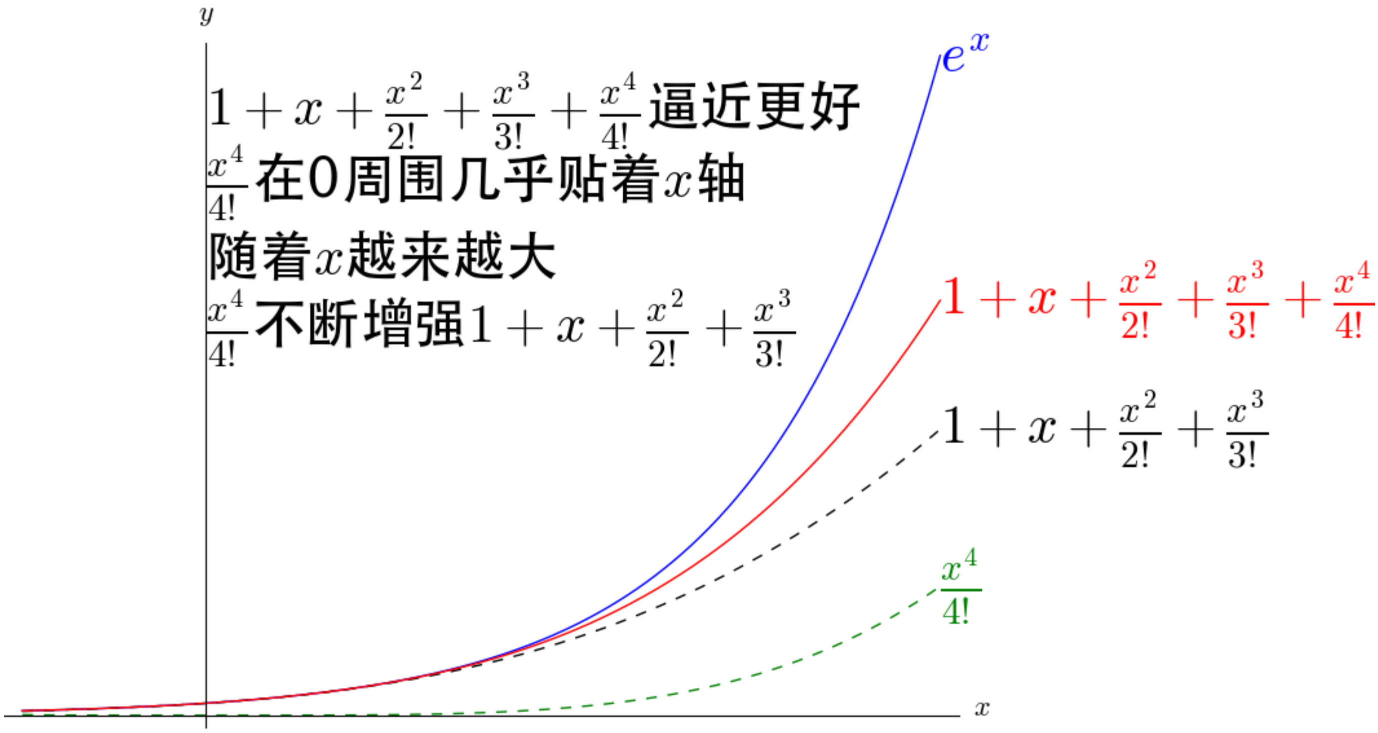
2 用多项式对e^x进行逼近

e^x是麦克劳伦展开形式上最简单的函数，有e就是这么任性。

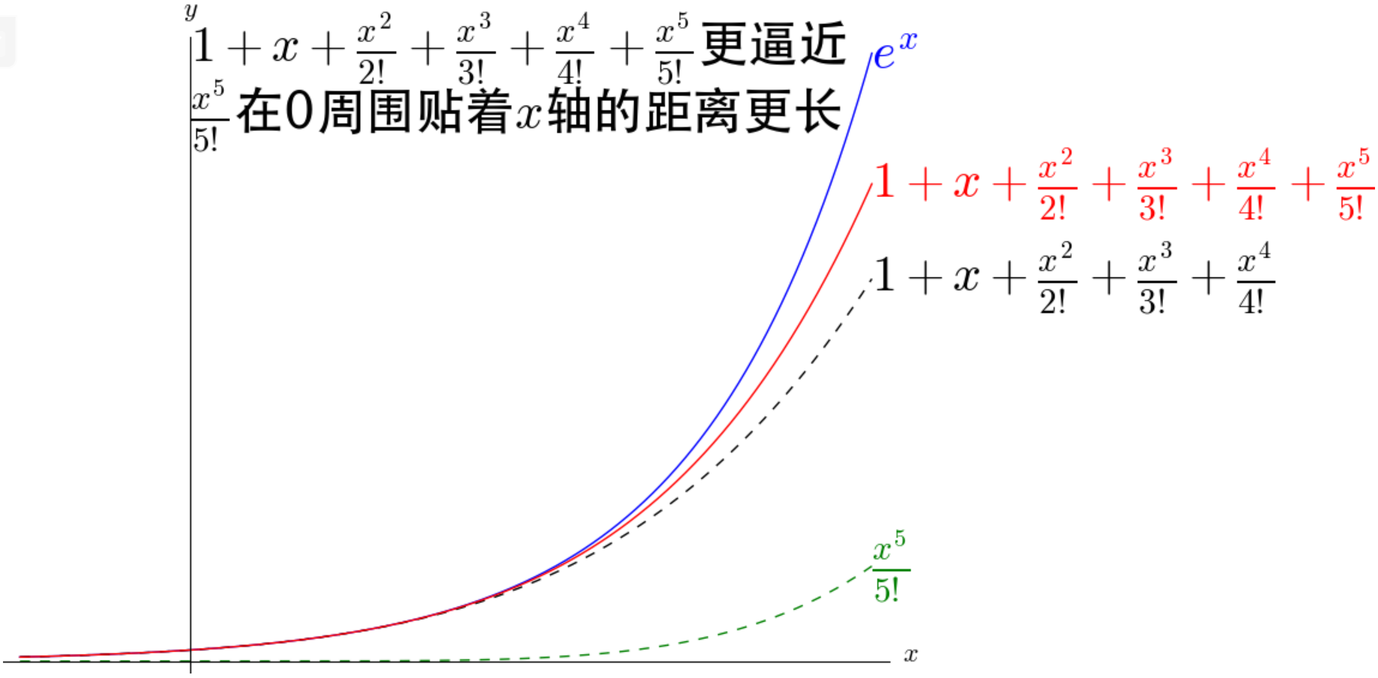
$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+R_n(x)$



增加一个$\frac{1}{4!}x^4$看看。



增加一个$\frac{1}{5!}x^5$看看。

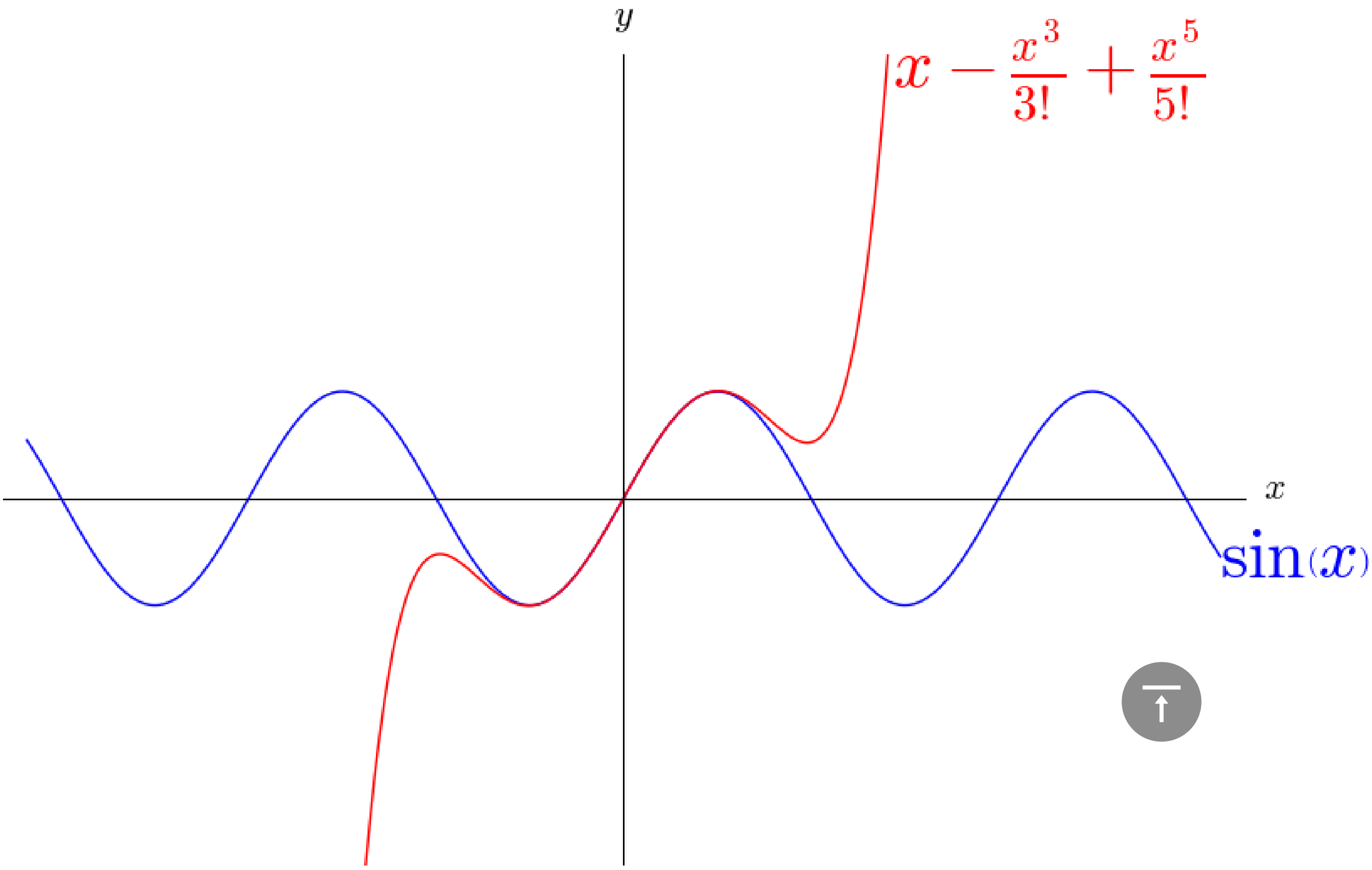


可以看出，$\frac{1}{n!}x^n$不断的弯曲着那根多项式形成的铁丝去逼近e^x。并且n越大，起作用的区域距离0越远。

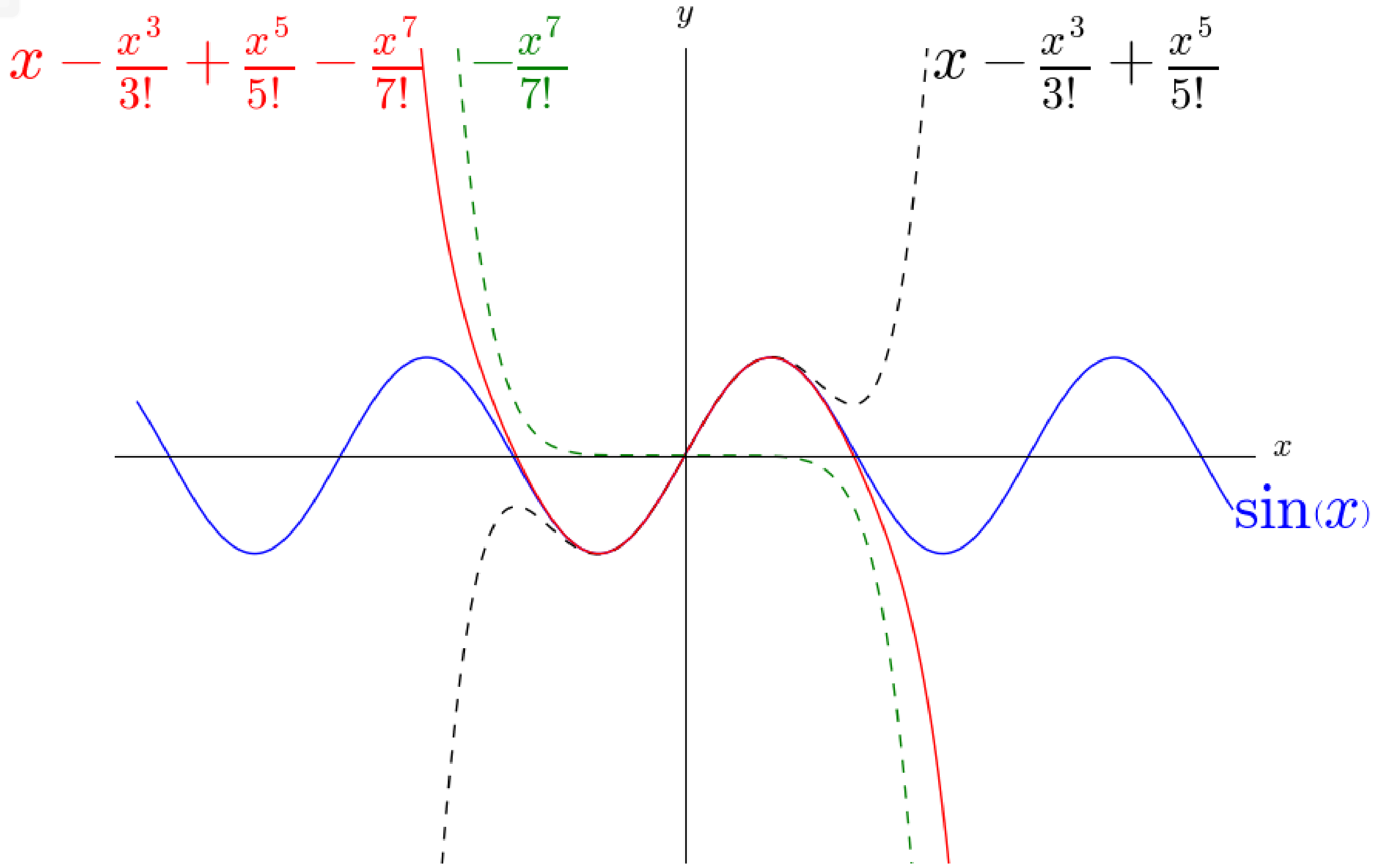
3 用多项式对$sin(x)$进行逼近

$sin(x)$是周期函数，有非常多的弯曲，难以想象可以用多项式进行逼近。

$sin(x)=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{(2n+1)}+R_n(x)$。

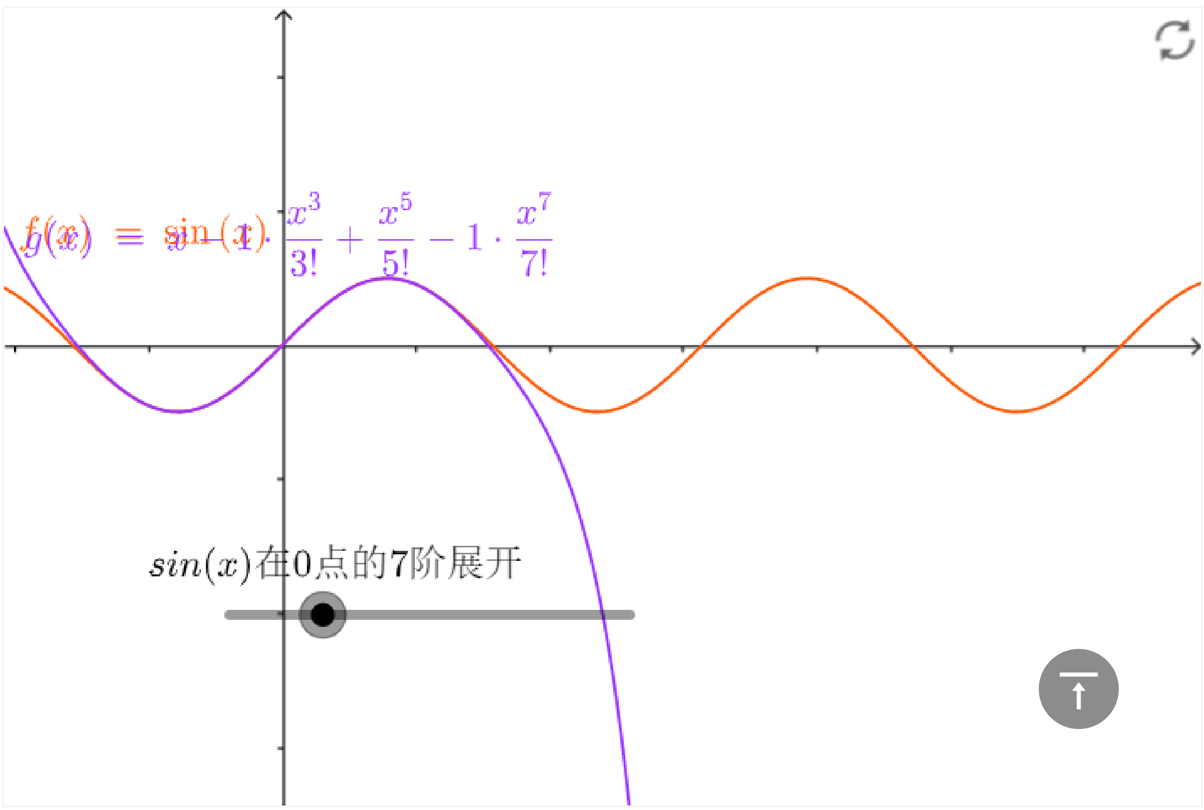


同样的，我们再增加一个$\frac{1}{7!}x^7$试试。



可以看到$\frac{1}{7!}x^7$在适当的位置，改变了$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5$的弯曲方向，最终让$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7$更好的逼近了$sin(x)$。

一图胜前言，动手看看$sin(x)$的展开吧：



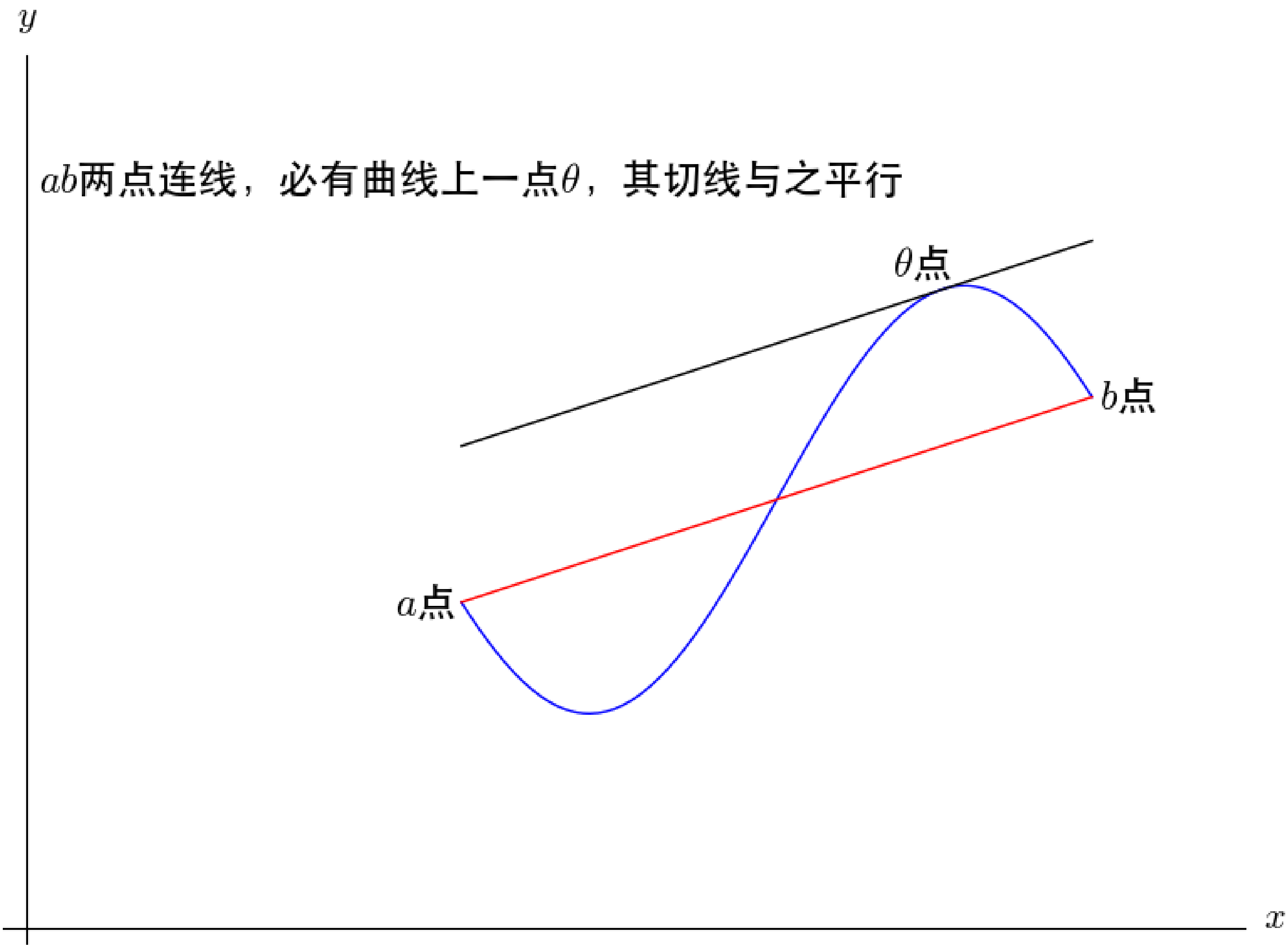
Created with GeoGebra

4 泰勒公式与拉格朗日中值定理的关系

拉格朗日中值定理：如果函数$f(x)$满足，在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，那么至少有一点$\theta(a<\theta<b)$使等式$f'(\theta)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$成立。

----维基百科

数学定义的文字描述总是非常严格、拗口，我们来看下拉格朗日中值定理的几何意义：



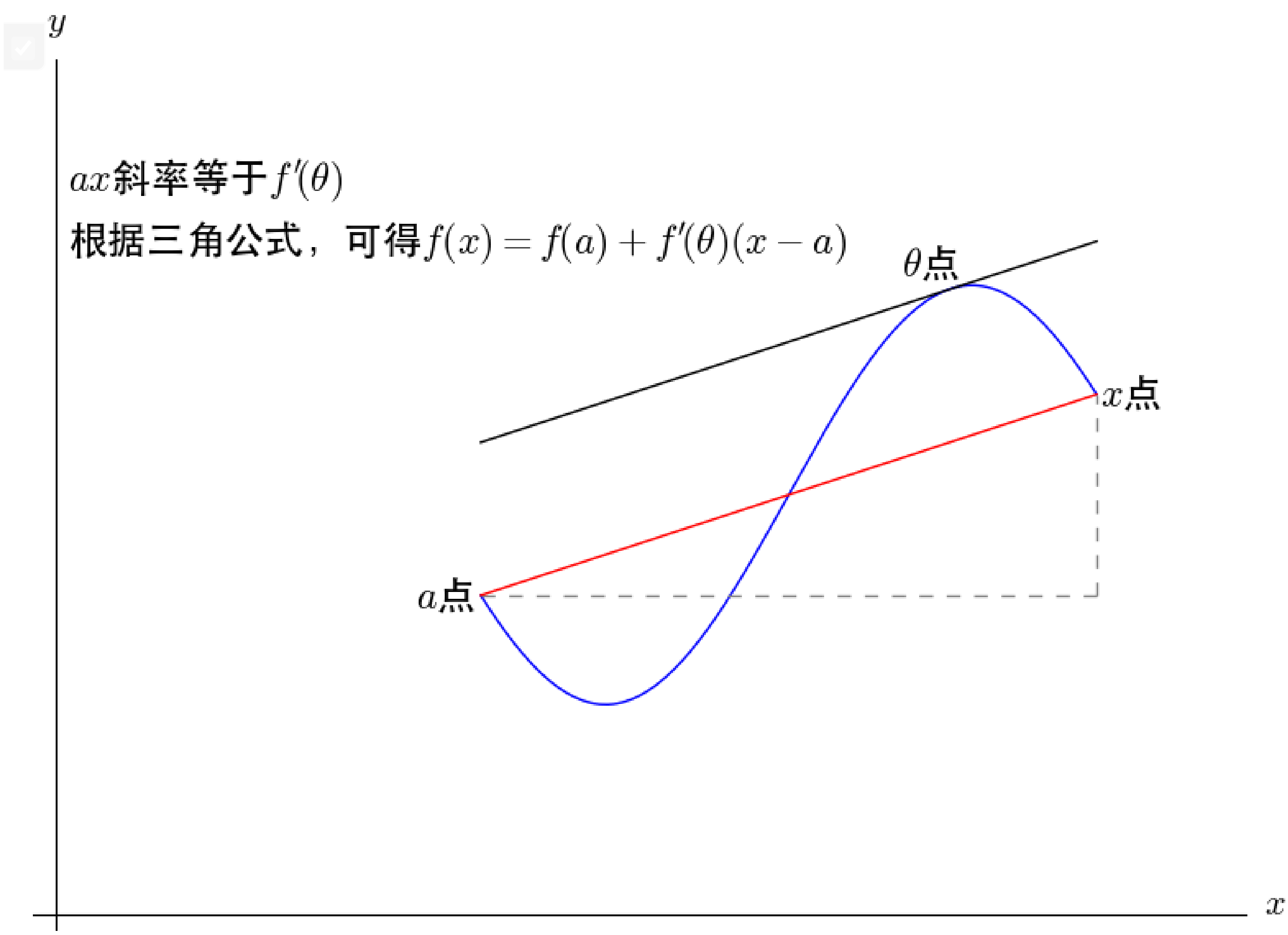
这个和泰勒公式有什么关系？泰勒公式有个余项$R_n(x)$我们一直没有提。

余项即使用泰勒公式估算的误差，即$f(x)-\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=R_n(x)$

余项的代数式是，$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}$，其中$a<\theta<x$。是不是看着有点像了？

当$N=0$的时候，根据泰勒公式有，$f(x)=f(a)+f'(\theta)(x-a)$，把拉格朗日中值定理中的$b$换成$x$，那么拉格朗日中值定理根本就是$N=0$时的泰勒公式。

结合拉格朗日中值定理，我们来看看$N=0$的时候，泰勒公式的几何意义：



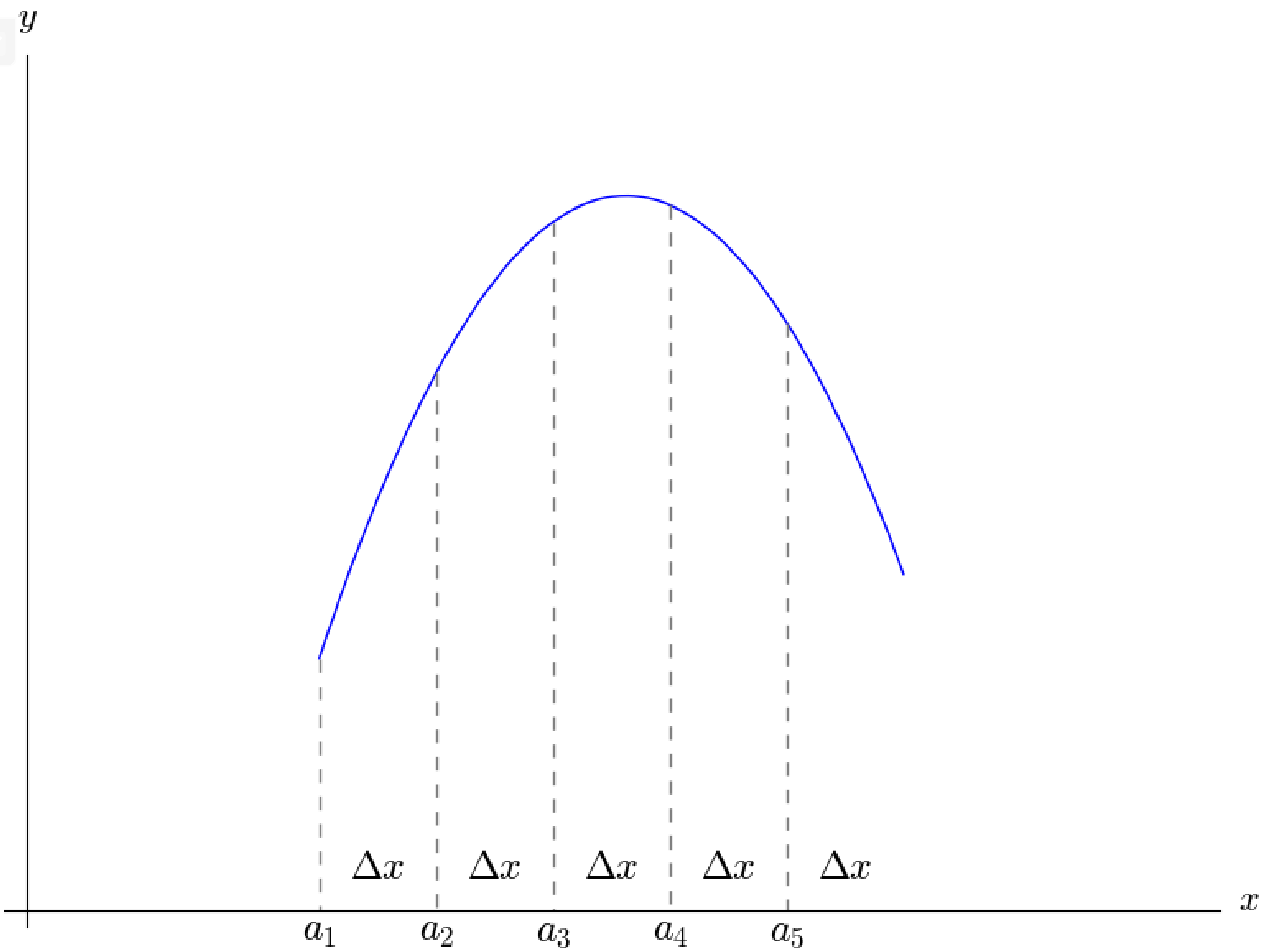
当$N=0$的时候，泰勒公式几何意义很好理解，那么$N=1,2,\cdots$呢?

这个问题我是这么理解的：首先让我们去想象高阶导数的几何意义，一阶是斜率，二阶是曲率，三阶四阶已经没有明显的几何意义了，或许，高阶导数的几何意义不是在三维空间里面呈现的，穿过更高维的时空才能俯视它的含义。现在的我们只是通过代数证明，发现了高维投射到我们平面上的秘密。

还可以这么来思考泰勒公式，泰勒公式让我们可以通过一个点来窥视整个函数的发展，为什么呢？因为点的发展趋势蕴含在导数之中，而导数的发展趋势蕴含在二阶导数之中......四不四很有道理啊?

5 泰勒公式是怎么推导的?

根据“以直代曲、化整为零”的数学思想，产生了泰勒公式。



如上图，把曲线等分为n份，分别为a_1，a_2，$\cdots$，a_n，令$a_1=a$，$a_2=a+\Delta x$，$\cdots$，$a_n=a+(n-1)\Delta x$。我们可以推出（Δ^2，Δ^3可以认为是二阶、三阶微分，其准确的数学用语是差分，和微分相比，一个是有限量，一个是极限量）：

$$f(a_2)=f(a+\Delta x)=f(a)+\Delta f(x)$$

$$f(a_3)=f(a+2\Delta x)=f(a+\Delta x)+\Delta f(a+\Delta x)=f(a)+2\Delta f(x)+\Delta^2 f(x)$$

$$f(a_4)=f(a+3\Delta x)=f(a)+4\Delta f(x)+6\Delta^2 f(x)+4\Delta^3 f(x)+\Delta^4 f(x)$$

也就是说，f(x)全部可以由a和Δx决定，这个就是泰勒公式提出的基本思想。据此的思想，加上极限$\Delta x\to 0$，就可以推出泰勒公式。

6 泰勒公式的用处

多项式这种函数是我们可以亲近的函数，它们很开放、很坦白，心里想什么就说什么，比如$f(x)=2-3x$，这个多项式会告诉我们想问的任何消息，甚至更多，譬如，我们问：“嘿，老兄，你在4那点的值是多少？”这时$f(x)$会毫不犹豫的回答：“你把4代进来，就会得到$2-3\times 4=-10$，顺便告诉你，我最近长了奇怪的疹子，痒的要命，还好这两天症状减轻了...”。但是$ln(x)$阴暗、多疑，要是问它：

“嗨，你在3的值是多少啊？”你得到的答案可能是：“你要干什么？为什么打听别人的私事？你以为凭着你那点加减乘除的三脚猫功夫就可以查出我的底细？况且我在3的值是多少，干你什么事！”

----《微积分之倚天宝剑》

泰勒公式最直接的一个应用就是用于计算，计算机一般都是把$sin(x)$进行泰勒展开进行计算的。

泰勒公式还可以把问题简化，比如计算，$\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}$，代入$sin(x)$的泰勒展开有：$\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+o(x^3)}{x}=1$，其中$o(x^3)$是泰勒公式里面的余项，是高阶无穷小，$\lim_{x\to 0}o(x^3)=0$。解题神器有没有？

标签与声明

标签： 泰勒公式

声明：原创内容，未授权请勿转载，内容合作意见反馈联系公众号: matongxue314

关注马同学

微信公众号：matongxue314