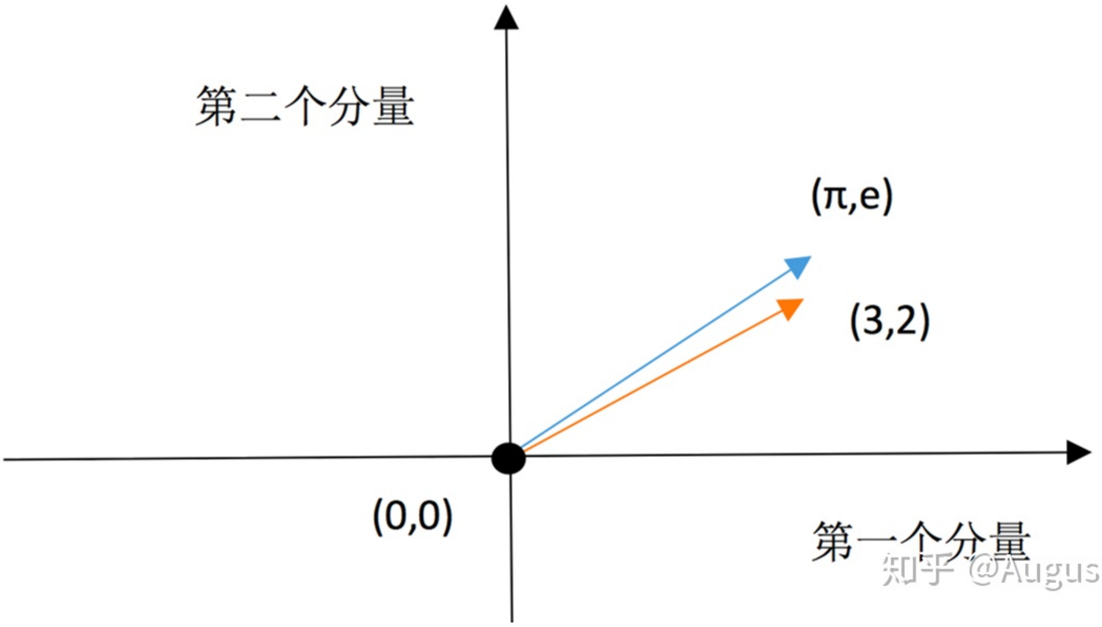
在上一节我们学习了矩阵的 LU 分解、置换矩阵和 转置矩阵，这一节，我们将学习线性代 的关键所在：向量空间与子空间； 列空间与方程 Ax=b 之间的联系；并由此引出了零空间，根据 Ax=b 给出两种构建子空间的方法。

1. 向量空间

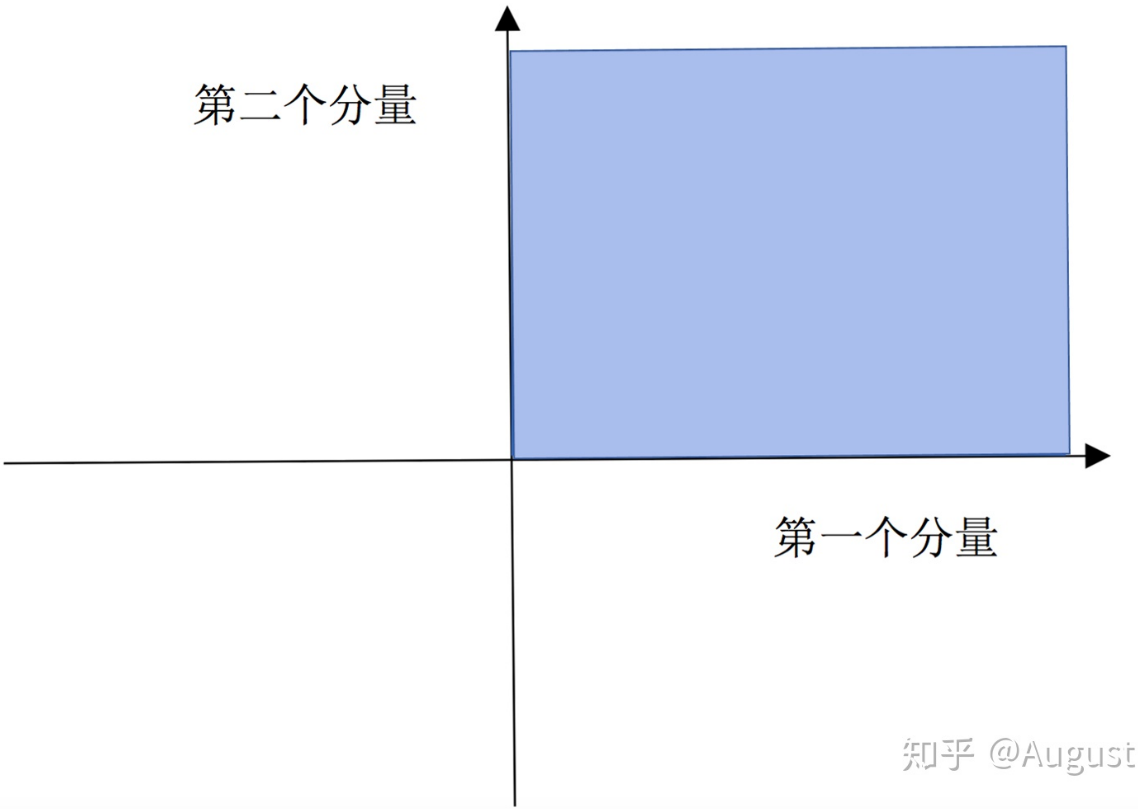
向量空间表示一整个空间的向量，但不是任意向量的集合都能被称为向量空间。向量空间必须满足一定规则：**该空间对空间内向量的线性组合（相加，数乘）封闭**。也就是说如果一个向量集合所组成的空间满足两种操作（数乘、相加）且通过这两种操作及他们之间的线性组合后的向量仍然在这个集合所形成的空间中。那么我们就称它为向量空间。比如：v，w 为向量空间内的向量，则向量 3v 或 v+w 都仍然在此空间中，那么这个空间可称为向量空间。

比如 $\boldsymbol{R^2}$ (所有的二维实向量) 就是一个向量空间：$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}\pi\\e\end{bmatrix}$ 均在 R^2 向量空间中，对他们进行线性组合，得到的向量仍在 $\boldsymbol{R^2}$ 向量空间中。反映在图像上：

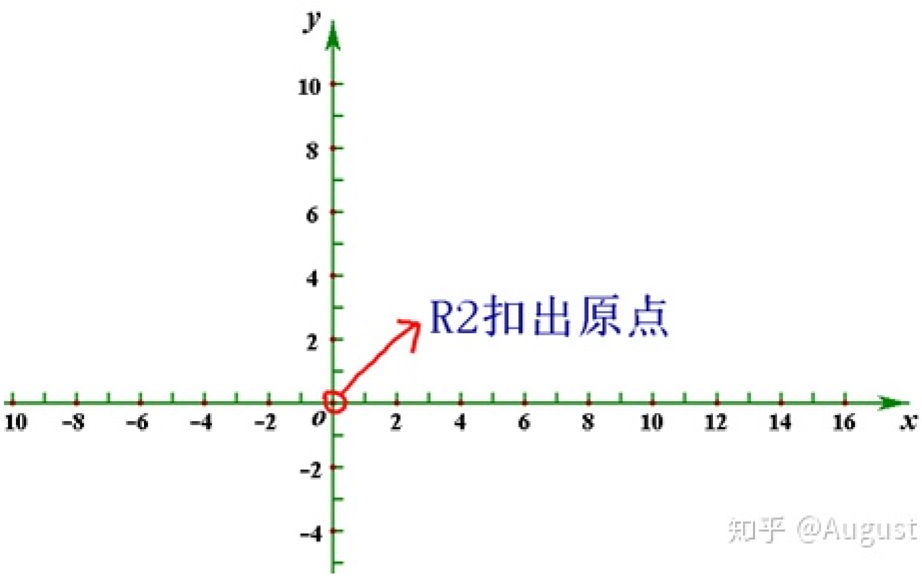


很明显，$\boldsymbol{R^2}$ 的向量空间可以构成一个平面。这个向量空间存在的关键在于上图中平面上任何向量都在 $\boldsymbol{R^2}$ 的向量空间中。尤其是 0 向量，它存在于所有向量空间中。

同样，可以通过到三维向量空间 $\boldsymbol{R^3}$，n 维向量空间 $\boldsymbol{R^n}$ 上。再举两个不是向量空间的例子：



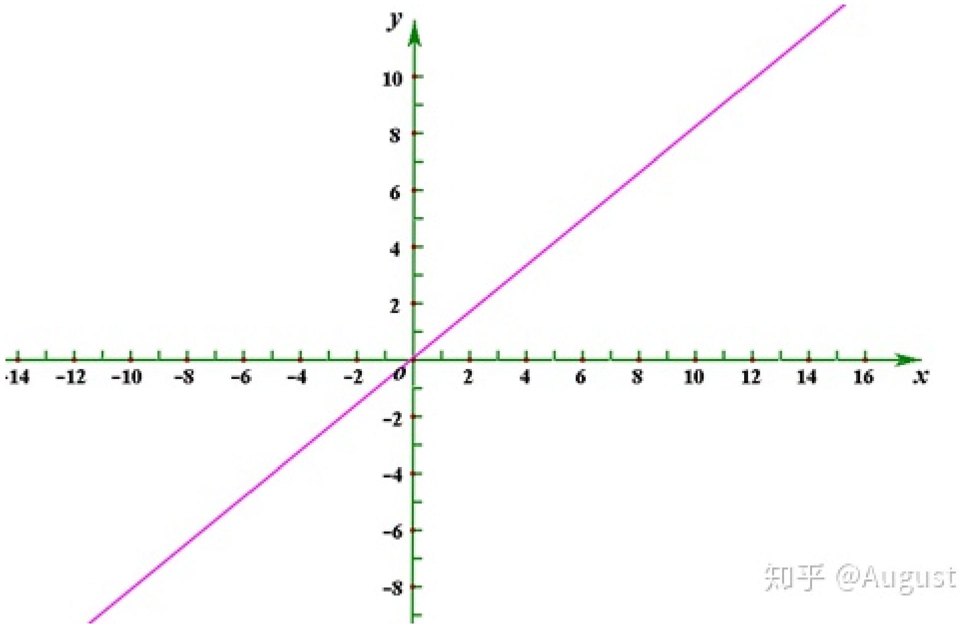
在上面图中，我们可以看到当我们尝试用 - 1 和其中某个向量（除零向量）相乘时，其所得的向量一定不在第一象限中。所以，不是向量空间。



上图中是 R^2 中不含有 0 向量，那么当我们取一个向量和一个向量的反向向量相加时 $((2,3),(-2,\quad -3))$ 所得到的零向量也不在其内部，故其也不是向量空间。

2. 子空间（subspace）

对于子空间，一个很好的解释属于向量空间的一部分，但是它同样满足向量空间的规则，也是一个向量空间。例如在 R^2 中的一条过原点的直线即为 R^2 的子空间。如图：



下面让我们去列举下在 R^2 (二维向量空间) 和 R^3 (三维向量空间) 中的所有的子空间。

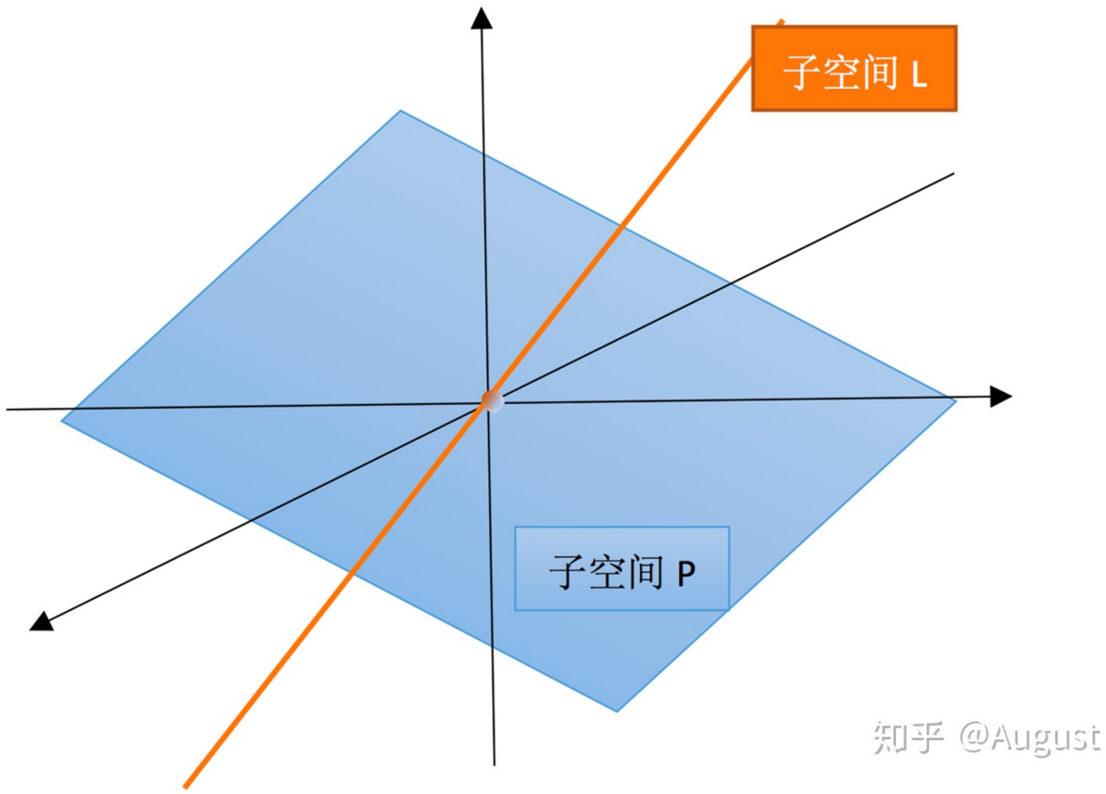
R^2 中的子空间有：

- R^2 本身
- 任何一条过原点（0,0）的直线（它就像 R^1 一样，却不同于 R^1 ）
- 零向量

R^ 2 中的子空间有：

- R^3 本身
- 任何一个过原点（0,0,0）的平面
- 任何一条过原点（0,0,0）的直线
- 零向量

R^3 中的二维子空间和一维子空间的示意图如下所示：



注意：子空间必须包含原点（零向量）

我们可以根据这些去思考 R^n 中的子空间是以什么样的形式的存在，方便以后的理解。

下面有一个小问题：我们用 P 表示通过原点的平面，用 L 表示通过原点的直线，他们均是 R^3 中的子空间，试问（P∩L）、（P∪L）是否还是子空间呢？

从直观的角度考虑，显然 P∩L 仍然是子空间，而 P∪L 则不是（比如 P 是一个三维空间的平面，而 L 是三维空间中与平面 P 交叉的直线）。推而广之，任意向量空间之间的并集不一定是向量空间，任意向量空间的交集一定是向量空间。

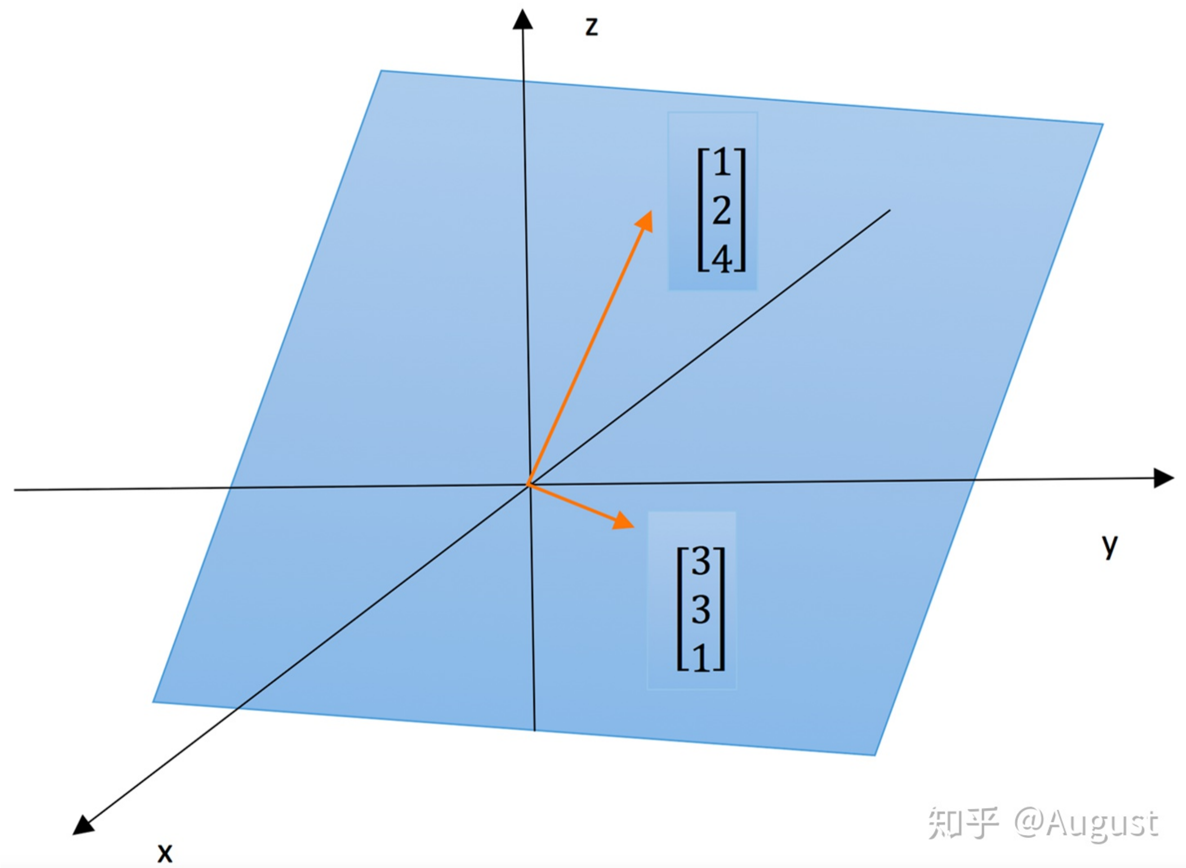
3. 矩阵的列空间（column space）

列空间是由一个矩阵的列向量所构造的子空间，下面我们给出一个矩阵 A：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

那么矩阵的两个列向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 以及它们的线性组合构成了 R^3 的子空间，我们称之为列空间。 记为 C(A)。

因为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 不在同一条直线上，所以这个列空间表现在图像上就是一个过原点与这两个列向量的平面。也就是说 A 的列空间是三维空间中的一个平面。



对于更高维度的向量空间，例如 R^{10} 空间中 5 个向量的线性组合是什么样的？如果 5 个向量不共线，我们就可以理解为十维空间的五维平面之类的东西。

这里还要主要，如果矩阵的列向量两两之间都是共线的，其列空间就是一条过原点的直线。

4 Ax = b 的空间解释 (从 A 的角度)

假设方程 Ax = b：

$$Ax=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&4\\4&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{bmatrix}$$

系数矩阵 A:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&4\\4&1&5\end{bmatrix}$$

第一个问题是：这个方程始终有解吗？

我们可以把矩阵向量的乘积 (Ax) 看作是对 A 的列向量进行线性组合：

$$Ax=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&4\\4&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$$

也可以说 Ax 代表 A 的列空间。

显然，三个四维向量的线性组合是无法铺满整个四维向量空间的，这里的 Ax 只能是 R^4 空间的子空间，也就是无法保证任意一个四维向量 $b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{bmatrix}$ 都能找到 A 列向量的一种线性组合，使得 Ax=b。

第二个问题：什么样的 b 可以使方程 Ax=b 有解？

上面介绍过 Ax 代表 A 的列空间，也就是说，只要向量 b 在 “A 的列空间” 中，那么就可以找到一种 A 列向量的线性组合来构成向量 b，即 Ax=b 有解。

第三个问题：能否去掉 A 的一列，却不影响 A 的列空间（等价的提问：这三列线性无关吗，或最终构成的是三维向量吗，都对线性组合有贡献吗）？

我们看一下 A 的三个列向量：$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$ ，显然，第三列和前两列满足：

$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$ ，也就是说第三列对线性组合没有贡献，我们仅仅依靠前两列的线性组合就可以构成 A 的列空间。

我们称 $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ 为主列（关于主列的选取，通常的原则是有限考虑靠前的线性无关的变量）。

所以可以去掉第三列，并不影响 A 的列空间的构成。A 的列向量实际上是四维向量空间里面的二维子空间。

5. 零空间

矩阵 A 的零空间为 Ax = 0 的所有的解所构成的向量空间，记为 N(A)。也就是说 A 的零空间就是所有满足方程等式的 x 组成的向量空间。

对于 Ax = 0：

$$Ax=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&4\\4&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

我们能很容易看出它的两个解 $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$, 将解写成通用的形式 $C\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ 即为矩阵 A 的零空间。我们看到 x 是三维的，所以其解空间也是三维的，A 的零空间是三维空间的子空间（等于列数），反映在图像上为一条穿过原点的直线。

所以，对于 $m \times n$ 的矩阵来说，列空间是 R^m 的子空间，零空间是 R^n 的子空间，列空间的关键在于列向量的维数，零空间的的关键在于列空间的个数。

不同于列空间，列空间是由其列向量构造而成，其一定满足向量空间的规则。那么对于零空间，为什么能构成向量空间呢？我们给出如下证明。

- 加法封闭：如果 Av = 0 且 Aw = 0 那么 A(v+w)= Av+Aw = 0
- 数乘封闭：如果 Av = 0 那么 A(cv) = c(Av)= 0（c 为常数)

6. Ax = b 的空间解释 (从 x 的角度)

那如果上面构造零空间的方程右侧变为任意向量的话，其解集 x 还能构成向量空间吗？

对于方程 Ax=b，如下所示：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

显然不是，显然 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 不是方程组的解，也就是说方程组的解不包含零向量，反应在图像上就解集合就是一个不过原点的平面。我们学过任何向量空间都包含零向量，因此该方程组的解不能构成向量空间。

这也告诉我们，想从 x 的角度研究 Ax=b，则只有 b 是零向量时，x 才能构成向量空间（零空间），其他情况下，方程的解集 x 均无法构成向量空间。

总结一下，对于矩阵 A，从 Ax=b 的角度，给出了构建两种子空间的方法：

- A 的角度：从 Ax 为列向量线性组合角度构造列空间。
- x 的角度：一开始不知道 x 中有什么向量，只是构造 Ax=0，让 x 满足特定的条件构造子空间。