上一节我们介绍了矩阵向量空间的线性相关性，基和维数。这一节我们对矩阵做进一步挖掘，介绍矩阵的四个基本子空间，也是对空间概念的补充。

1. 四个基本子空间介绍

对于一个 $m \times n$ 矩阵 A 来说，以下四个基本空间是其基础。

(1) 列空间 $C(A)$

定义：列空间是矩阵 A 的列向量线性组合构成的空间。对于$m \times n$的矩阵 A 来说，每个列向量有 m 个分量，即列空间属于 R^m 的子空间。

基： 设矩阵 A 的秩为 r， 则 A 有 r 个主列，这 r 个主列就是列向量的一组基。

维数：列空间的空间维数为 r。

(2) 零空间 $N(A)$

定义：即 Ax=0 的解构成的空间。由于 x 本质是对 A 列向量的线性组合，A 一共有 n 个列向量，所以零空间是 R^n 的子空间。

基： 矩阵 A 秩为 r 时，自由列为 n-r 列。这 n-r 列决定了 x 中的 n-r 个自由变元，赋值后就构成了零空间的 n-r 个基向量。

维数： 零空间维数为：n-r。

(3) 行空间 $C(A^T)$

定义：行空间是矩阵 A 的行向量线性组合构成的空间，也可以理解为 A 转置的列空间，即 $C(A^T)$。对于$m \times n$的矩阵 A 来说，每个行向量有 n 个分量，即行空间属于R^n 的子空间。

基： A 的行空间可以化为 A^T 的列空间。但我们这里使用的方法是直接对 A 的行向量进行变换，得到的行最简矩阵中的非零向量（前 r 行矩阵）即为行空间的基。

维数： 行空间的维数也是秩 r。

例：从行空间的角度研究矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\1&1&2&1\\1&2&3&1\end{bmatrix}$ 的基与维数。

对 A 进行行最简变换：

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\1&1&2&1\\1&2&3&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{消元、化简}}\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=R$$

由于我们做了行变换，所以 A 的列空间受到影响，$C(R)\neq C(A)$，而 A 的行变换并不影响行空间。行最简矩阵 R 中前两行即为 A 行空间的一组基。A 只有两行线性无关，A 的秩 $r(A)=2$，A 的行空间维数为 2.

所以，可以得出无论对于矩阵 A 还是 R，其行空间的一组基，可以由 R 矩阵的前 r 行向量组成。

(4) 左零空间 $N(A^T)$

定义： 即$A^Ty=0$的解构成的空间。由于 x 本质是对 A 行向量的线性组合，A 一共有 m 个行向量，所以零空间是R^m的子空间。

由 $A^Ty=0$ 两边同时转置得到：$y^TA=0$对于矩阵 A 来说y^T左乘 A 得到零向量，所以我们称之为左零向量。

维数： A^T 是一个$n \times m$矩阵，左零空间 的维数为 m - r。

零空间内的向量反映的是 A 列向量的线性组合，最终得到零向量。而左零空间反映的是 A 行向量的线性组合，最终得到零向量。

还是上面的例子，矩阵 A 经过行变换后可以得到行最简矩阵 R：

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\1&1&2&1\\1&2&3&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{消元、化简}}\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=R$$

这个行变换过程可以用消元矩阵反映出来：

$$EA=E\cdot\begin{bmatrix}1&2&3&1\\1&1&2&1\\1&2&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=R$$

我们知道 R 的每一行可以看做 A 中每一个行向量的线性组合，而 E 中的每一行对应线性组合的乘数。由于 R 的第三行为 0 向量，那么我们只要找到 E 中的第三行的向量，就可以将 A 中行向量的线性组合得到零。

我们采用 Gauss-Jordan 消元法来求解消元矩阵 E。将增广矩阵 $\left[\begin{array}{c|c}A_{m\times n}&I_{m\times m}\end{array}\right]$ 中 A 的部分划为简化行阶梯形式 $\left[\begin{array}{c|c}R_{m\times n}&E_{m\times m}\end{array}\right]$，此时矩阵 E 会将所有的行变换记录下来。本例中：

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&2&3&1&1&0&0\\1&1&2&1&0&1&0\\1&2&3&1&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&0&1&1&-1&2&0\\0&1&1&0&1&-1&0\\0&0&0&0&-1&0&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}R_{m\times n}&E_{m\times m}\end{array}\right]$$

那么：

$$EA=\begin{bmatrix}-1&2&0\\1&-1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2&3&1\\1&1&2&1\\1&2&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=R$$

很明显，式中 E 的最后一行对 A 的行做线性组合后，得到 R 的最后一行，即 0 向量：

$$\begin{bmatrix}-1&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2&3&1\\1&1&2&1\\1&2&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\end{bmatrix}$$

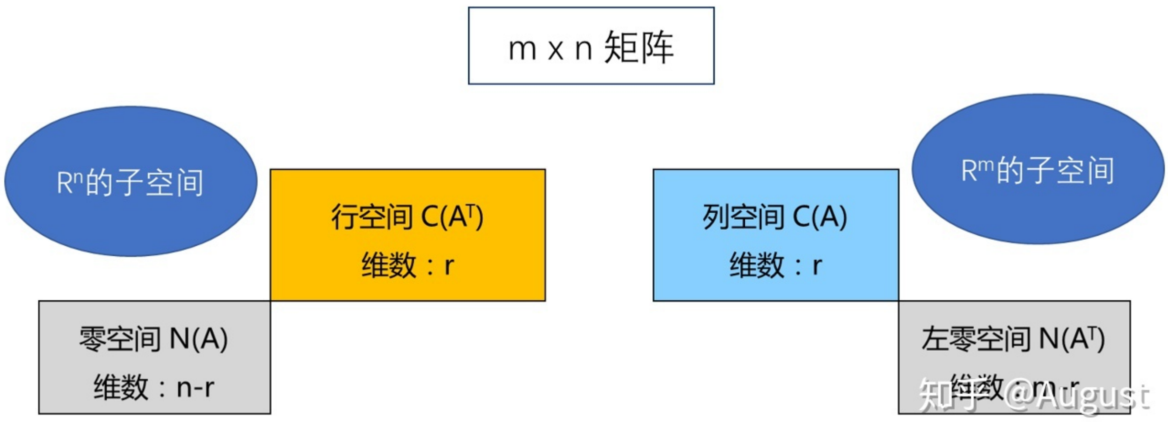
也就是 $y^TA=0^T$。

这样就得到了左零空间的一组基向量 $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，也就是 $m-r=3-2=1$ 个向量。

总结一下，寻找左零矩阵的基，重点在于找 A 行组合为零的系数。也就是上面的 Gauss-Jordan 消元法，将 $\left[\begin{array}{c|c} A_{m\times n} & I_{m\times m}\end{array}\right]$ 中 A 的部分划为简化行阶梯形式 $\left[\begin{array}{c|c} R_{m\times n} & E_{m\times m}\end{array}\right]$，进而求得 E 矩阵，写出 EA=R，寻找 R 中的零行，对应赵铎 E 中的线性组合方式，就得到了左零空间的基。

2. 四个基本空间图像

矩阵 A 是个基本空间的关系如下图所示：



3. 矩阵空间

实际上，线性空间的元素并不一定是实数组成 的向量，我们可以将所有 3×3 的矩阵当成一个所谓"向量空间" 中的向量。

只要满足线性空间的八条规律，对线性运算封闭，就可以将其当做线性空间中的元素。 因为矩阵本身也满足线性空间的八条运算律，我们就可以将所有的3×3 矩阵看做一个线性空间。

这里我们将所有的3×3矩阵看做了一个线性空间，那么它的子空间有 什么呢？

- 上三角矩阵
- 对称矩阵
- 对角矩阵。

上三角矩阵与对称矩阵的交集为对角矩阵 (diag)。观察如下对角矩阵：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&7\end{bmatrix}$$

可以发现，任何三阶对角矩阵均可用这三个矩阵的线性组合生成，因此，他们生成了三阶对角矩阵空间，即这三个矩阵是三阶对角矩阵空间的一组基。