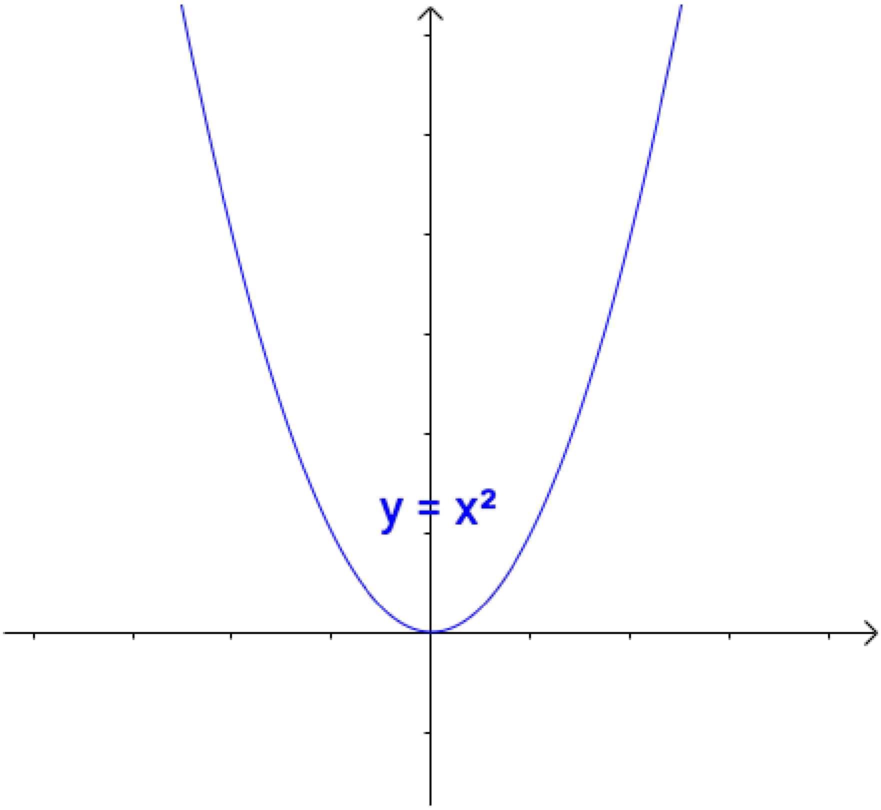
如何理解二次型?

通过矩阵来研究二次函数（方程），这就是线性代数中二次型的重点。

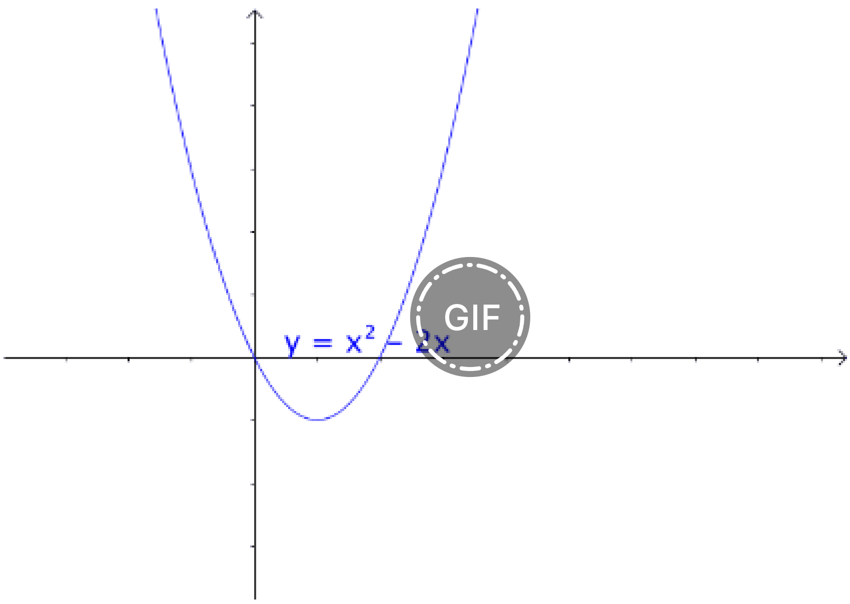
1 二次函数（方程）的特点

1.1 二次函数

最简单的一元二次函数就是：



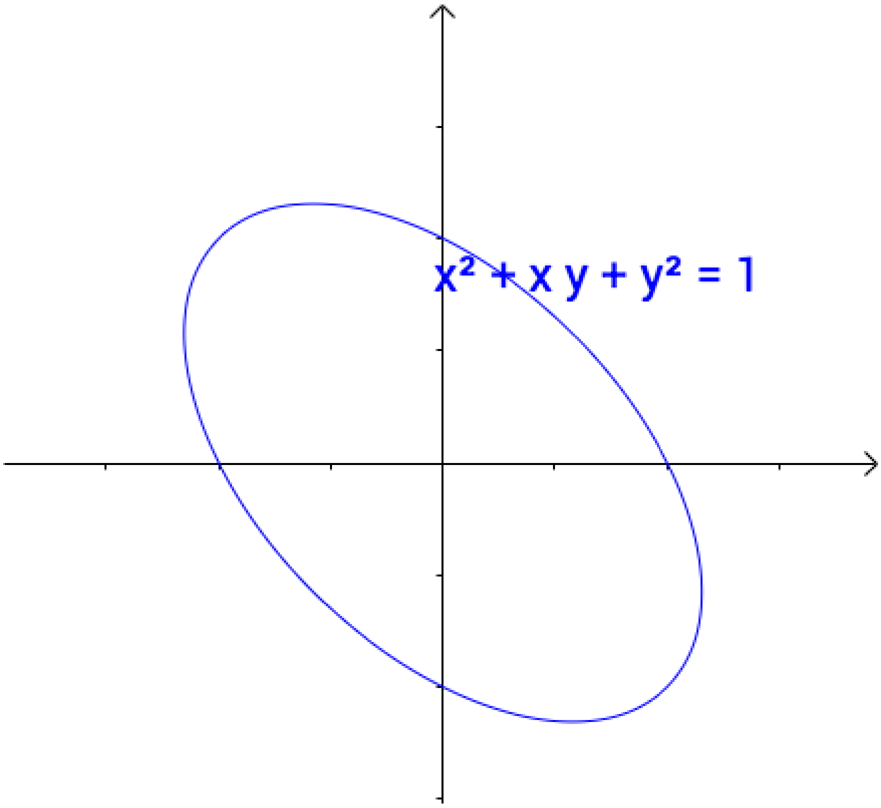
给它增加一次项不会改变形状：



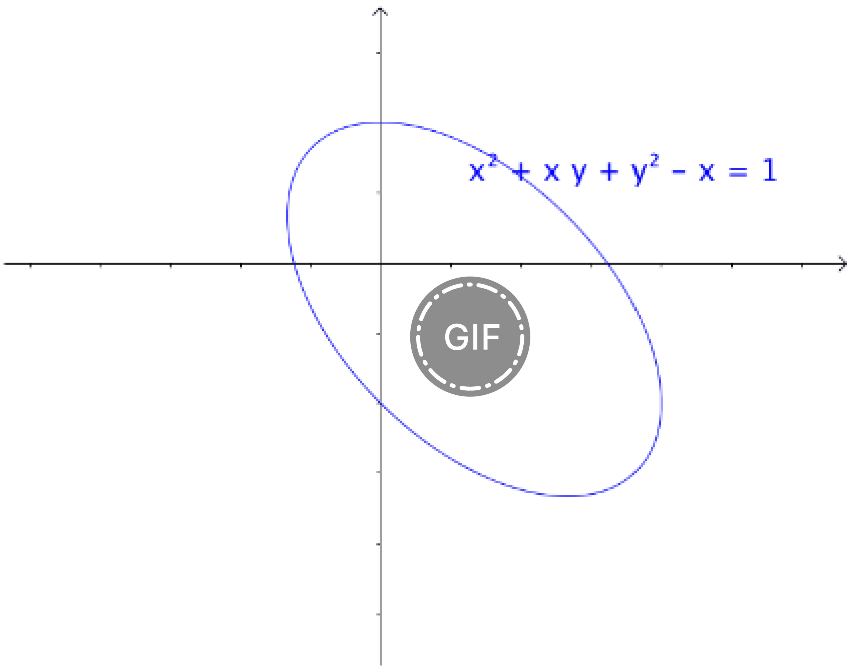
增加常数项就更不用说了，更不会改变形状。

1.2 二次方程

下面是一个二元二次方程：



给它增加一次项也不会改变形状，只是看上去有些伸缩：



1.3 小结

对于二次函数或者二次方程，二次部分是主要部分，往往研究二次这部分就够了。

2 通过矩阵来研究二次方程

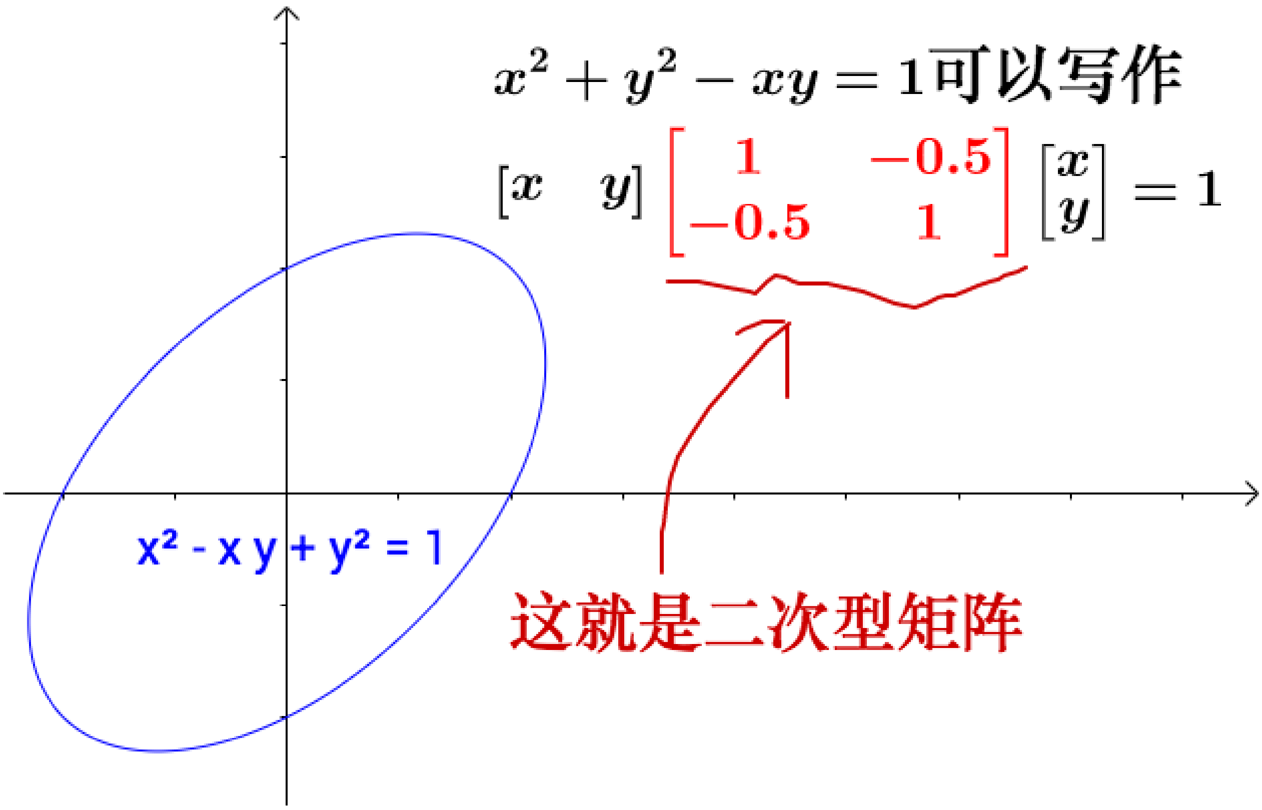
因为二次函数（方程）的二次部分最重要，为了方便研究，我们把含有n个变量的二次齐次函数：

$$f(x_1, x_2, \cdot, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

或者二次齐次方程称为二次型。

2.1 二次型矩阵

实际上我们可以通过矩阵来表示二次型：



更一般的：

$$
\begin{aligned}
&ax^2+2bxy+cy^2\text{可以写作}\\
&\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=1
\end{aligned}
$$

可以写成更线代的形式：

$$
\left.\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=1\\
X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\\
A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}
\end{aligned}\right\}\implies X^TAX
$$

所以有下面一一对应的关系：

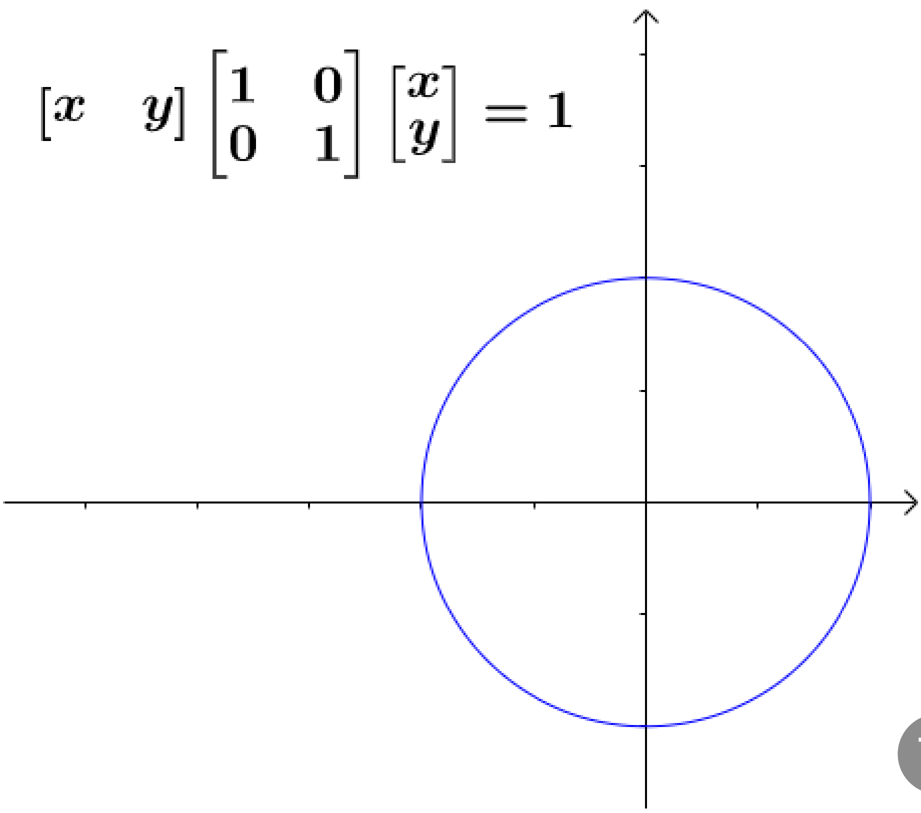
$$\text{对称矩阵} \iff \text{二次型矩阵} \iff \text{二次型}$$

在线代里面，就是通过一个对称矩阵，去研究某个二次型。

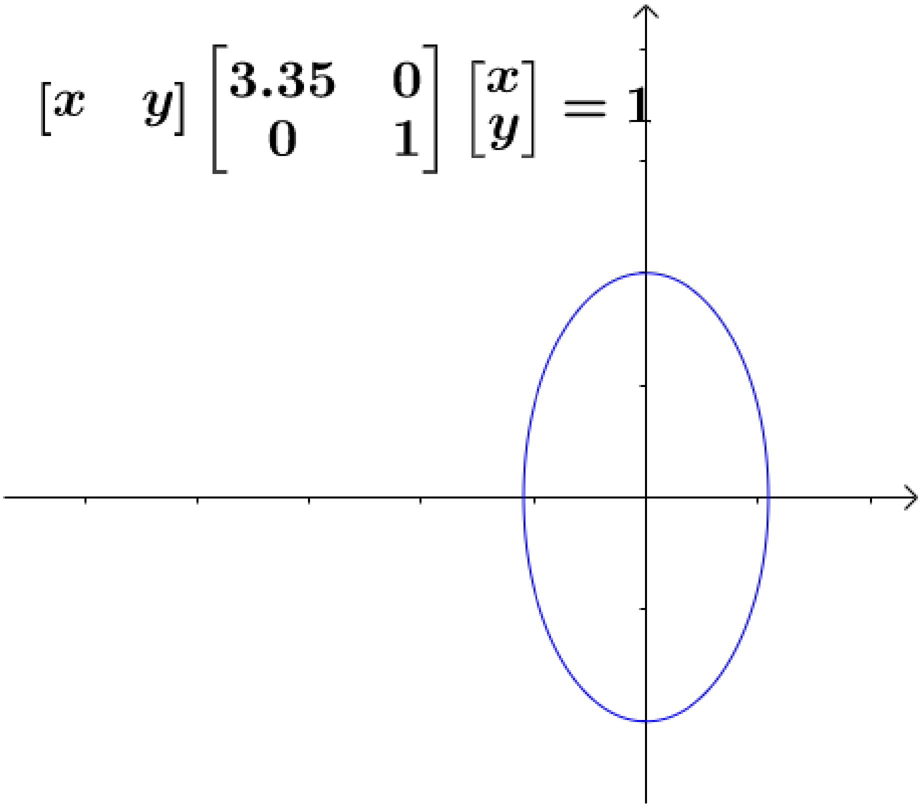
2.2 通过矩阵来研究有什么好处

2.2.1 圆锥曲线

我们来看下，这是一个圆：

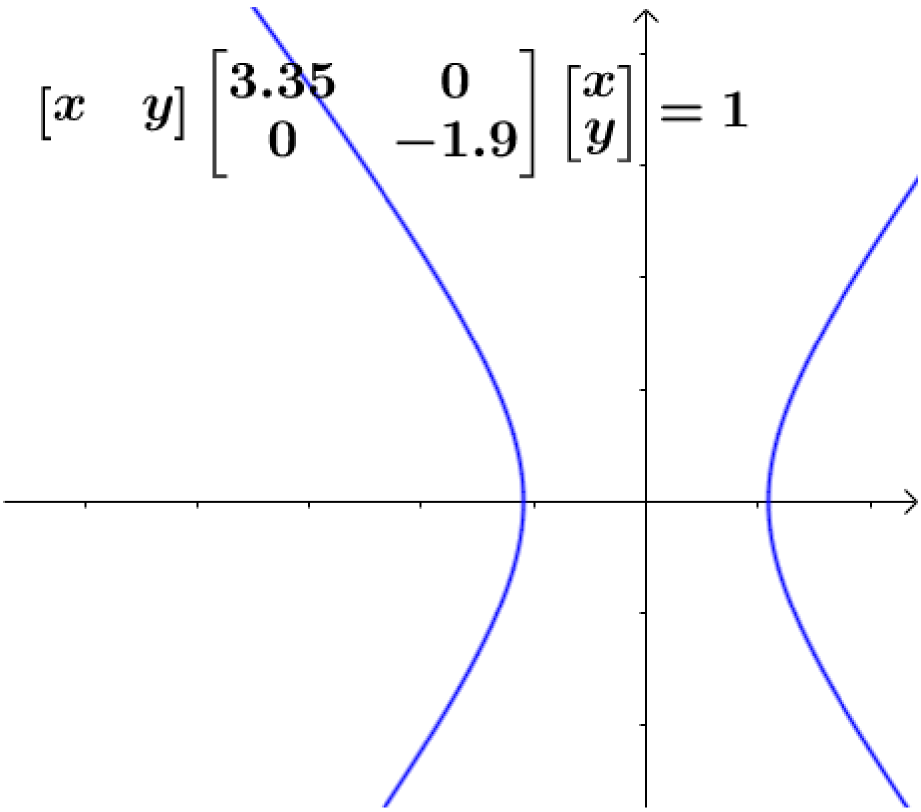


我们来看改变一下二次型矩阵：



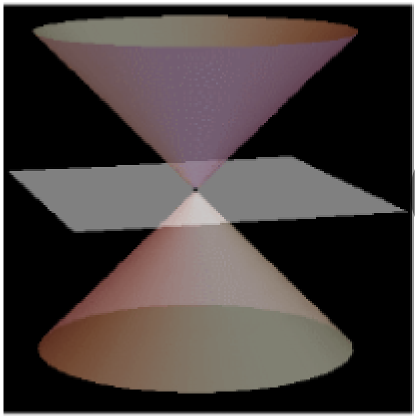
哈，原来椭圆和圆之间是线性关系呐（通过矩阵变换就可以从圆变为椭圆）。

继续：



咦，双曲线和圆之间也是线性关系（准确的说是仿射的）。

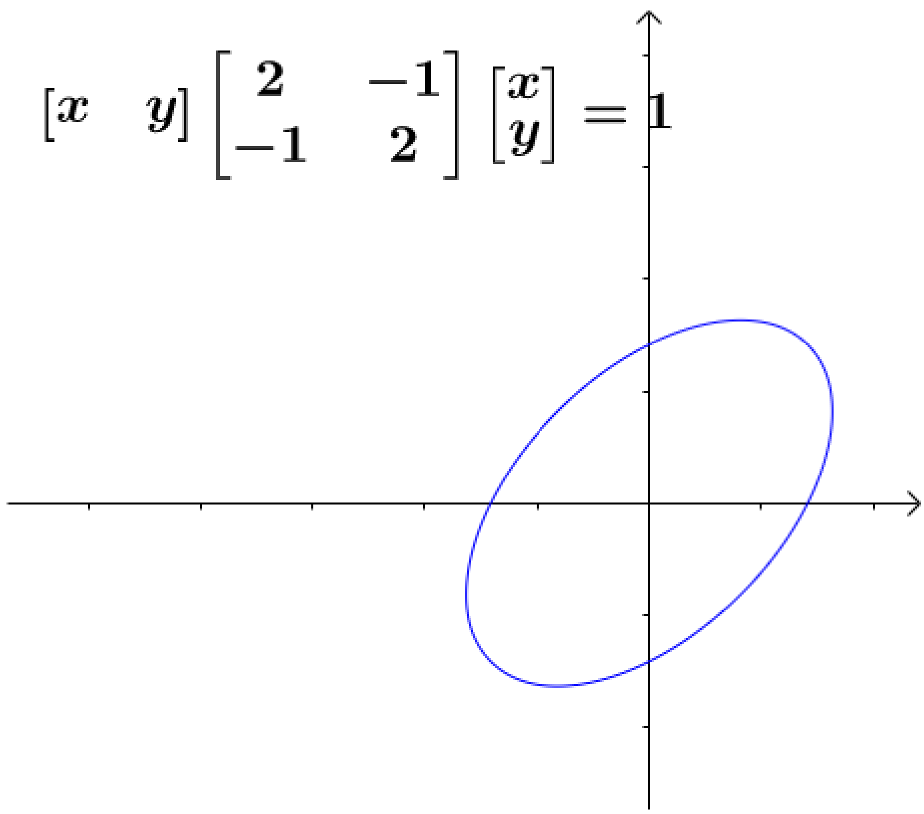
其实圆、椭圆、双曲线之间关系很紧密的，统称为圆锥曲线，都是圆锥体和平面的交线：



从上面动图可看出，一个平面在圆锥体上运动，可以得到圆、椭圆、双曲线，这也是它们之间具有线性关系的来源（平面的运动是线性的、或者是仿射的）。

2.2.2 规范化

再改变下矩阵：



这个椭圆看起来有点歪，不太好处理，我们来把它扶正，这就叫做规范化。

如果我们对矩阵有更深刻的认识，那么要把它扶正很简单。

往下读之前，请先参看我在如何理解特征值下的回答。

首先，矩阵代表了运动，包含：

- 旋转

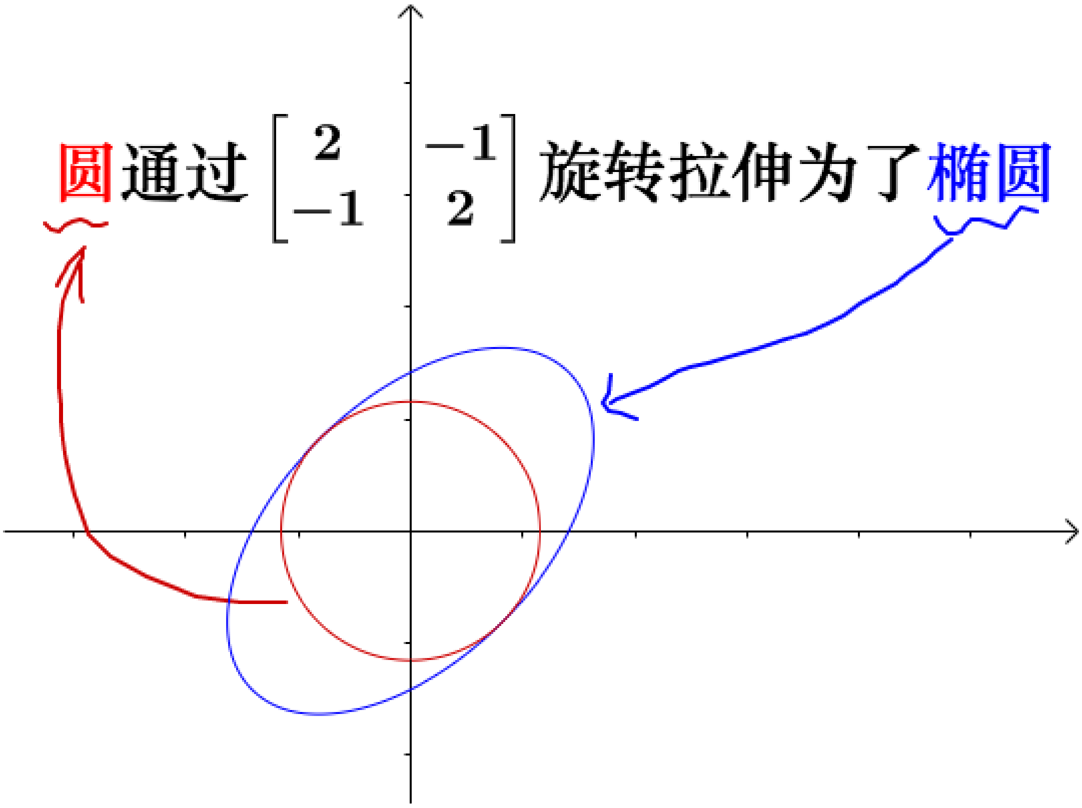
- 拉伸

- 投影

对于方阵，因为没有维度的改变，所以就没有投影这个运动了，只有：

- 旋转
- 拉伸

具体到上面的矩阵：



我把这个矩阵进行特征值分解：

对角矩阵

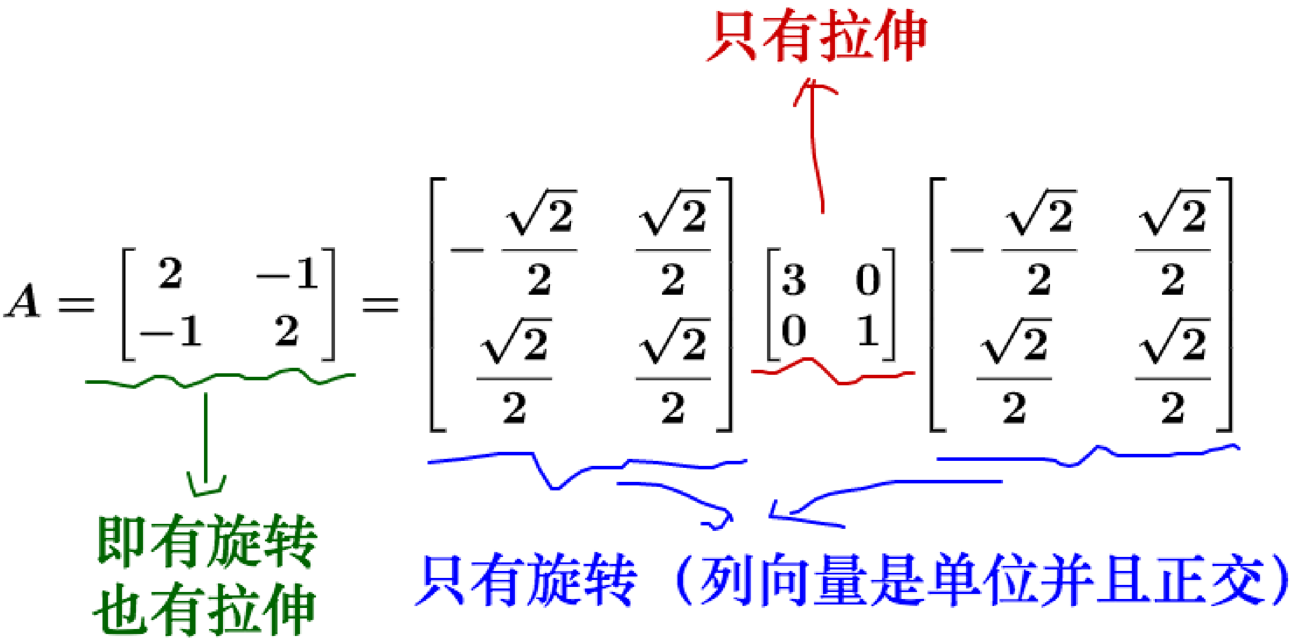
$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

列向量是单位特征向量
并且互相正交

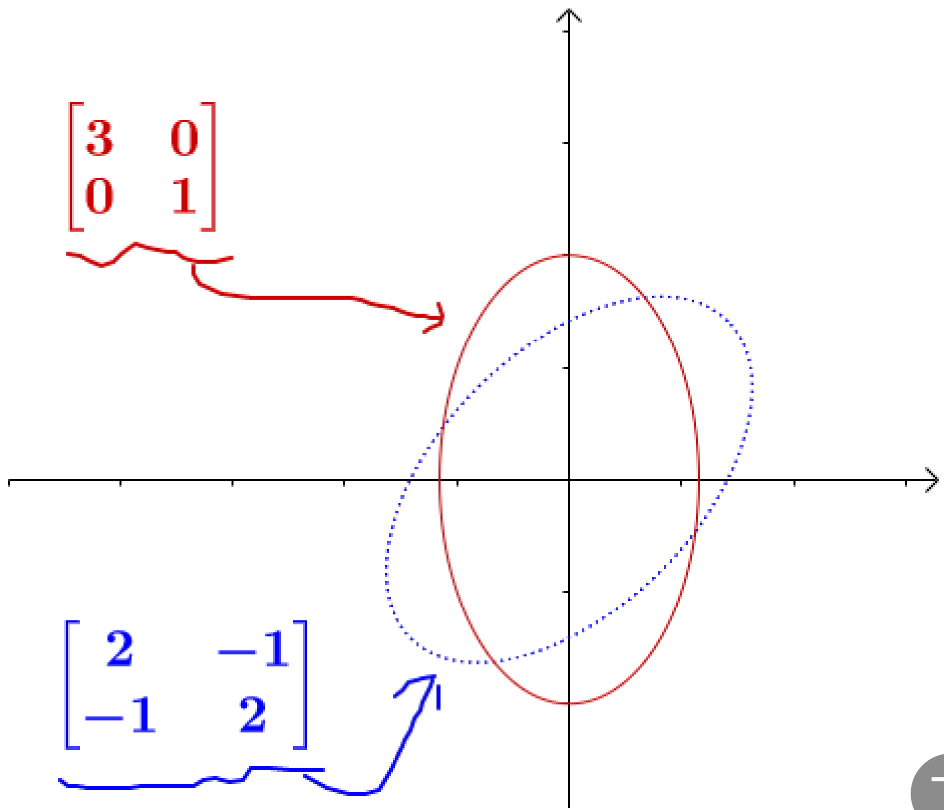
注意我上面提到的正交很重要，为什么重要，可以参看我在如何理解特征值中的解释。

对于二次型矩阵，都是对称矩阵，所以特征值分解总可以得到正交矩阵与对角矩阵。

特征值分解实际上就是把运动分解了：



那么我们只需要保留拉伸部分，就相当于把矩阵扶正（图中把各自图形的二次型矩阵标注出来了）：



所以，用二次型矩阵进行规范化是非常轻松的事情。

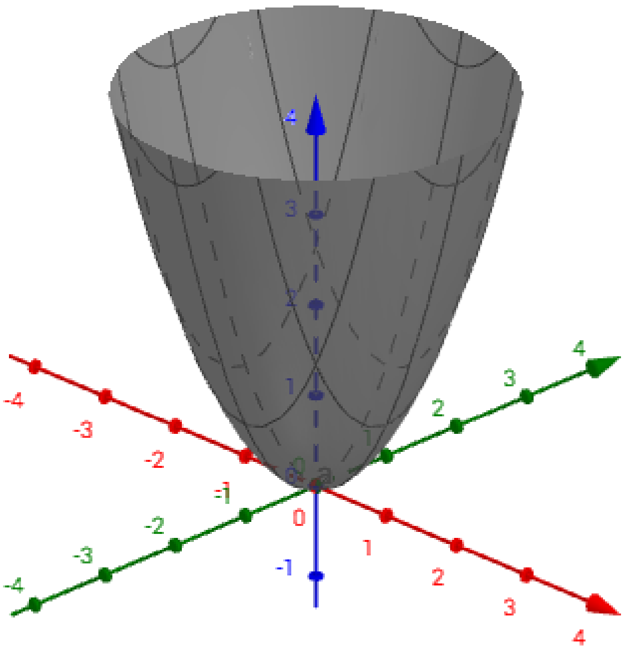
2.2.3 正定

正定是对二次函数有效的一个定义，对方程无效。

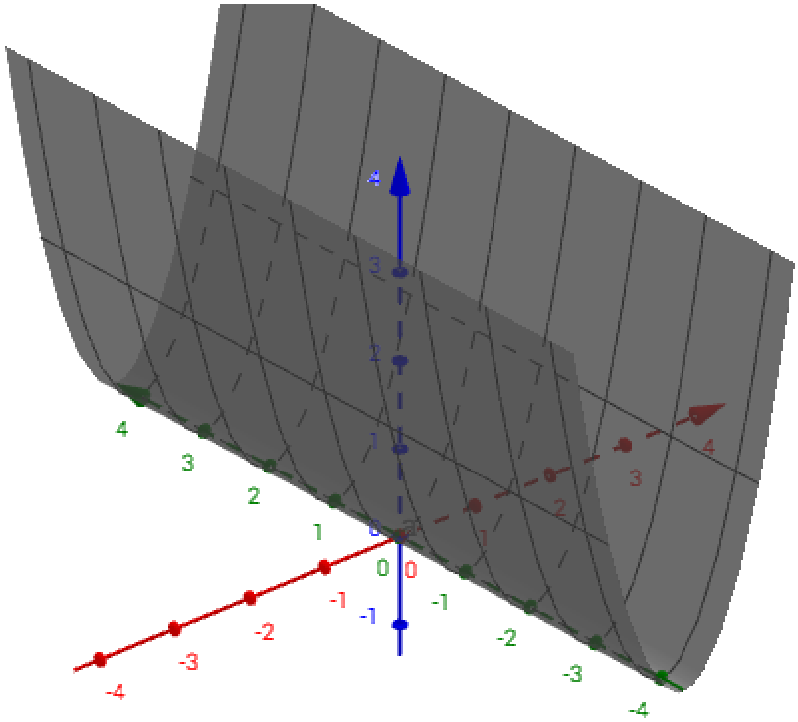
对于二次型函数，$f(x) = x^T Ax$：

- $f(x) > 0, x \neq 0, x \in \mathbb{R}$，则$f$为正定二次型，$A$为正定矩阵
- $f(x) \geq 0, x \neq 0, x \in \mathbb{R}$，则$f$为半正定二次型，$A$为半正定矩阵
- $f(x) < 0, x \neq 0, x \in \mathbb{R}$，则$f$为负定二次型，$A$为负定矩阵
- $f(x) \leq 0, x \neq 0, x \in \mathbb{R}$，则$f$为半负定二次型，$A$为半负定矩阵
- 以上皆不是，就叫做不定

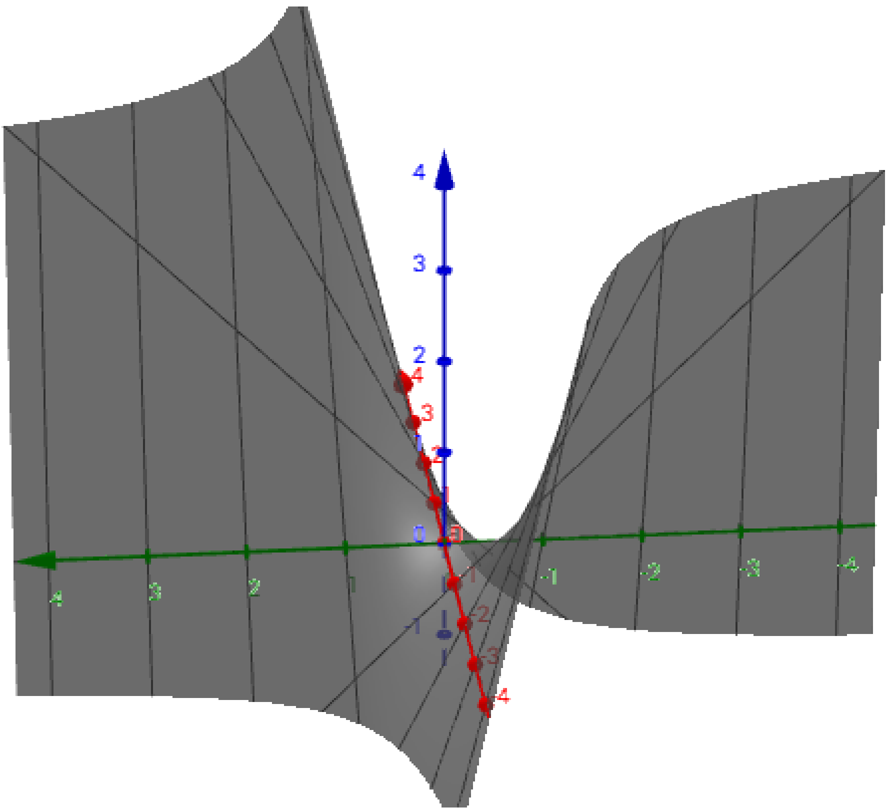
从图像上看，这是正定：



半正定：

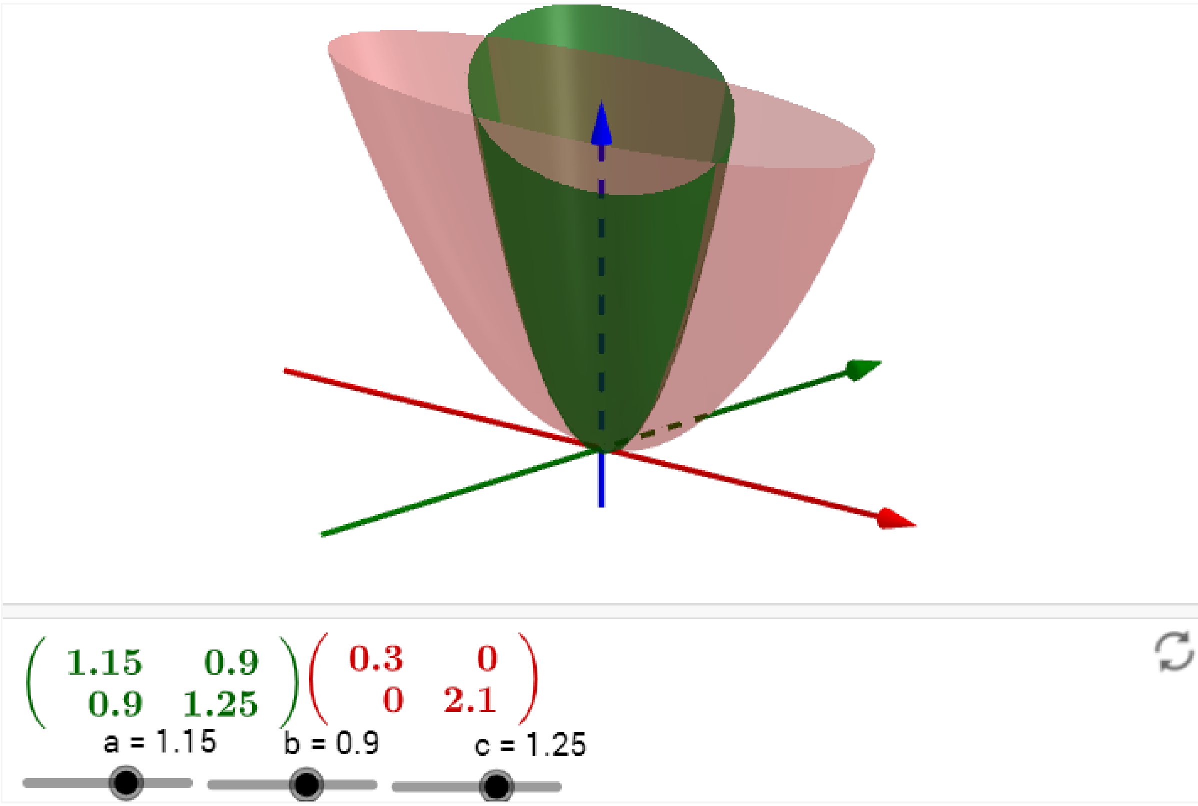


不定：



既然二次型用矩阵来表示了，那么我们能否通过矩阵来判断是否正定呢？

下面我分别给出了二次型的图形，以及对应的特征值矩阵的图形，你可以自己动手试试(3D窗口可以通过鼠标旋转，方便观察)，得出自己的结论：



Created with GeoGebra

起码，我们可以观察出这个结论，特征值都大于0，则为正定矩阵。

3 总结

在很多学科里，二次型都是主要研究对象，很多问题都可以转为二次型。线代作为一门数学工具，在二次型的研究中也发挥了很好的作用。

标签与声明

标签： 二次型