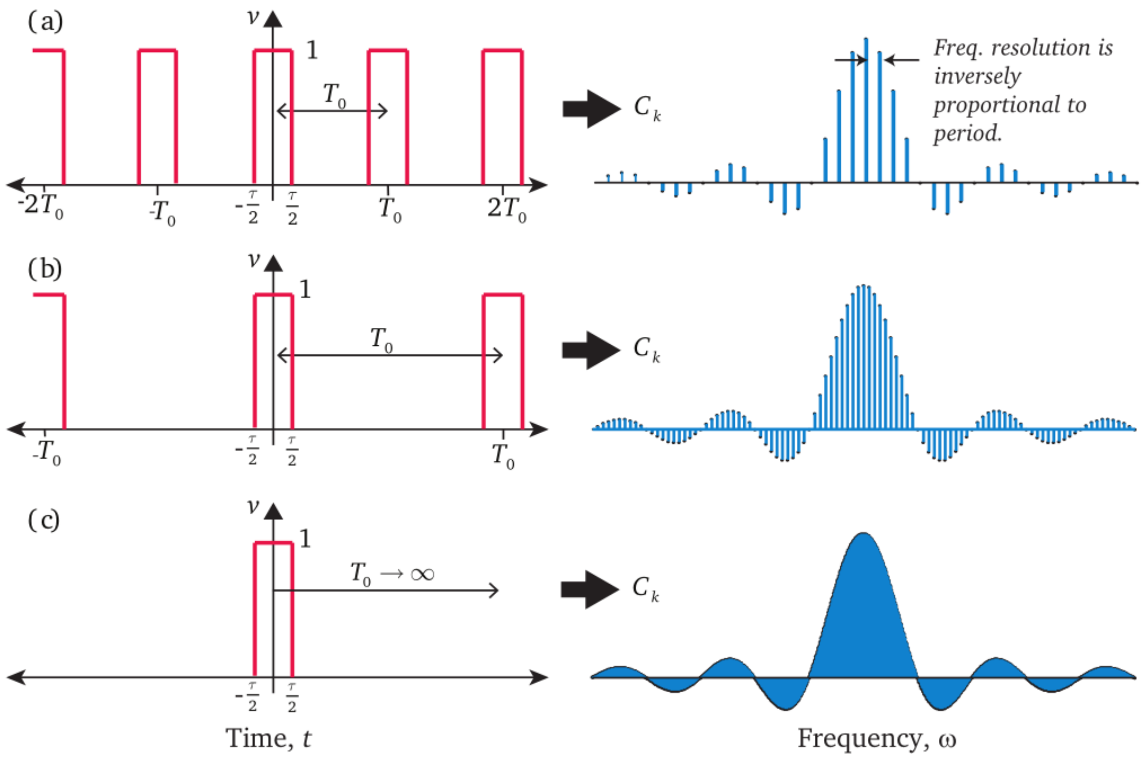
从傅立叶级数到傅立叶变换

之前写过两篇关于傅立叶变换的文章：

- 如何直观地理解傅立叶变换？
- 如何理解傅立叶级数公式？（后面此文简称“代数细节”）

傅立叶级数是针对周期函数的，为了可以处理非周期函数，需要傅立叶变换。如果对傅立叶级数有疑问，请参看“代数细节”一文。

先看下思路：

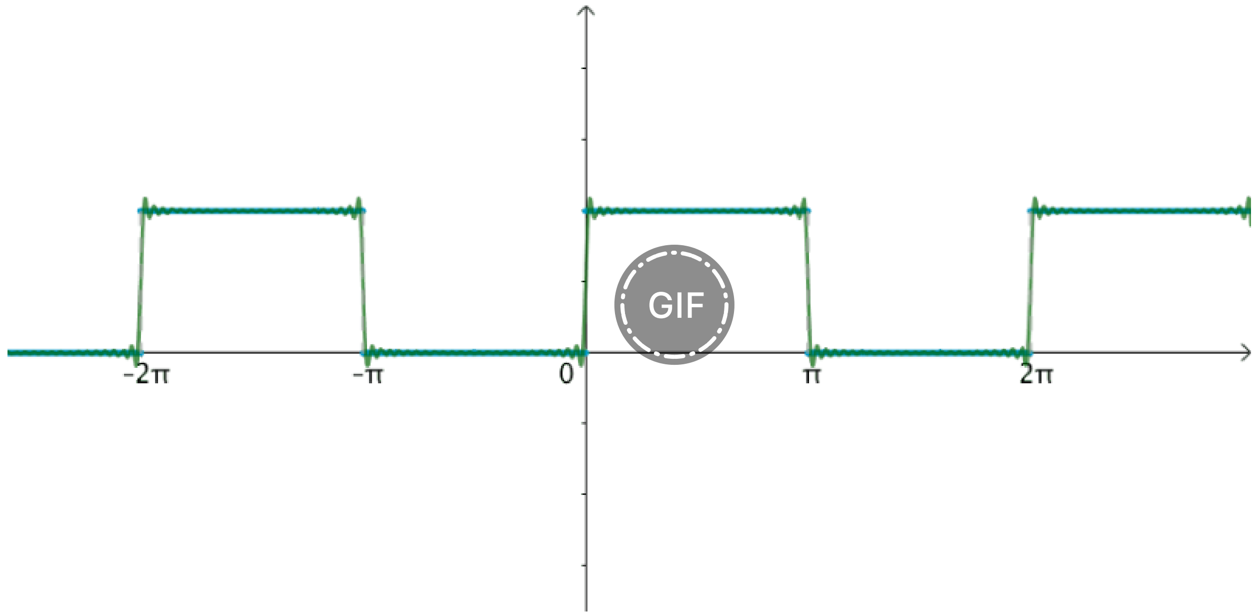


- (a).周期函数，可以通过傅立叶级数画出频域图
- (b).增长周期，频域图变得越来越密集
- (c).$T=\infty$，得到傅立叶变换，频域图变为连续的曲线

下面是细节的讲解。

1 傅立叶级数

让·巴普蒂斯·约瑟夫·傅里叶男爵（1768 - 1830）猜测任意周期函数都可以写成三角函数之和。比如下面这个周期为2π的方波，可以用大量的正弦波的叠加来逼近：



1.1 傅立叶级数是向量

从代数上看，傅立叶级数就是通过三角函数和常数项来叠加逼近周期为T的函数$f(x)$：

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos(\frac{2\pi n}{T}x)+b_n sin(\frac{2\pi n}{T}x)\right),a_0\in\mathbb{R}$$

在“代数细节”一文中解释了，实际上是把$f(x)$当作了如下基的向量：

$$\{1,cos(\frac{2\pi n}{T}x),sin(\frac{2\pi n}{T}x)\}$$

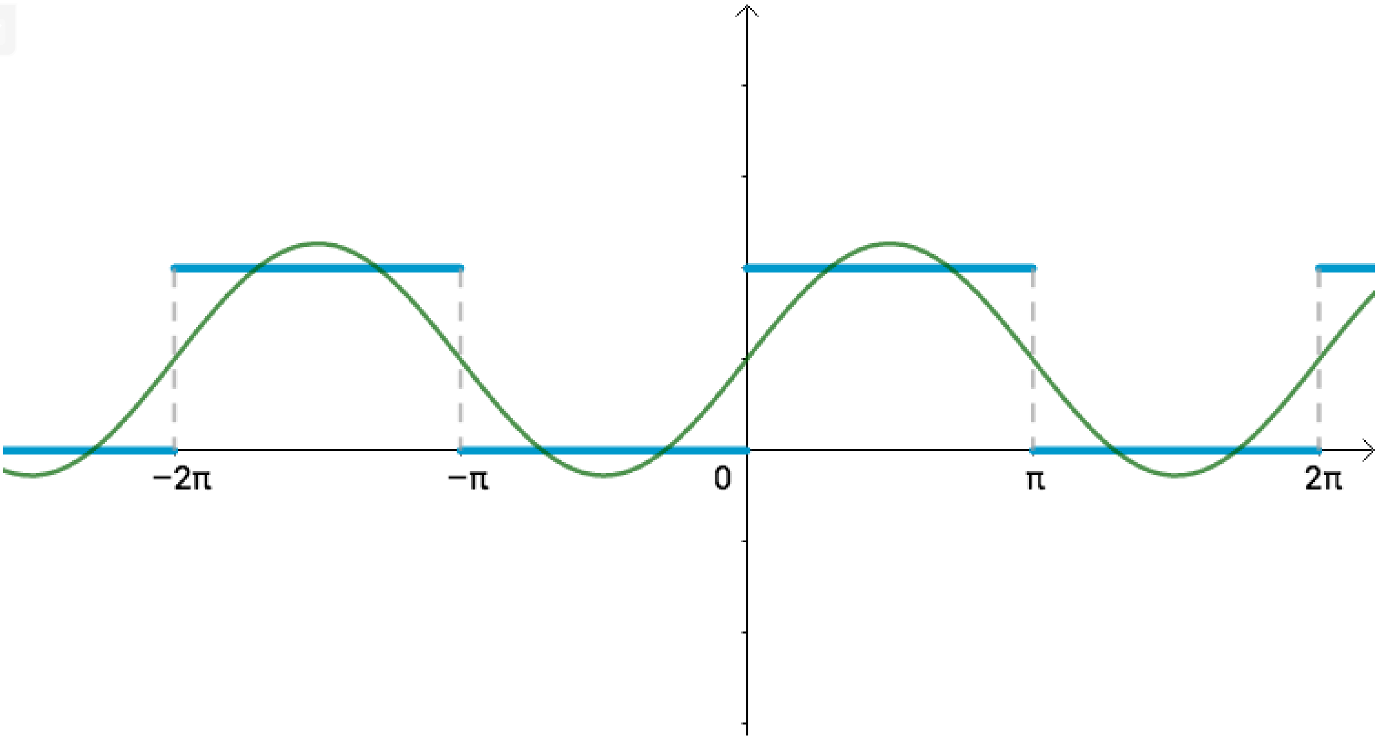
那么上面的式子就可以解读为：

$$f(x)=\underbrace{a_0}_{\text{基}1\text{下的坐标}}\cdot 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{a_n}_{\text{对应基的坐标}}cos(\frac{2\pi n}{T}x)+\underbrace{b_n}_{\text{对应基的坐标}}sin(\frac{2\pi n}{T}x)\right)$$

说具体点，比如刚才提到的，$T=2\pi$的方波$f(x)$，可以初略的写作：

$$f(x)\approx 1+\frac{4}{\pi}sin(x)$$

从几何上看，有那么一丁点相似：



我们可以认为：

$$f(x) \approx 1 + \frac{4}{\pi} sin(x)$$

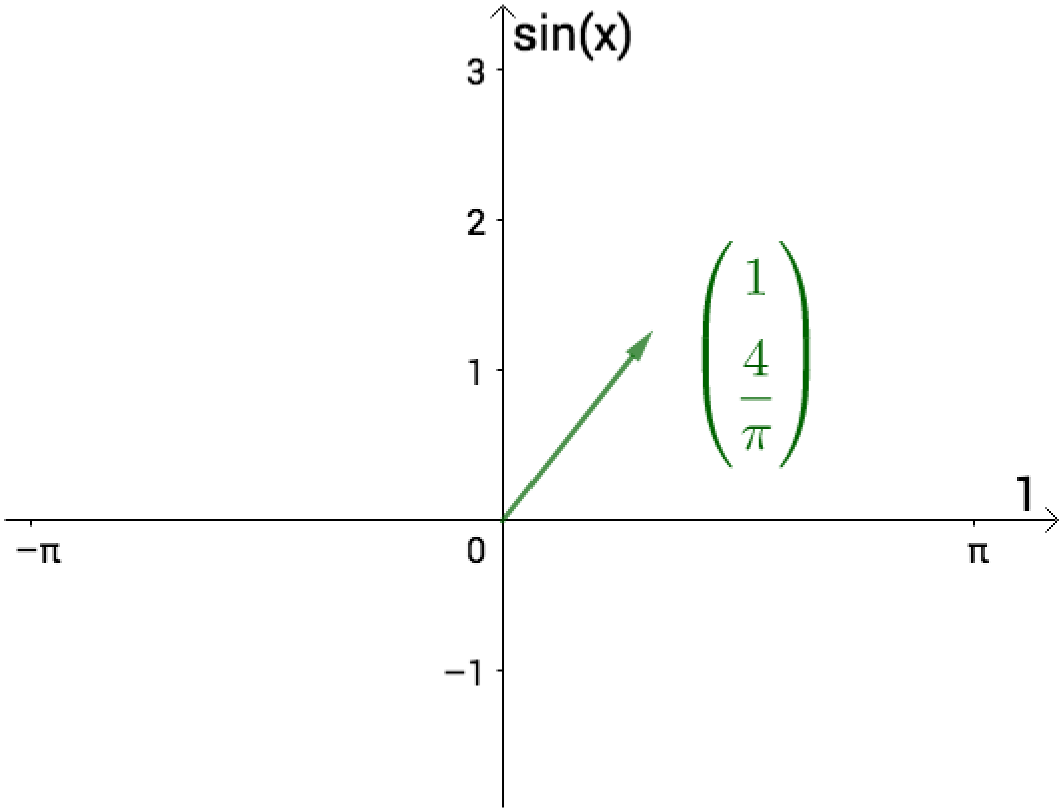
此函数的基为：

$$\{1, sin(x)\}$$

则 $f(x)$ 相当于向量：

$$(1, \frac{4}{\pi})$$

画到图上如下，注意坐标轴不是 x, y，而是 $1, sin(x)$：

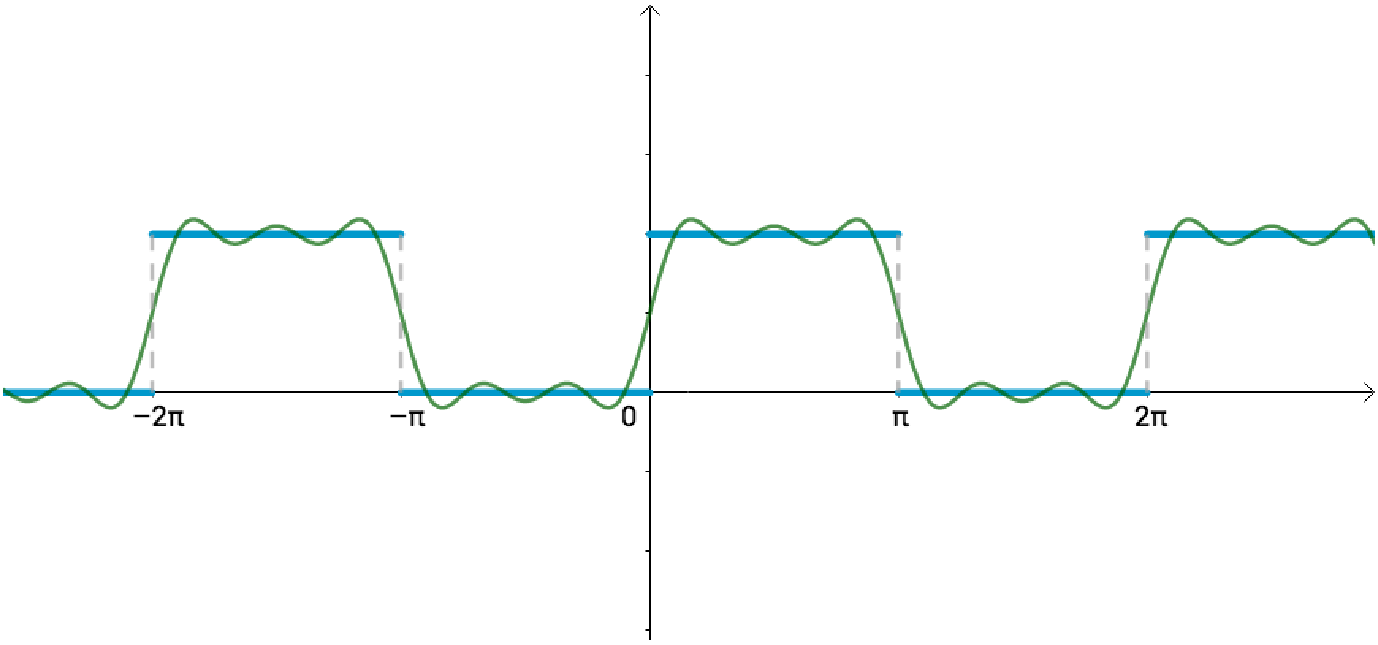


1.2 频域图

再增加几个三角函数：

$$f(x) \approx 1 + \frac{4}{\pi} sin(x) + 0 sin(2x) + \frac{4}{3\pi} sin(3x) + 0 sin(4x) + \frac{4}{5\pi} sin(5x)$$

从几何上看，肯定更接近了：



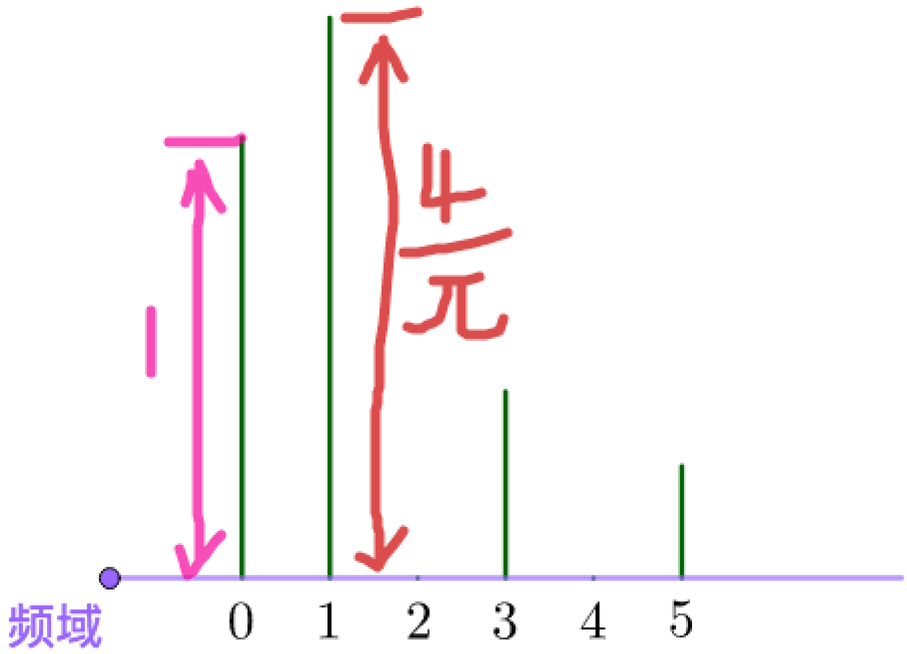
此时基为：

$$\{1, sin(x), sin(2x), sin(3x), sin(4x), sin(5x)\}$$

对应的向量为：

$$(1, \frac{4}{\pi}, 0, \frac{4}{3\pi}, 0, \frac{4}{5\pi})$$

六维的向量没有办法画图啊，没关系，数学家发明了一个频域图来表示这个向量：



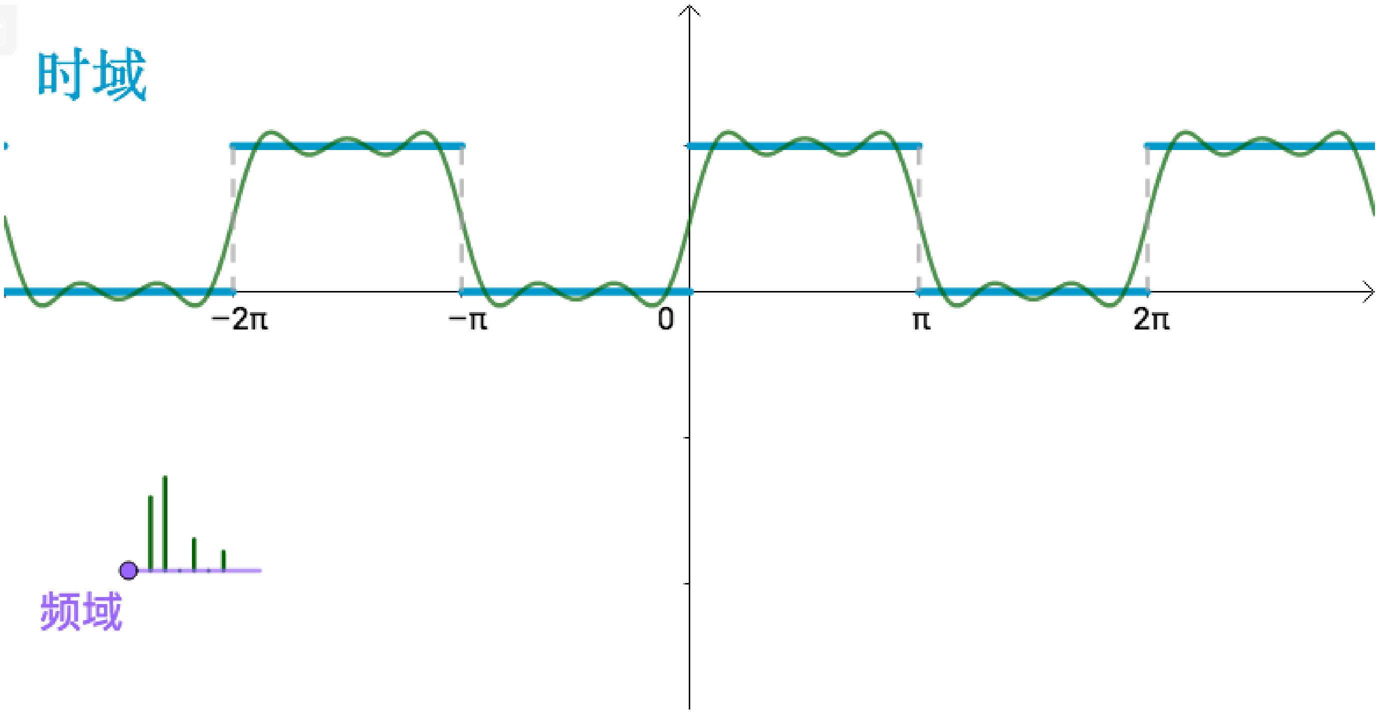
上图中的$0, 1, 2, 3, 4, 5$分别代表了不同频率的正弦波函数，也就是之前的基：

$$0Hz \iff sin(0x) \quad 3Hz \iff sin(3x) \cdots$$

而高度则代表在这个频率上的振幅，也就是这个基上的坐标分量。

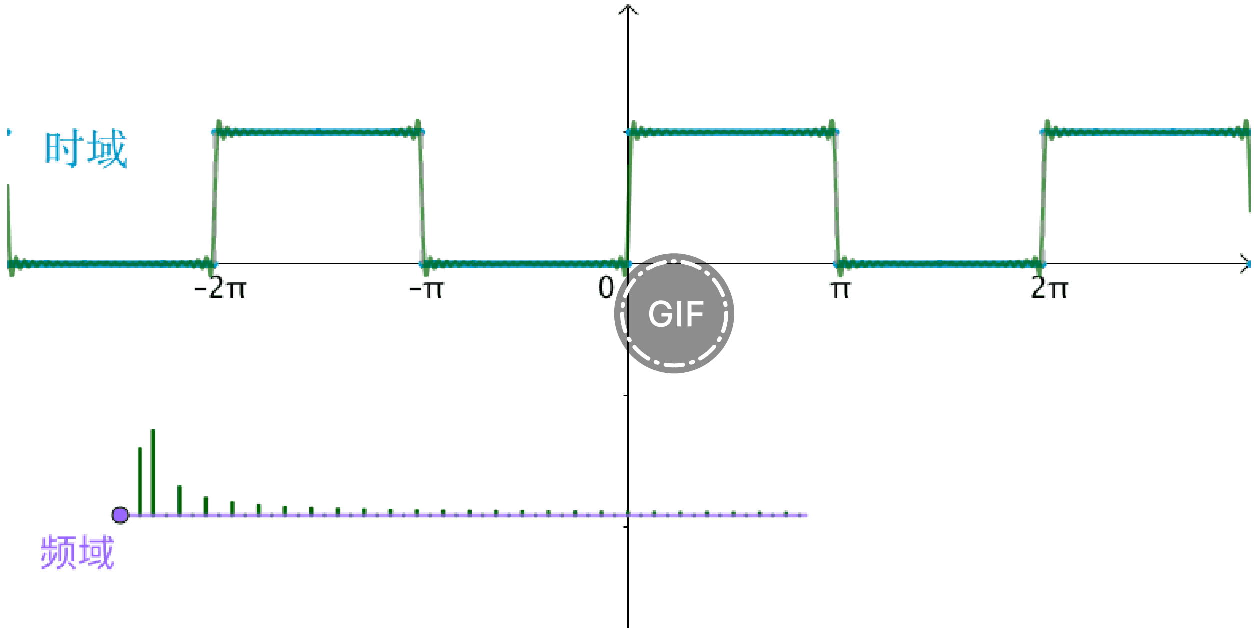
这里举的例子只有正弦函数，余弦函数其实也需要这样一个频谱图，也就是需要两个频谱图。当然还有别的办法，综合正弦和余弦，这个后面再说。

原来的曲线图就称为时域图（这点请参考“代数细节”），往往把时域图和频域图画在一起，这样能较为完整的反映傅立叶级数：



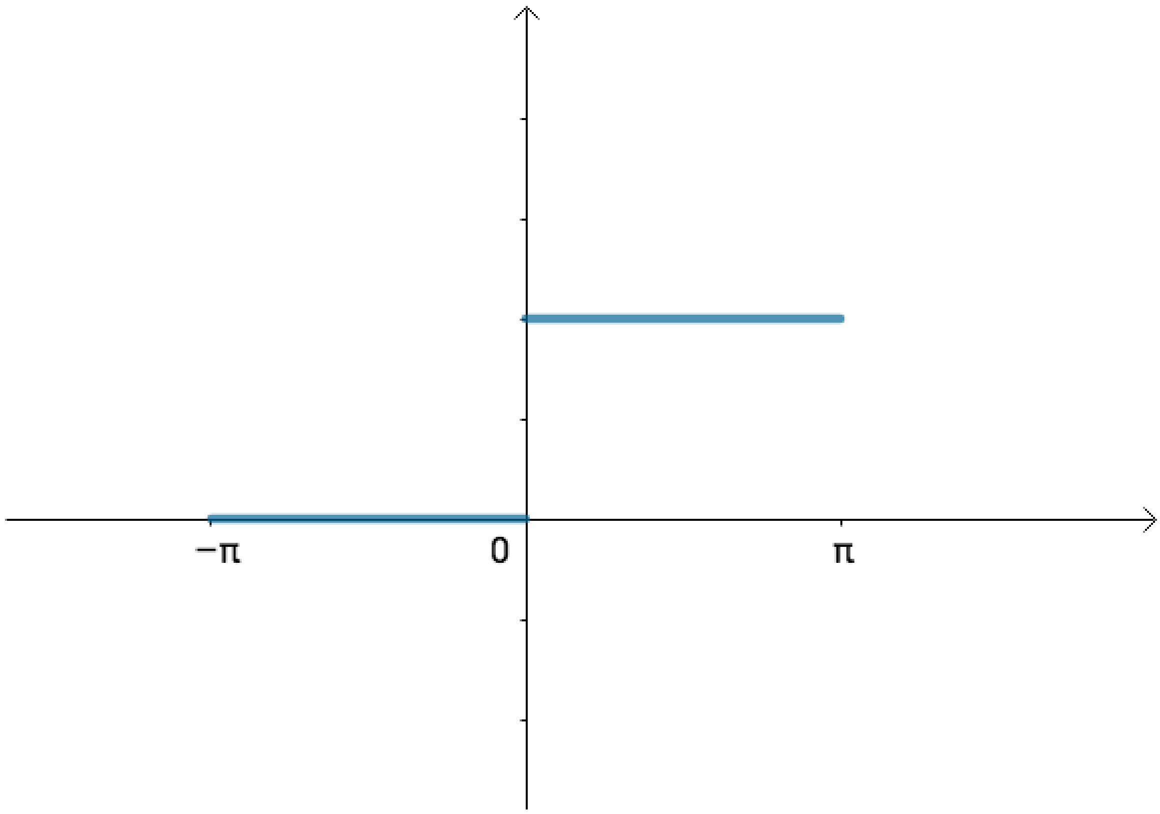
不管时域、频域其实反映的都是同一个曲线，只是一个是用函数的观点，一个是用向量的观点。

当习惯了频域之后，会发现看到频域图，似乎就看到了傅立叶级数的展开：



2 非周期函数

非周期函数，比如下面这个函数可以写出傅立叶级数吗？

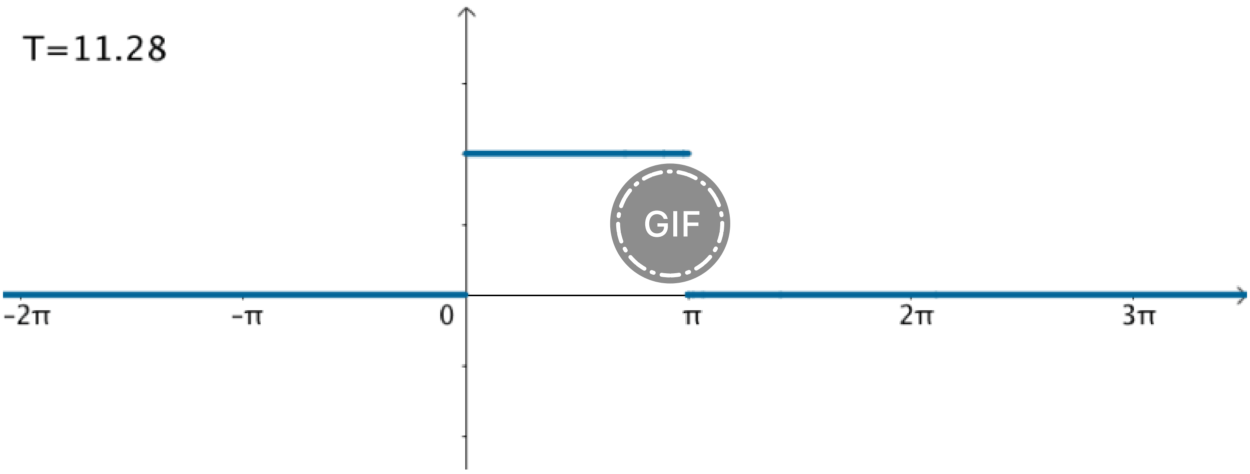


这并非一个周期函数，没有办法写出傅立叶级数。

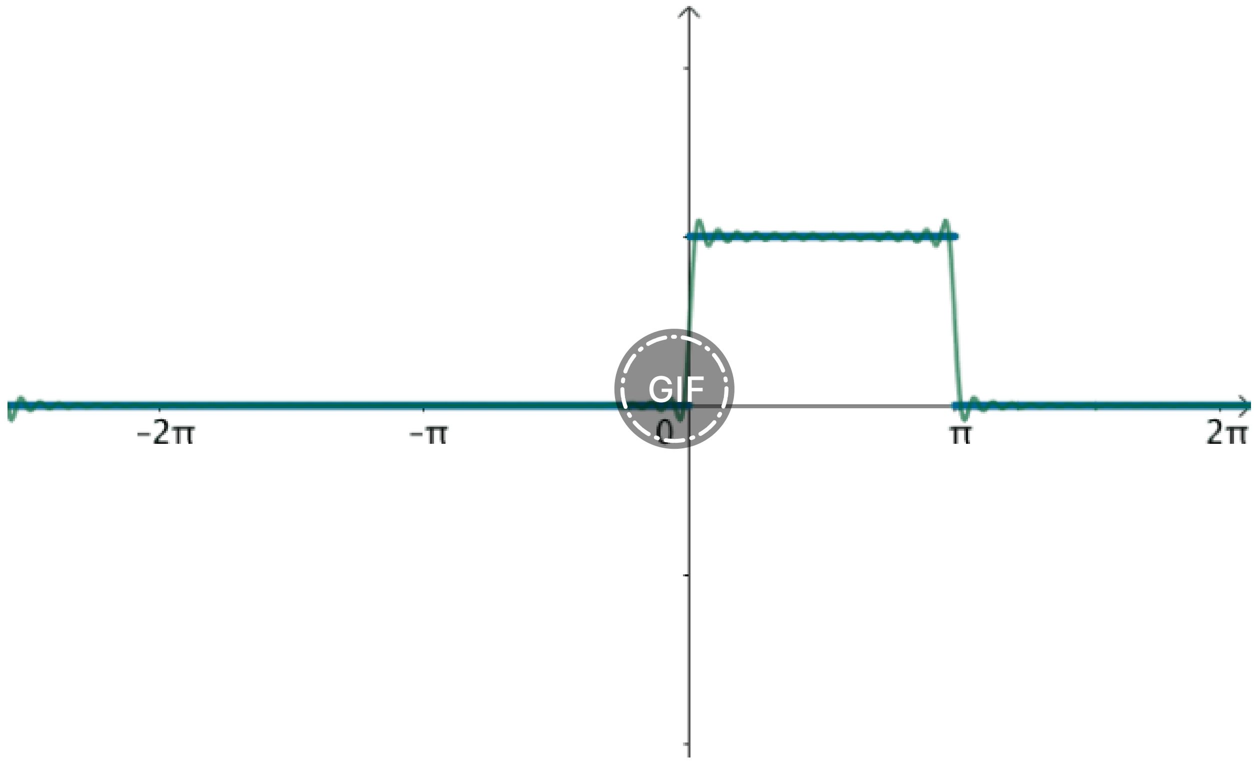
不过可以变换一下思维，如果刚才的方波的周期：

$$T = 2\pi \rightarrow T = \infty$$

那么就得到了这个函数：



在这样的思路下，就可以使用三角级数来逼近这个函数：



观察下频域，之前说了，对于周期为T的函数$f(x)$，其基为（对此点有疑问的，可以看“代数细节”一文）：

$$\{1, cos(\frac{2\pi n}{T}x), sin(\frac{2\pi n}{T}x)\}$$

刚才举的方波$T=2\pi$，对应的基就为（没有余弦波）：

$$\{1, sin(x), sin(2x), sin(3x), sin(4x), sin(5x), \cdots\ sin(nx)\}$$

对应的频率就是：

$$\{0Hz, 1Hz, 2Hz, 3Hz, 4Hz, 5Hz, \cdots\ nHz\}$$

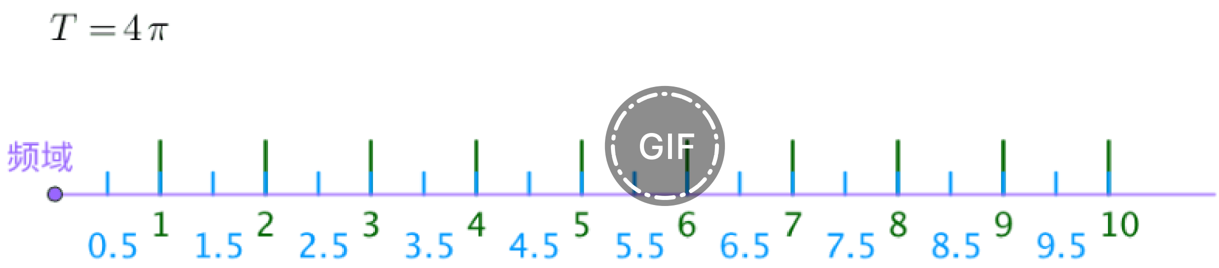
按照刚才的思路，如果T不断变大，比如让$T=4\pi$，对应的基就为（没有余弦波）：

$$\{1, sin(0.5x), sin(x), sin(1.5x), sin(2x), sin(2.5x), \cdots\ sin(0.5nx)\}$$

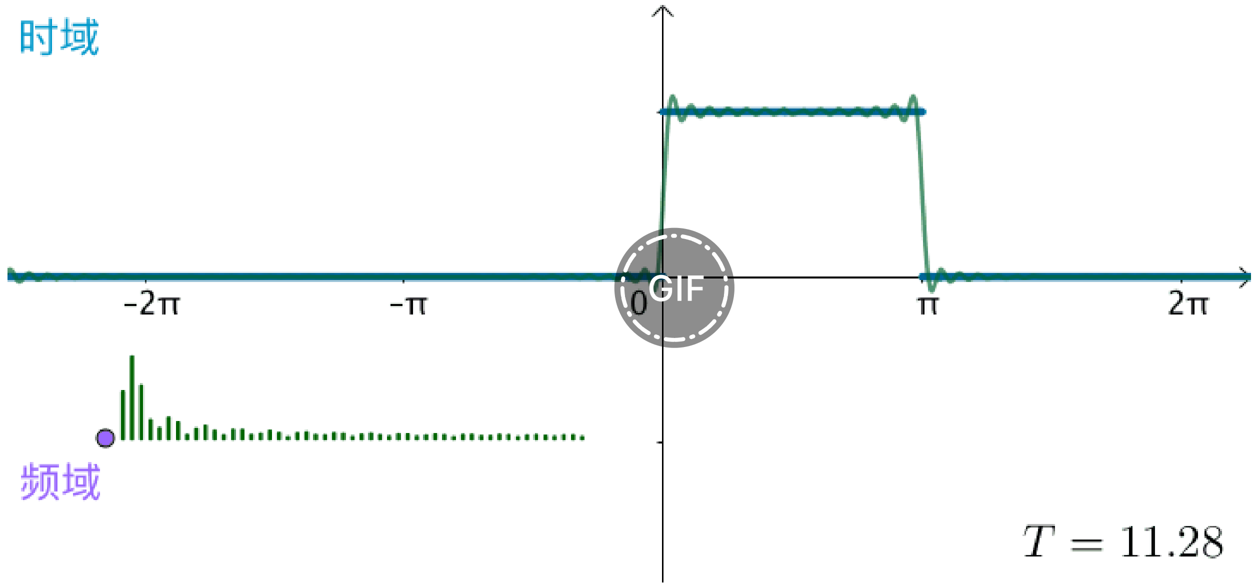
对应的频率就是：

$$\{0Hz, 0.5Hz, 1Hz, 1.5Hz, 2Hz, 2.5Hz, \cdots\ 0.5nHz\}$$

和刚才相比，频率更加密集：



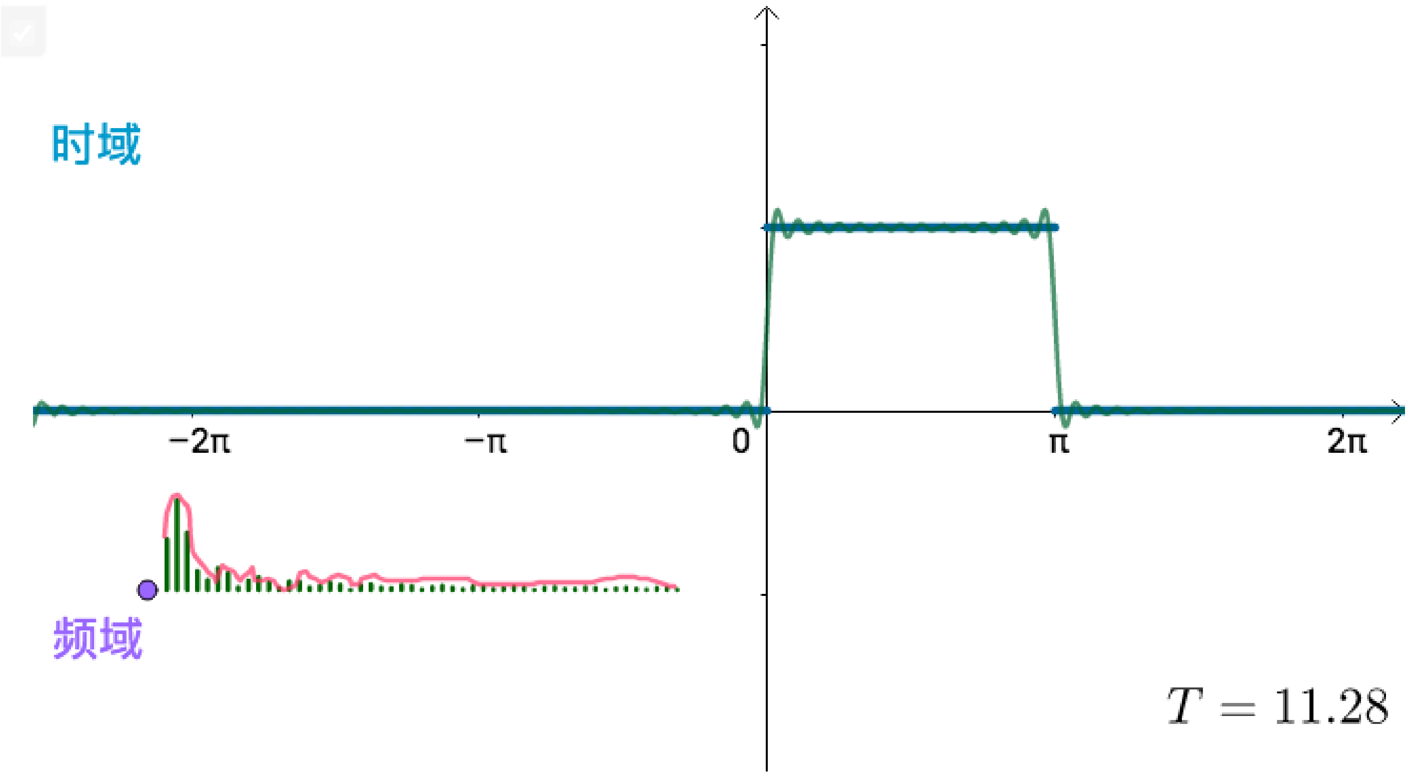
之前的方波的频域图，画了前50个频率，可以看到，随着T不断变大，这50个频率越来越集中：



可以想象，如果真的：

$$T=2\pi\to T=\infty$$

这些频率就会变得稠密，直至连续，变为一条频域曲线：



傅立叶变换就是，让$T=\infty$，求出上面这根频域曲线。

3 傅立叶变换

之前说了，傅立叶级数是：

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos(\frac{2\pi n}{T}x)+b_n sin(\frac{2\pi n}{T}x)\right), a_0\in\mathbb{R}$$

这里有正弦波，也有余弦波，画频域图也不方便，通过欧拉公式，可以修改为复数形式（请参考“代数细节”一文）：

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\cdot e^{i\frac{2\pi nx}{T}}$$

其中：

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T}f(x)\cdot e^{-i\frac{2\pi nx}{T}}\ dx$$

复数形式也是向量，可以如下解读：

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\underbrace{c_n}_{\text{对应基的坐标}}\cdot\underbrace{e^{i\frac{2\pi nx}{T}}}_{\text{正交基}}$$

不过c_n是复数，不好画频域图，所以之前讲解全部采取的是三角级数。

周期推向无穷的时候可以得到：

$$\left.\begin{aligned} f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i\frac{2\pi nx}{T}} \\ T = \infty \end{aligned}\right\} \implies f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

上面简化了一下，用ω代表频率。

$F(\omega)$大致是这么得到的：

$$\left.\begin{aligned} c_n = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cdot e^{-i\frac{2\pi nx}{T}}\ dx \\ T = \infty \end{aligned}\right\} \implies F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

$F(\omega)$就是傅立叶变换，得到的就是频域曲线。

下面两者称为傅立叶变换对，可以相互转换：

$$f(x) \iff F(\omega)$$

正如之前说的，这是看待同一个数学对象的两种形式，一个是函数，一个是向量。