本文来自公开课[麻省理工公开课：线性代数](#)

学习线性代数的应用之一就是求解复杂的方程问题，本节首先从解方程开始，讲解方程组的 row picture (行图像) 和 column picture (列图像)，进而扩展到矩阵向量的乘积。

1. 二维方程组的几何解释

1.1 二维行图像

下面来看一个二维方程组（2 个未知数，2 个方程）：

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

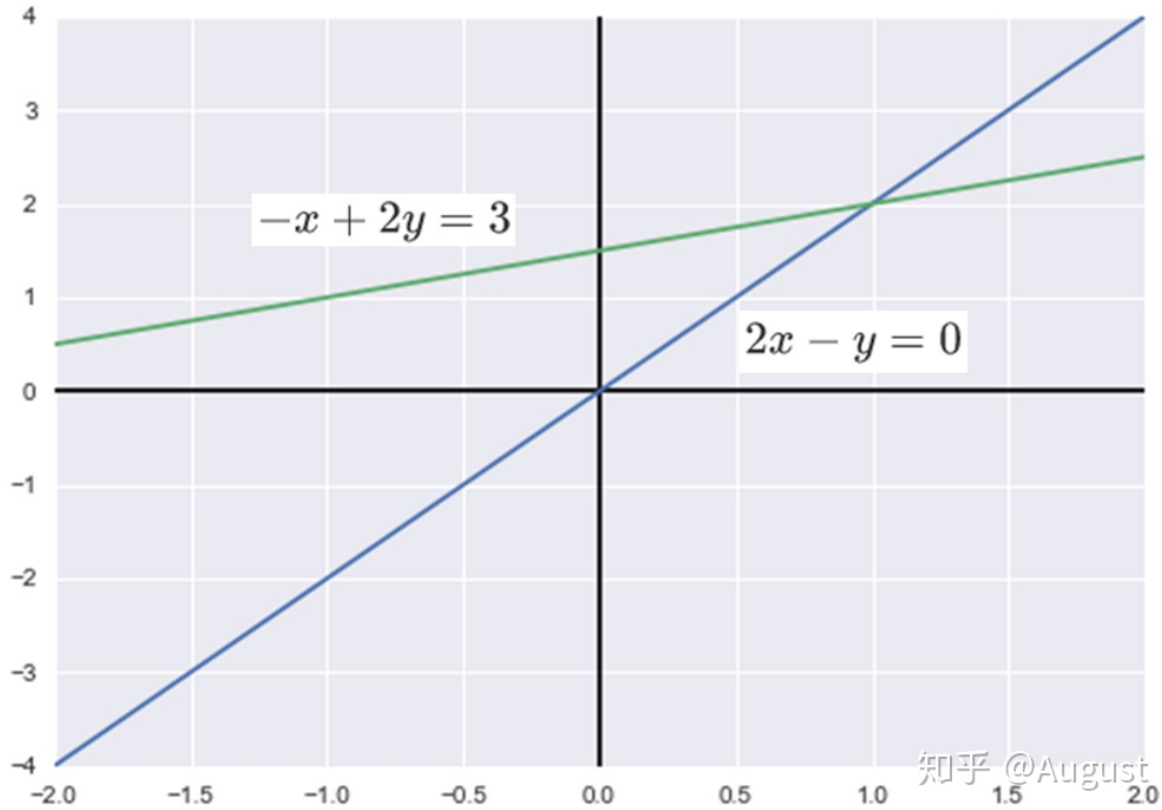
用矩阵和向量乘积所表示的形式为：

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

简写为 $AX = b$，其中：

```
系数矩阵(A)：将方程组系数按行提取出来，构造完成的一个矩阵。
未知向量(x)：将方程组的未知数提取出来，按列构成一个向量。
向量(b)：将等号右侧结果按列提取，构成一个向量。
```

所谓行图像（row picture），就是在系数矩阵上，一次取一行构成方程，行图像如下所示，在二维空间中每一行（每一个方程）所表示的即为一条直线。则其意义为求两条直线的交点，这个交点也就是方程组的解。



1.2 二维列图像

接下来以列图像（column）求解上面的方程：

$$\begin{cases} 2x-y=0 \\ -x+2y=3 \end{cases}$$

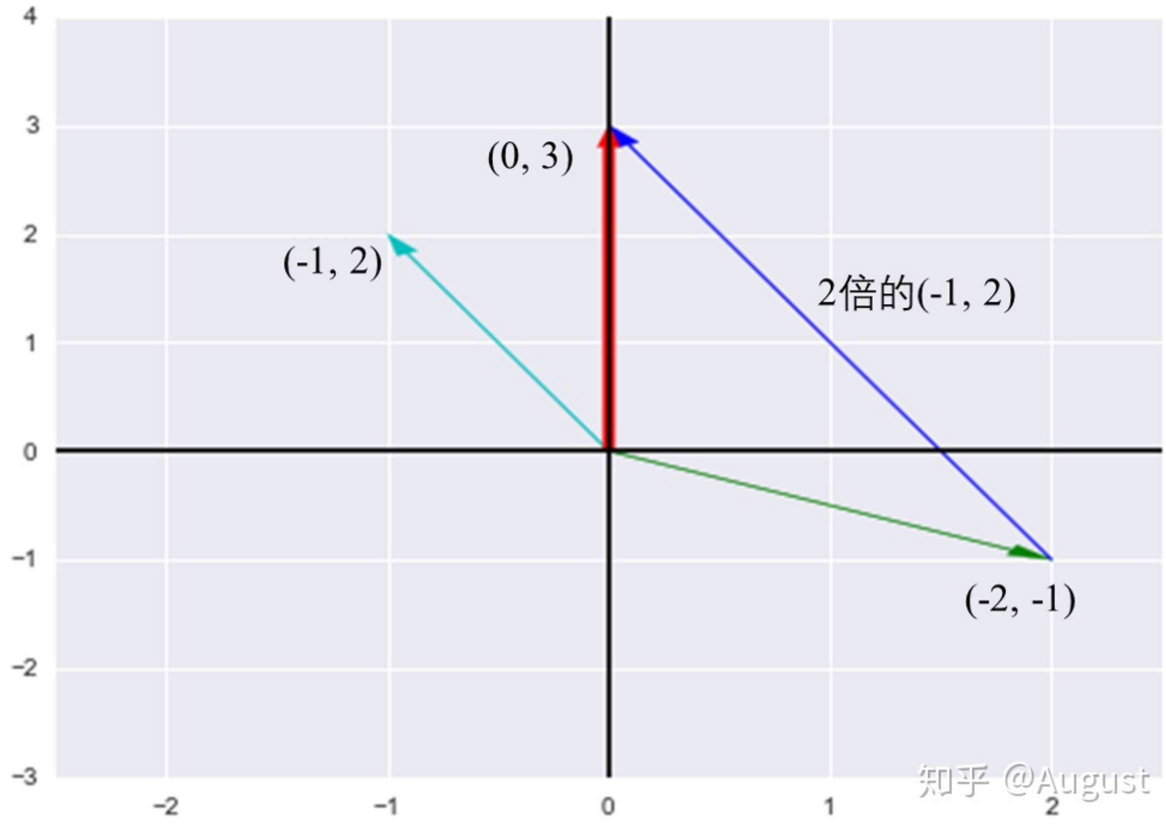
在这一次的求解过程中，我们将方程按列提取则可写成如下格式：

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

如上所示，二维方程组转化为了将向量$col1$与向量 $col2$ 正确组合，使得其结果构成 $[0,3]$。很明显能看出来，要使得式子成立，需要第一个向量加上两倍的第二个向量，即：

$$1\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

因此方程组又可理解为两个向量的线性组合，对应的列图像如图所示：



接着，我们继续观察 $x\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$ ，col_1, col_2 的某种线性组合得到了向量 b，那么 col_1, col_2 的所有线性组合能够得到什么结果？很明显，能得到任意方向的向量，这些向量能够布满整个平面。也就是说任意向量的线性组合即为整个坐标平面。

2. 多维方程组的几何解释

2.1 多维行图像

我们将方程组的维数进行推广，从三维开始，对应的方程如下：

$$\begin{cases}2x-y=0\\-x+2y-z=-1\\-3y+4z=4\end{cases}$$

用矩阵和向量乘积所表示的形式为：

$$\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\\4\end{bmatrix}$$

如果以行图像求解，则在三维空间中每一行所表示的即为一个平面。则方程组的解为三个平面的交点。显然，我们很难直接求得这个点。我们可以先联立其中两个平面，使其相交于一条直线，再研究这条直线与平面相交于哪个点，最后得到点坐标即为方程的解。

这个求解过程对于三维来说或许还算合理，那四维呢？五维甚至更高维数呢？直观上很难直接绘制更高维数的图像，这种行图像受到的限制也越来越多。

2.2 多维列图像

将方程组写成列向量的线性组合：

$$x\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0\\-1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\\4\end{bmatrix}$$

这样一来思路就清晰多了，“寻找线性组合” 成为了解题关键。

很明显这道题是一个特例，方程组的解为$x=0,y=0,z=1$，而这在行图像之中并不明显。当然我们并不能总是这么轻易的求出正确的线性组合，所以下一讲将介绍消元法——一种线性方程组的系统性解法。

还要注意的一点是对任意的 b 是不是方程 Ax = b 都存在解呢？用列图像的观点也就是三维列向量的线性组合能否覆盖整个三维空间呢？ 对于上面这个例子来说，答案是肯定的，但是有一些矩阵就是不行的。

线性组合只有在三个列向量为不同平面时才能覆盖整个三维空间。如果三个向量在同一个平面上，那么他们的线性组合也只能活动在这个平面上，肯定无法覆盖一个三维空间。举个例子，比如$col_3=col_1+col_2$，那么不管怎么组合，这三个向量的结果都逃不出这个平面，因此当 b 在平面内，方程组有解，而当 b 不在平面内，这三个列向量就无法构造出 b。此时被称为奇异矩阵，该矩阵不可逆。

下面我们推广到九维空间，每个方程有九个未知数，共九个方程，此时已经无法从坐标图像中描述问题了，但是我们依然可以从求九维列向量线性组合的角度解决问题，仍然是上面的问题，是否总能得到 b？当然这仍取决于这九个向量，如果我们取一些并不相互独立的向量，则答案是否定的，比如取了九列但其实只相当于八列，有一列毫无贡献（这一列是前面列的某种线性组合），则会有一部分 b 无法求得。

3. 矩阵与向量乘积的运算

对于如上两种形式的展开（row 和 column），在计算矩阵与向量的乘积 Ax=b，也对应着两种方法。举个例子，取$A=\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix},\ x=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，来看如何计算矩阵乘以向量：

1. 使用列向量线性组合的方式进行运算（**比较推荐**，在使用中经常被忽略）

$$\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\7\end{bmatrix}$$

可以归纳得到两个重要的规律：

矩阵乘以右侧列向量可看成矩阵各列向量的线性组合，结果为列向量！

左侧行向量乘以矩阵可看成矩阵各行向量的线性组合，结果为行向量！

2. 以方程形式进行运算（常规的矩阵乘法）

$$\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times1+5\times2\\1\times1+3\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\7\end{bmatrix}$$