



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Московский государственный технический университет имени  
Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Робототехники и комплексной автоматизации»  
КАФЕДРА «Системы автоматизированного проектирования (РК-6)»

## ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ по дисциплине «Вычислительная математика»

Студент:	Гапеев Дмитрий Андреевич
Группа:	РК6-51Б
Тип задания:	Лабораторная работа №3
Тема:	Вынужденные колебания маятника

Студент

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

Гапеев Д.А.  
\_\_\_\_\_  
Фамилия, И.О.

Преподаватель

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

\_\_\_\_\_  
Фамилия, И.О.

Москва, 2023

## Содержание

<b>Вынужденные колебания маятника</b>	<b>3</b>
Задание	3
Цель выполнения лабораторной работы	4
1 Численные методы для решения системы ОДУ	5
1.1 Преобразование ОДУ 2-го порядка к системе ОДУ 1-го порядка	5
1.2 Разработка функций <code>runge_kutta</code> , <code>adams_moulton</code> и <code>milna_simpson</code>	5
1.3 Получение и демонстрация траекторий динамической системы	9
1.4 Различия и сходства реализованных методов	11
1.5 Определеии значения шага, при котором схема становится неустой-	
чивой	12
2 Фазовые траектории и асимптотические состояния динамической системы	17
2.1 Построение фазовых траекторий при различных начальных условиях	17
2.2 Фазовые траектории при фиксированном начальном условии	18
2.3 Расчет времени вычисления схем	19
2.4 Анализ асимптотических состояний решений и их физическая интер-	
претация	20
3 Поиск и визуализация областей притяжения	21
3.1 Области притяжения каждого из асимптотических состояний.	21
3.2 Характерные детали полученных областей притяжения	22
Заключение	23

## Вынужденные колебания маятника

### Задание

Численные методы решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) 1-го порядка активно используются для изучения динамических систем, траектории которых не удастся найти с помощью аналитических методов. Одним из простейших примеров являются вынужденные колебания маятника без предположения о малости угла отклонения маятника от вертикальной оси. Подобная математическая модель является фундаментальной для робототехники, и отчасти отражает процессы, моделируемые, например, в случае рук-манипуляторов. В данной лабораторной работе исследуются траектории, являющиеся решениями соответствующих задач Коши на основе такой модели, и анализируются, к каким решениям они сходятся в зависимости от начальных условий.

Дано ОДУ 2-го порядка:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 0.1 \frac{d\theta}{dt} + \sin(\theta) = \cos(t), \quad (1)$$

где  $\theta(t)$  обозначает угол отклонения маятника от вертикальной оси как функцию времени  $t$ .

Требуется (базовая часть):

1. Преобразовать данное ОДУ в систему ОДУ 1-го порядка
2. Разработать следующие функции, каждая из которых возвращает дискретную траекторию системы ОДУ с правой частью, заданной функцией  $f$ , начальным условием  $x\_0$ , шагом по времени  $h$  и конечным временем  $t\_n$ :
  - `runge_kutta(x_0, t_n, f, h)`, где дискретная траектория строится с помощью явного метода Рунге-Кутты 4-го порядка;
  - `adams_moulton(x_0, t_n, f, h)`, где дискретная траектория строится с помощью неявного трёхшагового метода Адамса-Моултона (выполняется в рамках продвинутой части);
  - `milne_simpson(x_0, t_n, f, h)`, где дискретная траектория строится с помощью метода Милна-Симпсона (схема предиктор-корректор).
3. Для каждого из реализованных методов:
  - Численно каждым из методов найти траектории заданной динамической системы, используя шаг  $h = 0.1$  и 15 различных начальных условий, для которых:  $\theta(0) = 0$  и  $\frac{d\theta}{dt}|_{t=0}$  следует выбрать случайно из интервала  $[1.85; 2.1]$ .
  - Вывести полученные траектории на едином графике как зависимости  $\theta(t)$  (для каждого метода на отдельном графике).
4. В чем принципиальные отличия реализованных методов друг от друга? В чем они схожи?
5. Для каждой из схем каково значение шага, при котором она становится неустойчивой?

*Требуется (продвинутая часть):*

6. Вывести разными цветами фазовые траектории на едином двумерном графике: по оси абсцисс  $\theta$ , по оси ординат -  $\frac{d\theta}{dt}$ , при всех различных начальных условиях (для каждого метода на отдельном графике).
7. Зафиксировать одно начальное условие (произвольно). Вывести фазовые траектории на одном двумерном графике, формируемые разными методами. Сделать вывод.
8. Какая из схем является наиболее затратной с точки зрения времени вычислений при произвольном значении шага, дающем устойчивое решение для каждой из схем? Наименее затратной?
9. Как вы можете охарактеризовать асимптотические состояния, к которым сходится решение в зависимости от начальных условий? Опишите их физический смысл.

*Требуется (опциональные задания):*

10. Построить области притяжения каждого из асимптотических состояний:
  - а) Каждому из асимптотических состояний назначить свой цвет.
  - б) Построить множество начальных условий на основе структурированной сетки, построенной путём разбиения области  $[-4\pi; 4\pi] \times [-5, 5]$ .
  - в) Выбрав наименее затратную по времени схему, построить траектории для каждого из начальных условий, соответствующих узлам сетки, и проклассифицировать, к кому асимптотическому состоянию сходится каждая из траекторий. Описать алгоритм, с помощью которого вы определяете, что данная траектория сходится к определённому асимптотическому состоянию.
  - г) Вывести на экран график начальных условий, имеющих цвет соответствующих им асимптотических состояний.
11. Какие характерные детали полученных областей притяжения вы можете выделить?

## Цель выполнения лабораторной работы

Цель выполнения лабораторной работы - изучение трёх различных численных методов для решения задачи Коши в случае систем ОДУ первого порядка. Эти методы включают: явный четырехшаговый метод Рунге-Кутты, неявный трехшаговый метод Адамса-Моултона и метод Милна-Симпсона (схема предиктор-корректор). Определение оптимального шага, при котором система становится неустойчивой для каждого из методов. Анализ этих методов с точки зрения устойчивости и затрат по времени, а также анализ асимптотических состояний системы, к которым она сходится в зависимости от начальных условий.

# 1 Численные методы для решения системы ОДУ

## 1.1 Преобразование ОДУ 2-го порядка к системе ОДУ 1-го порядка

Осуществлена замена переменной для преобразования ОДУ 2-го порядка (1):

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta_1 \quad (2)$$

После подстановки (2) в исходное ОДУ 2-го порядка получено следующее выражение:

$$\frac{d\theta_1}{dt} + 0.1\theta_1 + \sin(\theta) = \cos(t)$$

Получена система дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \theta_1 \\ \frac{d\theta_1}{dt} = \cos(t) - 0.1\theta_1 - \sin(\theta) \end{cases} \quad (3)$$

В векторном виде система ОДУ 1-го порядка (3) выглядит следующим образом:

$$f(t, \theta, \theta_1) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \cos(t) - 0.1\theta_1 - \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Была реализована функция (листинг 1) для вычисления  $f(t, \theta, \theta_1)$ . Данная функция возвращает правую часть системы ОДУ 1-го порядка из формулы 3.

Листинг 1. Функция для получения правой части системы ОДУ (3)

---

```

1 def F(t, theta):
2     out = np.zeros((2, ), dtype=float)
3     out[0] = theta[1]
4     out[1] = np.cos(t) - np.sin(theta[0]) - 0.1 * theta[1]
5     return out

```

---

## 1.2 Разработка функций `runge_kutta`, `adams_moulton` и `milna_simpson`

### Метод Рунге-Кутты.

Формулировка метода Рунге-Кутте 4-го порядка для систем ОДУ 1-го порядка имеет вид[1]:

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha, \\ k_1 &= hf(t_i, w_i), \\ k_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_1\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_2\right), \\
k_4 &= hf(t_i + h, w_i + k_3), \\
w_{i+1} &= w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = 0, 1, \dots, m-1,
\end{aligned}$$

где  $w$  – вектор приближенных решений ( $w_i \approx y(t_i)$ ),  $\alpha$  – начальные условия,  $k_1, k_2, k_3, k_4$  – коэффициенты,  $h$  – шаг по времени;  $t$  – время.

Метод Рунге-Кутты является одношаговым итеративным методом, что позволяет вычислять следующий шаг, зная информацию лишь об одном предыдущем шаге. Оптимальным выбором среди прочих методов Рунге-Кутты является метод Рунге-Кутты 4-го порядка, поскольку формулы метода Рунге-Кутты 3-го и 4-го порядка требуют 3 и 4 вычисления функции  $f(t, y)$  соответственно, в то время как формула 5-го порядка будет требовать уже 6 вычислений. Данный тренд на непропорциональное увеличение числа вычислений сохраняется и для формул большего порядка.

Была разработана функция `runge_kutta(x_0, t_n, f, h)` (листинг 2) для реализации метода Рунге-Кутты 4-го порядка, которая возвращает дискретную траекторию системы ОДУ (3). Функция принимает в качестве аргументов начальное условие  $x_0$ , конечное время  $t_n$ , функцию  $f$  (листинг 1) и шаг по времени  $h$ .

Листинг 2. Функция для получения дискретной траектории с помощью метода Рунге-Кутте 4-го порядка

---

```

1 def runge_kutta(x_0, t_n, f, h):
2     m = int(t_n / h)
3     w = np.zeros((m + 2, 2), dtype=float)
4
5     w[0][0] = x_0[0]
6     w[0][1] = x_0[1]
7
8     for i in range(m+1):
9         t_i = i * h
10        k_1 = h * f(t_i, w[i])
11        k_2 = h * f(t_i + h / 2, w[i] + k_1 / 2)
12        k_3 = h * f(t_i + h / 2, w[i] + k_2 / 2)
13        k_4 = h * f(t_i + h, w[i] + k_3)
14        w[i+1] = w[i] + (k_1 + 2 * k_2 + 2 * k_3 + k_4) / 6
15    return w

```

---

### Метод Адамса-Моултона.

Метод Адамса-Моултона, в отличие от метода Рунге-Кутты, является многошаговым, то есть требует знание информации о нескольких предыдущих значениях. Также метод Адамса-Моултона является неявным, что означает, что новое значение функции на каждом шаге вычисляется с использованием самого этого значения, что делает его более устойчивым, но и требует решения нелинейного уравнения на каждом шаге.

Формулировка неявного  $(p - 1)$ -шаговый метод Адамса-Моултона выглядит следующим образом[1]:

$$w_0 = \alpha_0, \quad w_1 = \alpha_1, \quad \dots, \quad w_{p-2} = \alpha_{p-2},$$

$$w_{i+1} = w_i + h \sum_{j=1}^p a_j f(t_{i-j+2}, w_{i-j+2}), \quad i = p-2, p-1, \dots, m-1,$$

где коэффициенты  $a_j$  имеют вид:

$$a_j = \int_0^1 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p \frac{s+k-2}{k-j} ds, \quad j = 1, \dots, p \quad (4)$$

Рассматривался трёхшаговый метод Адамса-Моултона, поэтому было взято значение  $p = 4$ . При помощи формулы 4 найдены коэффициенты  $a_i$ :

$$a_1 = \int_0^1 \left( \frac{s+2-2}{2-1} \cdot \frac{s+3-2}{3-1} \cdot \frac{s+4-2}{4-1} \right) ds = \frac{1}{6} \cdot \left[ \frac{s^4}{4} + \frac{3s^3}{3} + \frac{2s^2}{2} \right]_1^0 = \frac{1}{6} \cdot \left( \frac{1}{4} + 1 + 1 \right) = \frac{3}{8}; \quad (5)$$

$$a_2 = \int_0^1 \left( \frac{s+1-2}{1-2} \cdot \frac{s+3-2}{3-2} \cdot \frac{s+4-2}{4-2} \right) ds = -\frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{s^4}{4} + \frac{2s^3}{3} - \frac{s^2}{2} - 2s \right]_1^0 = \frac{19}{24}; \quad (6)$$

$$a_3 = \int_0^1 \left( \frac{s+1-2}{1-3} \cdot \frac{s+2-2}{2-3} \cdot \frac{s+4-2}{4-3} \right) ds = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{s^4}{4} + \frac{s^3}{3} - \frac{2s^2}{2} \right]_1^0 = -\frac{5}{24}; \quad (7)$$

$$a_4 = \int_0^1 \left( \frac{s+1-2}{1-4} \cdot \frac{s+2-2}{2-4} \cdot \frac{s+3-2}{3-4} \right) ds = -\frac{1}{6} \cdot \left[ \frac{s^4}{4} - \frac{s^2}{2} \right]_1^0 = -\frac{1}{6} \cdot \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{24}. \quad (8)$$

При помощи выражений 5, 6, 7, 8 получена неявная формула для трехшагового метода Адамса-Моултона:

$$\omega_{i+1} = \omega_i + h \cdot \left( \frac{3}{8} \cdot f(t_{i+1}, y_{i+1}) + \frac{19}{24} \cdot f(t_i, y_i) - \frac{5}{24} \cdot f(t_{i-1}, y_{i-1}) + \frac{1}{24} \cdot f(t_{i-2}, y_{i-2}) \right) \quad (9)$$

Создана функция `adams_moulton(x_0, t_n, f, h)` (листинг 3), возвращающая дискретную траекторию для системы ОДУ (3), сформированная для реализации трёхшагового метода Адамса-Моултона. Эта функция принимает начальное условие  $x_0$ , конечный момент времени  $t_n$ , функцию  $f$  (листинг 1) и временной шаг  $h$  в качестве аргументов. Для решения встречающихся нелинейных уравнений была использована функция `scipy.optimize.root`. Для нахождения начальных условий  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  была использована функция `runge_kutta` (листинг 2).

Листинг 3. Функция для получения дискретной траектории с помощью трёхшагового метода Адамса-Моултона

---

```

1 def adams_moulton(x_0, t_n, f, h):
2     m = int(t_n / h)
3     w = np.zeros((m + 2, 2), dtype=float)
4
5     w[0][0] = x_0[0]
6     w[0][1] = x_0[1]
7
8     w1 = runge_kutta(x_0, 2*h, f, h)
9     w[1] = w1[1]
10    w[2] = w1[2]
11
12    for i in range(3, m + 2):
13        t_i3 = i * h
14        t_i2 = (i - 1) * h
15        t_i1 = (i - 2) * h
16        t_i0 = (i - 3) * h
17
18        Y = lambda y3: -y3 + w[i-1] + (h/24) * (9 * f(t_i3, y3) + 19 * f(t_i2, w[i-1])
19            - 5 * f(t_i1, w[i-2]) + f(t_i0, w[i-3]))
20        sol = scp.root(Y, w[i-1], jac=False, method='hybr')
21        w[i] = sol.x
22    return w

```

---

### Метод Милна-Симпсона.

Существует альтернативный класс многошаговых методов, который можно получить используя интегрирование ОДУ  $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$  на промежутке  $[t_j; t_{i+1}]$ , где  $j < i$ , в отличие от обычного промежутка  $[t_i; t_{i+1}]$ , как это принято в методах Адамса. Это достигается через расчёт интеграла:

$$\int_{t_j}^{t_{i+1}} \frac{dy}{dt} dt = \int_{t_j}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt. \quad (10)$$

Из формулы 10 следует, что

$$y(t_{i+1}) = y(t_j) + \int_{t_j}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt.$$

Применяя эту концепцию к интервалам  $[t_{i-3}; t_{i+1}]$  и  $[t_{i-1}; t_{i+1}]$  и используя квадратичный интерполант для  $f(t, y(t))$ , можно получить явный метод Милна и неявный метод Симпсона соответственно. Метод Милна-Симпсона построен по схеме предиктор-корректор: на первой стадии с помощью явного метода Милна находится приближение  $\tilde{\omega}_{i+1} \approx \omega_{i+1}$ , а на второй стадии с помощью неявного метода Симпсона находится само значение  $\omega_{i+1}$ . Формулировка метода Милна-Симпсона для систем ОДУ первого порядка[1]:

$$w_0 = \alpha_0, \quad w_1 = \alpha_1, \quad w_2 = \alpha_2, \quad w_3 = \alpha_3,$$



$$\tilde{w}_{i+1} = w_{i-3} + \frac{4h}{3} [2f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 2f(t_{i-2}, w_{i-2})],$$

$$w_{i+1} = w_{i-1} + \frac{h}{3} [f(t_{i+1}, \tilde{w}_{i+1}) + 4f(t_i, w_i) + f(t_{i-1}, w_{i-1})], \quad i = 3, \dots, m-1,$$

Для реализации метода Милна-Симпсона по схеме предиктор-корректор была реализована функция `milne_simpson(x_0, t_n, f, h)` (листинг 4). Функция принимает в качестве аргументов начальное условие `x_0`, конечное время `t_n`, функцию `f` (листинг 1) и шаг по времени `h`. Начальные значения, как и в трехшаговом методе Адамса-Моултона, находятся с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка.

Листинг 4. Функция для получения дискретной траектории с помощью метода Милна-Симпсона

---

```

1 def milne_simpson(x_0, t_n, f, h):
2     m = int(t_n / h)
3     w = np.zeros((m + 2, 2), dtype=float)
4
5     w[0][0] = x_0[0]
6     w[0][1] = x_0[1]
7
8     w1 = runge_kutta(x_0, 3*h, f, h)
9     w[1] = w1[1]
10    w[2] = w1[2]
11    w[3] = w1[3]
12
13    for i in range(3, m + 1):
14        t_i_2 = (i - 2) * h
15        t_i_1 = (i - 1) * h
16        t_i = i * h
17        t_i1 = (i + 1) * h
18
19        w_predictor = w[i-3] + (4*h/3) * (2*f(t_i, w[i]) - f(t_i_1, w[i-1]) + 2*f(t_i_2,
20            w[i-2]))
21        w_corrector = w[i-1] + (h/3) * (f(t_i1, w_predictor) + 4*f(t_i, w[i]) + f(t_i_1,
22            w[i-1]))
23        w[i+1] = w_corrector
24    return w

```

---

[a1] \* (None) @ (None) \* (None), (None), (None))

### 1.3 Получение и демонстрация траекторий динамической системы

При помощи функций `runge_kutta(x_0, t_n, f, n)`, `adams_moulton(x_0, t_n, f, n)` и `milne_simpson(x_0, t_n, f, n)` получены траектории заданной динамической системы. При вычислении траекторий использовались шаг  $h = 0.1$  и 15 начальных условий с  $\theta(0) = 0$  и  $\frac{d\theta}{dt}(0)$  выбранный случайно из интервала  $[1.85, 2.1]$  при помощи функции

`random.uniform`. Результаты для конечного времени  $t_n=100$  представлены на **рис. 1**, **рис. 2** и **рис. 3**.

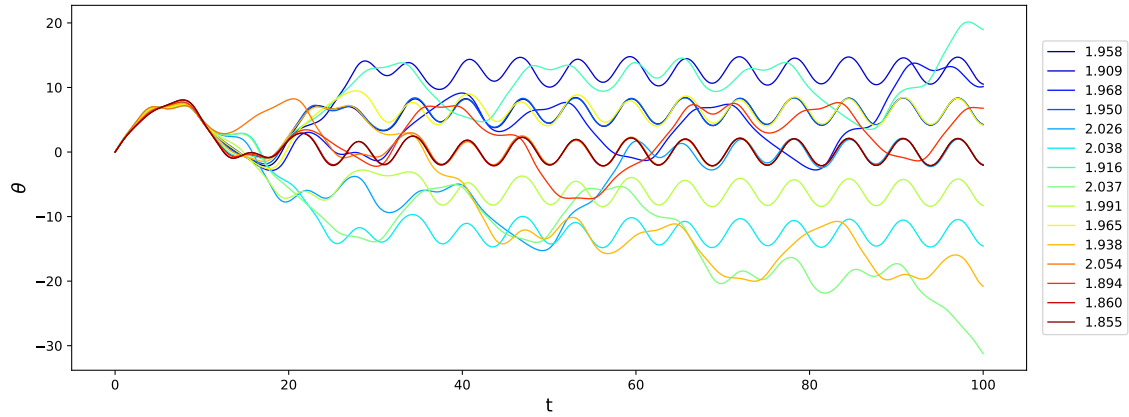


Рис. 1. График зависимостей угла  $\theta$  от времени  $t_n \in [0; 100]$ , полученные при помощи метода Рунге-Кутты 4-го порядка

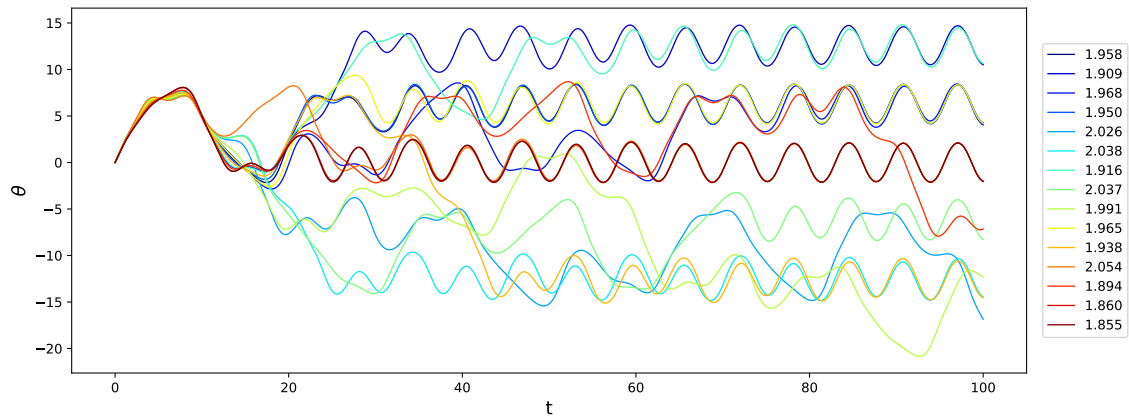


Рис. 2. Графики зависимостей угла  $\theta$  от времени  $t_n \in [0; 100]$ , полученные при помощи трехшагового метода Адамса-Моултона

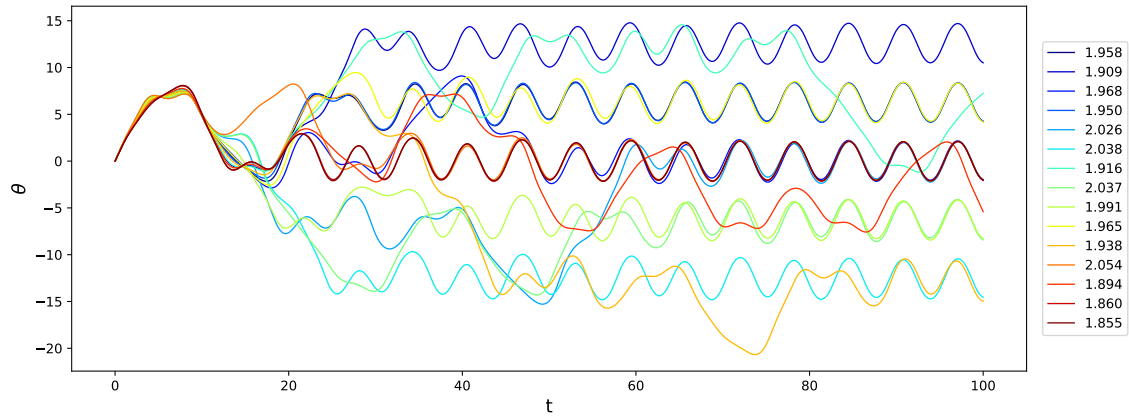


Рис. 3. График зависимостей угла  $\theta$  от времени  $t_n \in [0; 100]$ , полученные при помощи метода Милна-Симпсона

По приведенным выше рис. 1, рис. 2 и рис. 3 видно, что методы получают одинаковые траектории на начальном временном диапазоне. На большем временном диапазоне можно отметить, что полученными различными методами дискретные траектории несколько отличаются, что может быть связано с неустойчивостью методов. При некоторых начальных условиях с определенного момента времени графики траекторий похожи на графики периодических функций.

#### 1.4 Различия и сходства реализованных методов

##### Сходства методов:

1. Все представленные методы имеют порядок точности равный  $O(h^4)$ [1].
2. Реализованные методы являются методами решения задачи Коши для систем ОДУ 1-го порядка.

##### Различия методов:

1. Метод Рунге-Кутты является одношаговым, методы Адамса-Моултона и Милна-Симпсона - многошаговыми.
2. Метод Рунге-Кутты является явным методом, метод Адамса-Моултона - неявным, метод Милна-Симпсона работает по схеме предиктор-корректор и включает в себя как явный метод Милна, так и неявный метод Симпсона.
3. Для метода Рунге-Кутты 4-го порядка требуется одно начальное значение, для трехшагового метода Адамса-Моултона - три начальных значения, а для метода Милна-Симпсона - четыре начальных значения.
4. Каждый из методов имеет разный шаг, при котором метод становится неустойчивым для данной динамической системы(рассмотрено в пункте 1.5).

### 1.5 Определение значения шага, при котором схема становится неустойчивой

Метод считается устойчивым, когда малые изменения величины шага не приводят к значительным отклонениям в результатах решения ОДУ при одних и тех же начальных условиях. Следовательно, для определения момента, когда разработанные методы начинают терять устойчивость, требуется сравнение графиков, демонстрирующих изменения решений при разных шагах. Использовался эмпирический подход для проверки устойчивости каждого из трёх реализованных методов: изменяется шаг и проводится анализ дискретных траекторий. Для всех методов в качестве начальных условий используется  $\theta(0) = 0$  и  $\frac{d\theta}{dt}(0) = 1.85$ . Исследования траекторий проводилось при  $t_{\text{н}} = 200$ . В качестве начального шага был выбран шаг  $h=0.001$ , при котором все схемы ведут себя устойчиво.

#### Метод Рунге-Кутты 4-го порядка.

Для метода Рунге-Кутты использовался шаг  $h \in [1, 1.05]$  с  $\Delta h=0.05$ , поскольку при меньшем  $h$  метод оказался устойчивым и отображать графики начиная с меньшего  $h$  не имело смысла.

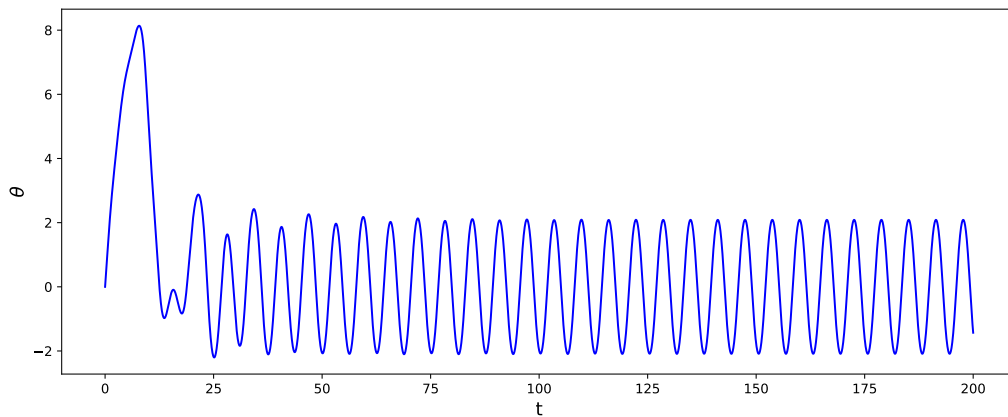


Рис. 4. График зависимости угла  $\theta$  от времени  $t_{\text{н}} \in [0; 200]$ , полученный при помощи метода Рунге-Кутты 4-го порядка, при  $h=0.001$

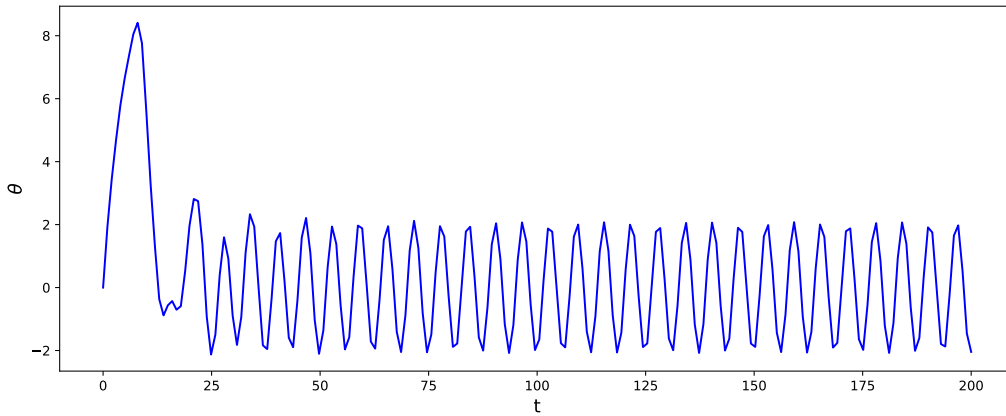


Рис. 5. График зависимости угла  $\theta$  от времени  $t_n \in [0; 200]$ , полученный при помощи метода Рунге-Кутты 4-го порядка, при  $h=1.0$

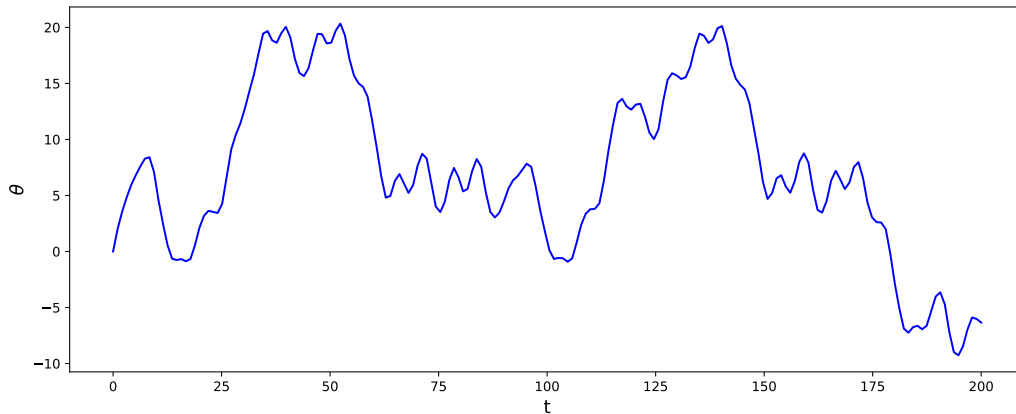


Рис. 6. График зависимости угла  $\theta$  от времени  $t_n \in [0; 200]$ , полученный при помощи метода Рунге-Кутты 4-го порядка, при  $h=1.05$

Исходя из результатов представленных на [рис. 4](#), [рис. 5](#) и [рис. 6](#) можно сделать вывод, что при шаге  $h = 1.05$  метод Рунге-Кутты перестает быть устойчивым.

#### Метод Адамса-Моултона

В методе Адамса-Моултона был выбран шаг  $h$ , находящийся в диапазоне  $[1.1, 1.15]$  с шагом увеличения  $\Delta h = 0.05$ . Это обусловлено тем, что при использовании меньших значений  $h$ , метод продемонстрировал устойчивость, и поэтому представление графиков с меньшими значениями  $h$  было признано нецелесообразным.

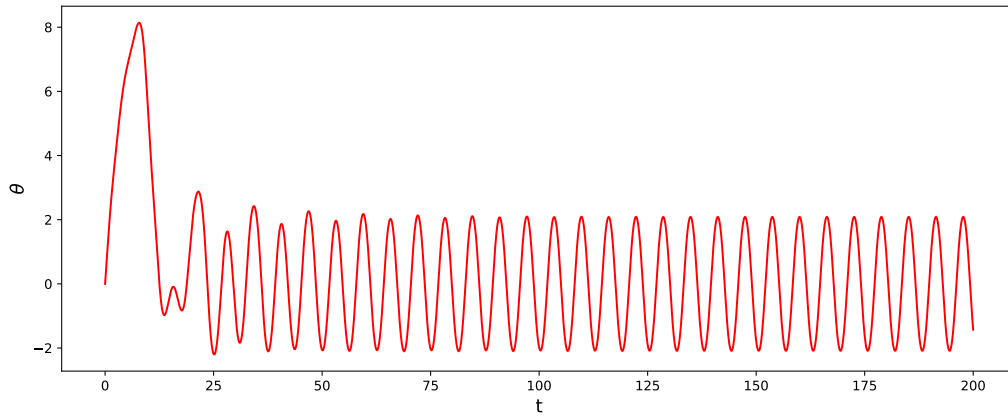


Рис. 7. График зависимости угла  $\theta$  от времени  $t_n \in [0; 200]$ , полученный при помощи трехшагового метода Адамса-Моултона, при  $h=0.001$

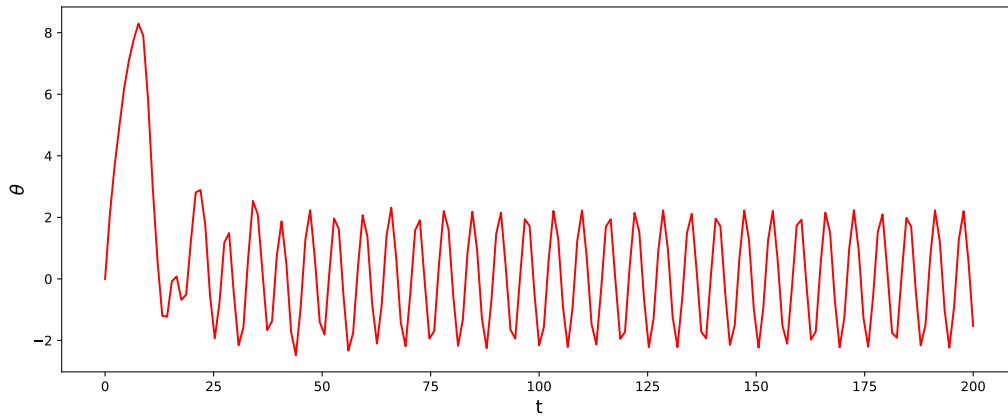


Рис. 8. График зависимости угла  $\theta$  от времени  $t_n \in [0; 200]$ , полученный при помощи трехшагового метода Адамса-Моултона, при  $h=1.1$

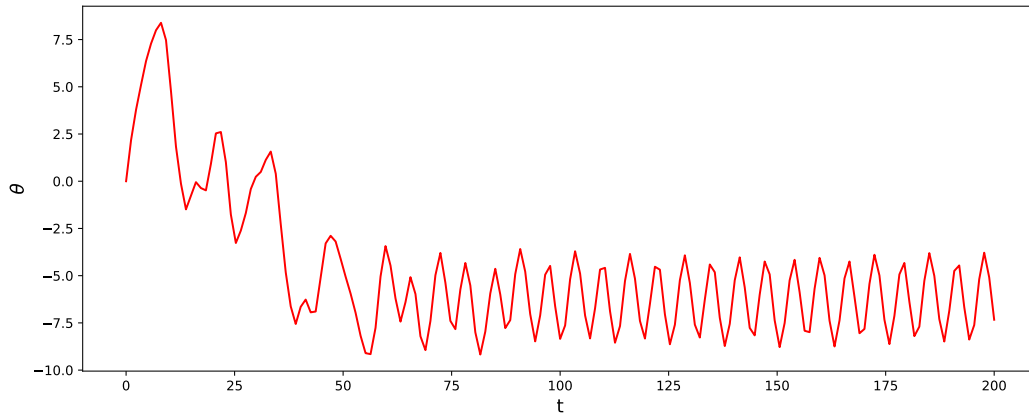


Рис. 9. График зависимости угла  $\theta$  от времени  $t_n \in [0; 200]$ , полученный при помощи трехшагового метода Адамса-Моултона, при  $h=1.15$

Исходя из результатов представленных на [рис. 7](#), [рис. 8](#) и [рис. 9](#) можно сделать вывод, что при шаге  $h = 1.15$  трехшаговый метод Адамса-Моултона перестает быть устойчивым.

#### Метод Милна-Симпсона

Для метода Милна-Симпсона использовался шаг  $h \in [0.15, 0.2]$  с  $\Delta h=0.05$ , поскольку при меньшем  $h$  метод оказался устойчивым и отображать графики начиная с меньшего  $h$  не имело смысла.

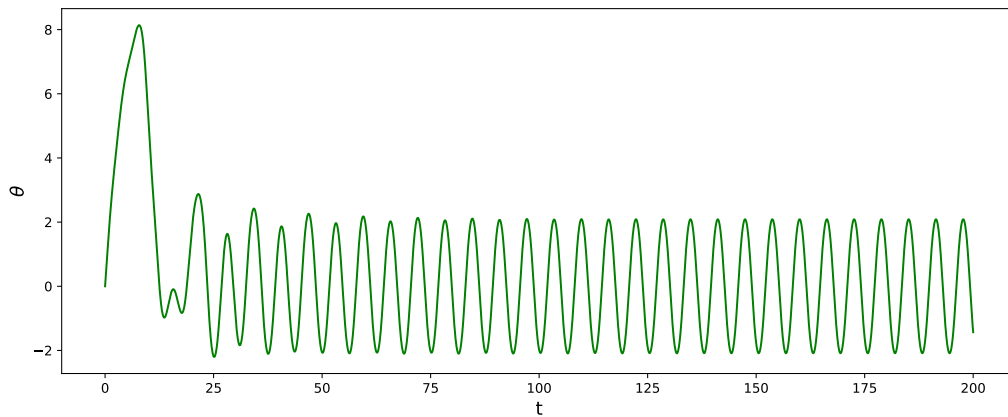


Рис. 10. График зависимости угла  $\theta$  от времени  $t_n \in [0; 200]$ , полученный при помощи метода Милна-Симпсона, при  $h=0.001$

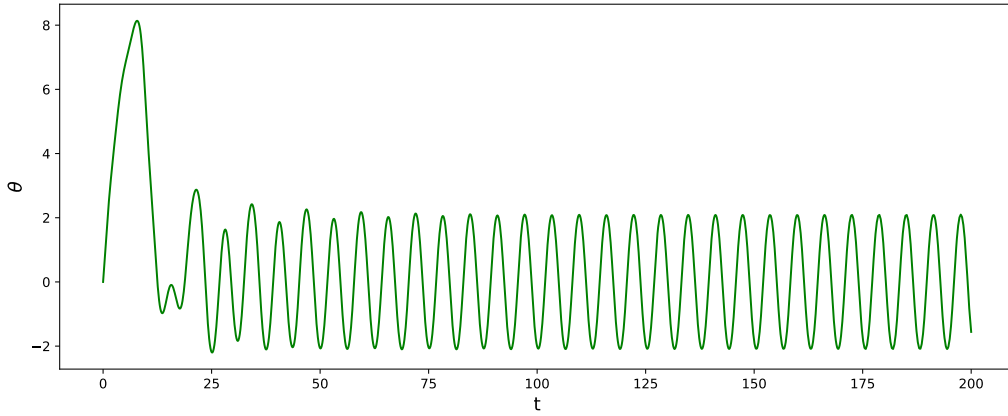


Рис. 11. График зависимости угла  $\theta$  от времени  $t_n \in [0; 200]$ , полученный при помощи метода Милна-Симпсона, при  $h=0.15$

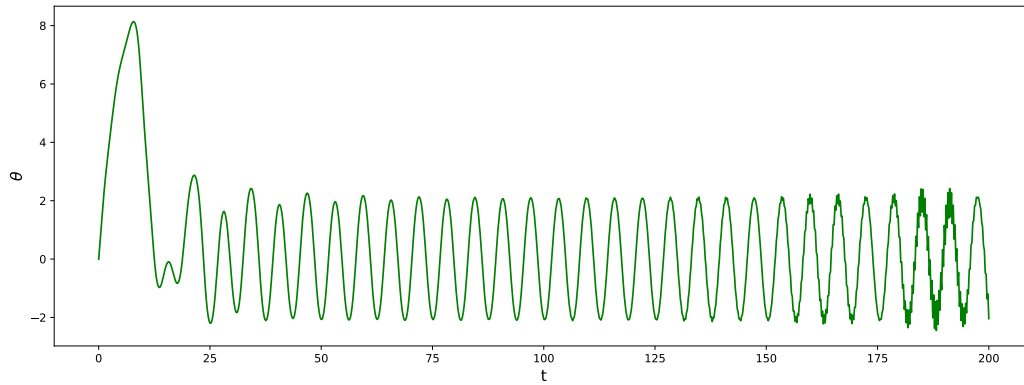


Рис. 12. График зависимости угла  $\theta$  от времени  $t_n \in [0; 200]$ , полученный при помощи метода Милна-Симпсона, при  $h=0.2$

Исходя из результатов представленных на [рис. 10](#), [рис. 11](#) и [рис. 12](#) можно сделать вывод, что при шаге  $h = 0.2$  метод Милна-Симпсона перестает быть устойчивым. Значит, если оценивать по устойчивости, то трехшаговый неявный метод Адамса-Моултона, оказался наиболее устойчивым, а метод Милна-Симпсона продемонстрировал самую низкую устойчивость среди рассмотренных. Стоит отметить, что данные результаты получены эмпирическим путем, то есть при конкретном значении начального условия  $x_0$  и для конкретной рассматриваемой системы ОДУ 1-го порядка [\(3\)](#).



## 2 Фазовые траектории и асимптотические состояния динамической системы

### 2.1 Построение фазовых траекторий при различных начальных условиях

Множество состояний, идущих от начального состояния  $x_0 \in X$  и определенных для всех моментов времени  $t \in T$ , называется орбитой или фазовой траекторией[2]:

$$\gamma(x_0) = \{x \in X : x = \varphi_t x_0 \forall t \in T\}$$

Для рассматриваемого ОДУ 2-го порядка (1), описывающего движение маятника, фазовыми переменными являются угол  $\theta$  и его производная по времени  $\frac{d\theta}{dt}$ , которые представляют собой положение и скорость маятника соответственно. Для нахождения фазовых траекторий были использованы ранее реализованные функции `runge_kutta(x_0, t_n, f, h)` (листинг 2), `adams_moulton(x_0, t_n, f, h)` (листинг 3) и `milne_simpson(x_0, t_n, f, h)` (листинг 4). Использовались те же самые начальные условия, которые были сгенерированы для построения траекторий зависимости  $\theta$  от  $t$ . Результаты визуализации продемонстрированы на [рис. 13](#), [рис. 14](#) и [рис. 15](#).

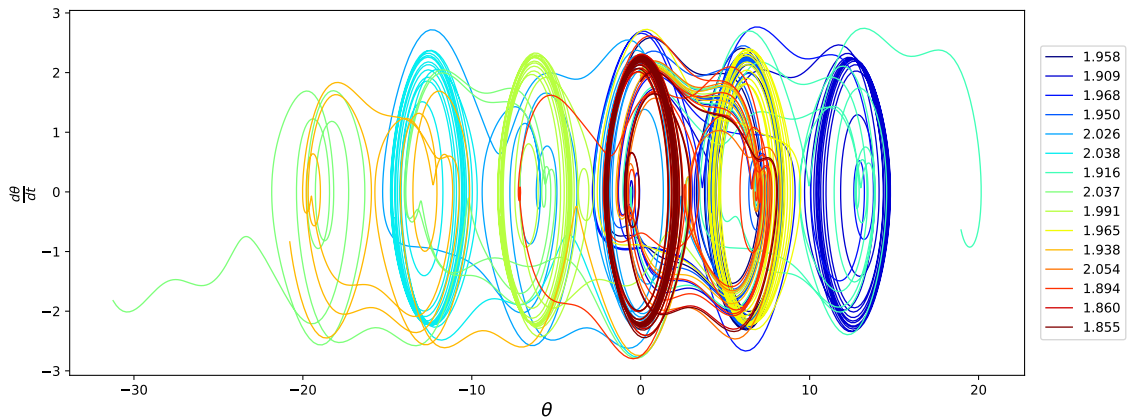


Рис. 13. График зависимости производной по времени  $\frac{d\theta}{dt}$  от угла  $\theta$ , полученный при помощи метода Рунге-Кутты 4-го порядка

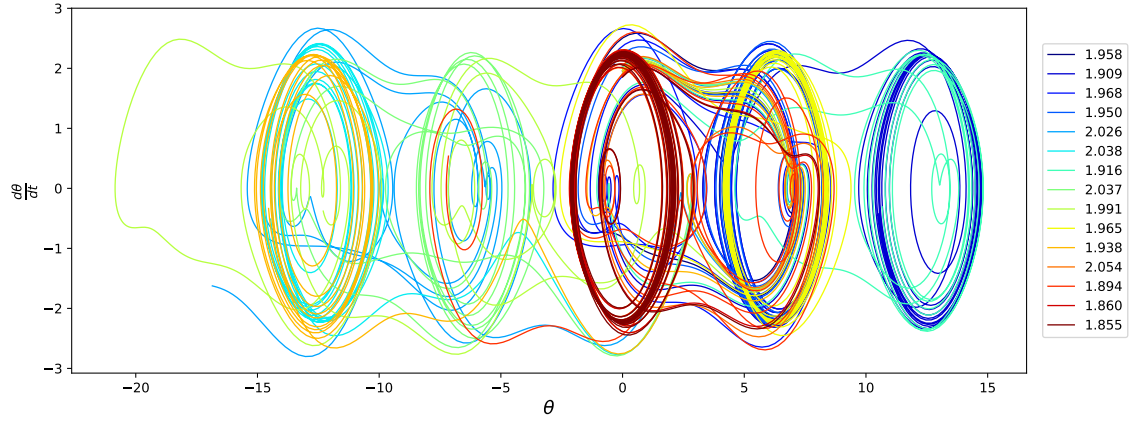


Рис. 14. График зависимости производной по времени  $\frac{d\theta}{dt}$  от угла  $\theta$ , полученный при помощи трехшагового метода Адамса-Моултона

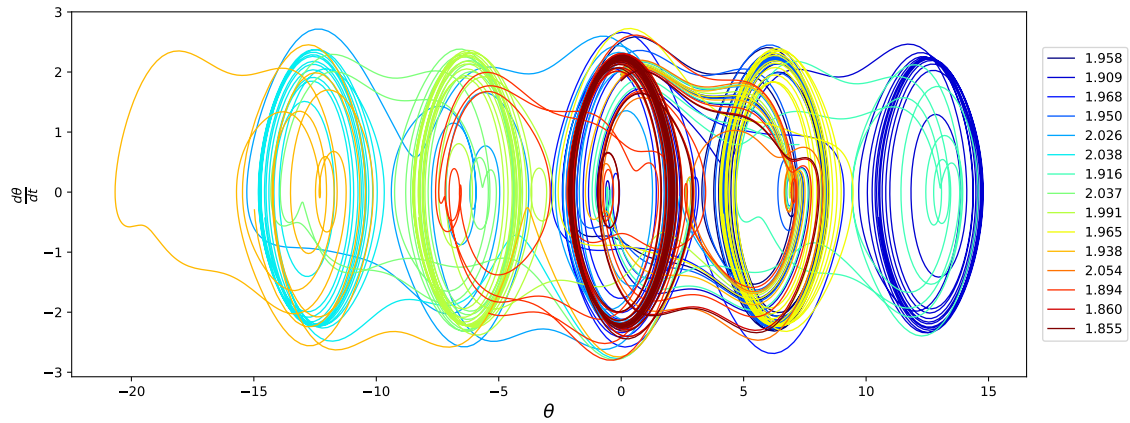


Рис. 15. График зависимости производной по времени  $\frac{d\theta}{dt}$  от угла  $\theta$ , полученный при помощи метода Милна-Симпсона

Исходя из графиков на [рис. 13](#), [рис. 14](#) и [рис. 15](#), можно заметить, что при разных начальных условиях траектории могут сходиться к одним и тем же асимптотическим состояниям.

## 2.2 Фазовые траектории при фиксированном начальном условии

Было выбрано фиксированное начальное условие  $\theta(0) = 0$  и  $\frac{d\theta}{dt}(0) = 2.02$  для рассмотрения фазовых траекторий на одном графике, формируемых разными методами. Результат визуализации фазовых траекторий, полученных при помощи методов Рунге-Кутты, Адамса-Моултона и Милна-Симпсона представлены на [рис. 16](#).

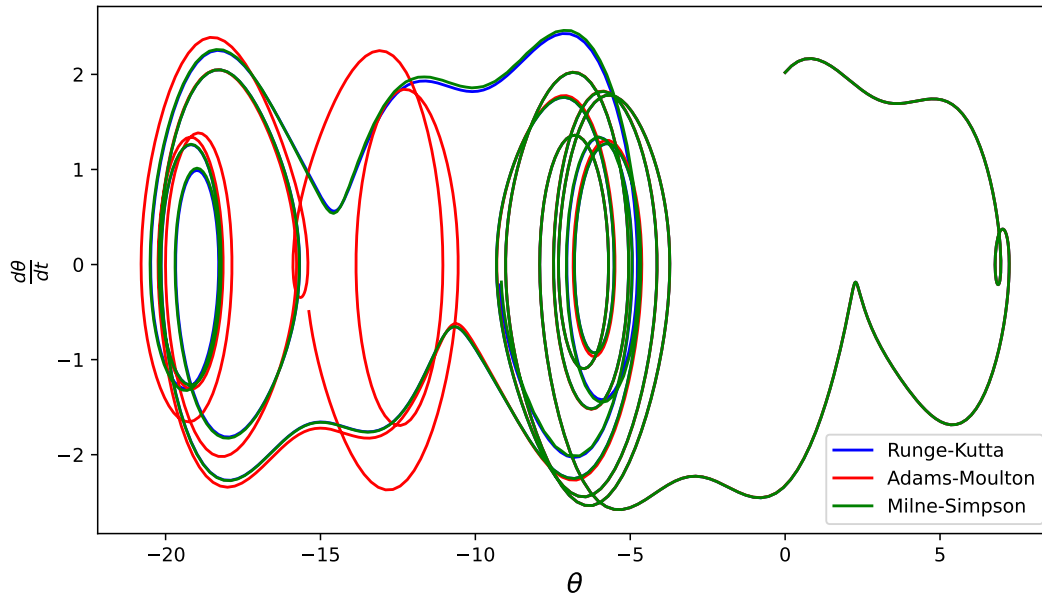


Рис. 16. График фазовых траекторий при начальном условии  $\theta(0) = 0$ ,  $\frac{d\theta}{dt} = 2.02$ , полученные при помощи различных методов

Все три метода дают схожие траектории для некоторых участков графика, что говорит о том, что при данных начальных условиях они согласованно моделируют динамику системы. В области повышенной плотности линий в пределе формируется периодическая орбита - эллипс.

Однако можно отметить, что траектория, полученная методом Рунге-Кутты плавная и кажется наиболее стабильной и непрерывной по всему диапазону. Фазовая траектория, сформированная при помощи метода Адамса-Моултона показывает похожее поведение на траекторию Рунге-Кутты в центральной части графика, но имеет небольшие отклонения. Траектория, полученная при помощи метода Милна-Симпсона наиболее различается с другими траекториями, особенно в крайне правой части графика. Исходя из данных результатов можно сделать вывод, что метод Рунге-Кутты может быть более предпочтительным для точного моделирования динамики маятника.

### 2.3 Расчет времени вычисления схем

В таблице 1 представлены результаты расчета времени вычислений различными методами. Для замеров времени использовалась функция `timeit.default_timer()`. Конечное время `t_n` было выбрано равное 100. Начальные условия были выбраны следующим образом: 15 начальных условий с  $\theta(0) = 0$  и  $\frac{d\theta}{dt(0)}$  выбранный случайно из интервала  $[1.85, 2.1]$  при помощи функции `random.uniform`.

Таблица 1. Время вычислений для методов Рунге-Кутты 4-го порядка, Адамса-Моултона и Милна-Симпсона

$h$	Метод Рунге-Кутта	Метод Адамса-Моултона	Метод Милна-Симпсона
0.5	0.18185	1.39146	0.18746
0.4	0.37154	3.34408	0.38606
0.3	0.55134	4.25161	0.56346
0.2	0.74183	5.65017	0.79947
0.1	1.50162	12.21465	2.10959
0.07	2.48741	18.61779	3.02076
0.05	3.08653	25.45388	3.18665
0.02	3.78274	32.40537	3.92522

Исходя из результатов, представленных из таблицы 1 можно сделать вывод, что метод Адамса-Моултона является наиболее затратным с точки зрения времени вычислений, а метод Рунге-Кутты наименее затратным. Метод Адамса-Моултона выполняется в несколько раз дольше, поскольку требует решения нелинейного уравнения на каждом шаге вычислений. Метод Милна-Симпсона демонстрирует относительно более низкую эффективность по сравнению с методом Рунге-Кутты, обусловленную его двухшаговым процессом вычисления, в котором первоначально подсчитывается предиктор, за которым следует корректор.

## 2.4 Анализ асимптотических состояний решений и их физическая интерпретация

На рис. 1, рис. 2 и рис. 3 с некоторого момента графики зависимости  $\theta$  от времени  $t$  похожи на графики периодических функций. То есть решение сходится к некоторому асимптотическому состоянию. Возникновения таких асимптотических состояний связано с характером физических особенностей вынужденных колебаний.

Внешнее воздействие, приложенное к колебательной системе, порождает переходный режим вынужденных колебаний, при котором система одновременно участвует в двух колебаниях: свободных затухающих колебаниях системы и незатухающих периодических колебаниях системы с частотой, равной частоте вынуждающего воздействия. После чего система в режим установившихся вынужденных колебаний.

Установившиеся колебания происходят вблизи значений  $\theta = 2\pi n$  (где  $n \in \mathbb{N}$ ). Асимптотические состояния зачастую называют аттракторами. Аттрактором называют минимально возможное инвариантное множество, к которому стремятся все точки, принадлежащие некоторому окружению этого множества при  $t \rightarrow \infty$ [2]. Наглядным образом аттракторы можно наблюдать на фазовой плоскости (рис. 16).

Аттрактором для маятника, совершающего является некоторая замкнутая кривая. Таким образом, физический смысл аттрактора, следующий: когда траектория стремится к некоторому циклу, независимо от начальных условий динамическая система выходит на определенные колебания на  $t \rightarrow \infty$ . Вне зависимости от начальных условий динами-

ческая система приходит к предельному циклу с определенной амплитудой и частотой.

### 3 Поиск и визуализация областей притяжения

#### 3.1 Области притяжения каждого из асимптотических состояний.

Каждому из асимптотических состояний назначен свой цвет при помощи цветовой карты `inferno`. Был разработан алгоритм, чтобы выделить определенное асимптотическое состояние. Он основывается на главном свойстве аттракторов – при любых начальных значениях решение будет сводиться к определенной области фазового пространства при  $t \rightarrow \infty$ . При выборе достаточно большого времени практически каждая траектория успеет попасть в аттрактор.

В таком случае из каждого решения выбраны последние 50 найденных шагов и найдено среднее значение угла отклонения  $\theta$  в этих точках. Полученное среднее значение будет соответствовать определенному асимптотическому состоянию. По результатам тестов скорости работы из таблицы 1 для решения системы ОДУ 1-ого порядка был выбран метод Рунге-Кутты, как самый оптимальный метод. Для формирования сетки на определенном промежутке была разработана функция `create_grid(x_in, y_in, n_in)` (5). Решение проводилось для сетки начальных значений размерностью  $[300;200]$  на промежутке  $[-4\pi; 4\pi] \times [-5; 5]$ . Использовался шаг  $h=0.1$  и конечное время  $t_n=300$ . График начальных условий, имеющих цвет соответствующих им асимптотических состояний представлен на [рис. 17](#).

Листинг 5. Функция для построения сетки начальных значений определенных размеров

---

```

1 def create_grid(x_in, y_in, n_in):
2     grid = []
3     X = np.linspace(x_in[0], x_in[1], n_in[0])
4     X *= np.pi
5     Y = np.linspace(y_in[0], y_in[1], n_in[1])
6
7     for x in X:
8         for y in Y:
9             grid.append([x, y])
10    return grid

```

---

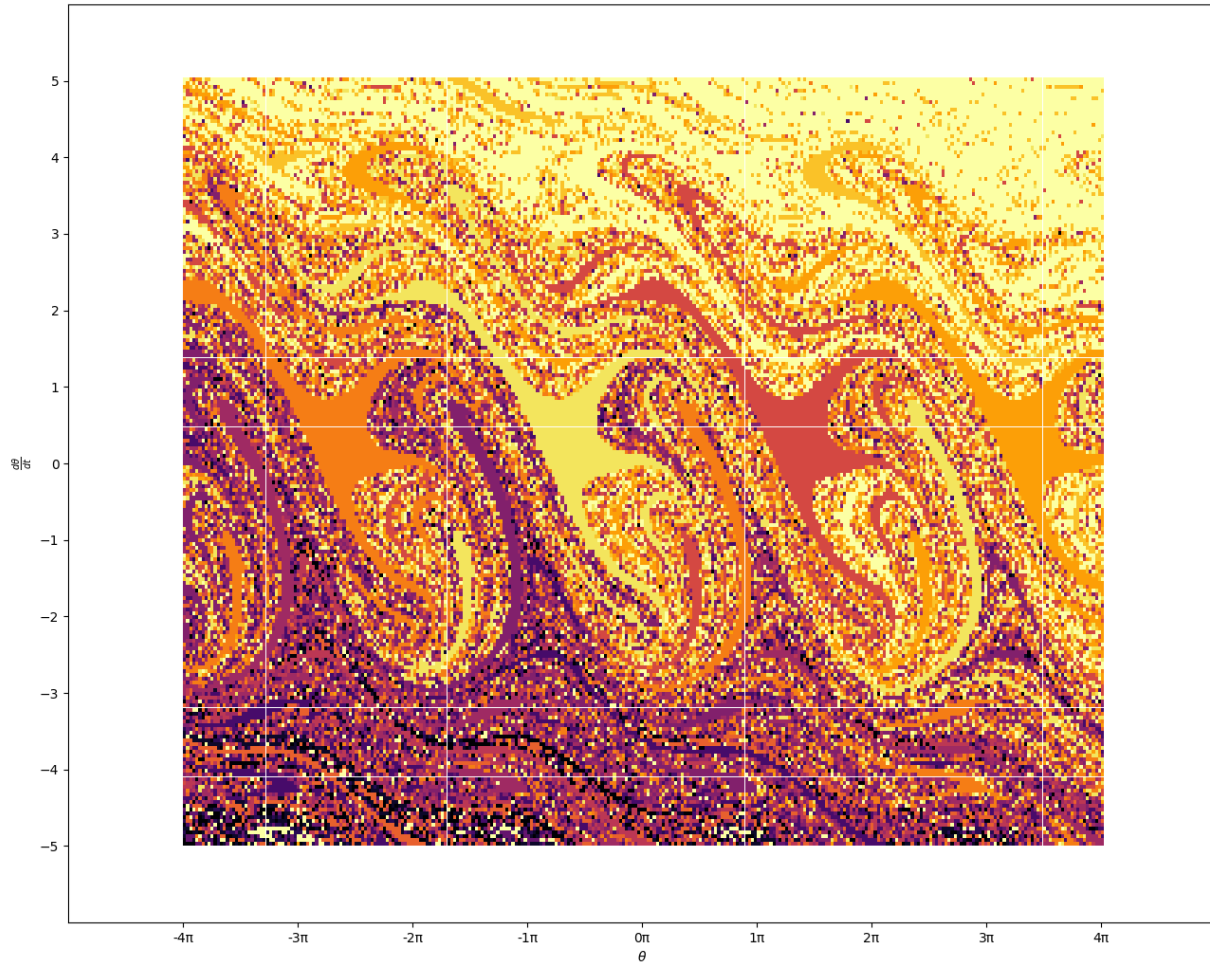


Рис. 17. График асимптотических состояний области  $[-4\pi; 4\pi] \times [-5; 5]$  начальных условий сеткой  $[300; 200]$

### 3.2 Характерные детали полученных областей притяжения

Исходя из графика на [рис. 17](#) можно выделить следующие характерные детали:

1. Распределение цветов – достаточно хаотично, что говорит, как о неустойчивости системы, так и о неустойчивости метода решения.
2. Узор многократно повторяется с шагом  $2\pi$  областей притяжения, что означает, что начальные условия на повторяющихся участках приводят траекторию к одним и тем же аттракторам.
3. В фазовом пространстве траектории, начинающиеся в схожих условиях, обычно приближаются к одному аттрактору или к паре близких аттракторов. Это объясняется тем, что цвет точек на диаграмме изменяется без резких переходов.

## Заключение

1. Изучены одношаговый метод Рунге-Кутты и многошаговые методы Адамса-Моултона и Милна-Симпсона для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка.
2. Успешно найдены траектории заданной динамической системы при различных начальных условиях.
3. Найдены достоинства и недостатка каждого из рассмотренных методов.
4. Оценена затратность времени вычислений при различных значениях шага, влияющих на устойчивость решения и эффективность метода.
5. Охарактеризованы асимптотические состояния с учетом начальных условий, определено, что все они сходятся к одному аттрактору – эллипсу.
6. Описан физический смысл аттракторов и построены области притяжения для каждого асимптотического состояния.



В ходе лабораторной работы были изучены и сравнены одношаговый метод Рунге-Кутты 4-го порядка и многошаговые методы Адамса-Моултона и Милна-Симпсона для решения ОДУ первого порядка. Основное внимание уделено анализу эффективности и ограничений методов, а также исследованию асимптотических состояний системы.

## Список использованных источников

1. Першин А.Ю. Лекции по курсу «Вычислительная математика». Москва, 2018-2021. С. 140. URL: <https://archrk6.bmstu.ru/index.php/f/810046>.
2. Першин А.Ю. Методы математического моделирования сложных процессов и систем / Лекция 7: Динамические системы. 2019. 11. URL: <https://archrk6.bmstu.ru/f/101395>
3. Соколов, А.П. Инструкция по выполнению лабораторных работ (общая). Москва: Соколов, А.П., 2018-2021. С. 9. URL: <https://archrk6.bmstu.ru>. (облачный сервис кафедры РК6).
4. Першин А.Ю., Соколов А.П., Гудым А.В. Сборник постановок задач на лабораторные работы по курсу «Вычислительная математика»: Учебное пособие. [Электронный ресурс]. Москва, 2023. С. 47. URL: [hhttps://arch.rk6.bmstu.ru](https://arch.rk6.bmstu.ru).

## Выходные данные

Гапеев Д.А. Отчет о выполнении лабораторной работы по дисциплине «Вычислительная математика». [Электронный ресурс] — Москва: 2023. — 24 с. URL: <https://sa2systems.ru:88> (система контроля версий кафедры РК6)

Постановка:  ассистент кафедры РК-6, PhD Першин А.Ю.  
Решение и вёрстка:  студент группы РК6-51Б, Галеев Д.А.

2023, осенний семестр