Содержание

Часть I

Определения

1 Первообразная, неопределенный интеграл

1.1 Первообразная

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

$F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — первообразная f на $\langle a, b\rangle$, если для любого $x \in \langle a, b\rangle$ F дифференцируема в точке x и $F'(x) = f(x)$.

Пример

$f(x) = \sin x \Longleftrightarrow F(x) = -\cos x + C$

1.2 Неопределенный интеграл

Неопределенным интегралом функции f на промежутке $\langle a, b\rangle$ называют множество всех её первообразных.

Обозначение: $\displaystyle\int f$, $\displaystyle\int f(x)\ dx = \{F + C, C \in \mathbb{R}\}$, где F — любая первообразная.

2 Теорема о существовании первообразной

Пусть f непрерывна на $\langle a, b\rangle$, тогда существует такая функция F на $\langle a, b\rangle$, что $F' = f$.

3 Таблица первообразных

1. $f(x) = k$, $F(x) = kx$
2. $f(x) = x^n$, $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, где $n \neq -1$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $F(x) = \ln|x|$
4. $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$
5. $f(x) = a^x$, $F(x) = \dfrac{a^x}{\ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$
6. $f(x) = \sin x$, $F(x) = -\cos x$
7. $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x$
8. $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$, $F(x) = -\operatorname{ctg} x$
9. $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $F(x) = \operatorname{tg} x$
10. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $F(x) = \arcsin x = -\arccos x$
11. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $F(x) = \operatorname{arctg} x = -\operatorname{arcctg} x$
12. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$, $F(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right|$
13. $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$, $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$

4 Равномерная непрерывность

Отображение $f : X \to Y$, где X и Y — метрические пространства, а также $A \subset X$, называется равномерно непрерывным на A, если:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_0, x \in A : \rho(x, x_0) < \delta \Longrightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

5 Площадь, аддитивность площади, ослабленная аддитивность

5.1 Первое определение площади

Пусть E — множество всех ограниченных подмножество в $\mathbb{R}^2$ (или множество всех фигур).

Тогда площадь — это функция $\sigma : E \to [0, +\infty)$ со свойствами:

1. аддитивность

   Если $A = A_1 \sqcup A_2$, то $\sigma(A) = \sigma(A_1) + \sigma(A_2)$

2. нормировка

   $\sigma(\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle) = (d - c)(b - a)$

<u>Замечание</u>

1. Площадь монотонна, то есть:

   $A \subset B \Rightarrow \sigma(A) \leq \sigma(B)$

   Доказательство

   $B = A \cup (B \setminus A)$

   $\sigma(B) = \sigma(A) + \sigma(B \setminus A) \geq \sigma(A)$

2. σ(вертикального отрезка) $= 0$

   Доказательство

   Отрезок — прямоугольник, ширина которого стремится к 0, значит и площадь также стремится к 0

5.2 Второе определение площади

$\sigma : E \to [0, +\infty)$

- монотонна
- нормировка

- ослабленная аддитивность:

  $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$ — вертикальный отрезок, E_1 и E_2 — по разные стороны этого отрезка.

  $\sigma(E) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2)$

5.3 Площадь как сумма прямоугольников

$\sigma(A) = \inf\left(\sum \sigma(P_i)\right)$, где $A \subset \bigcup P_i$

6 Положительная и отрицательная срезки

6.1 Определение

Пусть $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$

$f_+(x) = \max(f(x), 0)$ — положительная срезка

$f_-(x) = \max(-f(x), 0)$ — отрицательная срезка

6.2 Некоторые свойства

- $f = f_+ - f_-$
- $f_+ + f_- = |f|$

6.3 Подграфик

Пусть $E \subset \langle a, b \rangle$

$f(E) \geq 0$

Тогда $\Pi\Gamma(f, E)$ — подграфик f на E, если:

$$\Pi\Gamma(f, E) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in E, 0 \leq y \leq f(x)\right\}$$

7 Определённый интеграл

7.1 Определение

Определённым интегралом функции f по промежутку $[a, b]$ называется $f : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$, $[a, b] \subset \langle c, d\rangle$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sigma(\Pi\Gamma(f_+, [a, b])) - \sigma(\Pi\Gamma(f_-, [a, b]))$$

7.2 Свойства

1. $f \geq 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f \geq 0$

2. $f \equiv c \Rightarrow \int\limits_a^b f = c(b - a)$

   Доказательство

   $c = 0$ — очевидно

   $c > 0 \int\limits_a^b = \sigma(\Pi\Gamma(c, [a, b])) = c(b - a)$

   $c < 0 \int\limits_a^b = -\sigma(\Pi\Gamma(f_-, [a, b])) = -(-c)(b - a) = c(b - a)$

3. $\int\limits_a^b -f = -\int\limits_a^b f$

   Доказательство

   $(-f)_+ = f_-$

   $(-f)_- = f_+$

4. Можно считать, что разрешён случай, когда $a = b$

   $\int\limits_a^a f = 0$

8 Среднее значение функции на промежутке

Величина $c = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$ — среднее значение функции f на промежутке $\langle a, b\rangle$

9 Кусочно-непрерывная функция

Если функция f всюду непрерывна на промежутке $[a, b]$ кроме конечного числа точек, при этом все точки разрыва I рода, то такую функцию называют кусочно-непрерывной.

10 Почти первообразная

Пусть f — кусочно-непрерывная функция на $[a, b]$. Тогда $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ — почти первообразная, если существует такое $F'(x)$, что $F'(x) = f(x)$ для всех x кроме конечного числа точек и $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$

11 Дробление отрезка, ранг дробления, оснащение

Пусть задан невырожденный отрезок $[a, b]$

Дробление отрезка — набор таких точек x_0, x_1, …, x_n, что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

Оснащение — набор точек ξ_1, ξ_2, …, ξ_n, что $\forall k : \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Ранг дробления — величина, равная $\max\limits_{k=1,\ldots,n}(x_k - x_{k-1})$

12 Риманова сумма

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, а также задано дробление и оснащение. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ — Риманова сумма

Если ранг дробления стремится к 0, то $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \to \int\limits_a^b f(x)\ dx$. Это историческое определение интеграла

13 Постоянная Эйлера

Постоянная Эйлера — математическая константа γ, определяемая следующим образом:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$

14 Функция промежутка. Аддитивная функция промежутка

Пусть у нас задано $\langle a, b\rangle$. Тогда

$\operatorname{Segm} \langle a, b\rangle := \{[p, q] \subset \langle a, b\rangle\}$

Тогда:

1. $\phi : \operatorname{Segm} \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — функция промежутка

2. $\phi : \operatorname{Segm} \langle a, b\rangle \to \mathbb{R},$ — аддитивная функция промежутка, если

$$\forall [p, q] \subset \langle a, b\rangle : \forall c \in (p, q) \Longrightarrow \phi([p, q]) = \phi([p, c]) + \phi([c, q])$$

15 Плотность аддитивной функции промежутка

Пусть $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}, \phi : \text{Segm } \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ — аддитивная функция промежутка

f — плотность ϕ, если $\forall \Delta \in \text{Segm } \langle a, b \rangle \Longrightarrow \inf\limits_{x \in \Delta} f(x) \cdot l(\Delta) \leq \phi(\Delta) \leq \sup\limits_{x \in \Delta} f(x) \cdot l(\Delta)$,

где $l(\Delta)$ — длина промежутка.

16 Гладкий путь, вектор скорости, носитель пути

Путь — непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$

$\gamma(a)$ — начало пути

$\gamma(b)$ — конец пути

16.1 Гладкий путь

$\gamma^{(t)} = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_m(t))$

γ_i — координатная функция пути γ

Путь $\gamma^{(t)}$ называют гладким, если все $\gamma_i \in C^1[a, b]$

16.2 Вектор скорости

$\gamma(t_0) := \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$

Покоординатно: $\dfrac{\gamma_i(t) - \gamma_i(t_0)}{t - t_0} \to \gamma_i'(t)$

$\gamma'(t_0) = (\gamma_1'(t_0),\ \gamma_2'(t_0),\ \ldots,\ \gamma_n'(t_0))$ — вектор скорости в точке t_0

16.3 Носитель пути

Носитель пути — множество всех значений $\gamma([a, b]) \subset \mathbb{R}^m$

17 Длина гладкого пути

Длина гладкого путь — функция l, заданная на множестве гладких путей и удовлетворяющая свойствам:

1. $l \geq 0$
2. l — аддитивна:

$$\forall [a,b] : \forall \gamma [a,b] : \forall c \in [a,b]$$

$$l(\gamma) = l\left(\gamma\Big|_{[a,c]}\right) + l\left(\gamma\Big|_{[c,b]}\right)$$

3. $\forall \gamma, \overline{\gamma}$ — гладкие пути, $C_\gamma, C_{\overline{\gamma}}$ — их носители в $\mathbb{R}^m$

   Если существует такое $T : C_\gamma \to C_{\overline{\gamma}}$ — сжатие, т.е.:

   $\forall M_1, M_2 \in C_\gamma$

   $\rho\left(T\left(M_1\right), T\left(M_2\right)\right) \leq \rho\left(M_1, M_2\right)$

   то $l(\overline{\gamma}) \leq l(\gamma)$

4. γ — линейный путь ($\gamma(t) = t\overline{v} + \overline{u}$)

   $l(\gamma) = \rho(\gamma(a), \gamma(b))$

Замечание

1. Длина хорды меньше длины дуги (это отображение — сжатие)
2. При растяжении длины путей растут

   Всякое сжатие является непрерывным, но для растяжений — **неверно!!!**

3. При движении $\mathbb{R}^m$ длина пути не меняется (это сжатие и растяжение одновременно)

18 Формулы для длины пути: в $\mathbb{R}^m$, в полярных координатах, длина графика

18.1 Длина пути в $\mathbb{R}^m$

Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, $\gamma \in C^1$

Утверждение: $l(\gamma) = \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\| dt$

18.2 Длина графика

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$

$t \mapsto (t, f(t))$ $(f \in C^1)$ — гладкий путь

$\gamma' = (1, f'(t))$

$\|\gamma'\| = \sqrt{1^2 + (f'(t))^2}$

$l(f) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$

18.3 Длина кривой в полярных координатах

$r = r(\varphi)$

$\gamma : [\varphi_0, \varphi_1] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma(\varphi) = (r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)$

$\gamma' = (r'\cos\varphi - r\sin\varphi, r'\sin\varphi + r\cos\varphi)$

$\|\gamma'\|^2 = (r')^2 + r^2$

$l(\gamma) = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi$

19 Вариация функции на промежутке

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — это «путь»

Рассмотрим все такие x, что

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

Тогда вариация f на $[a, b]$

$\mathrm{Var}_a^b f = \sup \sum\limits_{i=1}^{n} \left(|f(x_i) - f(x_{i-1})| \right)$

При этом если $f \in C^1\left([a, b]\right)$, то $\mathrm{Var}_a^b f = \int\limits_a^b |f'(t)| dt$

20 Верхний и нижний пределы

20.1 Верхняя и нижняя огибающая

Пусть x_n — вещественная последовательность.

$y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$ — верхняя огибающая

$z_n = \inf(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$ — нижняя огибащая

Тогда:

1. y_n убывает $(y_n \leq y_{n+1})$
2. z_n возрастают $(z_n \geq z_{n+1})$
3. Если изменить конечное число членов x_n, изменится конечное число элементов y_n и z_n, тогда существуют $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$

20.2 Верхний и нижний пределы

Верхний предел x_n — $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup x_n := \lim y_n \in \overline{\mathbb{R}}$

Нижний предел x_n — $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \inf x_n := \lim z_n \in \overline{\mathbb{R}}$

21 Частичный предел

a — частичный предел x_n ($a \in \overline{\mathbb{R}}$), если

$\exists n_k : x_{n_k} \to a$

Пример

1. $x_n = (-1)^n$, 1 — частничный предел

2. $x_n = \sin n$, $\forall a \in [-1, 1]$ — частничный предел

22 Допустимая функция

Пусть $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, где $-\infty < a < b \leq +\infty$ называют допустимой, если

$\forall B : a < B < b : f\big|_{[a,B]}$ — кусочно-непрерывная функция.

23 Несобственный интеграл, сходимость, расходимость

23.1 Определение

Пусть $\Phi(B) = \int\limits_a^B f(x)dx$, где $B \in [a, b)$, по логике f — допустима на $[a, b)$.

Если существует $\lim\limits_{B \to b-0} \Phi(b) \in \overline{\mathbb{R}}$, то этот предел называют несобственным интегралом. Обозначается $\int\limits_a^{\to b} f(x)dx$.

23.2 Сходимость и расходимость

Если предела нет, то несобственного интеграла не существует

Если предел $\lim\limits_{B \to b-0} \Phi(B)$ конечен, то несобственный интеграл называют сходящимся

Если предел бесконечный, то несобственный интеграл расходится.

24 Критерий Больцано–Коши сходимости несобственного интеграла

Интеграл $\int\limits_a^{\to b} f(x)dx$ — сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta \in (a,b) : \forall B_1, B_2 : \Delta < B_1 < B_2 < b : \left| \int\limits_{B_1}^{B_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

Если же

$$\exists \varepsilon : \exists B_n : \overline{B_n} \to b - 0 : \left| \int\limits_{B_n}^{\overline{B_n}} f(x)dx \right| \geq \varepsilon$$

то интеграл расходится

25 Гамма функция Эйлера

$$\Gamma(t) = \int\limits_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx,\ t > 0$$

26 Числовой ряд, сумма ряда, сходимость, расходимость

26.1 Числовой ряд

Пусть a_n — вещественная последовательность. Тогда

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ называется числовым рядом, а a_n — его членами.

26.2 Сумма ряда

Последовательность $S_N = \sum\limits_{i=1}^{N} a_i$ называют последовательностью частичных сумм. Если последовательность S_n имеет предел, то

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ — сумма ряда.

26.3 Сходимость и расходимость

Если предел существует и конечный, то ряд сходится. Если предела нет или он бесконечный — то расходится.

27 n-й остаток ряда

$\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$ — n-й остаток ряда.

28 Абсолютно сходящийся ряд

Ряд $\sum a_n$ — абсолютно сходится, если

1. $\sum a_n$ — сходится
2. $\sum |a_n|$ — сходится

29 Критерий Больцано–Коши сходимости числового ряда

Сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ равносильна условию

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

30 Преобразование Абеля

Пусть a_k, b_k — числовые последовательности, $A_k = \sum\limits_{j=1}^{k} a_j$ при $k \in \mathbb{N}$. Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

31 Бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{+\infty} p_k := \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} p_k$$

Если предел существует, конечен и не равен нулю, то произведение сходится, иначе расходится.

32 Произведение рядов

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ — числовые ряды, $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ — биекция, $k \longmapsto \gamma(k) = (\varphi(k), \psi(k))$ Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}$$

называется произведением рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$.

33 Произведение степенных рядов

Пусть $\sum a_k \cdot x^k$ и $\sum b_k \cdot x^k$ — степенные ряды. Тогда последовательность $\sum c_k$ задаётся следующим образом:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots a_n b_0$$

и $\sum c_k \cdot x^k$ — произведение степенных рядов.

34 Скалярное произведение, евклидова норма и метрика в $\mathbb{R}^m$

Скалярное произведение $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ — евклидова норма

$\rho(x, y) = \|x - y\|$ — метрика в $\mathbb{R}^m$

35 Окрестность точки в $\mathbb{R}^m$, открытое множество

$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - a| < r\}$ — открытый шар с центром в точке a и радиусом r

$U(a)$ — окрестность точки a или любой шар $B(a, r)$, где $r > 0$

Множество A открыто, если для любой точки $a \in A : a$ — внутренняя, то есть $\exists U(a) \subset A$

36 Сходимость последовательности в $\mathbb{R}^m$, покоординатная сходимость

Последовательность $x^{(n)} \in \mathbb{R}^m \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \Longleftrightarrow |x^{(n)} - a| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ — сходящаяся последовательность в $\mathbb{R}^m$

$\forall k : 1 \leq k \leq m : x_k^{(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a_k$ — покоординатная сходимость.

37 Предельная точка, замкнутое множество, замыкание

a — предельная точка множества A, если любая проколотая окрестность точки a имеет непустое пересечение с множеством A

Замкнутое множество содержит все свои предельные точки

Замыкание множества A — объединение самого множества A и всех его предельных точек.

38 Компактность, секвенциальная компактность, принцип выбора Больцано-Вейерштрасса

38.1 Компактность

Семейство множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ называется покрытием множества K, если $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$

Покрытие открыто, если все его множества открыты.

Пусть $K \in X$, (X, ρ) — метрическое пространство. K называется компактным, если из любого открытого покрытия множества K можно извлечь конечное покрытие.

38.2 Секвенциальная компактность

K называется секвенциально компактным, если из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

38.3 Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса

Из всякой ограниченной последовательности точек K в $\mathbb{R}^m$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность b.

39 Координатная функция

$F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ или $F : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^l$ — векторнозначная функция.

Координатные функции f:

$f_i : X \in (\mathbb{R}^m$ или $\mathbb{C}^m) \to (\mathbb{R}$ или $\mathbb{C})$ — её координатная функция.

$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_l(x))$

40 Двойной предел, повторный предел

40.1 Повторный предел

Пусть D_1, $D_2 \subset \mathbb{R}$, a_1 — предельная точка D_1, a_2 — предельная точка D_2

Пусть $D \supset (D_1 \setminus \{a_1\}) \times (D_2 \setminus \{a_2\})$, $f : D \to \mathbb{R}$

Если $\forall x_1 \in D_1 \setminus \{a_1\} : \exists \varphi(x_1) = \lim\limits_{x_2 \to a_2} f(x_1, x_2)$ — конечен, то $\lim\limits_{x_1 \to a_1} \varphi(x_1)$ называют повторным пределом.

Аналогично $\lim\limits_{x_2 \to a_2} \left(\lim\limits_{x_1 \to a_1} f(x_1, x_2) \right)$

40.2 Двойной предел

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2}} f(x_1, x_2) = L$$

$$\forall U(l) : \exists V_1(a_1), V_2(a_2) : \forall x_1 \in \dot{V}_1(a_1), x_2 \in \dot{V}_2(a_2) : f(x_1, x_2) \in U(l)$$

41 Предел по направлению, предел вдоль пути

$\lim\limits_{t\to 0} f(a+tv)$, где $v \in \mathbb{R}^m$, $t \in \mathbb{R}$ — предел по направлению к точке a.

Пусть x_1, x_2, …, x_m — координатные функцию, для всех $x_i : x_i(0) = a_i$.

Тогда $\lim\limits_{t\to 0} f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t))$ — предел вдоль пути к точке a.

42 Предел отображения (определение по Коши и по Гейне)

Пусть задано $f : D \subset X \to Y$ — метрические пространства, a — предельная точка D. Тогда A называют пределом отображения f в точке a, если:

42.1 По Коши

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in D \setminus \{a\} : 0 < \rho_x(x, a) < \delta : \rho_y(f(x), A) < \varepsilon$$

42.2 По Гейне

$$\forall \{x_n\} : x_n \in D \setminus \{a\}, x_n \to a : f(x_n) \to A$$

43 Линейный оператор

Пусть X, Y — линейные пространства над $\mathbb{R}$

$f : X \to Y$ — линейное отображение, если:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \forall x_1, x_2 \in X : f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

По факту, линейное отображение и линейный оператор одно и то же.

44 Отображение бесконечно малое в точке

Пусть $\varphi : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, x_0 — внутрення точка E

φ — бесконечно малое в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^l$

45 o(h) при $h \to 0$

Пусть $\varphi : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, $\mathbf{0} \in \mathrm{Int}\ (E)$

$\varphi(h) = o(h)$ при $h \to 0$, если $\dfrac{\varphi(h)}{|h|}$ — бесконечно малое

46 Отображение, дифференцируемое в точке

Пусть $F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, $a \in \text{Int }(E)$, F — дифференцируема в точке a, если

существует линейный оператор $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, существует бесконечно малое $\alpha : E \to \mathbb{R}^l$ при $h \to 0$, что

$$F(a + h) = F(a) + Lh + \alpha(h) \cdot |h|$$

Или существует линейный оператор L и также существует бесконечно малое в точке a отображение φ, что

$$F(x) = F(a) + L(x - a) + |x - a|\varphi(x)$$

47 Производный оператор, матрица Якоби, дифференциал

47.1 Производный оператор

Оператор L — производный оператор [отображение F в точке a]

47.2 Матрица Якоби

Матрица, соответствующая производному оператору называется матрицей Якоби.

47.3 Дифференциал

По определению производной $F(a+h) = F(a) + F'(a)h + o(h)$

Выражение $F'(a)h$ называется дифференциалом отображение F в точке а. Это

1. или линейное отображение $h \longmapsto F'(a)h$

2. или отображение $(a, h) \longmapsto F'(a)h$

48 Частные производные

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $a \in \text{Int } (E)$. Фиксируем $k \in \{1, \dots, m\}$:

$$\varphi_k(u) := f(a_1, \dots, a_{k-1}, u, a_{k+1}, \dots, a_m)$$

Функция от одной переменной задана $V(a_k)$

$\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\varphi_k(a_k + t) - \varphi_k(a_k)}{t} = \varphi_k'(a_k)$ называется частной производной функции f в точке a

49 Классы $C^r(E)$

Пусть E открыто и $E \subset \mathbb{R}^m$, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Тогда

$C^r(E)$ — множество функций $f : E \to \mathbb{R}$, у которых существуют все частные производные порядка $\leq r$ и эти производные непрерывны.

50 Мультииндекс и обозначения с ним

Мультииндекс для $\mathbb{R}^m$ — вектор $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$, все $k_i \in \mathbb{Z}^+$.

$|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ — высота мультииндекса.

$k! = k_1! k_2! \ldots k_m!$

$x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$

$f^{(k)} = f^{(|k|)}_{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}} = \dfrac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial_{x_m}^{k_m}}$

51 Формула Тейлора (различные виды записи)

Пусть $f : C^{r+1}(E)$, $B(a,r) \subset E$, $x \in B(a,r)$

Тогда $\exists \Theta \in [0,1]$, что $f(x) = \sum\limits_{|k| \leq r} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \sum\limits_{|k|=r+1} \dfrac{f^{(k)}(a+\Theta(x-a))}{k!}(x-a)^k$

И для любителей матана:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{r} \left(\sum_{\substack{k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, \ldots, k_m \geq 0 \\ k_1+k_2+\ldots+k_m=l}} \frac{\partial^l f(a)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} \cdot \frac{1}{k_1! k_2! \ldots k_m!} \cdot h_1^{k_1} h_2^{k_2} \ldots h_m^{k_m} \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, \ldots, k_m \geq 0 \\ k_1+k_2+\ldots+k_m=r+1}} \frac{\partial f(a+\Theta(x-a))}{\partial x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}} \cdot \frac{1}{k_1! k_2! \ldots k_m!}$$

52 n-й дифференциал

$$\sum_{n=0}^{r}\left(\frac{1}{n!}\sum\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}\cdot\frac{\partial^n f(a)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\dots\partial x_m^{k_m}}\cdot h_1^{k_1}h_2^{k_2}\dots h_m^{k_m}\right)$$

n-й дифференциал в точке a или однородный многочлен степени n из формулы Тейлора

53 Норма линейного оператора

$||A|| = ||A||_{m,l} = \sup(|Ax|)$, где $x \in \mathbb{R}^m$ и $|x| = 1$

54 Положительно-, отрицательно-, незнако- определенная квадратичная форма

Квадратичная форма — однородный многочлен второй степени/

$Q(h) = \sum a_{ij} h_i h_j$, $h \in \mathbb{R}^n$

$Q(h)$ — положительно определенная форма, если для любого $h \neq 0 : Q(h) > 0$

$Q(h)$ — отрицательно определенная форма, если для любого $h \neq 0 : Q(h) < 0$

$Q(h)$ — незнако определенная форма, если существует такие h_1 и h_2, что $Q(h_1) > 0$ и $Q(h_2) < 0$

55 Локальный максимум, минимум, экстремум

Пусть $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Int } (D)$

$f \in C^2(\text{Int } (D))$ и grad $(f(x_0)) = 0$

$Q(h) := \partial^2 f(x_0)$. Тогда:

1. $Q(h)$ — положительно определенная, значит x_0 — точка локального минимума

2. $Q(h)$ — отрицательно определенная, значит x_0 — точка локального максимума

3. $Q(h)$ — неопределенная, значит x_0 — не точка экстремума.

Часть II

Теоремы

56 Теорема Кантора о равномерной непрерывности

56.1 Формулировка

Пусть $f : X \to Y$ — метрические пространства, f непрерывна на X, X — компактно. Тогда f — равномерное непрерывно на X.

56.2 Доказательство (от противного)

Воспользуемся тем свойством, что если X — компактно, то X и секвенциально компактно.

Предположим противное:

$\exists \varepsilon > 0 \ \delta = \frac{1}{n} \ \exists x_n, \ \widetilde{x_n} : \rho(x_n, \widetilde{x_n}) < \frac{1}{n} \Rightarrow \rho(f(x_n), f(\widetilde{x_n})) \geq \varepsilon$

Тогда выберем сходящуюся подпоследовательность: $x_{n_k} \to a \in X$, $\widetilde{x_{n_k}} \to a \in X$.

Тогда $f(x_{n_k}) \to f(a)$ и $f(\widetilde{x_{n_k}}) \to f(a)$, значит

$\rho(f(x_{n_k}), f(\widetilde{x_{n_k}})) \to 0$ (по неравенству треугольника)

Что и противоречит изначальному условию.

57 Теорема Брауэра о неподвижной точке

57.1 Формулировка

Пусть $f : B(0,1) \subset \mathbb{R}^m \to B(0,1)$ — непрерывная, тогда

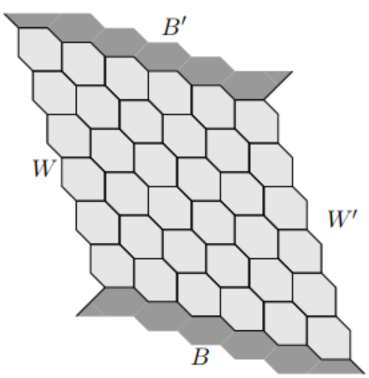
$\exists x_0 : f(x_0) = x_0$

57.2 Доказательство

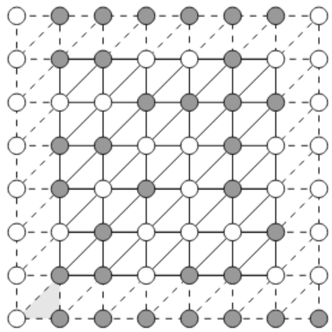
57.2.1 Игра "Гекс"

Пусть есть поле $n \times m$, состоящее из правильных шестиугольников (гексов). Также два игрока на каждом своём ходу красят гексы в белый или чёрный цвет. Тогда для любой раскраски найдётся либо чёрная тропинка, соединяющая верхнюю и нижнюю часть поля, либо белая тропинка, соединяющая левую и правую часть поля.

Доказывается от противного



57.2.2 Сама теорема



Теперь заменим гексы на обычную координатную плоскость, причём игра, по сути, останется такой же.

Теперь перейдём к самой теореме.

Шар с лёгкостью заменяется на обычный квадрат $[0,1] \times [0,1]$

Пусть $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ — непрерывна. Тогда

$\exists a \in [0,1]^2,\ f(a) = a$

$a \in [0,1]^2$

$a = (a_1, a_2)$

$f(x) \in \mathbb{R}^2$

$f(x) = (f(x)_1, f(x)_2)$

57.2.3 Доказательство

Пусть ρ — функция, заданная на $[0,1]^2 \times [0,1]^2$

$\rho(x,y) = \max\left(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\right)$ — непрерывна на $[0,1]^2$

$x_n \to a$

$y_n \to b$

$\rho(x_n, y_n) \to \rho(a,b)$

Очевидно, что для любых $x, y : x \neq y \Rightarrow \rho(x,y) > 0$

57.2.4 Теперь к самой теореме

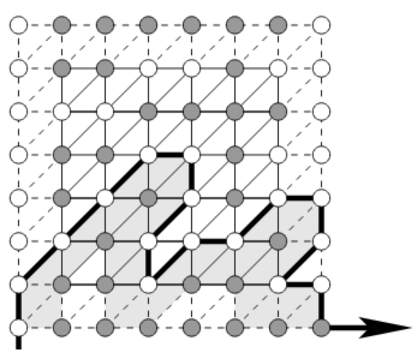
Пусть для любого $x \in [0,1]^2$ $f(x) \neq x$. Тогда $\rho(x, f(x)) > 0$, но ρ непрерывно по x и $[0,1]^2$ — компакт, значит по теореме Вейерштрасса существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$\min_{x \in [0,1]^2} \rho(x, f(x)) = \varepsilon > 0$$

По теореме Кантора для этого ε найдётся такая δ (будем считать, что $\sqrt{2}\delta < \varepsilon$), что

$$\forall x, \widehat{x} \in [0,1]^2 : \|x - \widehat{x}\| < \delta \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \|f(x) - f(\widehat{x})\| < \varepsilon$$

Берём $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$



57.2.5 Доска

Узел $(l, k) \to \left(\dfrac{l}{n}, \dfrac{k}{n}\right) \in [0,1]^2$

$0 \le l, k \le n$

Красим узлы

v — логический узел, $v = (v_1, v_2)$

$$c(v) = \min \left\{ i : \left\| f\left(\frac{v}{n}\right)_i - \frac{v_i}{n} \right\| \ge \varepsilon \right\}$$

По лемме об игре в гексы есть одноцветная тропинка.

Путь v^0 — начальная точка тропинки, v^N — конечная.

$v_1^0 = 0$

$f\left(\frac{v^0}{n}\right) \in [0,1]^2$, т.е. $f\left(\frac{v^0}{n}\right)_1 \geq 0$

$\varepsilon \leq f\left(\frac{v^0}{n}\right)_1$

Аналогично для $v_1^N = 1$

$f\left(\frac{v^N}{n}\right)_1 \leq 1$

$f\left(\frac{v^N}{n}\right)_1 - \frac{v_1^N}{n} \leq -\varepsilon$

$f\left(\frac{v^0}{n}\right)_1 - \frac{v_1^0}{n} \geq \varepsilon$

Поскольку для любых x верно, что $|f(x)_1 - x_1| \geq \varepsilon$, то из этого следует, что какой-то прыжок был длиной не меньше 2ε, но такое невозможно, поскольку по условию если $\|x - \widehat{x}\| < \frac{1}{n}$, то $\|f(x) - f(\widehat{x})\| < \varepsilon$

58 Теорема о свойствах неопределенного интеграла

Пусть f, g имеют первообразную на $\langle a, b\rangle$. Тогда:

1. $\displaystyle\int f + \int g = \int (f+g)$

   $\forall \alpha \in \mathbb{R} \displaystyle\int (\alpha f) = \alpha \int f$

2. $\forall \varphi : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$, φ дифференцируема

   $\displaystyle\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$, где F — первообразная f

3. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0 : \displaystyle\int f(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + C$

4. f, g — дифференцируемы на $\langle a, b\rangle$

   $f' \cdot g$ имеет первообразную на $\langle a, b\rangle$

   Тогда $f \cdot g'$ тоже имеет первообразную и

   $\displaystyle\int f'g = fg - \int fg'$

Доказательство

1. $(F+G)' = f + g$

   $(\alpha F)' = \alpha f$

2. $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t))\varphi'(t)$

3. $\displaystyle\left(\frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta)\right)' = f(\alpha x + \beta)$

4. $(fg)' = f'g + fg'$, т.е. $fg = \displaystyle\int f'g + \int fg'$

59 Интегрирование неравенств. Теорема о среднем

59.1 Интегрирование неравенств

59.1.1 Формулировка

$$f,\, g \in C[a,b],\; f \le g \Rightarrow \int\limits_a^b f \le \int\limits_a^b g$$

59.1.2 Доказательство

Если $0 \le f \le g$

$$\int\limits_a^b f = \sigma(\Pi\Gamma(f, [a,b])) \le \sigma(\Pi\Gamma(g, [a,b])) = \int\limits_a^b g$$

В общем случае

$\Pi\Gamma(f_+, [a,b]) \subset \Pi\Gamma(g_+, [a,b])$

$\Pi\Gamma(f_-, [a,b]) \supset \Pi\Gamma(g_-, [a,b])$

$\sigma(\Pi\Gamma(f_+, [a,b])) - \sigma(\Pi\Gamma(f_-, [a,b])) \le \sigma(\Pi\Gamma(g_+, [a,b])) - \sigma(\Pi\Gamma(g_-, [a,b]))$

$$\int\limits_a^b f \le \int_a^b g$$

59.1.3 Следствия

1. $f \in C[a,b]$

   $$\min_{[a,b]} f \cdot (b-a) \le \int\limits_a^b f \le \max_{[a,b]} f \cdot (b-a)$$

2. $f \in C[a,b]$

   $$\left|\int\limits_a^b f\right| \le \int\limits_a^b |f|$$

   т.к. $-\int\limits_a^b |f| \le \int\limits_a^b f \le \int\limits_a^b |f|$

59.2 Теорема о среднем значении

59.2.1 Формулировка

Пусть f непрерывна на $[a,b] \Rightarrow \exists c \in [a,b] : \int\limits_a^b f = f(c)(b-a)$

59.2.2 Доказательство 1 (Кохась порофлил)

Просто берём прямую и двигаем её сверху вниз, тем самым по теореме о бутерброде мы найдём такое значение c, что $\int\limits_a^b f = f(c)(b-a)$

59.2.3 Нормальное доказательство

Если $a = b$ — очевидно.

Пусть $a < b$

$\min f \le \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f \le \max f$

по теореме Больцано-Коши о промежуточном значении

$\exists c : \frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b f = f(c)$

$\int\limits_a^b f = f(c)(b-a)$

60 Теорема Барроу

60.1 Определение

$f \in C[a, b]$, $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$$

Интеграл с верхним переменным пределом

60.2 Теорема (Барроу)

В условиях определения оказывается, что φ — дифференцируема на $[a, b]$ и $\varphi'(x) = f(x)$ для любого $x \in [a, b]$

60.3 Доказательство

Фиксируем x и при $y > x$

$$\lim_{y \to x+0} \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} = \lim_{y \to x+0} \frac{1}{y - x} \left(\int\limits_a^y f - \int\limits_a^x f \right) = \lim_{y \to x+0} \frac{1}{y - x} \int\limits_x^y f = \lim_{y \to x+0} f(c) = f(x)$$

$\exists c \in [x, y]$ — следует из теоремы о среднем значении.

Аналогично доказываем, что $\lim\limits_{y \to x-0} = \ldots = f(c)$

60.4 Замечания

- Интеграл с нижним переменным пределом

  $\psi(x) = \int\limits_x^b f$. Тогда $\psi'(x) = -f$

- Эта теорема также доказывает теорему о существовании неопределенного интеграла.

61 Формула Ньютона-Лейбница, в том числе, для кусочно-непрерывных функций

61.1 Формулировка теоремы

Пусть f непрерывна (кусочно-непрерывна) на $[a, b]$, F — (почти) первообразная f.

Тогда $\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$

61.2 Доказательство

φ (из теоремы Барроу) — тоже первообразная, значит

$\exists c : F = \varphi + c$

$F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int\limits_a^b f - \int\limits_a^a f = \int\limits_a^b f$

$\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$

При $a > b$ $\int\limits_a^b f \overset{\text{def}}{=} -\int\limits_b^a f$

61.3 Для кусочно-непрерывных функций

Для кусков функции распишем формулу Ньютона-Лейбница, получим телескопическую сумму, останется только $F(b) - F(a)$

62 Свойства определенного интеграла: линейность, интегрирование по частям, замена переменных

62.1 Линейность определенного интеграла

62.1.1 Формулировка

$f, g \in C[a, b]$, α, $\beta \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$$

62.1.2 Доказательство

Из формулы Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Для F, $G : \alpha F + \beta G$ — первообразная $\alpha f + \beta g$

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))\Big|_a^b = \alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(a) - \beta G(a) = \alpha(F(b) - F(a)) + \beta(G(b) - G(a)) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$$

62.2 Интегрирование по частям

62.2.1 Формулировка

$f, g \in C^1[a, b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'g$$

62.2.2 доказательство

Из свойств для неопределенного интеграла

$$\int\limits_a^b fg' = \left(\int fg'\right)\Bigg|_a^b = \left(fg - \int f'g\right)\Bigg|_a^b = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'g$$

62.3 Замена переменных

62.3.1 Формулировка

$f \in C(\langle a, b \rangle)$

$\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \to \langle a, b \rangle$

$\varphi \in C^1(\langle a, b \rangle)$

$[p, q] \in \langle \alpha, \beta \rangle$

Тогда $\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)\ dx$

62.3.2 Доказательство

Пусть F — первообразная f

$F(\varphi(t))$ — первообразная $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на $[p, q]$

Тогда обе части: $F(\varphi(q)) - F(\varphi(p))$

62.3.3 Замечание

1. Возможен случай $\varphi([p, q]) \supset [\varphi(p), \varphi(q)]$
2. В другую сторону
   $\int\limits_u^v f(x)\ dx = \int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt$
   Тогда подбираем такие p и q, что когда t ходит от p до q и $\varphi(t)$ ходит от v до u

63 Интегральное неравенство Чебышева. Неравенство для сумм

63.1 Интегральное неравенство Чебышева

63.1.1 Формулировка

$I_f = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$

$f, g \in C[a,b]$ — монотонно возрастают

Тогда $I_f \cdot I_y \le I_{fg}$

$\int\limits_a^b f \cdot \int\limits_a^b g \le (b-a)\int\limits_a^b fg$ — неравенство Чебышева

63.1.2 Доказательство

$\forall x, y \in [a,b]\ (f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \ge 0$

Проинтегрируем по переменной x по отрезку $[a,b]$

$f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y) \ge 0$

$I_{fg} - f(y)I_g - I_f g(y) + f(y)g(y) \ge 0$

Интегрируем по y на $[a,b]$: $\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b$

$I_{fg} - I_f \cdot I_g - I_f \cdot I_g + I_{fg} \ge 0$

$I_{fg} \ge I_f \cdot I_g$

63.2 Неравенство для сумм

63.2.1 Формулировка для сумм

Пусть задана последовательность $a_n : a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n$ и $b_n : b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n$. Тогда

$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k \ge \left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right)$

63.2.2 Доказательство

По неравенству Чебышёва

$I_{fg} \geq I_f I_g$

Пусть $I_f = \frac{1}{n}\int\limits_0^n f = \frac{1}{n}\sum a_k$

$f(x) = a_{[x+1]}$, $x \in [0, n]$ (где $[x]$ — округление к ближайшему целому вниз)

$I_g = \frac{1}{n}\int\limits_0^n g = \frac{1}{n}\sum b_k$

$g(x) = b_{[x+1]}$, $x \in [0, n]$

Отсюда следует, что

$\frac{1}{n}\sum a_k b_k \geq \left(\frac{1}{n}\sum a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum b_k\right)$

64 Иррациональность числа π

64.1 Вспомогательный интеграл

Пусть $H_n = \dfrac{1}{n!} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t \; dt$

$$H_n = \begin{bmatrix} f = \left(\dfrac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n & g = \sin t \\ f' = -2nt\left(\dfrac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} & g' = -\cos t \end{bmatrix}$$

$$H_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \sin t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n!}2n \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t(\frac{\pi^2}{4} - t^2)^{n-1} \sin t \; dt$$

$$H_n = \frac{1}{n!}2n \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t(\frac{\pi^2}{4} - t^2)^{n-1} \sin t \; dt$$

$$H_n = \begin{bmatrix} f = t\left(\dfrac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} & g = -\cos t \\ f' = \left(\dfrac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} - 2(n-1)t^2\left(\dfrac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2} & g' = \sin t \end{bmatrix}$$

$$f' = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} + 2(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} - \frac{\pi^2}{2}(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2}$$

$$f' = (2n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} - \frac{\pi^2}{2}(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2}$$

$$\frac{2}{(n-1)!}t\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1}(-\cos t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{(n-1)!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left((2n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} - \frac{\pi^2}{2}(n-2)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2}\right)\cos t \, dt$$

Пусть $n \geq 2$, тогда

$H_n = (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2} = \ldots + H_2 + \ldots + H_0$

$H_0 = 2$

$$H_1 = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{f}\frac{g'}{\sin t} = 2t(-\cos t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\ dt = 4$$

64.2 Теорема

Число π^2 — иррациональное (и тогда π тоже)

64.3 Доказательство (от противного)

Пусть $\frac{1}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t = P_n(\pi^2)$, где P_n — многочлен с целыми коэффициентами.

$\deg P \le n$

Этого не может быть

Пусть $\pi^2 = \frac{m}{k} \in \mathbb{Q}$. Тогда $k^n P_n\left(\frac{m}{k}\right)$ — целое число

Значит $k^n \cdot P_n\left(\frac{m}{k}\right) \ge 1$, т.е.

$$\frac{k^n}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t\ dt \ge 1$$

$$\frac{k^n}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t\ dt \le \frac{k^n}{n!}\left(\frac{\pi^2}{4}\right)^n \cdot \pi \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

65 Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

65.1 Формулировка

Пусть $\langle a, b\rangle \in \overline{\mathbb{R}}$, $f \in c^{n+1}(\langle a, b\rangle)$

x, $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\ dt$$

65.2 Доказательство (по индукции)

- $n = 0 : f(x) = f(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)\ dt$

  По формуле Ньютона-Лейбница

- Переход от n к $n+1$

  $$f(x) + T_n + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\ dt = \begin{bmatrix} u'(x-t)^n & u = -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \\ v = f^{n-1} & v' = f^{(n+2)} \end{bmatrix}$$

  $$T_n + \frac{1}{n!}\left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)} \cdot f^{(n+1)}(t)\Bigg|_{t=x_0}^{t=x} + \int\limits_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t)\ dt\right)$$

  $$T_n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\ dt$$

65.3 Послесловие

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(t-x_0)^k + R_n$$

F — первообразная f $\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\ dt = F(x) - F(x_0)$

$$F(x) - F(x_0) = \sum_{k=0}^{n}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(t-x_0)^k\ dt + \int\limits_{x_0}^{x} R_n = \frac{(t-x_0)^{k+1}}{k+1}\Bigg|_{t=x_0}^{t=x}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{F^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1} + \int\limits_{x=0}^{x} R_n$$

Мы имеем право формально интегрировать формулу Тейлора

66 Лемма об ускоренной сходимости

66.1 Формулировка

Пусть f, $g : D \to \mathbb{R}$, a — предельная точка $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$

Пусть также существует $U(a) : f \neq 0$ и $g \neq 0$ в $\dot{U}(a)$

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{y \to a} g(x) = 0$ (Также возможен вариант, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{y \to a} g(x) = +\infty$)

Тогда для любой последовательности $x_k \to a$, $x_k \in D$, $x_k \neq a$ найдётся такая последовательность $y_k \to a$ ($y_k \in D$, $y_k \neq a$), что

$\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{f(y_k)}{g(x_k)} = 0$ и $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{f(y_k)}{f(x_k)} = 0$

66.2 Доказательство

1. Пусть f, $g \to 0$, тогда можно добиться того, что $\left|\dfrac{f(y_k)}{f(x_k)}\right| < \dfrac{1}{k}$ и $\left|\dfrac{f(y_k)}{g(x_k)}\right| < \dfrac{1}{k}$

   Тогда найдётся такое K, что $\left|\dfrac{f(x_k)}{f(x_{2019})}\right| < \dfrac{1}{2019}$ для любых $k > K \Rightarrow y_{2019} = x_k$

   Продолжаем так до бесконечности

   $\left|\dfrac{f(x_i)}{f(x_k)}\right| < \dfrac{1}{k}$

   $\exists i > k \ \left|\dfrac{f(x_i)}{f(x_k)}\right| < \dfrac{1}{k} \Rightarrow y_k := x_i$

   Теперь пусть $\left|\dfrac{f(x_i)}{g(x_k)}\right| < \dfrac{1}{k}$ при $x \to +\infty$ и $\left|\dfrac{f(x_i)}{g(x_k)}\right| < \dfrac{1}{k}$ также при $i \to +\infty$

   Тогда для каждого k найдётся такое K, что для всех $i > K$ выполняется сразу оба условия, значит присвоим $y_k := x_i$, где i — какое-то число большее K.

2. Пусть f, $g \to +\infty$. Считаем, что $f > 0$ и $g > 0$. Пусть $f(x_k)$ и $g(x_k)$ — возрастающие последовательности (остальные случаи рассматриваются аналогично). Тогда

   $i = \min n : \begin{cases} f(x_n) \geq \sqrt{g(x_k)} \\ f(x_n) \geq \sqrt{f(x_k)} \end{cases}$

   Возьмём $y_k := x_{i-1}$

   Тогда $\dfrac{f(y_k)}{f(x_k)} < \dfrac{\sqrt{f(x_k)}}{f(x_k)} = \dfrac{1}{\sqrt{f(x_k)}} \to 0$

   $\dfrac{f(y_k)}{g(x_k)} < \dfrac{\sqrt{g(x_k)}}{g(x_k)} = \dfrac{1}{\sqrt{g(x_k)}} \to 0$

67 Правило Лопиталя (с леммой)

67.1 Формулировка

Пусть f, g — дифференцируемы на $(a, b\rangle$, $g' \neq 0$ на $(a, b\rangle$ и существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

Не стоит забывать, что $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ — неопределенно.

Тогда $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$

67.2 Пример из жизни

Пусть f, $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

Пусть f — сколько прошёл студент,

g — сколько прошёл Кохась.

Тогда f, $g \to +\infty$, но если сравним скорости f' и g', то легко узнать, на сколько больше прошёл Кохась, чем студент.

67.3 Доказательство

$g' \neq 0 \Rightarrow g'$ сохраняет знак (по теореме Дарбу), значит g — строго монотонна

1. $g \to +\infty \Rightarrow g > 0$ в окрестности точки a
2. $g \to 0$,

   $g \uparrow \Rightarrow g > 0$ в окрестности точки a

   $g \downarrow \Rightarrow g < 0$ в окрестности точки a

67.4 Собственное доказательство

Берём последовательность $y_k \to a$ из леммы.

По теореме Коши $\exists \xi_k \in [x_k, y_k]$ (не факт, что $x_k \leq y_k$)

$$\frac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}$$

Домножаем правую и левую часть на $\dfrac{g(x_k) - g(y_k)}{g(x_k)}$

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \frac{f(y_k)}{g(x_k)} + \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} \left(1 - \frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right)$$

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} \to \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}$$

68 Теорема Штольца

68.1 Формулировка

Пусть x_n, $y_n \to 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$

Тогда если существует $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \in [0, +\infty]$

Также y_n — строго монотонна (если $a = 0$, то x_n — тоже строго монотонна)

Тогда $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = a$

68.2 Доказательство

1. Пусть $a > 0$, a – конечное, тогда можно считать, что $y_n \geq y_{n-1}$ из монотонности и $x_n \geq x_{n-1}$ при больших n.

   Заметим обидный факт, что $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$ и $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a:c}{b:d}$, но $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} \neq \dfrac{a+c}{b+d}$. Кохасю обидно, поэтому будем считать, что $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d}$. Если вы с этим не согласны, то окей, но заметим, что справедливо:

   $0 < \alpha < \dfrac{a}{b} < \beta$

   $0 < \alpha < \dfrac{c}{d} < \beta$

   $\alpha < \dfrac{a+c}{b+d} < \beta$

   Вернёмся к самой теореме

   $\forall \varepsilon > 0$ $(\varepsilon < a)$ $\exists N_1$ $\forall n > N \geq N_1$

   $a - \varepsilon < \dfrac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} < a + \varepsilon$

   $a - \varepsilon < \dfrac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}} < a + \varepsilon$

   $\vdots$

   $a - \varepsilon < \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$

   Складываем всё

   $a - \varepsilon < \dfrac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < a + \varepsilon$

   Устремляем n к $+\infty$

$a - \varepsilon \leq \dfrac{x_N}{y_N} < a + \varepsilon$

2. Если $a = +\infty$ — аналогично

   $\forall E > 0\ \exists N_1,\ \forall n > N \geq N_1\ \dfrac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} > E$

   $E < \dfrac{x_n - X_N}{y_n - y_N}$

   $E \leq \dfrac{x_N}{y_N}$

3. Если $a = 0$, то $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{y_n}{x_n} = +\infty$

4. Если $a < 0$ — меняем знаки

69 Пример неаналитической функции

69.1 Неалитическая функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

69.2 Утверждение

f — бесконечное дифференцируема на $\mathbb{R}$

$(\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists f^{(k)}(x))$

69.3 Доказательство

Если $x \neq 0$ — то очевидно

Пусть $x = 0$, тогда для любого k $\exists f^{(k)}(0) = 0$

Из теоремы Лагранжа:

Если $\exists \lim\limits_{x \to a+0} f'(x) = \lim\limits_{x \to a-0} f'(x) = L$, где $L \in \mathbb{R}$, то

f — дифференцируема и $f'(a) = L$

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{\left(-\frac{1}{x^2}\right)},\ x \neq 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x^3}}{e^{\left(\frac{1}{x^2}\right)}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{3}{x^4}}{-\frac{2}{x^3} e^{\left(\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \to 0} \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{e^{\left(\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3} e^{\left(\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \to 0} \cdot x \cdot e^{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} \to 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^k} \cdot e^{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \left(\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{\left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{2}{k}\right)}}\right)^{\frac{k}{2}} = \left(\lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{x^3}}{-\frac{4}{k} \cdot \frac{1}{x^3} \cdot e^{\left(\frac{1}{x^3}\right)}}\right)^{\frac{k}{2}} = 0$$

<u>Итого</u>

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{\left(-\frac{1}{x^2}\right)},\ x \neq 0$$

$f'(0) = 0$

Аналогично

$f'' = -\frac{6}{x^4} \cdot e^{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} - \frac{4}{x^5} \cdot e^{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}$, $x \neq 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f''(x) = 0 \Rightarrow f''(0) = 0$

$x \neq 0$ $f^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}$

$\lim\limits_{x \to 0} f^{(k)}(x) = 0 \Rightarrow f^{(k)}(0) = 0$

70 Интеграл как предел интегральных сумм

70.1 Формулировка

Пусть $f \in C[a,b]$

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ что для любого дробления $\mathcal{T}$ $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ ранга меньше δ и любого оснащения $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - \int\limits_a^b f(x)\ dx \right| < \varepsilon$$

70.2 Доказательство

1. Поделим на отрезки в соответствии с дроблением. Очевидно, что $\int\limits_a^b = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}$. Тогда рассмотрим разность

   $$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)\ dx - \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\ dx$$

   $$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (f(\xi_k) - f(x)\ dx) \to 0,\text{ т.к. } x_{k-1} \to x_k,\text{ а } \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

2. По теореме Кантора о равномерной непрерывности

   $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta\ \ |f(x_1) - f(x_2)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ «Китайский ε»

   Берём $x_0, x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$

   $$\left| \sum_{k=1}^{n} - \int\limits_a^b \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)\ dx - \sum_{k=1}^{n} f(x)\ dx \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (f(\xi_k) - f(x))\ dx \right| \le \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f(\xi_k) - f(x)|\ dx$$

   $|\xi_k - x_k| < \delta$ для любых $[x_{k-1}, x_k]$ (по условию)

   $$\le \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\varepsilon}{b-a}\ dx = \int\limits_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\ dx = \varepsilon$$

70.3 Замечания

1. $\int\limits_a^b f(x)\ dx = \lim\limits_{\lambda(\mathcal{T}) \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$
2. $\omega(\delta) := \sup\limits_{x,t|x-t|<\delta} |f(x) - f(t)|$ — модуль непрерывной функции f

По теореме Кантора f — непрерывна $\Longrightarrow \omega(\delta) \xrightarrow[f\to 0]{} 0$

$\omega(\delta)$ монотонно убывает на отрезке

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f(\xi_k) - f(x)| \ dx \leq \sum \int \omega(\delta) \ dx = \omega(\delta)(b-a)$$

Пусть f — дифференцируема на $[a, b]$ $|f'| \leq M$

$|f(x) - f(t)| \leq M\,|x - t|$ — следствие из теоремы Лагранжа

$|f(\xi_k) - f(x)| \leq M\delta\,|\xi_k - x|$

$$\left| \sum - \int \right| \leq M\delta(b-a)$$

71 Теорема об интегральных суммах для центральных прямоугольников

71.1 Формулировка

Пусть $f \in C^2[a,b]$ $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

$\delta := \max |x_k - x_{k-1}|$

Тогда

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)(x_i - x_{i-1}) - \int\limits_a^b f(x)\ dx \right| \le \frac{\delta^2}{8} \cdot \int\limits_a^b |f''|$$

71.2 Доказательство

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ dx = \int\limits_{x_{i-1}}^{\xi_i} + \int\limits_{\xi_i}^{x_i} = \begin{bmatrix} u = f & u' = f' \\ v' = 1 & v = x - x_{i-1} \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} u = f & u' = f' \\ v' = 1 & v = x - x_i \end{bmatrix}$$

$$f(x)(x - x_{i-1})\Big|_{x=x_{i-1}}^{x=\xi_i} - \int\limits_{x_{i-1}}^{\xi_i} f'(x)(x - x_{i-1})\ dx + f(x)(x - x_i)\Big|_{x=\xi_i}^{x=x_i} - \int\limits_{\xi_i}^{x_i} f'(x)(x - x_i)\ dx = f(\xi_i)(\xi_i - x_{i-1}) +$$

$$f(\xi_i)(x_i - \xi_i) - \left(f'(x)\frac{(x - x_{c-1})^2}{2}\Big|_{x=x_{i-1}}^{x=\xi_i} - \int\limits_{x_{i-1}}^{\xi_i} f''(x)\frac{(x - x_{i-1})^2}{2}\ dx + f'(x)\frac{(x - x_i)^2}{2}\Big|_{\xi_i}^{x_i} - \int\limits_{\xi_i}^{x_i} f''(x)\frac{(x - x_i)^2}{2} \right) =$$

$$f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)\ \varphi(x)\ dx$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - x_{i-1})^2}{2},\ x \in [x_{i-1}, \xi_i] \\ \dfrac{(x - x_i)^2}{2}, x \in [\xi_i, x_i] \end{cases}$$

Тогда $\varphi(x)$ определена на $[a,b]$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} - x_i}{2}\right)(x_i - x_{i-1}) - \int\limits_a^b f(x)\ dx \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f \right) \right| = \left| \sum \left(- \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)\varphi(x)\ dx \right) \right| =$$

$$\left| \int\limits_a^b f''(x)\varphi(x)\ dx \right| \le \int\limits_a^b |f''(x)|\varphi(x)\ dx \le \frac{\delta^2}{8} \int\limits_a^b |f''|$$

Поскольку $\max \varphi(x) = \dfrac{(\frac{\delta}{2})^2}{2} = \dfrac{\delta^2}{8}$

72 Теорема о формуле трапеций, формула Эйлера–Маклорена

72.1 Формулировка теоремы о формуле трапеций

Пусть $f \in C^2[a,b]$ $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \quad \delta = \max(x_i - x_{i-1})$

Тогда $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1}) - \int\limits_a^b f(x)\ dx\right| \le \frac{\delta^2}{8}\int\limits_a^b |f''|$

72.2 Доказательство

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) = \begin{bmatrix} u = f & u' = f' \\ v'1 = 1 & v = x - \xi_i \end{bmatrix}$$

$$f(x)(x-\xi_i)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)(x-\xi_i) - f(x_{i-1})(x_{i-1}-\xi_i) - \left(f'(x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f''\frac{(x-\xi_i)^2}{2}\ dx\right) = (f(x_i) + f(x_{i-1}))\,\frac{x_i - x_{i-1}}{2} -$$

$$\left(f'(x) - \frac{1}{2}\psi(x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f''(-\frac{1}{2}\psi(x))\ dx\right)$$

$$\begin{bmatrix} u = f' & u' = f'' \\ v' = (x - \xi_i) & \psi(x) = (x - x_{i-1})(x_i - x) \end{bmatrix}\ x \in [x_{i-1}, x_i] \text{ на } [a,b]$$

$$v = -\frac{1}{2}\psi(x)$$

$$(f(x_i) + f(x_{i-1}) \cdot \frac{(x_i - x_{i-1})}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f''\psi(x)\ dx$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot (x_i - x_{i-1}) - \int\limits_a^b f(x)\ dx\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1}) - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ dx\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)\psi(x)\right.$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_a^b |f''(x)|\,\psi(x)\ dx \le \frac{\delta^2}{8}\int\limits_a^b |f''|$$

72.3 Простейший случай формулы Эйлера-Маклорена

$m, n \in \mathbb{Z}$ $f \in C^2[m,n]$. Тогда

$$\int\limits_m^n f(x)\ dx = (\sum_{i=m}^{n})^{\triangledown} f(i) - \frac{1}{2}\int\limits_m^n f''(x)\{x\}(1 - \{x\})\ dx$$

Очевидно^{TM}, что это формула трапеции.

$[a, b] \leftrightarrow [m, n]$ $x_0 = m, x_1 = m + 1, \ldots, x_{last} = n$

$\{x\} (1 - \{x\})$ — парабола между двумя целыми точками

73 Асимптотика степенных сумм

$f(x) = x^p$

$$1^p + 2^p + \ldots + n^p = \int\limits_1^n x^p dx + \frac{n^p + 1}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_1^n (x^p)'' \{x\} (1 - \{x\}) dx$$

$$1^p + 2^p + \ldots + n^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \frac{1}{2} + \frac{p(p-1)}{2}\int\limits_1^n x^{p-2} \{x\} (1 - \{x\})$$

$$1^p + 2^p + \ldots + n^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(\max(1, n^{p-1}))$$

74 Асимптотика частичных сумм гармонического ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \int\limits_1^n \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \int\limits_1^n \frac{1}{x^3} \{x\} (1 - \{x\}) dx$$

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \int\limits_1^n \frac{\{x\} (1 - \{x\})}{x^3} dx$$

Интеграл постоянной возрастает и ограничен сверху $\frac{1}{4} \int\limits_1^n \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{8} \Big|_{x=1}^{x=n} < \frac{1}{8}$

Всё, что правее логарифма — постоянная Эйлера или γ

Итого

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$$

75 Формула Валлиса

75.1 Формулировка

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n}=\frac{\pi}{2}$$

75.2 Доказательство

$$I_n=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\begin{bmatrix}u=sin^{n-1}x & u'=(n-1)\sin^{n-2}xcosx\\ v'=\sin xdx & v=-\cos x\end{bmatrix}$$

$$-\cos x\sin^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 xdx=(n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{n-2}x-sin^n x)dx=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$$

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

$$I_0=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{2}$$

$$I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-4}I_{n-4}=\dots$$

Посчитаем отдельно для случая чётного и нечётного n

$$I_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}\cdot 2n-22n-1\cdot\ldots\cdot 1=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}\cdot 2n-32n-2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Так как при $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\quad\sin^{2k+1}x\le\sin^{2k}$

То и $I_{n+1}\le I_n$

Также, $I_{2n+1}\le I_{2n}\le I_{2n-1}$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\le\frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\le\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

Разность правой и левой части стремится к 0, значит

$$\exists \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2k}\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

76 Формула Стирлинга

76.1 Формулировка

$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ при $n \to +\infty$

76.2 Доказательство

$$\sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} = \lim_{k\to+\infty}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2k)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\sqrt{\pi} = \lim\frac{(2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k))^2}{(2k)!}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}} = \lim\frac{2^{2k}(k!)^n}{(2k)!}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\sqrt{\pi} = \lim_{k\to\infty}\frac{2^{2k}(k^k\cdot e^{-k}\sqrt{k}\cdot c)^2}{\sqrt{k}(2k)^{2k}e^{-2k}\sqrt{2k}\cdot c} = \lim_{k\to\infty}\frac{2^{2k}\cdot k^{2k}\cdot e^{-2k}\cdot k\cdot c^2}{\sqrt{2}\cdot k\cdot 2^{2k}\cdot k^{2k}\cdot e^{-2k}\cdot c} = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

$c = \sqrt{2\pi}$

77 Теорема о вычислении аддитивной функции промежутка по плотности

77.1 Формулировка

Пусть заданы f и ϕ на $\langle a, b\rangle$, f — непрерывна, ϕ — аддитивная функция промежутка, f — плотность ϕ

Тогда $\forall [p, q] \subset \langle a, b\rangle$ $\phi([p, q]) = \int\limits_p^q f(x)\ dx$

77.2 Доказательство

Можно принять за факт, что у нас дан промежуток $[a, b]$ (если это не так, то уменьшим его чуть-чуть и переобозначим)

$F(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ \phi([a, x]), & x > a \end{cases}$ — первообразная f

$\inf\limits_{[x,x+h]} f \leq \dfrac{\phi([x, x+h])}{h} \leq \sup\limits_{[x,x+h]} f$

$x : F'_+(x) = \lim\limits_{h\to 0+0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim \dfrac{\phi([a, x+h]) - \phi([a, x])}{h} = \lim \dfrac{\phi([x, x+h])}{h} = \lim\limits_{h\to 0+0} f(x + \Theta h) = f(x)$, где

$0 \leq \Theta \leq 1$

$\Theta = \Theta(h)$

Аналогично посчитаем и $F'_-(x)$

$\phi([p, q]) = F(q) - F(p) = \int\limits_p^q f(x)\ dx$

78 Обобщенная теорема о плотности

78.1 Формулировка

Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $\phi : \mathrm{Segm}\ \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — аддитивная функция.

Пусть $\forall \Delta \subset \mathrm{Segm}\ \langle a, b\rangle$ заданы числа m_Δ, M_Δ.

1. $m_\Delta \cdot l(\Delta) \le \phi(\Delta) \le M_\Delta \cdot l(\Delta)$
2. $\forall x \in \Delta\ m_\Delta \le f(x) \le M_\Delta$
3. $\forall x \in \langle a, b\rangle\ M_\Delta - m_\Delta \to 0$, если $l(\Delta) \to 0$, $x \in \Delta$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \Delta \in \mathrm{Segm} \quad \langle a, b\rangle : x \in \Delta, \quad l(\Delta) < \delta$

$|M_\Delta - m_\Delta| < \varepsilon$

Тогда f — плотность ϕ (и $\forall [p, q]\ \phi([p, q]) = \int\limits_p^q f(x)\ dx$)

78.2 Доказательство

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \phi([a, x]), & x > a \end{cases}$$

Дифференцируем F_+

$m_\Delta \le \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \le M_\Delta$

$\left|\dfrac{F(x+h) - F(x)}{n} - f(x)\right| \le |M_\Delta - m_\Delta| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$, $\Delta = [x, x+h]$

$\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} f(x)$

Аналогично и с F_-

79 Площадь криволинейного сектора: в полярных координатах и для параметрической кривой

79.1 Введение

Площадь подграфика $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — непрерывная, $f \geq 0$

$\phi([p,q]) = \sigma\Pi\Gamma(f, [p,q])$ — аддитивная функция. Мы знаем, что $\phi([p,q]) = \int\limits_p^q f(x)\ dx$, f — плотность

79.2 Пример

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$\sigma(\text{эллипса}) = 2\sigma(\Pi\Gamma(b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}, [-a,a])) = 2 \cdot \int\limits_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} dx$

Путь $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, $x = a\cos t$

$[0, 2\pi] \longmapsto (a\cos t, b\sin t)$

$$2\int\limits_{\pi}^{0} b\sqrt{1-\cos^2 t}/a(-\sin t)\ dt = 2ab\int\limits_{\pi}^{0} -\sin^2 t\ dt = 2ab\int\limits_{0}^{\pi} \sin^2 t\ dt = 2ab\int\limits_{0}^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\ dt = \pi ab$$

79.3 Теорема

$[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi)$

$\rho : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ — непрерывная, $\rho \geq 0$

$A = \{(r, \phi) : \phi \in [\alpha, \beta]\ 0 \leq r \leq \rho(\phi)\}$ — «Аналог ПГ»

Тогда $\sigma(A) = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\phi)\ d\phi$

79.4 Доказательство

$[\alpha, \beta] \longmapsto \sigma(A)$ — функция промежутка $Segm[\alpha, \beta]$ — аддитивная функция.

Проверим, что $\dfrac{1}{2}\rho^2(\phi)$ — плотность

$[\gamma, \delta]$ — строим $A_{\gamma,\delta}$

$\sigma(A_{\gamma,\delta}) \leq \sigma(\text{Круговой сектор } (0, \max\limits_{[\gamma,\delta]} \rho(\phi), [\gamma, \delta]))$

$\sigma(A_{\gamma,\delta}) \geq \sigma(\text{Круговой сектор } (0, \min\limits_{[\gamma,\delta]} \rho(\phi), [\gamma, \delta]))$

$\min\limits_{[\gamma,\delta]} \frac{1}{2}\rho(\phi)l([\gamma, \delta]) \leq \sigma(A_{\gamma,\delta}) \leq \max\limits_{[\gamma,\delta]} \frac{1}{2}\rho(\phi)l([\gamma, \delta])$

По определению плотности

79.5 Замечание

$(x(t), y(t))\ t \in [a, b]$

$x = r\cos\phi$

$y = r\sin\phi$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\phi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

$\begin{cases} r(t) = x(t)^2 + y(t)^2 \\ \phi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \end{cases}$ — параметрическое задание того же пути в полярных координатах

$\sigma A = \frac{1}{2}\int\limits_{\phi_0}^{\phi_1} r^2(\phi)\, d\phi = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} (x(t)^2 + y(t)^2)(\operatorname{arctg} \frac{y(t)}{x(t)})\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} (x^2 + y^2)\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} - \frac{y'x - x'y}{x^2}\, dt = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} (y'(t)x(t) - x'(t)y(t))$

$\phi = \operatorname{arctg} \frac{y(t)}{x(t)}$

Площадь круга

$x = \cos t$

$y = \sin t$

$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t - (-\sin t)\sin t\, dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} 1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$x = \cos t$

$y = -\sin t$

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} -\cos^2 t - \sin^2 t \ dt = -\pi$$

Она ловит ориентированную площадь

$$x = x(t) = a\cos t$$

$$y = y(t) = b\sin t$$

$$\sigma = \int\limits_a^b y(x) \ dx = \int\limits_a^b y \ dx$$

$$\sigma(\text{эллипса}) = \int\limits_{-a}^a y(x) \ dx = \int\limits_{-a}^a y \ dx = \int\limits_{\pi}^0 y(t)x'(t)dy$$

$$x = x(t)$$

80 Изопериметрическое неравенство

80.1 Формулировка

Пусть G — замкнутая выпуклая фигура в $\mathbb{R}^2$

$\operatorname{diam} G < 1$ ($\operatorname{diam} G = \sup\limits_{x,y \in G} \rho(x,y)$)

Тогда $\sigma(G) \leq \dfrac{\pi}{4}$

80.2 Доказательство

$f(x) = \sum \{t : [(x,0),(x,t)] \cap G = \varnothing\}$

$g(x)$ — аналогично

$f(x)$ — выпуклая

$\phi \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$r(-\dfrac{\pi}{2}) = r(\dfrac{\pi}{2}) = 0$

$r(\phi)$ — непрерывная функция от ϕ

$$\sigma(G) = \frac{1}{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\phi)\ d\phi = \frac{1}{2} \left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$\frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\phi - \frac{\pi}{2}) + r^2(\phi)\ d\phi = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} AB^2\ d\phi \leq \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1\ d\phi = \frac{\pi}{4}$$

81 Вычисление длины гладкого пути

81.1 Формулировка

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $\gamma \in C^1$.

Тогда $l(\gamma) = \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\| dt$

81.2 Доказательство

Будем дополнительно считать, что $\gamma' \neq 0$

γ — инъективно. Если это не так, то разобьём на несколько частей, и каждую из них посчитаем отдельно.

$\phi : Segm[a, b] \to \mathbb{R}$

$[p, q] \to l\left(\gamma|_{[p,q]}\right)$

Пусть ϕ — аддитивная функция промежутка по аксиоме 2. Проверим, что $\|\gamma'(t)\|$ — её плотность

Это значит, что $\forall \Delta : \exists m_\Delta, M_\Delta$ и выполняются следующие свойства:

1. $l(\Delta) m_\Delta \leq \phi(\Delta) \leq M_\Delta l(\Delta)$
2. $m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$, $x \in \Delta$
3. $\Delta \to x$ $M_\Delta - m_\Delta \to 0$

$\Delta \supset [a, b]$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_m(t))$

$m_i(\Delta) = \min\limits_{t \in \Delta} |\gamma_i'(t)|$

$M_i(\Delta) = \max\limits_{\Delta} |\gamma_i'(t)|$

$m_\Delta = \sqrt{\sum m_i(\Delta)^2}$

$M_\Delta = \sqrt{\sum M_i \Delta^2}$

Очевидно, что при любом $t \in \Delta$ $m_\Delta \leq \|\gamma'(t)\| \leq M_\Delta$, где $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sum (\gamma_i'(t))^2}$

При $\Delta \to x$ $M_\Delta - m_\Delta \to 0$ по непрерывности $\gamma_i'(t)$ в точке $t = x$.

Проверим, что $m_\Delta l(\Delta) \le \phi(\Delta) \le M_\Delta l(\Delta)$

$\widetilde{\gamma} : \Delta \to \mathbb{R}^m$ $\widetilde{\gamma}(t) = (M_1(\Delta)t, M_2(\Delta)t, \ldots, M_m(\Delta)t) = M \cdot t$, где $M = (M_1(\Delta), M_2(\Delta), \ldots, M_m(\Delta))$

Отображение $T : C_\gamma \to C_{\overline{\gamma}}$ $\gamma(t) \mapsto \overline{\gamma}(t)$ — проверим, что расстяжение

$\rho(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\gamma_i(t_0) - \gamma_i(t_1))^2} = \sqrt{\sum (\gamma_i'(\mathcal{T}_i))^2 (t_0 - t_1)^2} \le \sqrt{\sum M_i \Delta^2 |t_0 - t_1|} = \rho(T(\gamma(t_0)), T(\gamma(t_1)))$,
значит T — растяжение

$l\left(\gamma|_\Delta\right) \le l(\widetilde{\gamma})$, т.е. $\phi(\Delta) \le M_\Delta l(\Delta)$.

Аналогично $\phi(\Delta) \ge m_\Delta l(\Delta)$ — сжатие.

Значит $\|\gamma'\|$ — плотность

82 Объем фигур вращения

82.1 Формулировка

Обозначим фигуры, полученную вращением по оси x за $T_x(A) = \left\{(x, y, z) : (x, \sqrt{y^2 + z^2}) \in A\right\}$

По оси y $- T_y(A) = \left\{(x, y, z) : (\sqrt{x^2 + z^2}, y^2) \in A\right\}$

Пусть $f \in C[a, b]$, $f \geq 0$

Тогда:

1. $V(T_x(\Pi\Gamma(f, [a, b]))) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\ dx$
2. $[a, b] \subset [0, +\infty)$ $V(T_y(\Pi\Gamma(f, [a, b]))) = 2\pi \int\limits_a^b xf(x)\ dx$

82.2 Доказательство

$\phi : \Delta \in Segm([a, b]) \mapsto V(T_{x\ or\ y}(\Pi\Gamma(f, \Delta)))$ — аддитивная функция.

$\pi \min\limits_{x \in \Delta} f(x) \cdot l(\Delta) = V(F_\Delta) \leq \phi(\Delta) \leq V(\varepsilon_\Delta) = \pi \max\limits_{x \in \Delta} f(x) \cdot l(\Delta)$

ε_Δ — цилиндр прямой круговой

$\varepsilon_\Delta = T_x(\Pi\Gamma(\max\limits_\Delta f, \Delta)) = \Delta B(0, \max\limits_\Delta f) \in \mathbb{R}^3$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$

$\phi(\Delta)$ — плотность, $\pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$

$\Delta : m_\Delta, M_\Delta$

1. $m_\Delta l(\Delta) \leq \phi(\Delta) \leq M_\Delta l(\Delta)$
2. $m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$, $x \in \Delta$
3. $\Delta \to x$ $M_\Delta - m_\Delta \to 0$

$V(T_y(\Pi\Gamma(f, [a, b]))) = 2\pi \int\limits_a^b x \cdot f(x)dx$

$F_\Delta = T_y(\Pi\Gamma(\min_\Delta f, \Delta))$

$\phi(\Delta) \le V(\varepsilon_\Delta) = \sigma(ring) \cdot \max_\Delta f = \pi(q^2 - p^2) \cdot \max_{[p,q]} f = \pi(p+q) \max f (p-q) \le \pi \cdot \max_{x \in [p,q]} (2x) \cdot \min_{x \in [p,q]} f(x) \cdot (q-p)$

Аналогично

$\pi \min_{x \in [p,q]} \cdot \min_{x \in [p,q]} f(x)(q-p)$

1. $m_\Delta l(\Delta) \le \phi(\Delta) \le M_\Delta l(\Delta)$

   $\phi(\Delta) = \pi \cdot 2x \cdot f(x) \le \pi \max(2x) \cdot max f(x)$

2. $m_\Delta \le f(x) \le M_\Delta$

3. $p \to x_0,\ q \to x_0\ \pi \cdot 2x_0 \cdot f(x_0)$

83 Неравенство Йенсена для сумм

83.1 Формулировка

Пусть f — выпукла на $\langle a, b\rangle$. Тогда

$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \langle a, b\rangle$

$\forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geq 0,\ \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$

$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n)$

83.2 Доказательство

Если все x совпадают, то тривиально.

Пусть $x^* = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$

$x_{\min} \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \leq x^* \leq x_{\max} \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$

$a \leq x_{\min} \leq x^* \leq x_{\max} \leq b$

К любой выпуклой функции можно провести опорную прямую $y = l(x) : f(x) \geq l(x)$, при $x = x_0$ $f(x_0) = l(x_0)$

Проведём к x^* опорную прямую $l(x) = kx + b$

$f(x^*) = l(x^*) = k \sum \alpha_i x_i + b = \sum\limits_{i=1}^{n} k\alpha_i x_i + \sum\limits_{i=1}^{n} b\alpha_i = \sum \alpha_i (kx_i + b) = \sum \alpha_i l(x_i) \leq \sum \alpha_i f(x_i)$

84 Неравенство Йенсена для интегралов

84.1 Формулировка

Пусть f — выпукла и непрерывна на $\langle A, B\rangle$

$\varphi : [a,b] \to \langle A, B\rangle$ — непрерывна

$\lambda : [a,b] \to [0,+\infty]$, $\int\limits_a^b \lambda = 1$ — непрерывна

Тогда $f\left(\int\limits_a^b \lambda(x)\varphi(x)dx\right) \leq \int\limits_a^b \lambda(x)f(\varphi(x))dx$

84.2 Доказательство

$m := \inf \varphi(x)$

$M := \sup \varphi(x)$

$c := \int\limits_a^b \lambda(x)\varphi(x)dx \leq \int\limits_a^b \lambda(x)dx \cdot M = M \leq b$

$c \geq m = a$ — аналогично, значит $c \in \langle a, b\rangle$

Если $m = M$ — тривиально

Пусть $y = kx + b$ — опорная прямая к графику f в точке c

$f(C) = kC + b = k\int\limits_a^b \lambda\varphi + b\int\limits_a^b \lambda = \int\limits_a^b \lambda(k\varphi + b) \leq \int\limits_a^b \lambda(f\circ\varphi)$

$f\left(\int\limits_a^b \lambda\varphi\right) \leq \int\limits_a^b \lambda(f\circ\varphi)$

85 Неравенство Коши (для сумм и для интегралов)

85.1 Неравенство для сумм

85.1.1 Формулировка

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$

Тогда $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$

85.1.2 Доказательство

$\ln(\frac{1}{n}a_1 + \frac{1}{n}a_2 + \ldots + \frac{1}{n}a_n) \geq ?\frac{1}{n}\ln(a_1 a_2 \ldots a_n) = \frac{1}{n}\ln a_1 + \frac{1}{n}\ln a_2 + \ldots + \frac{1}{n}\ln a_n$

$x_1 = a_1$

$x_2 = a_2$

$\ldots$

$x_n = a_n$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \dfrac{1}{n}$

$f(\sum \alpha_i x_i) \geq \sum \alpha f(x_i)$, поскольку функция $\ln$ — вогнута

85.2 Неравенство для интегралов

85.2.1 Формулировка

$\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int\limits_a^b f$ — среднее арифметическое f на $[a, b]$

$\exp\left(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int\limits_a^b \ln f\right)$ — среднее геометрическое функции f $(f > 0)$

Тогда если $f \in C[a, b\rangle$, $f > 0$

$$\exp\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \ln f\right) \leq \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$$

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \ln f \le \ln\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f\right)$$

$\ln \longleftrightarrow f$ — вогнутая

$f \longleftrightarrow \varphi$

$\frac{1}{b-a} \longleftrightarrow \lambda$

86 Неравенство Гёльдера для сумм

86.1 Формулировка

Пусть $p > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$

$q = \dfrac{p}{p-1}$

$a_i, b_i > 0$ для всех $i = 1..n$

Тогда $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le (\sum a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum b_i^q)^{\frac{1}{q}}$

Если $(a_1^p, a_2^p, \dots, a_n^p) \parallel (b_1^q, b_2^q, \dots, b_n^q)$ — равенство

86.2 Доказательство

x^p — строго выпукла при $p > 1$ и $x > 0$

$(x^p)'' = p(p-1)x^{p-2} > 0$

По неравенству Йенсена $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i)^p \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^p$

$\alpha_i := \dfrac{b_i^q}{\sum b_i^q}$

$\alpha_i > 0, \sum \alpha_i = 1$

Выберем такие x_i, что

$\alpha_i \cdot x_i = a_i \cdot b_i$

$$x_i = \frac{a_i b_i}{\alpha_i} = \frac{a_i b_i}{b_i^q} \sum_{j=1}^{n} b_j^q = a_i b_i^{1-q} \sum_{j=1}^{n} b_j^q = a_i b_i^{1-\frac{p}{p-1}} \sum_{j=1}^{n} b_j^q = a_i b_i^{\frac{p-1-p}{p-1}} \sum_{j=1}^{n} b_j^q = a_i \cdot b_i^{-\frac{1}{p-1}} \sum_{j=1}^{n} b_j^q$$

Тогда $\alpha_i x_i = a_i b_i$

$\displaystyle(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i)^p = (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^p$

Тогда $\displaystyle\alpha_i x_i^p = a_i^p (\sum_{j=1}^{n} b_i^q)^{p-1}$

Тогда $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^p = (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)(\sum_{j=1}^{n} b_j^q)^{p-1} = (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)(\sum_{j=1}^{n} b_j^q)^{\frac{p}{q}}$

Тогда $(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i)^p \leq (\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p)(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q)^{\frac{p}{q}}$

Возведём в степень $\dfrac{1}{p}$ и получим исходное неравенство

87 Неравенство Гёльдера для интегралов

87.1 Формулировка

Пусть $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $p > 1$

Пусть также f, $g \in C[a,b]$ и $f, g \geq 0$ на $[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b fg \leq \left(\int\limits_a^b f^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_a^b g^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

87.2 Доказательство

Делим $[a,b]$ на n равных частей

$x_k = a + k \cdot \dfrac{b-a}{n}$ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \dfrac{b-a}{n}$

$\xi_k := x_k$

$a_k := |f(x_k)|(\Delta x_k)^{\frac{1}{p}}$

$b_k := |g(x_k)|(\Delta x_k)^{\frac{1}{q}}$

$a_k \cdot b_k = |f(x_k)g(x_k)| \cdot \Delta x_k$

$\sum\limits_{k=1}^{n} |f(x_k)g(x_k)|\Delta x_k \leq (\sum |f(x_k)|^p \Delta x_k)^{\frac{1}{p}} (\sum |g(x_k)|^q \Delta x_k)^{\frac{1}{q}}$

Из неравенства Гёльдера для сумм

$\int\limits_a^b |f(x)g(x)|dx \leq (\int\limits_a^b |f|^p)^{\frac{1}{p}} (\int\limits_a^b |g|^q)^{\frac{1}{q}}$

88 Неравенство Минковского

88.1 Формулировка

Пусть $p \geq 1$

Тогда $\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$a_i, b_i \in \mathbb{R}$

88.2 Замечания

- Здесь нет буквы q
- Неравенство Минковского означает, что $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ является нормой

88.3 Доказательство

При $p = 1$ — очевидно

$p > 1$ — применим Гёльдера

Пусть $a_i, b_i > 0$

$\sum |a_i||a_i + b_i|^{p-1} \leq \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$

$\sum |b_i||a_i + b_i|^{p-1} \leq \left(\sum |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$

$\sum |a_i + b_i|^p \leq \sum (|a_i| + |b_i|)|a_i + b_i|^p \leq \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} (\sum |a_i + b_i|^p)^{\frac{1}{q}}$

$\left(\sum |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \ldots \leq \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

89 Свойства верхнего и нижнего пределов

89.1 Формулировка

Пусть x_n, x'_n — произвольные последовательности. Тогда

1. $\underline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, x_n$

2. $\forall n \quad x_n \le x'_n$. Тогда

   $\overline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, x'_n$

   $\underline{\lim}\, x_n \le \underline{\lim}\, x'_n$

3. $\forall \lambda > 0$

   $\overline{\lim}(\lambda x_n) = \lambda \cdot \overline{\lim}\, x_n$

   $\underline{\lim}(\lambda x_n) = \lambda \cdot \underline{\lim}\, x_n$

4. $\overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim}(x_n)$

   $\underline{\lim}(-x_n) = -\overline{\lim}(x_n)$

5. $\overline{\lim}(x_n + x'_n) \le \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, x'_n$

   $\underline{\lim}(x_n + x'_n) \ge \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, x'_n$

   Если правые части имеют смысл

6. $t_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$

   $\overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim}\, x_n + \lim t_n$

   Если правая часть имеет смысл

7. $t_n \to l > 0, l \in \mathbb{R}$

   $\overline{\lim}(x_n \cdot t_n) = l \cdot \overline{\lim}\, x_n$

89.2 Доказательство

1. Следует из того факта, что $z_n \le x_n \le y_n$

2. $y_n \le y'_n$

3. $\sup(\lambda A) = \lambda \sum(a)$

4. $\sup(-A) = -\inf(A)$

5. $\sum(x_n + x'_n, x_{n+1} + x_{n+1};, \ldots) \leq y_n + y'_n$, т.к. это верхняя граница для всех сумм над sup

6. $l \in \mathbb{R}$, тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 : \forall k > N_0$

   $x_k + l - \varepsilon < x_k + t_k < x_k + l_k + \varepsilon$

   $y_n + l - \varepsilon \leq \sum(x_n + t_n, x_{n+1} + t_{n+1}, ldots) \leq y_n + l + \varepsilon$, при $N \to +\infty$

   $(\overline{\lim}\, x_n) + l - \varepsilon \leq \overline{\lim}(x_n + y_n) \leq (\overline{\lim}\, x_n) + l + \varepsilon$

7. Без доказательства

90 Техническое описание верхнего предела

90.1 Формулировка

1. $\overline{\lim} x_n = +\infty \iff x_n$ — не ограничена сверху
2. $\overline{\lim} x_n = -\infty \iff x_n \to -\infty$
3. $\overline{\lim} x_n = l \in \mathbb{R} \implies$:
   - $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N \quad x_n < l + \varepsilon$
   - $\forall \varepsilon > 0$ неравенство $x_n > l - \varepsilon$ выполняется для бесконечного множества номеров n

90.2 Доказательство

1. Очевидно, что $x_n < y_n$, y_n убывает Таким образом, если $\lim y_n = +\infty \implies y_n = +\infty \iff x_n$ — не ограничена сверху
2. $y_n \to -\infty$, $\forall E : \exists N : \forall n > N\ x_n \leq y_n < E \Rightarrow \forall E > 0 : \exists N : \forall n > N : x_n < E$, $\forall n > N : y_n \leq E$
3. $x_n \leq y_n$, $y_n \to l$
   - $\Rightarrow$) $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N x_n \leq y_n < l + \varepsilon$

     Если $\exists N_0 : \forall N_0 \forall n < l - \varepsilon$, то $\forall n > N_0 y_n = \sup(\ldots) \leq l - \varepsilon$ и тогда $y_n \to l$
   - $\Leftarrow$) $\forall \varepsilon : \exists N : \forall n > N y_n \leq l + \varepsilon$, y_n — супремум

     $x_k \geq l - \varepsilon \Rightarrow y_n \geq l - \varepsilon \Rightarrow y_n \to l$

91 Теорема о существовании предела в терминах верхнего и нижнего пределов

91.1 Формулировка

Пусть существует $\lim x_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда и только тогда $\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = l$

91.2 Доказательство

- $\Rightarrow$) $\lim x_n = +\infty \iff \underline{\lim}\, x_n = +\infty \Rightarrow \underline{\lim} \le \overline{\lim}\, x_n = +\infty$

  $\lim x_n = -\infty \iff \underline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim} = -\infty$

  $\lim x_n \in \mathbb{R}$ — очевидно

- $\Leftarrow$) $z_n \le x_n \le y_n$, то по теореме о сжатой последовательности $x_n \to l$, поскольку $z_n \to l$ и $y_n \to l$

92 Теорема о характеризации верхнего предела как частичного

92.1 Формулировка

1. Пусть l — частный предел x_n, тогда $\underline{\lim}\, x_n \leq l \leq \overline{\lim}\, x_n$

2. Существуют такие n_k, m_k, что $\lim x_{n_k} = \overline{\lim}\, x_n$ и $\lim x_{m_k} = \underline{\lim}\, x_n$

92.2 Доказательство

1. Пусть $x_{n_j} \to l$

   $z_{n_j} \leq x_{n_j} \leq y_{n_j}$, где $z_{n_j} \to \underline{\lim}\, x_n$, $x_{n_j} \to l$, $y_{n_j} \to \overline{\lim}\, x_n$

2. $\overline{\lim}\, x_k = \pm\infty$ — очевидно

   $\overline{\lim}\, x_k = l \in \mathbb{R}$ — очевидно

   Для $\varepsilon = \dfrac{1}{k}$ $\exists x_{n_k} : l - \dfrac{1}{k} \leq x_{n_k} \leq l + \dfrac{1}{k}$

93 Простейшие свойства несобственного интеграла

93.1 Формулировка

1. Критерий Больцано-Коши сходимости несобственного интеграла

   Сходимость интеграла $\int\limits_a^{\to b} f$ равносильна

   $\forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta \in (a, b) : \forall B_1, B_2 : \Delta < B_1 < B_2 < b : \left|\int\limits_{B_1}^{B_2} f\right| < \varepsilon$

2. f — допустима на $[a, b)$ и $C \in (a, b)$. Тогда

   $\int\limits_a^{\to b} f$ и $\int\limits_c^{\to b} f$ сходятся и расходятся одновременно, и при этом в случае сходимости $\int\limits_a^{\to b} = \int\limits_a^{c} + \int\limits_c^{\to b}$

3. Пусть f, g — допустимы на $[a, b)$, а также

   $\int\limits_a^{\to b} f$ и $\int\limits_a^{\to b} g$ сходятся. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, тогда

   λf и $f \pm g$ — допустимые функции на $[a, b)$ и

   $\int\limits_a^{\to b} \lambda f = \lambda \int\limits_a^{\to b} f$ и $\int\limits_a^{\to b} f \pm g = \int\limits_a^{\to b} f \pm \int\limits_a^{\to b} g$

4. Пусть $\int\limits_a^{\to b} f$ и $\int\limits_a^{\to b} g$ существуют в $\overline{\mathbb{R}}$, $f \leq g$ на $[a, b)$ Тогда

   $\int\limits_a^{\to b} f \leq \int\limits_a^{\to b} g$

5. Пусть f, g — дифференцируемы на $[a, b)$, f', g' — допустимы на $[a, b)$. Тогда (при существовании двух из трёх пределов)

   $\int\limits_a^{\to b} fg' = fg\Big|_a^{\to b} - \int\limits_a^{\to b} f'g$

6. Пусть $\varphi : [\alpha, \beta) \to \langle A, B\rangle$, $\varphi \in C^1([\alpha, \beta))$, $f \in C(\langle A, B\rangle)$. Пусть также существует $\varphi(\beta - 0) \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда

   $\int\limits_a^{\to b} (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-0)} f$

93.2 Доказательство

1. Положим $\Phi(A) = \int\limits_a^A f$. Сходимость интеграла равносильна сходимости $\Phi(A)$ при $A \to b - 0$. Воспользуемся критерием Больцано-Коши, а также учтём, что $\Phi(B) - \Phi(A) = \int\limits_a^B$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta \in (a, b) : \forall B_1, B_2 : \Delta < B_1 < B_2 < b : |\Phi(B_2) - \Phi(B_1)| < \varepsilon$$

2. При всех $A \in (c, b)$ согласно аддитивности интеграла

$$\int\limits_a^A f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^A f$$

3. Аналогично предыдущему пункту возьмём такие A и согласно линейности интеграла

$$\int\limits_a^A (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^A f + \beta \int\limits_a^A g$$

4. Также выберем A и очевидно, что

$$\int\limits_a^A f \leq \int\limits_a^A g$$

5. Устремим A к $\to b$

$$\int\limits_a^A fg' = fg\Big|_a^A - \int\limits_a^A f'g$$

6. Кохась сказал, что без доказательства. На экзамене отвечаем ему то же самое

94 Признаки сравнения сходимости несобственного интеграла

94.1 Формулировка

1. Пусть f — допустима на $[a, b)$, $f \geq 0$, $\Phi(B) = \int\limits_a^B f$. Тогда сходимость $\int\limits_a^b f$ равносильна ограниченности функции Φ (это не признак сравнения)

2. Признаки сравнения

   Пусть f, $g > 0$ и допустимы на $[a, b)$

   - Если $f \leq g$ на $[a, b)$

     (a) $\int\limits_a^b g$ — сходится, значит и $\int\limits_a^b f$ — сходится

     (b) $\int\limits_a^b f$ — расходится, значит и $\int\limits_a^b g$ — расходится

   - Пусть существует $\lim\limits_{x \to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$

     Тогда

     (a) $\int\limits_a^b g$ — сходится, значит и $\int\limits_a^b f$ сходится, если $l \in [0, +\infty)$

     (b) $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ сходятся и расходятся одновременно, если $l \in (0, +\infty)$

94.2 Доказательство

1. Очевидно, что Φ — монотонно возрастает, тогда существование $\lim\limits_{B \to b-0} \Phi \Longleftrightarrow \Phi$ — ограничена

2. - Пусть $\Phi(B) = \int\limits_a^B f$, $\psi(B) = \int\limits_a^B g$, тогда Φ, ψ — монотонные

     $\Phi(B) \leq \psi(B)$

     (a) $\int\limits_a^b g$ — сходится, значит $G(B)$ ограничено сверху, значит $F(B)$ ограничено сверху, значит

        и $\int\limits_a^b f$ — сходится

(b) $\int\limits_a^b f$ — расходится, значит $F(B)$ неограничено сверху, значит и $G(B)$ неограничено, значит и $\int\limits_a^b g$ — расходится

- (a) Возьмём $L > l$. Тогда существует $c \in [a, b) : \forall x \in [c, b)$
  $f(x) \leq L \cdot g(x)$ Заменим $\int\limits_a^b$ на $\int\limits_c^b$. Тогда $\int\limits_c^b g$ — сходится, значит и $\int\limits_c^b Lg$ — сходится и $\int\limits_c^b f$ — сходится

  (b) Для $l > 0$ аналогично и $\lambda < l$ и по аналогии $\lim \dfrac{g}{f} = \dfrac{1}{l}$ и $\int\limits_a^b f$ — сходится $\Rightarrow \int\limits_a^b g$ — сходится

95 Интеграл Эйлера-Пуассона

95.1 Формулировка

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

95.2 Доказательство

$$\varphi(t) = \int\limits_0^t e^{-x^2}dx$$

$1 - x^2 \le e^{-x^2} \le \dfrac{1}{1+x^2}$, следует из неравенства $e^t >= 1 + t$

$$1 + x^2 \le e^{x^2}$$

$$\frac{1}{1+x^2} \ge \frac{1}{e^{x^2}}$$

Интегрируем: $\displaystyle\int\limits_0^1 (1-x^2)^n dx \le \int\limits_0^1 e^{-nx^2} \le \int\limits_0^{+\infty} e^{-nx^2} \le \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$

Левая часть: $x = \cos t$ $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^{2n} t(-\sin t)dt = W_{2n+1}$

Правая часть: $x = \operatorname{tg} t$ $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \cos^2 t$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \frac{1}{cos^2 t}dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} dt = W_{2n-2}$$

Средняя часть: $x = \dfrac{t}{\sqrt{n}}$ $\sqrt{n} \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \le \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \le \sqrt{n}W_{2n-2}$$

$$W_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}$$

$$W_{2n-2} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \sqrt{n}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!}\frac{1}{\sqrt{n}-1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$W_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot \sqrt{n} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{n}{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

96 Гамма функция Эйлера. Простейшие свойства

96.1 Формулировка

$\Gamma(T) = \int\limits_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx,\ t > 0$ — Гамма функция Эйлера

Свойства:

1. Интеграл сходится при $t > 0$
2. Функция выпукла, значит она непрерывна
3. $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$
4. Парабола, вершина — примерно точка $(1, 1)$, ветви полностью лежат в первой четверти (когда-нибудь здесь будет рисунок, а так рисуйте примерно)
5. $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

96.2 Доказательство

1. $\int\limits_0^{+\infty} = \int\limits_0^1 + \int\limits_0^{+\infty}$

   $\int\limits_0^1 x^{t-1}e^{-x}dx$, при $x \to 0$ эквивалентно x^{t-1}, $t > 1$, значит сходится

   $\int\limits_1^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx \left(x^{t-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}} \leq e^{-\frac{x}{2}}$

   $\int\limits_{x_0}^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} = \lim\limits_{B \to +\infty} \left(2 \cdot e^{-\frac{x_0}{2}} - 2 \cdot e^{-\frac{B}{2}}\right)$ — конечен

2. Подынтыгральная функция $h : t \mapsto x^{t-1}e^{-x}$ — выпукла. Продифференцируем $h'' = x^{t-1}e^{-x}\ln^2 x \geq 0$

   $\forall x \in [0, 1] : h(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2, x) \leq \alpha h(t_1, x) + (1-\alpha)h(t_2, x)$ — неравенство Йенсена

   $\Gamma(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) \leq \alpha\Gamma(t_1) + (1-\alpha)\Gamma(t_2)$

   $\Gamma(t)$ — выпукла, значит она непрерывна

3. $\int\limits_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx = \begin{bmatrix} f = x^t & f' = tx^{t-1} \\ g' = e^{-x} & g = -e^{-x} \end{bmatrix} = x^t(-e^{-x})\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} tx^{t-1} e^{-x} dx = t\Gamma(t)$

$\Gamma(1) = 1$, значит $\Gamma(n) = n!$

4. $\int\limits_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = 2 \int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$ — интеграл Эйлера-Пуассона

97 Теорема об абсолютно сходящихся интегралах и рядах

97.1 Формулировка

Пусть f — допустима на $[a, b)$. Тогда эквивалентны утверждения:

1. $\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится
2. $\int\limits_a^b |f|$ сходится
3. $\int\limits_a^b f^+$ и $\int\limits_a^b f^-$ абсолютно сходятся

97.2 доказательство

- $1 \Rightarrow 2$ — очевидно
- $2 \Rightarrow 3$ $0 \leq f^+ \leq |f|$ и $0 \leq f^- \leq |f|$
- $3 \Rightarrow 1$ $f = f^+ - f^- \Rightarrow \int f$ — сходится

  $|f| = f^+ + f^- \Rightarrow \int |f|$ — сходится

97.3 Случай рядов

Аналогично интегралам. Доказывается с помощью интегрального признака Коши.

98 Изучение сходимости интеграла $\int\limits_{2019}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$

Рассмотрим $\int\limits_{2019}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha > 1$ — сходится, $\alpha \leq 1$ — расходится

Случай $\alpha > 1$: $\alpha = 1 + 2a$, $a > 0$, значит сходится

$$\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^b} = \frac{1}{x^{1+a}} \cdot \frac{1}{x^a (\ln x)^\beta} = \frac{1}{x^{1+a}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^a (\ln x)^\beta} = 0$$

Если $\beta \geq 0$, то всё ок. Если $\beta < 0$, то $\lim \frac{(\ln x)^{-\beta}}{x^a} = \left(\lim \frac{\ln x}{x^{a/-\beta}} \right)^{-\beta} = 0$

Если $\alpha < 1$, то $\alpha = 1 - 2\gamma$, $\gamma > 0$ — расходится

$$\frac{1}{x^{1-\gamma}} \cdot \frac{1}{x^{-\gamma} (\ln x)^\beta} \geq \frac{1}{x^{1-\gamma}} \text{ — расходится}$$

$$\alpha = 1, \int\limits_{2019}^{+\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^\beta} = \int\limits_{2019}^{+\infty} \frac{dy}{y^\beta}$$

$\beta > 1$ сходится, $\beta \leq 1$ расходится.

99 Изучение интеграла $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x\,dx}{x^p}$ на сходимость и абсолютную сходимость

При $p > 1$ $\left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \leq \frac{1}{x^p}$ — абсолютная сходимость

При $p \leq 0$ $\int\limits_{2\pi k}^{2\pi k+\pi} \frac{\sin x}{x^p} \geq \int\limits_{2\pi k}^{2\pi k+\pi} \sin x = 2$, значит интеграл расходится (и абсолютно тоже)

При $0 < p \leq 1$ нет абсолютной сходимости, но есть обычная сходимость $\int\limits_{\pi k}^{2\pi k} \frac{|\sin x|}{x^p} dx \geq \int\limits_{\pi k}^{2\pi k} |\sin x| \cdot \frac{1}{(2\pi k)^p} dx = \frac{2k}{(2\pi k)^p} \geq \frac{2}{(2\pi)^p}$ — это мой эпсилон

100 Признак Абеля–Дирихле сходимости несобственного интеграла

100.1 Формулировка

1. (Дирихле) f — допустима на $[a, b)$, $g \in C^1([a, b))$, $g(x) \xrightarrow[x \to b-0]{} 0$ монотонная

   $F(B) = \int\limits_a^B f$ — ограничена, тогда $\int\limits_a^{\to b} fg$ — сходится

2. (Абеля) f — допустима на $[a, b)$, $\int\limits_a^{\to b} f$ — сходится

   $g \in C^1([a, b))$, монотонная, ограниченная

   Тогда $\int\limits_a^{\to b} fg$ — сходится

100.2 Доказательство

Интегрируем по частям $\int\limits_a^B fg = F(x)g(x)\Big|_a^B - \int\limits_a^B F(x)g'(x)dx$ — конечен

$\int\limits_a^{\to b} |F(x)|\,|g'(x)|dx \leq k \int\limits_a^{\to b} |g'(x)|dx = \pm \int\limits_a^{\to b} g'(x) = \pm kg(x)\Big|_a^b$

$\alpha = \lim\limits_{x \to b-0} g(x)$

$fg = f\alpha + f(g - \alpha)$

$\int fg$ — сходится, $\int\limits_a^b f(g - \alpha)$ — сходится по уже доказанному.

101 Интеграл Дирихле

101.1 Формулировка

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

101.2 Доказательство

Будет сделано позже

102 Свойства рядов: линейность, свойства остатка, необх. условие сходимости, критерий Больцано-Коши

102.1 Линейность, свойства остатка

102.1.1 Формулировка

1. Пусть $\sum a_n, \sum b_n$ — сходятся, тогда и ряд $\sum c_n$, где $c_n := a_n + b_n$ тоже сходится
2. Пусть $\sum a_n$ — сходится, тогда и ряд $\sum \lambda a_n$ тоже сходится, где $\lambda \in \mathbb{R}$
3. - $\sum a_n$ — сходится, тогда и любой остаток ряда сходится
   - Какой-нибудь остаток ряда сходится, значит и сам ряд сходится
   - Пусть $R_m = \sum\limits_{k=m}^{+\infty} a_k$, $\sum a_n$ — сходится, значит и $R_m \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$

102.1.2 Доказательство

1. $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{N}(a_n + b_n) = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} a_n + \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} b_n$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum\limits_{n=1}^{\infty}$
3. - $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{m-1} a_k + \sum\limits_{k=m}^{N} a_k$, сумма и первое слагаемое конечное, значит и второе слагаемое конечное.
   - Аналогично предыдущему
   - $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{m-1} a_k + \sum\limits_{k=m}^{+\infty} a_k$

102.2 Необходимое условие сходимости рядов

102.2.1 Формулировка

$\sum a_n$ — сходится, тогда $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

102.2.2 Доказательство

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = S,\ S_n \to S$

$a_N = S_N - S_{N-1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

102.3 Критерий Больцано-Коши

102.3.1 Формулировка

Сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ равносильна условию

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

102.4 Доказательство

По определению сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ равносильна сходимости последовательности $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Воспользуемся критерием Больцано-Коши для последовательностей

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N |S_m - S_n| < \varepsilon$$

Не умаляя общности можно считать, что $m > n$. Остаётся переобозначить $m = n+p$, где $p \in \mathbb{N}$ и заметить, что $S_m - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k$

103 Признак сравнения сходимости положительных рядов

103.1 Лемма

103.1.1 Формулировка

Пусть $a_k \geq 0$, при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда сходимости $\sum a_k$ равносильно тому, что последовательность $S_n^{(a)}$ — ограничена

103.1.2 Доказательство

Последовательность S_n возрастает, а по теореме о монотонной последовательности сходимость равносильна ограниченности сверху.

103.2 Признак сравнения сходимости положительных рядов

103.2.1 Формулировка

Пусть a_k, $b_k \geq 0$. Тогда

1. $\forall k : a_k \leq b_k$ (или даже $\exists c > 0 : \exists N : \forall k > N : a_k \leq cb_k$)

   Тогда

   $\sum a_k$ расходится. значит и $\sum b_k$ расходится

   $\sum b_k$ сходится, значит и $\sum a_k$ сходится

2. Пусть $\exists \lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = l \in [0, +\infty]$

   Тогда

   При $0 < l < +\infty$ $\sum a_k$ сходится тогда и только тогда, когда $\sum b_k$ сходится

   При $l = 0$ $\sum b_k$ сходится, значит и $\sum a_k$ сходится, или $\sum a_k$ расходится, значит и $\sum b_k$ расходится

   При $l = +\infty$ $\sum a_k$ сходится, значит и $\sum b_k$ сходится, или $\sum b_k$ расходится, значит и $\sum a_k$ расходится

103.2.2 Доказательство

1. Следует из леммы

   $\sum a_k$ сходится $\Leftrightarrow \sum\limits_{k=N}^{+\infty} a_k$ сходится

   $a_k \leq cb_k \Rightarrow S_n^{(a)} \leq c \cdot S_n^{(b)}$

   $\sum a_k$ расходится $\Rightarrow A_n^{(a)}$ не ограничено сверху, значит и $S_n^{(b)}$ тоже не ограничено сверху

   Аналогично со сходимостью

2. Следует из первой случаи $l = 0$ и $l = +\infty$

   $0 < l < +\infty$. По определению предела

   $\exists N : \forall k > N : \dfrac{l}{2} < \dfrac{a_k}{b_k} < \dfrac{3l}{2}$

   $a_k > \dfrac{1}{2} b_k$, значит $\sum a_n$ сходится, значит и $\sum \dfrac{l}{2} b_n$ тоже сходится, значит и $\sum b_n$ сходится. Аналогично разбираются и остальные 3 случая.

104 Признак Коши сходимости положительных рядов

104.1 Формулировка

Пусть $a_n \geq 0$ для всех n и $k_n = \sqrt[n]{a_n}$

1. $\exists q < 1 : k_n \leq q$, начиная с некоторого места, значит ряд сходится

2. $k_n \geq 1$ для бесконечного числа номеров, значит ряд расходится

104.2 Доказательство

1. $k_n \geq q \Leftrightarrow a_n \geq q^n$ при $n \to +\infty$, а q^n — сходится, значит и $\sum a_n$ — сходится

2. $a_n \geq 1$ — верно для бесконечного числа n, значит $\exists n_k$, что $\lim a_{n_k} \neq 0$, значит $\sum a_n$ расходится.

105 Признак Коши сходимости положительных рядов (pro)

105.1 Формулировка

Пусть $a_n \geq 0$, $k = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$

1. $k > 1$, значит $\sum a_n$ — расходится
2. $k < 1$, значит $\sum a_n$ — сходится

105.2 Доказательство

1. Пусть $k > 1$, тогда для бесконечного числа номеров $\sqrt[n]{a_n} > 1$, а значит $a_n > 1$, значит a_n не стремится к 0, и поэтому ряд расходится.
2. Пусть $k < 1$. Обозначим за $\varepsilon = \dfrac{1-k}{2} > 0$, $q = \dfrac{1+k}{2}$. По свойствам верхнего предела существует такое N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{a_n} < k + \varepsilon = \frac{1+k}{2} = q \in (0,1)$$

Тогда $a_n < q^n$ при всех $n > N$, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по признаку сравнения со сходящимся рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$

106 Признак Даламбера сходимости положительных рядов

106.1 Формулировка

Пусть $a_n \geq 0$, $D_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

light

1. $\exists q < 1$ начиная с некоторого места $D_n \leq q$, значит $\sum a_n$ сходится
2. $D_n \geq 1$ начиная с некоторого места $\sum a_n$ расходится

pro

Пусть $\exists \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = D$

1. $D < 1$, значит $\sum a_n$ сходится
2. $D > 1$, значит $\sum a_n$ расходится

106.2 Доказательство

light

1. $\dfrac{a_{N+1}}{a_N} < q$

   $\dfrac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < q$

   $\dots$

   $\dfrac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} < q$

   $a_{N+k} < q^k \cdot a - N_0$ — сходится

   Значит a_n сходится

2. $a_{N_0+k} \geq a_{N_0} > 0$, значит a_k не стремится 0 — расходится

pro

1. $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = D$, значит НСНМ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < q$, значит $\sum a_n$ сходится

2. $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = D > 1$, значит НСНМ $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, значит $\sum a_n$ расходится

107 Признак Раабе сходимости положительных рядов

107.1 Лемма

107.1.1 Формулировка

Пусть a_n, $b_n > 0$ и $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$ НСНМ. Тогда

b_n — сходится, значит и a_n сходится

или

a_n — расходится, значит и b_n расходится.

107.1.2 Доказательство

Будем считать "НСНМ"как "1"

$a_2 < a_1 \frac{b_2}{b_1}$

$a_3 < a_2 \frac{b_3}{b_2}$

$\ldots$

$a_n < a_{n-1} \frac{b_n}{b_{n-1}}$, значит $a_n < \frac{a_1}{b_1} b_n$, т.е. $a_n < c \cdot b_n$

107.2 Теорема

107.2.1 Формулировка

$a_n > 0$, тогда если

$n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq r > 1$ (НСНМ), тогда $\sum a_n$ — сходится

$n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$ (НСНМ), тогда $\sum a_n$ — расходится

107.2.2 Доказательство

1. $n \cdot \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq r \Rightarrow \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \dfrac{r}{n}$

   Пусть $1 < s < r$, $b_n := \dfrac{1}{n^s}$

   Итак, НСНМ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$

   $\sum b_n = \sum \dfrac{1}{n^s}$ — сходится, значит $\sum a_n$ — сходится

2. $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$, $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \leq \dfrac{n+1}{n} = \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}$

   $\dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, $\sum \dfrac{1}{n}$ — расходится, значит и $\sum a_n$ — расходится

108 Интегральный признак Коши сходимости числовых рядов

108.1 Формулировка

Пусть $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, непрерывна, ≥ 0, монотонна

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f(k)$ и $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ — сходится или расходится одновременно. Содержательный случай f — убывает и $f(1) > 0$

108.2 Доказательство

Ряд сходится, значит $S_n^{(f)}$ — ограничена сверху

Тогда $\Phi(A) = \int\limits_1^A f(x)dx$ — ограничена сверху

$S_n^{(f)} \leq S$

$$\Phi(A) < \Phi([A]+1) = \int\limits_1^{[A]+1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{[A]} \int\limits_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum \int\limits_k^{k+1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{[A]} f(x) \leq S$$

Интеграл сходится, значит и ряд сходится

$\Phi(A) \leq S$

Проверим, что $S_n \leq S + f(1)$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + \sum_{k=2}^{n} \int\limits_{k-1}^{k} f(k)dx \leq f(1) \sum_{k=2}^{n} \int\limits_{k-1}^{k} f(x)dx = f(1) + \int\limits_1^n f(x)dx \leq f(1) + S$$

$\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n^a (\ln n)^b}$ — сходство одновременно с $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{dx}{x^a (\ln x)^b}$ (уже изучали)

109 Признак Лейбница

109.1 Формулировка

Пусть $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$, $a_n \to 0$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} a_k$ — сходится

109.2 Доказательство

$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$, $S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n}$

$S_{2n} \leq a_1$, $S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$

$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$, итого S — ограничено, значит ряд сходится

110 Признаки Дирихле и Абеля сходимости числового ряда

110.1 Формулировка

110.1.1 Дирихле

Пусть $S_n^{(a)}$ — ограничена

b_n — монотонна. $b_n \to 0$

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ — сходится

110.1.2 Абеля

Пусть $\sum a_k$ — сходится, b_n — ограниченная, монотонная

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ — сходится

110.2 Доказательство

110.2.1 Дирихле

Применим преобразование Абеля $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$

Из того, что A_n ограничена, а b_n бесконечна мала, следует, что $A_n b_n \to 0$, поэтому сходимость эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$

$\sum\limits_{k=1}^{n-1} |A_k (b_k - b_{k+1})| \leq c_a \sum\limits_{k=1}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| = c_a |b_1 \cdot b_n|$ — ограничена

110.2.2 Абеля

Существует конечный $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \beta$

$\sum a_k b_k = \sum a_k \beta + \sum a_k (b_k - \beta)$

111 Теорема об условиях сходимости бесконечного произведения

111.1 Формулировка

1. Пусть $a_n > 0$ НСНМ. Тогда равносильность $\prod(1 + a_n)$ — сходится $\Leftrightarrow \sum a_n$ — сходится
2. Пусть $\sum a_n$ — сходится, а также $\sum a_n^2$ — тоже сходится. Тогда $\prod(1 + a_n)$ — сходится

111.2 Доказательство

1. $\prod$ — сходится $\Leftrightarrow \sum \ln|1 + a_n|$ — сходится $\Leftrightarrow \sum a_n$ — сходится. НСНМ $\ln|1 + a_n|$ a_n при $n \to +\infty$
2. $\prod$ сходится $\Leftrightarrow \sum \ln(1 + a_n)$ сходится

   $\ln(1 + a_n) = a_n - \dfrac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)$

   Докажем, что $\sum |o(a_n^2)|$ абсолютно сходится

   $\lim\limits_{n\to} \dfrac{o(a_n^2)}{a_n^2} = 0$ из сходимости $\sum a_n^2$ следует сходимость $\sum |o(a_n^2)|$, значит и $\sum o(a_n^2)$ сходится

112 Лемма об оценке приближения экспоненты ее замечательным пределом

112.1 Лемма 1

112.1.1 Формулировка

$\Pi(n,x) = \int\limits_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$

Тогда $\Pi(n,x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{x(x+1)\ldots(x+n)} \cdot n^x$

112.1.2 Доказательство

$\Pi(n,x) = n^x \int\limits_0^1 (1-s)^n \cdot s^{x-1} ds = n^x \left((1-s)^n \cdot \frac{s}{x}\Big|_{s=0}^{s=1} + \frac{n}{x} \int\limits_0^1 (1-s)^{n-1} \cdot s^x ds \right) = n^x \cdot \frac{n}{x} \int\limits_0^1 (1-s)^{n-1} s^x ds =$
$n^x \cdot \frac{n}{x} \cdot (n-1) \int\limits_0^1 (1-s)^{n-2} s^{x-1} ds = \ldots$ получаем то, что хотели

112.2 Лемма 2

112.2.1 Формулировка

При $0 \le t \le n$

$0 \le e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \le \frac{1}{n} t^2 e^t$

112.2.2 Доказательство

$(1+y) \le e^y leq (1-y)^{-1}$, $y \in [0,1]$ в силу выпуклости e^x

$e^y \ge 1 + y$

$e^{-y} \ge 1 - y$

возведём в $(-n)$, $y := \frac{t}{n}$

$\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n} \geq e^{-t} \geq \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}$

$0 \leq e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n} = e^{-t}\left(1 - e^{t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}\right) \leq e^{-t}\left(1 - \left(1+\frac{t}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}\right) = e^{-t}\left(1 - \left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^{n}\right) \leq$
$\frac{1}{n}t^2e^{-t}$ (это неравенство Бернулли)

113 Формула Эйлера для гамма-функции

113.1 Формулировка

При $x > 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}{x(x+1)\ldots(x+n)} \cdot n^x = \Gamma(x)$

113.2 Доказательство

$$\Gamma(x) - \lim_{n\to+\infty}\Pi(n,x) = \lim_{n\to+\infty}\left(\int\limits_0^n \left(e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right) t^{x-1}dt + \int\limits_n^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt\right)$$

$$\int\limits_n^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \to 0,\ n\to+\infty$$

$$\int\limits_0^n \frac{1}{n}e^{-t}t^2t^{x-1}dt \le \frac{1}{n}\int\limits_0^{+\infty} t^{x+1}e^{-t}dt \to 0$$

114 Формула Вейерштрасса для Г-функции

114.1 Формулировка

Пусть $x > 0$, γ — постоянная Эйлера. Тогда

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}$$

114.2 Доказательство

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n \to +\infty} n^{-x} \frac{x(x+1)\dots(x+n)}{1 \cdot 2 \dots \cdot n} = \lim_{n \to +\infty} \left(n^{-x} \cdot x \frac{x+1}{1} \frac{x+2}{2} \dots \frac{x+n}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} x \cdot n^{-x} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right) =$$

$$\lim_{n \to +\infty} xe^{x\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)} \cdot e^{-x \ln n} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} = x \cdot e^{\gamma} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}$$

$$\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} = \left(1 + \frac{x}{k}\right) \left(1 - \frac{x}{k} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = 1 - \frac{x^2}{k^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

115 Вычисление произведений с рациональными сомножителями

115.1 Формулировка

Пусть $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i = \sum\limits_{i=1}^{k} b_i$

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)\left(1+\frac{a_2}{n}\right)\dots\left(1+\frac{a_k}{n}\right)}{\left(1+\frac{b_1}{n}\right)\left(1+\frac{b_2}{n}\right)\dots\left(1+\frac{b_k}{n}\right)} = \frac{\Gamma(1+b_1)\dots\Gamma(1+b_k)}{\Gamma(1+a_1)\dots\Gamma(1+a_k)}$$

Фиг его знает, что тут хочет Кохась

116 Теорема о группировке слагаемых

116.1 Формулировка

Выберем $n_0 = 1 < n_1 < n_2 < \ldots$

Пусть $\sum a_k = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}) + \ldots$

$b_k = \sum\limits_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} a_i$

Тогда

1. $\sum a_n$ — сходится $\Rightarrow \sum b_k$ сходится и имеет ту же сумму
2. $a_k \geq 0 \Rightarrow \sum a_k = \sum b_k$

116.2 Доказательство

$S_k^{(b)} = S_{n_k}^{(a)}$

1. $\lim\limits_{k\to\infty} S_k^{(b)} = \lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k}^{(a)} = S^{(a)}$
2. Если $\sum a_n$ — сходится, то смотри пункт 1

   Если $\sum a_n$ — расходится, значит $S_n^{(a)}$ не ограничено сверху, значит и $S_n^{(b)}$ не ограничено сверху

117 Теорема о перестановке слагаемых

117.1 Формулировка

Пусть ряд $\sum a_n$ абсолютно сходится, тогда ряд $\sum b_n$, полученный из ряда $\sum a_n$ перестановкой, будет также абсолютно сходиться и иметь ту же сумму.

Также если $a_k \geq 0$ при всех k, то $\sum a_k = \sum b_k$

117.2 Доказательство

По определению $S_n^{(b)} = a_{\varphi(1)} + \ldots + a_{\varphi(n)} \leq S^{(a)}_{\max \varphi(i)}$. Устремим $n \to +\infty$, $S^{(b)} \leq S^{(a)}$. Аналогично $S^{(a)} \leq S^{(b)}$. Берём срезки a_n^+, a_n^-, $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$ — сходятся.

$a_n^+ = \max(a_n^+, 0)$, $\sum b_n^+$ — перестановка ряда a_n^+

$a_n^- = \max(-a_n^-, 0$. Аналогично $\sum b_n^-$

118 Теорема о произведении рядов

118.1 Формулировка

Пусть ряды (A) и (B) абсолютно сходятся к суммам $S^{(a)}$ и $S^{(b)}$. Тогда $\forall \gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ — биекция, произведение рядов абсолютно сходится и имеют сумму $S^{(a)}S^{(b)}$

118.2 Доказательство

Пусть $\sum |a_k| = A, \sum |b_k| = B, (A, B \in \mathbb{R}). \sum\limits_{k=1}^{N} |a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |a_n| \sum\limits_{k=1}^{m} |b_k| \leq A{\cdot}B$, где $n := \max(\varphi(1), \ldots, \varphi(N))$, $m = \max(\psi(1), \ldots, \psi(N))$

Значит ряд $\sum\limits_{k=1}^{N} |a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}|$ — сходится, значит произведение рядов абсолютно сходится

119 Единственность производной

119.1 Формулировка

Производный оператор единственный

119.2 Доказательство

Проверим, что $\forall n \in \mathbb{R}^m$ $L(n)$ задан однозначно

$h := tu$, $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^m$, t — "маленькое"

$F(a + tu) = F(a) + L(tu) + o(tu)$

$F(a + tu) = F(a) + t \cdot L(u) + o(t)$

120 Лемма о дифференцируемости отображения и его координатных функций

120.1 Формулировка

Пусть $F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, $F = (F_1, \ldots, F_l)$, $a \in \text{Int }(E)$

Тогда

1. F — дифференцируема в точке $a \Leftrightarrow$ все F_i дифференцируемы в точке a
2. Строки матрицы Якоби F равны матрицы Якоби функций F_i

120.2 Доказательство

Будет написано позже когда-нибудь перед экзаменами возможно наверняка да навряд ли

121 Необходимое условие дифференцируемости

121.1 Формулировка

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $a \in \text{Int } E$

f — дифференцируема в точке a

Тогда $\exists f'_{x_1}(a), \ldots, f'_{x_m}(a)$ и тогда $(f'_{x_1}(a), \ldots, f'_{x_m}(a))$ — матрица Якоби f в точке a

121.2 Доказательство

$f(a+h) = f(a) + L \cdot h + \alpha(h) \cdot |h|$

$f(a + t \cdot e_k) = f(a) + e_k \cdot t + \alpha(t \cdot e_k)|t|$

$l_{k_m} = \varphi'_k(a_k) = \dfrac{\partial f}{\partial_{x_k}}(a_k)$

122 Достаточное условие дифференцируемости

122.1 Формулировка

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $a \in E$, $B(a, r) \subset E$

Пусть в этом шаре $\exists f'_{x_1}(x), \ldots, f'_{x_m}(x)$, $x \in B(a, r)$

и все эти производные непрерывны в точке a. Тогда f — дифференцируемы в точке a

122.2 Доказательство

Пусть $m = 2$, на большую размерность обобщается легко

$a = (a_1, a_2)$, $x = (x_1, x_2)$

$f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) = (f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2)) + (f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2)) = f'_{x_1}(\overline{x_1}, x_2)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(x_1, \overline{x_2})(x_2 - a_2) = f'_{x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2) + (f'_{x_1}(\overline{x_1}, x_2) - f'_{x_1}(a_1, a_2))(x_1 - a_1) + (f'_{x_2}(a, \overline{x_2}) - f'_{x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2)$

123 Лемма об оценке нормы линейного оператора

123.1 Формулировка

Пусть $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, лин. $A = (a_{ij})$. Тогда $\forall x \in \mathbb{R}^m$

$|Ax| \leq C_a |x|$, где $C_a = \sqrt{\sum\limits_{ij} a_{ij}^2}$

123.2 Доказательство

$$|A_x|^2 = \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{l} \left(\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{m} x_j^2 \right) \right) = |x|^2 \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2$$

Это КБШ

124 Дифференцирование композиции

124.1 Формулировка

Пусть $F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, $G : I \subset \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$, $F(E) \subset I$

$a \in \text{Int } (E)$, $F(a) \in \text{Int } (I)$, F — дифференцируема в точке a, G — дифференцируема в $b = F(a)$. Тогда

$G \circ F$ — дифференцируема в точке a и $\left(G \circ F\right)'(a) = G'\left(F(a)\right) \cdot F'(a)$

124.2 Доказательство

$F(a+h) = F(a) + F'(a)h + \alpha(h)|h|$

$G(b+k) = G(b) + G'(b)k + \beta(k)|k|$

$G(F(a+h)) = G(b) + G'(b)(F'(a)h + \alpha(h)|h|) + \beta(k)|k|$

$G(F(a)) + G'(F(a)) \cdot F'(a)h + G'(b)\alpha(h)|h| + \beta(k)|k|$, где $G'(b)\alpha(h)|h| + \beta(k)|k| = o(h)$

125 Дифференцирование произведений

125.1 Формулировка

Пусть F, $G : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, $\lambda : E \to \mathbb{R}$, $a \in \text{Int } E$; F, G, λ — дифференцируемые в a, тогда:

1. $(\lambda F)'(a)h = (\lambda'(a)h)F(a) + \lambda(a)\left(F'(a)h\right)$
2. $\langle F, G\rangle'(a)h = \langle F'(a)h, G(a)\rangle + \langle F(a), G'(a)h\rangle$

125.2 Доказательство

Будет написано позже

126 Теорема Лагранжа для векторнозначных функций

126.1 Формулировка

Пусть $F : [a, b] \to \mathbb{R}^l$ — непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на $[a, b]$. Тогда

$\exists c \in (a, b) : |F(b) - F(a)| \leq |F'(c)| \cdot |b - a|$