Содержание

Часть I

Определения

1 Первообразная, неопределенный интеграл

1.1 Первообразная

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

$F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — первообразная f на $\langle a, b\rangle$, если для любого $x \in \langle a, b\rangle$, F — дифференцируема в точке x, и $F'(x) = f(x)$.

Пример

$f(x) = \sin x \Leftrightarrow F(x) = -\cos x + C$

1.2 Неопределенный интеграл

Неопределенным интегралом функции f на $\langle a, b\rangle$ называют множество всех её первообразных.

Обозначение: $\int f$, $\int f(x)dx = \{F + C, C \in \mathbb{R}\}$, где F — любая первообразная.

2 Теорема о существовании первообразной

Пусть f непрерывна на $\langle a, b \rangle \Rightarrow$ существует такая функция F на $\langle a, b \rangle$, что $F' = f$.

Доказательство

В кредит

3 Таблица первообразных

1. $f(x) = k$, $F(x) = kx$
2. $f(x) = x^n$, $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
3. $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \ln|x|$
4. $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$
5. $f(x) = a^x$, $F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$
6. $f(x) = \sin x$, $F(x) = -\cos x$
7. $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x$
8. $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, $F(x) = -\operatorname{ctg} x$
9. $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $F(x) = \operatorname{tg} x$
10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $F(x) = \arcsin x$
11. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $F(x) = \operatorname{arctg} x$
12. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

4 Равномерная непрерывность

Функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна на $\langle a, b\rangle$, если:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall x_0, x : |x - x_0| < \delta,\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

5 Площадь, аддитивность площади, ослабленная аддитивность

5.1 Первое определение площади

Пусть E — множество всех ограниченных подмножество в $\mathbb{R}^2$ (или множество всех фигур).

Тогда площадь — это функция $\sigma : E \to [0, +\infty)$ со свойствами:

1. аддитивность

   Если $A = A_1 \sqcup A_2 \Rightarrow \sigma(A) = \sigma(A_1) + \sigma(A_2)$

2. нормировка

   $\sigma(\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle) = (d - c)(b - a)$

<u>Замечание</u>

Площадь монотонна, то есть если:

$A \subset B \Rightarrow \sigma(A) \leq \sigma(B)$

$\sigma(\text{вертикального отрезка}) = 0$

5.2 Второе определение площади

$\sigma : E \to [0, +\infty)$

- монотонна
- нормировка
- ослабленная аддитивность:

  $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$ — вертикальный отрезок, E_1 и E_2 — по разные стороны этого отрезка.

  $\sigma(E) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2)$

6 Положительная и отрицательная срезки

6.1 Определение

Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

$f_+(x) = \max(f(x), 0)$ — положительная срезка

$f_-(x) = \max(-f(x), 0)$ — отрицательная срезка

6.2 Некоторые свойства

- $f = f_+ - f_-$
- $f_+ + f_- = |f|$

6.3 Подграфик

Пусть $E \subset \langle a, b\rangle$

$f(E) \geq 0$

Тогда $\Pi\Gamma(f, E)$ — подграфик f на E, если:

$\Pi\Gamma(f, E) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in F, 0 \leq y \leq f(x)\right\}$

7 Определённый интеграл

7.1 Определение

Определённым интегралом функции f по промежутку $[a, b]$ называется: $f : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$, $[a, b] \subset \langle c, d\rangle$

$\int_a^b f(x)dx = \sigma(\Pi\Gamma(f_+, [a, b])) - \sigma(\Pi\Gamma(f_-, [a, b]))$

7.2 Замечание

1. $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$
2. $f \equiv c \Rightarrow \int_a^b f = c(b - a)$

   $c = 0$ — очевидно

   $c > 0$ $\int_a^b = \sigma(\Pi\Gamma(c, [a, b])) = c(b - a)$

   $c < 0$ $\int_a^b = -\sigma(\Pi\Gamma(f_-, [a, b])) = -(-c)(b - a) = c(b - a)$
3. $\int_a^b -f = -\int_a^b f$

   $(-f)_+ = f_-$

   $(-f)_- = f_+$
4. Можно считать, что разрешён случай, когда $a = b$

   $\int_a^b f = 0$

8 Кусочно-непрерывная функция

Пусть f всюду непрерывна на $[a, b]$ кроме конечного числа точек, все точки разрыва I рода. Тогда f называют кусочно-непрерывной функцией.

9 Почти первообразная

Пусть f — кусочно-непрерывная функция на $[a, b]$. Тогда $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ — почти первообразная, если

$\exists F'(x)$, $F'(x) = f(x)$ для всех x кроме конечного числа точек и $F(x)$ — непрерывна на $[a, b]$

Часть II

Теоремы

10 Теорема Кантора о равномерной непрерывности

Пусть $f : X \to Y$ — метрические пространства, f непрерывна на X, X — компактно. Тогда f — равномерное непрерывно на X.

Доказательство (от противного)

Воспользуемся тем свойством, что если X — компактно, то X и секвенциально компактно.

Предположим противное:

$\exists \varepsilon > 0$ $\delta = \frac{1}{n}$ $\exists x_n, \widetilde{x_n}$: $\rho(x_n, \widetilde{x_n}) < \frac{1}{n}$ $\rho(f(x_n), f(\widetilde{x_n})) \geq \varepsilon$

Тогда выберем сходящуюся подпоследовательность из x_n $x_{n_k} \to a \in X$, $\widetilde{x_{n_k}} \to a \in X$.

Тогда $f(x_{n_k}) \to f(a)$ и $f(\widetilde{x_{n_k}}) \to f(a)$, то

$\rho(f(x_{n_k}), f(\widetilde{x_{n_k}})) \to 0$ (по неравенству треугольника)

Что и противоречит изначальному условию.

11 Теорема Брауэра о неподвижной точке

Пусть $f : B(0,1) \subset \mathbb{R}^m \to B(0,1)$ — непрерывное, тогда

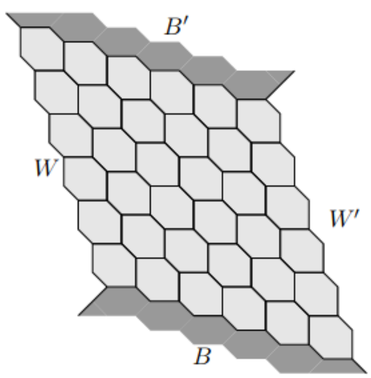
$\exists x_0 : f(x_0) = x_0$

Доказательство

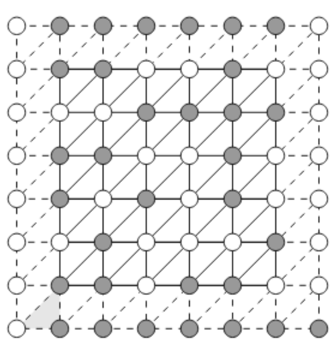
11.1 Игра "Текс"

Пусть есть поле $n \times m$, состоящее из правильных шестиугольников (гексов). Также два игрока на каждом своём ходу красят гексы в белый или чёрный цвет. Тогда для любой раскраски найдётся либо чёрная тропинка, соединяющая верхнюю и нижнюю часть поля, либо белая тропинка, соединяющая левую и правую часть поля.

Доказывается от противного



11.2 Сама теорема



Теперь заменим гексы на обычную координатную плоскость, причём игра, по сути, останется такой же. Теперь перейдём к самой теореме.

Шар с лёгкостью заменяется на обычный квадрат $[0,1] \times [0,1]$

Пусть $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ — непрерывна. Тогда

$\exists a \in [0,1]^2,\ f(a) = a$

$a \in [0,1]^2$

$a = (a_1, a_2)$

$f(x) \in \mathbb{R}^2$

$f(x) = (f(x)_1, f(x)_2)$

Доказательство

Пусть ρ — функция, заданная на $[0,1]^2 \times [0,1]^2$

$\rho(x,y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ — непрерывна на $[0,1]^2$

$x_n \to a$

$y_n \to b$

$\rho(x_n, y_n) \to \rho(a,b)$

Очевидно, что для любых $x, y : x \neq y \Rightarrow \rho(x,y) > 0$

Теперь к самой теореме

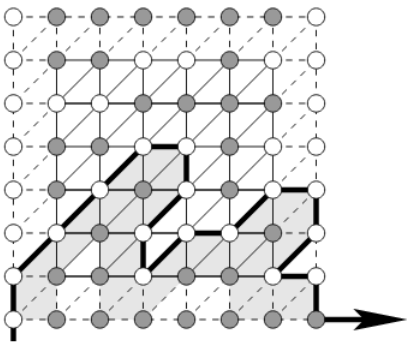
Пусть для любого $x \in [0,1]^2$ $f(x) \neq x$. Тогда $\rho(x, f(x)) > 0$, но ρ непрерывно по x и $[0,1]^2$ — компакт, значит по теореме Вейерштрасса существует такое $\varepsilon > 0$, что

$\min\limits_{x \in [0,1]^2} \rho(x, f(x)) = \varepsilon > 0$

По теореме Кантора для этого ε найдётся такая δ (будем считать, что $\sqrt{2}\delta < \varepsilon$), что

$\forall x, \widehat{x} \in [0,1]^2 : \|x - \widehat{x}\| < \delta \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \|f(x) - f(\widehat{x})\| < \varepsilon$

Берём $\frac{1}{n} < \varepsilon$



<u>Доска</u>

Узел $(l,k) \to (\frac{l}{n}, \frac{k}{n}) \in [0,1]^2$

$0 \le l, k \le n$

Красим узлы

v — логический узел, $v = (v_1, v_2)$

$c(v) = \min\left\{i : \left\|f(\frac{v}{n})_i - \frac{v_i}{n}\right\| \ge \varepsilon\right\}$

По лемме об игре в гексы есть одноцветная тропинка.

Путь v^0 — начальная точка тропинки, v^N — конечная.

$v_1^0 = 0$

$f(\frac{v^0}{n}) \in [0,1]^2$, т.е. $f(\frac{v^0}{n})_1 \ge 0$

$\varepsilon \le f(\frac{v^0}{n})_1$

Аналогично для $v_1^N = 1$

$f(\frac{v^N}{n})_1 \le 1$

$f(\frac{v^N}{n})_1 - \frac{v_1^N}{n} \le -\varepsilon$

$f(\frac{v^0}{n})_1 - \frac{v_1^0}{n} \ge \varepsilon$

Поскольку для любых x верно, что $|f(x)_1 - x_1| \ge \varepsilon$, то из этого следует, что какой-то прыжок был длиной не меньше 2ε, но такое невозможно, поскольку по условию если $\|x - \widehat{x}\| < \frac{1}{n} \Rightarrow \|f(x) - f(\widehat{x})\| < \varepsilon$

12 Теорема о свойствах неопределенного интеграла

Пусть f, g имеют первообразную на $\langle a, b\rangle$. Тогда:

1. $\int f + \int g = \int (f+g)$

   $\forall \alpha \in \mathbb{R} \int (\alpha f) = \alpha \int f$

2. $\forall \varphi : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$, φ дифференцируема

   $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$, где F — первообразная f

3. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0 : \int f(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + C$

4. f, g — дифференцируемы на $\langle a, b\rangle$

   $f' \cdot g$ имеет первообразную на $\langle a, b\rangle$

   Тогда $f \cdot g'$ тоже имеет первообразную и

   $\int f'g = fg - \int fg'$

Доказательство

1. $(F+G)' = f + g$

   $(\alpha F)' = \alpha f$

2. $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t))\varphi'(t)$

3. $(\frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta))' = f(\alpha x + \beta)$

4. $(fg)' = f'g + fg'$, т.е. $fg = \int f'g + \int fg'$

13 Интегрирование неравенств. Теорема о среднем

13.1 Интегрирование неравенств

Пусть f, $g \in C[a,b]$, $f \leq g \Rightarrow \int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b g$

Если $0 \leq f \leq g$

$\int\limits_a^b f = \sigma(\Pi\Gamma(f,[a,b])) \leq \sigma(\Pi\Gamma(g,[a,b])) = \int\limits_a^b g$

В общем случае

$\Pi\Gamma(f_+,[a,b]) \subset \Pi\Gamma(g_+,[a,b])$

$\Pi\Gamma(f_-,[a,b]) \supset \Pi\Gamma(g_-,[a,b])$

$\sigma(\Pi\Gamma(f_+,[a,b])) - \sigma(\Pi\Gamma(f_-,[a,b])) \leq \sigma(\Pi\Gamma(g_+,[a,b])) - \sigma(\Pi\Gamma(g_-,[a,b]))$

$\int\limits_a^b f \leq \int_a^b g$

13.2 Теорема о среднем значении

Пусть f непрерывна на $[a,b] \Rightarrow \exists c \in [a,b] : \int\limits_a^b f = f(c)(b-a)$

13.3 Доказательство 1

Просто берём прямую и двигаем её сверху вниз, тем самым по теореме о бутерброде мы найдём такое значение c, что $\int\limits_a^b f = f(c)(b-a)$

13.4 Нормальное доказательство

Если $a = b$ — очевидно.

Пусть $a < b$

$\min f \leq \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f \leq \max f$

по теореме о промежуточном значении

$\exists c : \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f = f(c)$

14 Теорема Барроу

14.1 Определение

$f \in C[a, b]$, $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$

$\varphi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$

Интеграл с верхним переменным пределом

14.2 Теорема (Барроу)

В условиях определения оказывается, что φ — диффиринцируема на $[a, b]$ и $\varphi'(x) = f(x)\ \forall x \in [a, b]$

14.3 Доказательство

Фиксируем x и при $y > x$

$\lim\limits_{y \to x+0} \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} = \lim\limits_{y \to x+0} \frac{1}{y-x} (\int\limits_a^y f - \int\limits_a^x f) = \lim\limits_{y \to x+0} \frac{1}{y-x} \int\limits_x^y f = \lim\limits_{y \to x+0} f(c) = f(x)$

$\exists c \in [x, y]$

Аналогично доказываем, что $\lim\limits_{y \to x-0} = \ldots = f(c)$

14.4 Замечания

- Интеграл с нижним переменным пределом

  $\psi(x) = \int\limits_x^b f$. Тогда $\psi'(x) = -f$

- Эта теорема также доказывает теорему о существовании производной

15 Формула Ньютона-Лейбница, в том числе, для кусочно-непрерывных функций

15.1 Формулировка теоремы

Пусть f непрерывна на $[a, b]$, F — первообразная f.

Тогда $\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$

15.2 Доказательство

φ — из теоремы Барроу — тоже первообразная, значит

$\exists c \; F = \varphi + c$

$\int\limits_a^b f = \varphi(b) = \varphi(b) - \varphi(a) = (\varphi + c)\Big|_{x=b} - (\varphi + c)\Big|_{x=a} = F(b) - F(a)$

$\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$

При $a > b$ $\int\limits_a^b f \overset{\text{def}}{=} -\int\limits_b^a f$

16 Свойства определенного интеграла: линейность, интегрирование по частям, замена переменных

16.1 Линейность определенного интеграла

$f, g \in C[a, b]$, α, $\beta \in \mathbb{R}$

$\int\limits_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$

Следует из формулы Ньютона-Лейбница

$\int\limits_a^b f = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$

F, G $\alpha F + \beta G$ — первообразная $\alpha f + \beta g$

$\alpha F(x) + \beta G(x)\Big|_a^b = \alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(a) - \beta G(a) = \alpha(F(b) - F(a)) + \beta(G(b) - G(a)) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$

16.2 Интегрирование по частям

$f, y \in C[a, b]$. Тогда

$\int\limits_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'g$

Следует из свойств для неопределенного интеграла

$\int\limits_a^b fg' = (\int fg')\Big|_a^b = (fg - \int f'g)\Big|_a^b = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'g$

17 Интегральное неравенство Чебышева. Неравенство для сумм

17.1 Формулировка

$I_f = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$

$f, g \in C[a,b]$ — монотонно возрастают

Тогда $I_f \cdot I_y \leq I_{fg}$

$\int\limits_a^b f \cdot \int\limits_a^b g \leq (b-a)\int\limits_a^b fg$ — неравенство Чебышева

17.2 Доказательство

$\forall x, y \in [a,b]\ (f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \geq 0$

Проинтегрируем по переменной x по отрезку $[a,b]$

$f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y) \geq 0$

$I_{fg} - f(y)I_g - I_f g(y) + f(y)g(y) \geq 0$

Интегрируем по y на $[a,b]$: $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b$

$I_{fg} - I_f \cdot I_g - I_f \cdot I_g + I_{fg} \geq 0$

$I_{fg} \geq I_f \cdot I_g$

18 Иррациональность числа π

18.1 Вспомогательный интеграл

Пусть $H_n = \frac{1}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi^2}{4} - t^2)^n \ \cos t \ dt$

$$H_n = \begin{bmatrix} f = (\frac{\pi^2}{4} - t^2)^n & g = \sin t \\ f' = -2nt(\frac{\pi^2}{4} - t^2)^{n-1} & g' = -\cos t \end{bmatrix}$$

$$H_n = \frac{1}{n!}(\frac{\pi^2}{4} - t^2)^n \sin t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n!}2n\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t(\frac{\pi^2}{4} - t^2)^{n-1}\sin t \ dt$$

$$H_n = \frac{1}{n!}2n\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t(\frac{\pi^2}{4} - t^2)^{n-1}\sin t \ dt$$

$$H_n = \begin{bmatrix} f = t(\frac{\pi^2}{4} - t^2)^{n-1} & g = -\cos t \\ f' = (\frac{\pi^2}{4} - t^2)^{n-1} - 2(n-1)t^2(\frac{\pi^2}{4} - t^2)^{n-2} & g' = \sin t \end{bmatrix}$$

$$f' = (\frac{\pi^2}{4} - t^2)^{n-1} + 2(n-1)(\frac{\pi^2}{4} - t^2)^{n-1} - \frac{\pi^2}{2}(n-1)(\frac{\pi^2}{4} - t^2)^{n-2}$$

$$f' = (2n-1)(\frac{\pi^2}{4} - t^2)^{n-1} - \frac{\pi^2}{2}(n-1)(\frac{\pi^2}{4} - t^2)^{n-2}$$

$$\frac{2}{(n-1)!}t(\frac{\pi^2}{4} - t^2)^{n-1}(-\cos t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{(n-1)!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ((2n-1)(\frac{\pi^2}{4} - t^2)^{n-1} - \frac{\pi^2}{2}(n-2)(\frac{\pi^2}{4} - t^2)^{n-2})\cos t \ dt$$

Пусть $n \geq 2$, тогда

$$H_n = (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2} = \ldots + H_2 + \ldots + H_0$$

$$H_0 = 2$$

$$H_1 = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underset{f}{t}\ \underset{\sin t}{g'} = 2t(-\cos t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \ dt = 4$$

18.2 Теорема

Число π^2 — иррациональное (и тогда π тоже)

18.3 Доказательство

Пусть $\frac{1}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi^2}{4} - t^2)^n \cos t = P_n(\pi^2)$, где P_n — многочлен с целыми коэффициентами.

$\deg P \leq n$

Этого не может быть

<u>От противного</u>

Пусть $\pi^2 = \frac{m}{k} \in \mathbb{Q}$. Тогда $k^n P_n(\frac{m}{k})$ — целое число

Значит $k^n \cdot P_n(\frac{m}{k}) \geq 1$, т.е.

$\frac{k^n}{n!} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi^2}{4} - t^2)^n \cos t \; dt \geq 1$

$\frac{k^n}{n!} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi^2}{4} - t^2)^n \cos t \; dt \leq \frac{k^n}{n!} (\frac{\pi^2}{4})^n \cdot \pi \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$