Содержание

Часть I

Определения

1 Первообразная, неопределенный интеграл

1.1 Первообразная

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

$F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — первообразная f на $\langle a, b\rangle$, если для любого $x \in \langle a, b\rangle$ F дифференцируема в точке x и $F'(x) = f(x)$.

Пример

$f(x) = \sin x \Longleftrightarrow F(x) = -\cos x + C$

1.2 Неопределенный интеграл

Неопределенным интегралом функции f на промежутке $\langle a, b\rangle$ называют множество всех её первообразных.

Обозначение: $\displaystyle\int f,\ \int f(x)\ dx = \{F + C, C \in \mathbb{R}\}$, где F — любая первообразная.

2 Теорема о существовании первообразной

Пусть f непрерывна на $\langle a, b\rangle$, тогда существует такая функция F на $\langle a, b\rangle$, что $F' = f$.

3 Таблица первообразных

1. $f(x) = k$, $F(x) = kx$
2. $f(x) = x^n$, $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, где $n \neq -1$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $F(x) = \ln|x|$
4. $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$
5. $f(x) = a^x$, $F(x) = \dfrac{a^x}{\ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$
6. $f(x) = \sin x$, $F(x) = -\cos x$
7. $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x$
8. $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$, $F(x) = -\operatorname{ctg} x$
9. $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $F(x) = \operatorname{tg} x$
10. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $F(x) = \arcsin x = -\arccos x$
11. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $F(x) = \operatorname{arctg} x = -\operatorname{arcctg} x$
12. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$, $F(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right|$
13. $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$, $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$

4 Равномерная непрерывность

Отображение $f : X \to Y$, где X и Y — метрические пространства, а также $A \subset X$, называется равномерно непрерывным на A, если:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_0, x \in A : \rho(x, x_0) < \delta \Longrightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

5 Площадь, аддитивность площади, ослабленная аддитивность

5.1 Первое определение площади

Пусть E — множество всех ограниченных подмножество в $\mathbb{R}^2$ (или множество всех фигур).

Тогда площадь — это функция $\sigma : E \to [0, +\infty)$ со свойствами:

1. аддитивность

   Если $A = A_1 \sqcup A_2$, то $\sigma(A) = \sigma(A_1) + \sigma(A_2)$

2. нормировка

   $\sigma(\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle) = (d - c)(b - a)$

<u>Замечание</u>

1. Площадь монотонна, то есть:

   $A \subset B \Rightarrow \sigma(A) \leq \sigma(B)$

   Доказательство

   $B = A \cup (B \setminus A)$

   $\sigma(B) = \sigma(A) + \sigma(B \setminus A) \geq \sigma(A)$

2. σ(вертикального отрезка) $= 0$

   Доказательство

   Отрезок — прямоугольник, ширина которого стремится к 0, значит и площадь также стремится к 0

5.2 Второе определение площади

$\sigma : E \to [0, +\infty)$

- монотонна
- нормировка

- ослабленная аддитивность:

  $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$ — вертикальный отрезок, E_1 и E_2 — по разные стороны этого отрезка.

  $\sigma(E) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2)$

5.3 Площадь как сумма прямоугольников

$\sigma(A) = \inf \left(\sum \sigma(P_i) \right)$, где $A \subset \bigcup P_i$

6 Положительная и отрицательная срезки

6.1 Определение

Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

$f_+(x) = \max(f(x), 0)$ — положительная срезка

$f_-(x) = \max(-f(x), 0)$ — отрицательная срезка

6.2 Некоторые свойства

- $f = f_+ - f_-$
- $f_+ + f_- = |f|$

6.3 Подграфик

Пусть $E \subset \langle a, b\rangle$

$f(E) \geq 0$

Тогда $\Pi\Gamma(f, E)$ — подграфик f на E, если:

$$\Pi\Gamma(f, E) = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in E, 0 \leq y \leq f(x)\big\}$$

7 Определённый интеграл

7.1 Определение

Определённым интегралом функции f по промежутку $[a, b]$ называется $f : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$, $[a, b] \subset \langle c, d\rangle$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sigma(\Pi\Gamma(f_+, [a, b])) - \sigma(\Pi\Gamma(f_-, [a, b]))$$

7.2 Свойства

1. $f \geq 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f \geq 0$

2. $f \equiv c \Rightarrow \int\limits_a^b f = c(b - a)$

   Доказательство

   $c = 0$ — очевидно

   $c > 0 \int\limits_a^b = \sigma(\Pi\Gamma(c, [a, b])) = c(b - a)$

   $c < 0 \int\limits_a^b = -\sigma(\Pi\Gamma(f_-, [a, b])) = -(-c)(b - a) = c(b - a)$

3. $\int\limits_a^b -f = -\int\limits_a^b f$

   Доказательство

   $(-f)_+ = f_-$

   $(-f)_- = f_+$

4. Можно считать, что разрешён случай, когда $a = b$

   $\int\limits_a^a f = 0$

8 Среднее значение функции на промежутке

Величина $c = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$ — среднее значение функции f на промежутке $\langle a, b\rangle$

9 Кусочно-непрерывная функция

Если функция f всюду непрерывна на промежутке $[a, b]$ кроме конечного числа точек, при этом все точки разрыва I рода, то такую функцию называют кусочно-непрерывной.

10 Почти первообразная

Пусть f — кусочно-непрерывная функция на $[a, b]$. Тогда $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ — почти первообразная, если существует такое $F'(x)$, что $F'(x) = f(x)$ для всех x кроме конечного числа точек и $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$

11 Дробление отрезка, ранг дробления, оснащение

Пусть задан невырожденный отрезок $[a, b]$

Дробление отрезка — набор таких точек x_0, x_1, $\ldots$, x_n, что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

Оснащение — набор точек ξ_1, ξ_2, $\ldots$, ξ_n, что $\forall k : \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Ранг дробления — величина, равная $\max\limits_{k=1,\ldots,n}(x_k - x_{k-1})$

12 Риманова сумма

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, а также задано дробление и оснащение. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ — Риманова сумма

Если ранг дробления стремится к 0, то $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \to \int\limits_a^b f(x)\ dx$. Это историческое определение интеграла

13 Постоянная Эйлера

Постоянная Эйлера — математическая константа γ, определяемая следующим образом:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$

14 Функция промежутка. Аддитивная функция промежутка

Пусть у нас задано $\langle a, b\rangle$. Тогда

Segm $\langle a, b\rangle := \{[p, q] \subset \langle a, b\rangle\}$

Тогда:

1. $\phi : \text{Segm } \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — функция промежутка
2. $\phi : \text{Segm } \langle a, b\rangle \to \mathbb{R},$ — аддитивная функция промежутка, если

$$\forall [p, q] \subset \langle a, b\rangle : \forall c \in (p, q) \Longrightarrow \phi([p, q]) = \phi([p, c]) + \phi([c, q])$$

15 Плотность аддитивной функции промежутка

Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, \phi : \mathrm{Segm}\ \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — аддитивная функция промежутка

f — плотность ϕ, если $\forall \Delta \in \mathrm{Segm}\ \langle a, b\rangle \Longrightarrow \inf\limits_{x\in\Delta} f(x)\cdot l(\Delta) \le \phi(\Delta) \le \sup\limits_{x\in\Delta} f(x)\cdot l(\Delta)$,

где $l(\Delta)$ — длина промежутка.

16 Гладкий путь, вектор скорости, носитель пути

Путь — непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$

$\gamma(a)$ — начало пути

$\gamma(b)$ — конец пути

16.1 Гладкий путь

$\gamma^{(t)} = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_m(t))$

γ_i — координатная функция пути γ

Путь $\gamma^{(t)}$ называют гладким, если все $\gamma_i \in C^1[a, b]$

16.2 Вектор скорости

$\gamma(t_0) := \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$

Покоординатно: $\dfrac{\gamma_i(t) - \gamma_i(t_0)}{t - t_0} \to \gamma_i'(t)$

$\gamma'(t_0) = (\gamma_1'(t_0),\ \gamma_2'(t_0),\ \ldots,\ \gamma_n'(t_0))$ — вектор скорости в точке t_0

16.3 Носитель пути

Носитель пути — множество всех значений $\gamma([a, b]) \subset \mathbb{R}^m$

17 Длина гладкого пути

Длина гладкого путь — функция l, заданная на множестве гладких путей и удовлетворяющая свойствам:

1. $l \geq 0$
2. l — аддитивна:

$$\forall [a,b] : \forall \gamma [a,b] : \forall c \in [a,b]$$

$$l(\gamma) = l\left(\gamma\Big|_{[a,c]}\right) + l\left(\gamma\Big|_{[c,b]}\right)$$

3. $\forall \gamma, \overline{\gamma}$ — гладкие пути, $C_\gamma, C_{\overline{\gamma}}$ — их носители в $\mathbb{R}^m$

   Если существует такое $T : C_\gamma \to C_{\overline{\gamma}}$ — сжатие, т.е.:

   $\forall M_1, M_2 \in C_\gamma$

   $\rho\left(T\left(M_1\right), T\left(M_2\right)\right) \leq \rho\left(M_1, M_2\right)$

   то $l(\overline{\gamma}) \leq l(\gamma)$

4. γ — линейный путь ($\gamma(t) = t\overline{v} + \overline{u}$)

   $l(\gamma) = \rho(\gamma(a), \gamma(b))$

Замечание

1. Длина хорды меньше длины дуги (это отображение — сжатие)
2. При растяжении длины путей растут

   Всякое сжатие является непрерывным, но для растяжений — **неверно!!!**

3. При движении $\mathbb{R}^m$ длина пути не меняется (это сжатие и растяжение одновременно)

18 Формулы для длины пути: в $\mathbb{R}^m$, в полярных координатах, длина графика

18.1 Длина пути в $\mathbb{R}^m$

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $\gamma \in C^1$

Утверждение: $l(\gamma) = \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\| dt$

18.2 Длина графика

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$

$t \mapsto (t, f(t))$ $(f \in C^1)$ — гладкий путь

$\gamma' = (1, f'(t))$

$\|\gamma'\| = \sqrt{1^2 + (f'(t))^2}$

$l(f) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$

18.3 Длина кривой в полярных координатах

$r = r(\varphi)$

$\gamma : [\varphi_0, \varphi_1] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma(\varphi) = (r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi)$

$\gamma' = (r' \cos \varphi - r \sin \varphi, r' \sin \varphi + r \cos \varphi)$

$\|\gamma'\|^2 = (r')^2 + r^2$

$l(\gamma) = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi$

19 Вариация функции на промежутке

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — это «путь»

Рассмотрим все такие x, что

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

Тогда вариация f на $[a, b]$

$\mathrm{Var}_a^b f = \sup \sum\limits_{i=1}^{n} \left(|f(x_i) - f(x_{i-1})| \right)$

При этом если $f \in C^1 \left([a, b]\right)$, то $\mathrm{Var}_a^b f = \int\limits_a^b |f'(t)| dt$

20 Верхний и нижний пределы

20.1 Верхняя и нижняя огибающая

Пусть x_n — вещественная последовательность.

$y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$ — верхняя огибающая

$z_n = \inf(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$ — нижняя огибащая

Тогда:

1. y_n убывает $(y_n \leq y_{n+1})$
2. z_n возрастают $(z_n \geq z_{n+1})$
3. Если изменить конечное число членов x_n, изменится конечное число элементов y_n и z_n, тогда существуют $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$

20.2 Верхний и нижний пределы

Верхний предел x_n — $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup x_n := \lim y_n \in \overline{\mathbb{R}}$

Нижний предел x_n — $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \inf x_n := \lim z_n \in \overline{\mathbb{R}}$

21 Частичный предел

a — частичный предел x_n ($a \in \overline{\mathbb{R}}$), если

$\exists n_k : x_{n_k} \to a$

Пример

1. $x_n = (-1)^n$, 1 — частнеичный предел

2. $x_n = \sin n$, $\forall a \in [-1, 1]$ — частничный предел

22 Допустимая функция

Пусть $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, где $-\infty < a < b \leq +\infty$ называют допустимой, если

$\forall B : a < B < b : f\big|_{[a,B]}$ — кусочно-непрерывная функция.

23 Несобственный интеграл, сходимость, расходимость

23.1 Определение

Пусть $\Phi(B) = \int\limits_a^B f(x)dx$, где $B \in [a, b)$, по логике f — допустима на $[a, b)$.

Если существует $\lim\limits_{B \to b-0} \Phi(b) \in \overline{\mathbb{R}}$, то этот предел называют несобственным интегралом. Обозначается $\int\limits_a^{\to b} f(x)dx$.

23.2 Сходимость и расходимость

Если предела нет, то несобственного интеграла не существует

Если предел $\lim\limits_{B \to b-0} \Phi(B)$ конечен, то несобственный интеграл называют сходящимся

Если предел бесконечный, то несобственный интеграл расходится.

24 Критерий Больцано–Коши сходимости несобственного интеграла

Интеграл $\int\limits_{a}^{\to b} f(x)dx$ — сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists\Delta \in (a, b) : \forall B_1, B_2 : \Delta < B_1 < B_2 < b : \left|\int\limits_{B_1}^{B_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

Если же

$$\exists\varepsilon : \exists B_n : \overline{B_n} \to b - 0 : \left|\int\limits_{B_n}^{\overline{B_n}} f(x)dx\right| \geq \varepsilon$$

то интеграл расходится

25 Гамма функция Эйлера

$\Gamma(t) = \int\limits_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx,\ t > 0$

26 Числовой ряд, сумма ряда, сходимость, расходимость

26.1 Числовой ряд

Пусть a_n — вещественная последовательность. Тогда

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ называется числовым рядом, а a_n — его членами.

26.2 Сумма ряда

Последовательность $S_N = \sum\limits_{i=1}^{N} a_i$ называют последовательностью частичных сумм. Если последовательность S_n имеет предел, то

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ — сумма ряда.

26.3 Сходимость и расходимость

Если предел существует и конечный, то ряд сходится. Если предела нет или он бесконечный — то расходится.

27 n-й остаток ряда

$\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$ — n-й остаток ряда.

28 Абсолютно сходящийся ряд

Ряд $\sum a_n$ — абсолютно сходится, если

1. $\sum a_n$ — сходится
2. $\sum |a_n|$ — сходится

29 Критерий Больцано–Коши сходимости числового ряда

Сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ равносильна условию

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

30 Преобразование Абеля

Пусть a_k, b_k — числовые последовательности, $A_k = \sum\limits_{j=1}^{k} a_j$ при $k \in \mathbb{N}$. Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

31 Бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{+\infty} p_k := \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} p_k$$

Если предел существует, конечен и не равен нулю, то произведение сходится, иначе расходится.

32 Произведение рядов

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ — числовые ряды, $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ — биекция, $k \longmapsto \gamma(k) = (\varphi(k), \psi(k))$ Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}$$

называется произведением рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$.

33 Произведение степенных рядов

Пусть $\sum a_k \cdot x^k$ и $\sum b_k \cdot x^k$ — степенные ряды. Тогда последовательность $\sum c_k$ задаётся следующим образом:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots a_n b_0$$

и $\sum c_k \cdot x^k$ — произведение степенных рядов.

34 Скалярное произведение, евклидова норма и метрика в $\mathbb{R}^m$

Скалярное произведение $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ — евклидова норма

$\rho(x, y) = \|x - y\|$ — метрика в $\mathbb{R}^m$

35 Окрестность точки в $\mathbb{R}^m$, открытое множество

$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x-a| < r\}$ — открытый шар с центром в точке a и радиусом r

$U(a)$ — окрестность точки a или любой шар $B(a,r)$, где $r > 0$

Множество A открыто, если для любой точки $a \in A : a$ — внутренняя, то есть $\exists U(a) \subset A$

36 Сходимость последовательности в $\mathbb{R}^m$, покоординатная сходимость

Последовательность $x^{(n)} \in \mathbb{R}^m \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \Longleftrightarrow |x^{(n)} - a| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ — сходящаяся последовательность в $\mathbb{R}^m$

$\forall k : 1 \le k \le m : x_k^{(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a_k$ — покоординатная сходимость.

37 Предельная точка, замкнутое множество, замыкание

a — предельная точка множества A, если любая проколотая окрестность точки a имеет непустое пересечение с множеством A

Замкнутое множество содержит все свои предельные точки

Замыкание множества A — объединение самого множества A и всех его предельных точек.

38 Компактность, секвенциальная компактность, принцип выбора Больцано-Вейерштрасса

38.1 Компактность

Семейство множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ называется покрытием множества K, если $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$

Покрытие открыто, если все его множества открыты.

Пусть $K \in X$, (X, ρ) — метрическое пространство. K называется компактным, если из любого открытого покрытия множества K можно извлечь конечное покрытие.

38.2 Секвенциальная компактность

K называется секвенциально компактным, если из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

38.3 Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса

Из всякой ограниченной последовательности точек K в $\mathbb{R}^m$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность b.

39 Координатная функция

$F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ или $F : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^l$ — векторнозначная функция.

Координатные функции f:

$f_i : X \in (\mathbb{R}^m$ или $\mathbb{C}^m) \to (\mathbb{R}$ или $\mathbb{C})$ — её координатная функция.

$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_l(x))$

40 Двойной предел, повторный предел

40.1 Повторный предел

Пусть D_1, $D_2 \subset \mathbb{R}$, a_1 — предельная точка D_1, a_2 — предельная точка D_2

Пусть $D \supset (D_1 \setminus \{a_1\}) \times (D_2 \setminus \{a_2\})$, $f : D \to \mathbb{R}$

Если $\forall x_1 \in D_1 \setminus \{a_1\} : \exists \varphi(x_1) = \lim\limits_{x_2 \to a_2} f(x_1, x_2)$ — конечен, то $\lim\limits_{x_1 \to a_1} \varphi(x_1)$ называют повторным пределом.

Аналогично $\lim\limits_{x_2 \to a_2} \left(\lim\limits_{x_1 \to a_1} f(x_1, x_2) \right)$

40.2 Двойной предел

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2}} f(x_1, x_2) = L$$

$$\forall U(l) : \exists V_1(a_1), V_2(a_2) : \forall x_1 \in \dot{V}_1(a_1), x_2 \in \dot{V}_2(a_2) : f(x_1, x_2) \in U(l)$$

41 Предел по направлению, предел вдоль пути

$\lim\limits_{t \to 0} f(a+tv)$, где $v \in \mathbb{R}^m$, $t \in \mathbb{R}$ — предел по направлению к точке a.

Пусть x_1, x_2, …, x_m — координатные функцию, для всех $x_i : x_i(0) = a_i$.

Тогда $\lim\limits_{t \to 0} f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t))$ — предел вдоль пути к точке a.

42 Предел отображения (определение по Коши и по Гейне)

Пусть задано $f : D \subset X \to Y$ — метрические пространства, a — предельная точка D. Тогда A называют пределом отображения f в точке a, если:

42.1 По Коши

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in D \setminus \{a\} : 0 < \rho_x(x, a) < \delta : \rho_y(f(x), A) < \varepsilon$$

42.2 По Гейне

$$\forall \{x_n\} : x_n \in D \setminus \{a\}, x_n \to a : f(x_n) \to A$$

43 Линейный оператор

Пусть X, Y — линейные пространства над $\mathbb{R}$

$f : X \to Y$ — линейное отображение, если:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \forall x_1, x_2 \in X : f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

По факту, линейное отображение и линейный оператор одно и то же.

44 Отображение бесконечно малое в точке

Пусть $\varphi : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, x_0 — внутрення точка E

φ — бесконечно малое в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^l$

45 o(h) при $h \to 0$

Пусть $\varphi : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, $\mathbf{0} \in \mathrm{Int}\ (E)$

$\varphi(h) = o(h)$ при $h \to 0$, если $\dfrac{\varphi(h)}{|h|}$ — бесконечно малое

46 Отображение, дифференцируемое в точке

Пусть $F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, $a \in \text{Int}\ (E)$, F — дифференцируема в точке a, если

существует линейный оператор $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, существует бесконечно малое $\alpha : E \to \mathbb{R}^l$ при $h \to 0$, что

$$F(a + h) = F(a) + Lh + \alpha(h) \cdot |h|$$

Или существует линейный оператор L и также существует бесконечно малое в точке a отображение φ, что

$$F(x) = F(a) + L(x - a) + |x - a|\varphi(x)$$

47 Производный оператор, матрица Якоби, дифференциал

47.1 Производный оператор

Оператор L — производный оператор [отображение F в точке a]

47.2 Матрица Якоби

Матрица, соответствующая производному оператору называется матрицей Якоби.

47.3 Дифференциал

По определению производной $F(a+h) = F(a) + F'(a)h + o(h)$

Выражение $F'(a)h$ называется дифференциалом отображение F в точке а. Это

1. или линейное отображение $h \longmapsto F'(a)h$
2. или отображение $(a, h) \longmapsto F'(a)h$

48 Частные производные

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $a \in \text{Int } (E)$. Фиксируем $k \in \{1, \dots, m\}$:

$$\varphi_k(u) := f(a_1, \dots, a_{k-1}, u, a_{k+1}, \dots, a_m)$$

Функция от одной переменной задана $V(a_k)$

$\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\varphi_k(a_k + t) - \varphi_k(a_k)}{t} = \varphi_k'(a_k)$ называется частной производной функции f в точке a

49 Классы $C^r(E)$

Пусть E открыто и $E \subset \mathbb{R}^m$, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Тогда

$C^r(E)$ — множество функций $f : E \to \mathbb{R}$, у которых существуют все частные производные порядка $\leq r$ и эти производные непрерывны.

50 Мультииндекс и обозначения с ним

Мультииндекс для $\mathbb{R}^m$ — вектор $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$, все $k_i \in \mathbb{Z}^+$.

$|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ — высота мультииндекса.

$k! = k_1! k_2! \ldots k_m!$

$x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$

$f^{(k)} = f^{(|k|)}_{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}} = \dfrac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial_{x_m}^{k_m}}$

51 Формула Тейлора (различные виды записи)

Пусть $f : C^{r+1}(E)$, $B(a,r) \subset E$, $x \in B(a,r)$

Тогда $\exists \Theta \in [0,1]$, что $f(x) = \sum\limits_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \sum\limits_{|k|=r+1} \frac{f^{(k)}(a+\Theta(x-a))}{k!}(x-a)^k$

И для любителей матана:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{r} \left(\sum_{\substack{k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, \ldots, k_m \geq 0 \\ k_1+k_2+\ldots+k_m = l}} \frac{\partial^l f(a)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} \cdot \frac{1}{k_1! k_2! \ldots k_m!} \cdot h_1^{k_1} h_2^{k_2} \ldots h_m^{k_m} \right) +$$

$$+ \sum_{\substack{k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, \ldots, k_m \geq 0 \\ k_1+k_2+\ldots+k_m = r+1}} \frac{\partial f(a+\Theta(x-a))}{\partial x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}} \cdot \frac{1}{k_1! k_2! \ldots k_m!}$$

52 n-й дифференциал

$$\sum_{n=0}^{r}\left(\frac{1}{n!}\sum\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}\cdot\frac{\partial^n f(a)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\dots\partial x_m^{k_m}}\cdot h_1^{k_1}h_2^{k_2}\dots h_m^{k_m}\right)$$

n-й дифференциал в точке a или однородный многочлен степени n из формулы Тейлора

53 Норма линейного оператора

$||A|| = ||A||_{m,l} = \sup\left(|Ax|\right)$, где $x \in \mathbb{R}^m$ и $|x| = 1$

54 Положительно-, отрицательно-, незнако- определенная квадратичная форма

Квадратичная форма — однородный многочлен второй степени/

$Q(h) = \sum a_{ij} h_i h_j$, $h \in \mathbb{R}^n$

$Q(h)$ — положительно определенная форма, если для любого $h \neq 0 : Q(h) > 0$

$Q(h)$ — отрицательно определенная форма, если для любого $h \neq 0 : Q(h) < 0$

$Q(h)$ — незнако определенная форма, если существует такие h_1 и h_2, что $Q(h_1) > 0$ и $Q(h_2) < 0$

55 Локальный максимум, минимум, экстремум

Пусть $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Int }(D)$

$f \in C^2(\text{Int }(D))$ и $\text{grad }(f(x_0)) = 0$

$Q(h) := \partial^2 f(x_0)$. Тогда:

1. $Q(h)$ — положительно определенная, значит x_0 — точка локального минимума
2. $Q(h)$ — отрицательно определенная, значит x_0 — точка локального максимума
3. $Q(h)$ — неопределенная, значит x_0 — не точка экстремума.

Часть II

Теоремы

56 Теорема Кантора о равномерной непрерывности

56.1 Формулировка

Пусть $f : X \to Y$ — метрические пространства, f непрерывна на X, X — компактно. Тогда f — равномерное непрерывно на X.

56.2 Доказательство (от противного)

Воспользуемся тем свойством, что если X — компактно, то X и секвенциально компактно, поскольку X — метрическое пространство.

От противного:

$\exists \varepsilon > 0 : \delta = \frac{1}{n} : \exists x_n,\ \widetilde{x_n} : \rho(x_n, \widetilde{x_n}) < \frac{1}{n} \Longrightarrow \rho(f(x_n), f(\widetilde{x_n})) \geq \varepsilon$

Тогда выберем сходящуюся подпоследовательность: $x_{n_k} \to a \in X$, $\widetilde{x_{n_k}} \to a \in X$.

Тогда $f(x_{n_k}) \to f(a)$ и $f(\widetilde{x_{n_k}}) \to f(a)$, значит

$\rho(f(x_{n_k}), f(\widetilde{x_{n_k}})) \to 0$ (по неравенству треугольника)

Что и противоречит изначальному условию.

57 Теорема Брауэра о неподвижной точке

57.1 Формулировка

Пусть $f : B(0,1) \subset \mathbb{R}^m \to B(0,1)$ — непрерывная, тогда

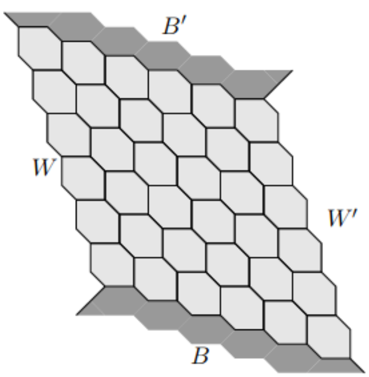
$\exists x_0 : f(x_0) = x_0$

57.2 Доказательство

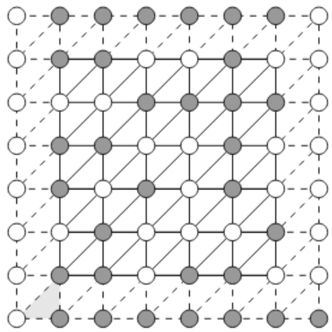
57.2.1 Игра "Гекс"

Пусть есть поле $n \times m$, состоящее из правильных шестиугольников (гексов). Также два игрока на каждом своём ходу красят гексы в белый или чёрный цвет. Тогда для любой раскраски найдётся либо чёрная тропинка, соединяющая верхнюю и нижнюю часть поля, либо белая тропинка, соединяющая левую и правую часть поля.

Доказывается от противного (Кохась сказал, что можно не доказывать, поэтому мы и не будет этого делать)



57.2.2 Сама теорема



Теперь заменим гексы на обычную координатную плоскость, причём игра, по сути, останется такой же. Теперь перейдём к самой теореме.

Шар с лёгкостью заменяется на обычный квадрат $[0,1] \times [0,1]$

Пусть $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ — непрерывна. Тогда теорему можно переформулировать следующим образом:

$\exists a \in [0,1]^2$, что $f(a) = a$

$a \in [0,1]^2$, $a = (a_1, a_2)$

$f(x) \in \mathbb{R}^2$, $f(x) = (f(x)_1, f(x)_2)$

57.2.3 Доказательство

Пусть ρ — функция, заданная на $[0,1]^2 \times [0,1]^2$

$\rho(x,y) = \max\left(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\right)$ — непрерывна на $[0,1]^2$

$x_n \to a, y_n \to b \implies \rho(x_n, y_n) \to \rho(a,b)$

Очевидно, что для любых $x, y : x \neq y \implies \rho(x,y) > 0$

57.2.4 Теперь к самой теореме

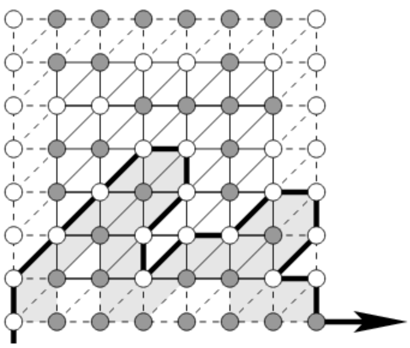
Пусть для любого $x \in [0,1]^2 : f(x) \neq x$. Тогда $\rho(x, f(x)) > 0$, но ρ непрерывно по x и $[0,1]^2$ — компакт, значит по теореме Вейерштрасса существует такое $\varepsilon > 0$, что

$\min\limits_{x \in [0,1]^2} \rho(x, f(x)) = \varepsilon > 0$

По теореме Кантора для этого ε найдётся такая δ (будем считать, что $\delta \cdot \sqrt{2} < \varepsilon$), что

$\forall x, \widehat{x} \in [0,1]^2 : \|x - \widehat{x}\| < \delta \cdot \sqrt{2} \Longrightarrow \|f(x) - f(\widehat{x})\| < \varepsilon$

Берём $\varepsilon > \dfrac{1}{n}$



57.2.5 Доска

Узел $(l,k) \to \left(\dfrac{l}{n}, \dfrac{k}{n}\right) \in [0,1]^2$

$0 \le l, k \le n$

Красим узлы

v — логический узел, $v = (v_1, v_2)$

$c(v) = \min\left\{i : \left\|f\left(\dfrac{v}{n}\right)_i - \dfrac{v_i}{n}\right\| \ge \varepsilon\right\}$

По лемме об игре в гексы есть одноцветная тропинка.

Путь v^0 — начальная точка тропинки, v^N — конечная, а тропинка первого цвета (если это не так, то просто переобозначим)

$v_1^0 = 0$

$f\left(\dfrac{v^0}{n}\right) \in [0,1]^2$, т.е. $f\left(\dfrac{v^0}{n}\right)_1 \ge 0$

$\varepsilon \le \left|f\left(\dfrac{v^0}{n}\right)_1 - \dfrac{v_1^0}{n}\right| = f\left(\dfrac{v^0}{n}\right)_1$

Аналогично для $v_1^N = 1$

$$f\left(\frac{v^N}{n}\right)_1 \leq 1$$

$$f\left(\frac{v^N}{n}\right)_1 - \frac{v_1^N}{n} \leq -\varepsilon$$

$$f\left(\frac{v^0}{n}\right)_1 - \frac{v_1^0}{n} \geq \varepsilon$$

Поскольку для любых x верно, что $|f(x)_1 - x_1| \geq \varepsilon$, то из этого следует, что какой-то прыжок был длиной не меньше 2ε, но такое невозможно, поскольку по условию если $\|x - \widehat{x}\| < \dfrac{1}{n}$, то $\|f(x) - f(\widehat{x})\| < \varepsilon$

58 Теорема о свойствах неопределенного интеграла

Пусть f, g имеют первообразную на $\langle a, b\rangle$. Тогда:

1. $\displaystyle\int f + \int g = \int (f+g)$

   $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\int (\alpha f) = \alpha \int f$

2. $\forall \varphi : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$, φ дифференцируема

   $\displaystyle\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$, где F — первообразная f

3. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$: $\displaystyle\int f(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + C$

4. f, g — дифференцируемы на $\langle a, b\rangle$

   $f' \cdot g$ имеет первообразную на $\langle a, b\rangle$

   Тогда $f \cdot g'$ тоже имеет первообразную и

   $\displaystyle\int f'g = fg - \int fg'$

Доказательство

1. $(F+G)' = f + g$

   $(\alpha F)' = \alpha f$

2. $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t))\varphi'(t)$

3. $\displaystyle\left(\frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta)\right)' = f(\alpha x + \beta)$

4. $(fg)' = f'g + fg'$, т.е. $fg = \displaystyle\int f'g + \int fg'$

59 Интегрирование неравенств. Теорема о среднем

59.1 Интегрирование неравенств

59.1.1 Формулировка

$$f,\, g \in C[a,b],\, f \le g \Rightarrow \int\limits_a^b f \le \int\limits_a^b g$$

59.1.2 Доказательство

Если $0 \le f \le g$

$$\int\limits_a^b f = \sigma(\Pi\Gamma(f,[a,b])) \le \sigma(\Pi\Gamma(g,[a,b])) = \int\limits_a^b g$$

В общем случае

$\Pi\Gamma(f_+,[a,b]) \subset \Pi\Gamma(g_+,[a,b])$

$\Pi\Gamma(f_-,[a,b]) \supset \Pi\Gamma(g_-,[a,b])$

$\sigma(\Pi\Gamma(f_+,[a,b])) - \sigma(\Pi\Gamma(f_-,[a,b])) \le \sigma(\Pi\Gamma(g_+,[a,b])) - \sigma(\Pi\Gamma(g_-,[a,b]))$

$$\int\limits_a^b f \le \int_a^b g$$

59.1.3 Следствия

1. $f \in C[a,b]$

   $$\min_{[a,b]} f \cdot (b-a) \le \int\limits_a^b f \le \max_{[a,b]} f \cdot (b-a)$$

2. $f \in C[a,b]$

   $$\left|\int\limits_a^b f\right| \le \int\limits_a^b |f|$$

   т.к. $-\int\limits_a^b |f| \le \int\limits_a^b f \le \int\limits_a^b |f|$

59.2 Теорема о среднем значении

59.2.1 Формулировка

Пусть f непрерывна на $[a, b] \Rightarrow \exists c \in [a, b] : \int\limits_a^b f = f(c)(b-a)$

59.2.2 Доказательство 1 (Кохась порофлил)

Просто берём прямую и двигаем её сверху вниз, тем самым по теореме о бутерброде мы найдём такое значение c, что $\int\limits_a^b f = f(c)(b-a)$

59.2.3 Нормальное доказательство

Если $a = b$ — очевидно.

Пусть $a < b$

$\min f \le \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f \le \max f$

по теореме Больцано-Коши о промежуточном значении

$\exists c : \frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b f = f(c)$

$\int\limits_a^b f = f(c)(b-a)$

60 Теорема Барроу

60.1 Определение

$f \in C[a,b]$, $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$

$\varphi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ — интеграл с верхним переменным пределом

60.2 Теорема (Барроу)

В условиях определения оказывается, что φ — дифференцируема на $[a,b]$ и $\varphi'(x) = f(x)$ для любого $x \in [a,b]$

60.3 Доказательство

Фиксируем x и при $y > x$

$$\lim_{y\to x+0} \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} = \lim_{y\to x+0} \frac{1}{y-x} \left(\int\limits_a^y f - \int\limits_a^x f \right) = \lim_{y\to x+0} \frac{1}{y-x} \int\limits_x^y f = \lim_{y\to x+0} f(c) = f(x)$$

$\exists c \in [x,y]$ — следует из теоремы о среднем значении.

Аналогично доказываем, что $\lim\limits_{y\to x-0} = \ldots = f(c)$

60.4 Замечания

- Интеграл с нижним переменным пределом

  $\psi(x) = \int\limits_x^b f$. Тогда $\psi'(x) = -f$
- Эта теорема также доказывает теорему о существовании неопределенного интеграла при условии, что функция непрерывна.

61 Формула Ньютона-Лейбница, в том числе для кусочно-непрерывных функций

61.1 Формулировка теоремы

Пусть f непрерывна (кусочно-непрерывна) на $[a, b]$, F — первообразная (почти) f.

Тогда $\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$

61.2 Доказательство для непрерывных функций

φ (из теоремы Барроу) — тоже первообразная, значит

$\exists c : F = \varphi + c$

$F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int\limits_a^b f - \int\limits_a^a f = \int\limits_a^b f$

$\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$

При $a > b$ $\int\limits_a^b f \overset{\text{def}}{=} -\int\limits_b^a f$

61.3 Для кусочно-непрерывных функций

Для кусков функции распишем формулу Ньютона-Лейбница, получим телескопическую сумму, останется только $F(b) - F(a)$

62 Свойства определенного интеграла: линейность, интегрирование по частям, замена переменных

62.1 Линейность определенного интеграла

62.1.1 Формулировка

$f, g \in C[a,b]$, α, $\beta \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$$

62.1.2 Доказательство

Из формулы Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Для F, $G : \alpha F + \beta G$ — первообразная $\alpha f + \beta g$

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))\Big|_a^b = \alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(a) - \beta G(a) = \alpha(F(b) - F(a)) + \beta(G(b) - G(a)) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$$

62.2 Интегрирование по частям

62.2.1 Формулировка

$f, g \in C^1[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'g$$

62.2.2 доказательство

Из свойств для неопределенного интеграла

$$\int\limits_a^b fg' = \left(\int fg'\right)\Big|_a^b = \left(fg - \int f'g\right)\Big|_a^b = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'g$$

62.3 Замена переменных

62.3.1 Формулировка

$f \in C(\langle a, b\rangle)$

$\varphi : \langle \alpha, \beta\rangle \to \langle a, b\rangle$, $\varphi \in C^1(\langle a, b\rangle)$, $[p, q] \in \langle \alpha, \beta\rangle$

Тогда $\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)\ dx$

62.3.2 Доказательство

Пусть F — первообразная f

$F(\varphi(t))$ — первообразная $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на $[p, q]$

Тогда обе части: $F(\varphi(q)) - F(\varphi(p))$

62.3.3 Замечание

1. Возможен случай $\varphi([p, q]) \supset [\varphi(p), \varphi(q)]$

2. В другую сторону
   $\int\limits_u^v f(x)\ dx = \int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt$
   Тогда подбираем такие p и q, что когда t ходит от p до q и $\varphi(t)$ ходит от v до u

63 Интегральное неравенство Чебышева. Неравенство для сумм

63.1 Интегральное неравенство Чебышева

63.1.1 Формулировка

$I_f = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$

$f, g \in C[a,b]$ — монотонно возрастают

Тогда $I_f \cdot I_y \le I_{fg}$

$\int\limits_a^b f \cdot \int\limits_a^b g \le (b-a)\int\limits_a^b fg$ — неравенство Чебышева

63.1.2 Доказательство

$\forall x, y \in [a,b]\ (f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \ge 0$

Проинтегрируем по переменной x по отрезку $[a,b]$

$f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y) \ge 0$

$\int\limits_a^b fg - f(y)\int\limits_a^b g - \int\limits_a^b g(y) + (b-a)f(y)g(y) \ge 0$ (мы домножили все слагаемые на $(a-b)$)

$I_{fg} - f(y)I_g - I_f g(y) + f(y)g(y) \ge 0$

Интегрируем по y на $[a,b]$

$I_{fg}(b-a) - I_g\int\limits_a^b f(y) - I_f\int\limits_a^b g(y) + \int\limits_a^b fg \ge 0$

Снова поделим на $(b-a)$

$I_{fg} - I_f \cdot I_g - I_f \cdot I_g + I_{fg} \ge 0$

$I_{fg} \ge I_f \cdot I_g$

63.2 Неравенство для сумм

63.2.1 Формулировка для сумм

Пусть задана последовательность $a_n : a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ и $b_n : b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$. Тогда

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$

63.2.2 Доказательство

По неравенству Чебышёва

$I_{fg} \geq I_f I_g$

Пусть $I_f = \frac{1}{n}\int\limits_0^n f = \frac{1}{n}\sum a_k$

$f(x) = a_{[x+1]}$, $x \in [0, n]$ (где $[x]$ — округление к ближайшему целому вниз)

$I_g = \frac{1}{n}\int\limits_0^n g = \frac{1}{n}\sum b_k$

$g(x) = b_{[x+1]}$, $x \in [0, n]$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{n}\sum a_k b_k \geq \left(\frac{1}{n}\sum a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum b_k\right)$$

64 Иррациональность числа π

64.1 Вспомогательный интеграл

Пусть $H_n = \dfrac{1}{n!}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\dfrac{\pi^2}{4}-t^2\right)^n \cos t\ dt$

$$H_n = \begin{bmatrix} f=\left(\dfrac{\pi^2}{4}-t^2\right)^n & g=\sin t \\ f'=-2nt\left(\dfrac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-1} & g'=\cos t \end{bmatrix}$$

$$H_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^n \sin t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{2n}{n!}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} t\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-1}\sin t\ dt$$

$$H_n = \frac{2n}{n!}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} t\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-1}\sin t\ dt$$

$$H_n = \begin{bmatrix} f=t\left(\dfrac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-1} & g=-\cos t \\ f'=\left(\dfrac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-1}-2(n-1)t^2\left(\dfrac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-2} & g'=\sin t \end{bmatrix}$$

$$f'=\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-1}+2(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-1}-2(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-1}-2(n-1)t^2\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-2}$$

Вынесем общие части за скобки

$$f'=(2n-1)\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-1}-\frac{\pi^2}{2}(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-2}$$

$$\frac{2t}{(n-1)!}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-1}(-\cos t)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}+\frac{2}{(n-1)!}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left((2n-1)\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-1}-\frac{\pi^2}{2}(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-2}\right)\cos t\,dt$$

$$H_n=(4n-2)\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-1}\cos t\ dt-\pi^2\frac{1}{(n-2)!}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-2}\cos t\ dt$$

Пусть $n \geq 2$, тогда

$$H_n=(4n-2)H_{n-1}-\pi^2H_{n-2}=\ldots+H_2+\ldots+H_0$$

$$H_0=2$$

$$H_1 = 2 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{t}{f} \cdot \frac{g'}{\sin t} = 2t(-\cos t)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + 2 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \; dt = 4$$

64.2 Теорема

Число π^2 — иррациональное (и тогда π тоже)

64.3 Доказательство (от противного)

Пусть $\frac{1}{n!} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t = P_n(\pi^2)$, где P_n — многочлен с целыми коэффициентами.

$\deg P \leq n$

Этого не может быть

Пусть $\pi^2 = \frac{m}{k} \in \mathbb{Q}$. Тогда $k^n P_n\left(\frac{m}{k}\right)$ — целое число

Значит $k^n \cdot P_n\left(\frac{m}{k}\right) \geq 1$, т.е.

$$\frac{k^n}{n!} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t \; dt \geq 1$$

$$\frac{k^n}{n!} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t \; dt \leq \frac{k^n}{n!} \left(\frac{\pi^2}{4}\right)^n \cdot \pi \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Получили противоречие

65 Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

65.1 Формулировка

Пусть $\langle a, b\rangle \in \overline{\mathbb{R}}$, $f \in c^{n+1}(\langle a, b\rangle)$

x, $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\ dt$$

65.2 Доказательство (по индукции)

- $n = 0 : f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)\ dt$

  По формуле Ньютона-Лейбница

- Переход от n к $n+1$

  $$f(x) = T_n + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\ dt = \begin{bmatrix} u' = (x-t)^n & u = -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \\ v = f^{(n+1)} & v' = f^{(n+2)} \end{bmatrix}$$

  $$T_n + \frac{1}{n!}\left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)} \cdot f^{(n+1)}(t)\Bigg|_{t=x_0}^{t=x} + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \cdot f^{(n+2)}(t)\ dt\right)$$

  $$T_n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\ dt$$

  $$f(x) = T_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\ dt$$

66 Лемма об ускоренной сходимости

66.1 Формулировка

Пусть f, $g : D \to \mathbb{R}$, a — предельная точка $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$

Пусть также существует $U(a) : f \neq 0$ и $g \neq 0$ в $\dot{U}(a)$

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{y\to a} g(x) = 0$ (Также возможен вариант, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{y\to a} g(x) = +\infty$)

Тогда для любой последовательности $x_k \to a$, $x_k \in D$, $x_k \neq a$ найдётся такая последовательность $y_k \to a$ ($y_k \in D$, $y_k \neq a$), что

$\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{f(y_k)}{g(x_k)} = 0$ и $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{f(y_k)}{f(x_k)} = 0$

66.2 Доказательство

1. Пусть f, $g \to 0$, тогда можно добиться того, что $\left|\dfrac{f(y_k)}{f(x_k)}\right| < \dfrac{1}{k}$ и $\left|\dfrac{f(y_k)}{g(x_k)}\right| < \dfrac{1}{k}$

   Тогда найдётся такое K, что $\left|\dfrac{f(x_k)}{f(x_{2019})}\right| < \dfrac{1}{2019}$ для любых $k > K \Longrightarrow y_{2019} = x_k$

   Продолжаем так до бесконечности

   $\left|\dfrac{f(x_i)}{f(x_k)}\right| < \dfrac{1}{k}$

   $\exists i > k \left|\dfrac{f(x_i)}{f(x_k)}\right| < \dfrac{1}{k} \Rightarrow y_k := x_i$

   Теперь пусть $\left|\dfrac{f(x_i)}{g(x_k)}\right| < \dfrac{1}{k}$ при $x \to +\infty$ и $\left|\dfrac{f(x_i)}{g(x_k)}\right| < \dfrac{1}{k}$ также при $i \to +\infty$

   Тогда для каждого k найдётся такое K, что для всех $i > K$ выполняется сразу оба условия, значит присвоим $y_k := x_i$, где i — какое-то число большее K.

2. Пусть f, $g \to +\infty$. Считаем, что $f > 0$ и $g > 0$. Пусть $f(x_k)$ и $g(x_k)$ — возрастающие последовательности (остальные случаи рассматриваются аналогично). Тогда

   $i = \min n : \begin{cases} f(x_n) \geq \sqrt{g(x_k)} \\ f(x_n) \geq \sqrt{f(x_k)} \end{cases}$

   Возьмём $y_k := x_{i-1}$

   Тогда $\dfrac{f(y_k)}{f(x_k)} < \dfrac{\sqrt{f(x_k)}}{f(x_k)} = \dfrac{1}{\sqrt{f(x_k)}} \to 0$

   $\dfrac{f(y_k)}{g(x_k)} < \dfrac{\sqrt{g(x_k)}}{g(x_k)} = \dfrac{1}{\sqrt{g(x_k)}} \to 0$

67 Правило Лопиталя (с леммой)

67.1 Формулировка

Пусть f, g — дифференцируемы на $(a, b\rangle$, $g' \neq 0$ на $(a, b\rangle$ и существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

Не стоит забывать, что $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ — неопределенно.

Тогда $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$

67.2 Пример из жизни

Пусть f, $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

Пусть f — сколько прошёл студент,

g — сколько прошёл Кохась.

Тогда f, $g \to +\infty$, но если сравним скорости f' и g', то легко узнать, на сколько больше прошёл Кохась, чем студент.

67.3 Доказательство

$g' \neq 0 \Rightarrow g'$ сохраняет знак (по теореме Дарбу), значит g — строго монотонна

1. $g \to +\infty \Rightarrow g > 0$ в окрестности точки a
2. $g \to 0$,

   $g \uparrow \Rightarrow g > 0$ в окрестности точки a

   $g \downarrow \Rightarrow g < 0$ в окрестности точки a

67.4 Собственное доказательство

Берём последовательность $y_k \to a$ из леммы.

По теореме Коши $\exists \xi_k \in [x_k, y_k]$ (не факт, что $x_k \leq y_k$)

$$\frac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}$$

Домножаем правую и левую часть на $\dfrac{g(x_k) - g(y_k)}{g(x_k)}$

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \frac{f(y_k)}{g(x_k)} + \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}\left(1 - \frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right)$$

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} \to \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}$$

68 Теорема Штольца

68.1 Формулировка

Пусть x_n, $y_n \to 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$

Тогда если существует $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \in [0, +\infty]$

Также y_n — строго монотонна (если $a = 0$, то x_n — тоже строго монотонна)

Тогда $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = a$

68.2 Доказательство

1. Пусть $a > 0$, a – конечное, тогда можно считать, что $y_n \geq y_{n-1}$ из монотонности и $x_n \geq x_{n-1}$ при больших n.

   Заметим обидный факт, что $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$ и $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a:c}{b:d}$, но $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} \neq \dfrac{a+c}{b+d}$. Кохасю обидно, поэтому будем считать, что $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d}$. Если вы с этим не согласны, то окей, но заметим, что справедливо:

   $0 < \alpha < \dfrac{a}{b} < \beta$

   $0 < \alpha < \dfrac{c}{d} < \beta$

   $\alpha < \dfrac{a+c}{b+d} < \beta$

   Вернёмся к самой теореме

   $\forall \varepsilon > 0 : (\varepsilon < a) : \exists N_1 : \forall n > N \geq N_1$

   $a - \varepsilon < \dfrac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} < a + \varepsilon$

   $a - \varepsilon < \dfrac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}} < a + \varepsilon$

   $\vdots$

   $a - \varepsilon < \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$

   Складываем всё

   $a - \varepsilon < \dfrac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < a + \varepsilon$

   Устремляем n к $+\infty$

$a - \varepsilon \le \dfrac{x_N}{y_N} < a + \varepsilon$

2. Если $a = +\infty$ — аналогично

   $\forall E > 0 : \exists N_1 : \forall n > N \ge N_1 : \dfrac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} > E$

   $E < \dfrac{x_n - x_N}{y_n - y_N}$

   $E \le \dfrac{x_N}{y_N}$

3. Если $a = 0$, то $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{y_n}{x_n} = +\infty$

4. Если $a < 0$ — меняем знаки

69 Пример неаналитической функции

69.1 Нелитическая функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

69.2 Утверждение

f — бесконечное дифференцируема на $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} : \forall k \in \mathbb{N} : \exists f^{(k)}(x))$

69.3 Доказательство

Если $x \neq 0$ — то очевидно

Пусть $x = 0$, тогда для любого k существует $f^{(k)}(0) = 0$

Из теоремы Лагранжа:

Если $\exists \lim\limits_{x \to a+0} f'(x) = \lim\limits_{x \to a-0} f'(x) = L$, где $L \in \mathbb{R}$, то

f — дифференцируема и $f'(a) = L$

$f'(x) = \dfrac{2}{x^3} \cdot e^{\left(-1/x^2\right)}$, $x \neq 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1/x^3}{e^{(1/x^2)}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{-3/x^4}{(-2/x^3)e^{(1/x^2)}} = \lim_{x \to 0} \frac{3}{2} \cdot \frac{1/x}{e^{(1/x^2)}} = \lim_{x \to 0} \frac{-1/x^2}{-(2/x^3)e^{(1/x^2)}} = \lim_{x \to 0} \frac{3}{4} \cdot x \cdot e^{\left(-1/x^2\right)} \to 0$$

<u>Итого</u>

$f'(x) = \dfrac{2}{x^3} \cdot e^{\left(-1/x^2\right)}$, $x \neq 0$

$f'(0) = 0$

70 Интеграл как предел интегральных сумм

70.1 Формулировка

Пусть $f \in C[a, b]$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \mathcal{T} : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ ранга меньше δ и $\forall \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - \int\limits_a^b f(x)\ dx \right| < \varepsilon$$

70.2 Доказательство

1. Поделим на отрезки в соответствии с дроблением. Очевидно, что $\int\limits_a^b f(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$. Тогда рассмотрим разность
$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)\ dx - \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\ dx$$
$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (f(\xi_k) - f(x)\ dx) \to 0, \text{ т.к. } x_{k-1} \to x_k, \text{ а } \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

2. По теореме Кантора о равномерной непрерывности

   $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ «Китайский ε»

   Берём $x_0, x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$
$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - \int\limits_a^b f(x)\ dx \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)\ dx - \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\ dx \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (f(\xi_k) - f(x))\ dx \right| \leq$$
$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f(\xi_k) - f(x)|\ dx$$
   $|\xi_k - x_k| < \delta$ для любых $[x_{k-1}, x_k]$ (по условию)
$$\leq \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\varepsilon}{b-a}\ dx = \int\limits_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\ dx = \varepsilon$$

71 Теорема об интегральных суммах для центральных прямоугольников

71.1 Формулировка

Пусть $f \in C^2[a,b]$ и $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ и $\delta := \max|x_k - x_{k-1}|$

Также $\xi_i = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$

Тогда

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)(x_i - x_{i-1}) - \int\limits_a^b f(x)\ dx\right| \le \frac{\delta^2}{8} \cdot \int\limits_a^b |f''|$$

71.2 Доказательство

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int\limits_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x)dx + \int\limits_{\xi_i}^{x_i} f(x)dx = \begin{bmatrix} u = f & u' = f' \\ v' = 1 & v = x - x_{i-1} \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} u = f & u' = f' \\ v' = 1 & v = x - x_i \end{bmatrix}$$

$$f(x)(x - x_{i-1})\Big|_{x=x_{i-1}}^{x=\xi_i} - \int\limits_{x_{i-1}}^{\xi_i} f'(x)(x - x_{i-1})\ dx + f(x)(x - x_i)\Big|_{x=\xi_i}^{x=x_i} - \int\limits_{\xi_i}^{x_i} f'(x)(x - x_i)\ dx = f(\xi_i)(\xi_i - x_{i-1}) +$$

$$f(\xi_i)(x_i - \xi_i) - \left(f'(x)\frac{(x - x_{i-1})^2}{2}\Big|_{x=x_{i-1}}^{x=\xi_i} - \int\limits_{x_{i-1}}^{\xi_i} f''(x)\frac{(x - x_{i-1})^2}{2}\ dx + f'(x)\frac{(x - x_i)^2}{2}\Big|_{\xi_i}^{x_i} - \int\limits_{\xi_i}^{x_i} f''(x)\frac{(x - x_i)^2}{2}\right) =$$

$$f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)\ \varphi(x)\ dx$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - x_{i-1})^2}{2},\ x \in [x_{i-1}, \xi_i] \\ \dfrac{(x - x_i)^2}{2}, x \in [\xi_i, x_i] \end{cases}$$

Тогда $\varphi(x)$ определена на $[a,b]$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)(x_i - x_{i-1}) - \int\limits_a^b f(x)\ dx\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\left(f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx\right)\right| = \left|\sum\left(-\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)\varphi(x)\ dx\right)\right| =$$

$$\left|\int\limits_a^b f''(x)\varphi(x)\ dx\right| \le \int\limits_a^b |f''(x)|\varphi(x)\ dx \le \frac{\delta^2}{8}\int\limits_a^b |f''|$$

Поскольку $\max\varphi(x) = \dfrac{(\frac{\delta}{2})^2}{2} = \dfrac{\delta^2}{8}$

72 Теорема о формуле трапеций, формула Эйлера–Маклорена

72.1 Формулировка теоремы о формуле трапеций

Пусть $f \in C^2[a,b]$ $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ и $\delta = \max(x_i - x_{i-1})$

Тогда $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1}) - \int\limits_a^b f(x)\ dx\right| \le \dfrac{\delta^2}{8}\int\limits_a^b |f''|$

72.2 Доказательство

$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \begin{bmatrix} u = f & u' = f' \\ v' = 1 & v = x - \xi_i \end{bmatrix}$, причём ξ_i — середина промежутка $[x_{i-1}, x_i]$.

$f(x)(x-\xi_i)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)(x-\xi_i)dx = f(x_i)(x_i-\xi_i) - f(x_{i-1})(x_{i-1}-\xi_i) - \left(f'(x)\dfrac{(x-\xi_i)^2}{2}\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f''\dfrac{(x-\xi_i)^2}{2}dx\right) =$

$(f(x_i) + f(x_{i-1}))\dfrac{x_i - x_{i-1}}{2} - \left(f'(x)\left(-\dfrac{1}{2}\psi(x)\right)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f''\left(-\dfrac{1}{2}\psi(x)\right)\ dx\right)$

$\begin{bmatrix} u = f' & u' = f'' \\ v' = (x - \xi_i) & \psi(x) = (x - x_{i-1})(x_i - x) \end{bmatrix}$ $x \in [x_{i-1}, x_i]$ на $[a,b]$

$v = -\dfrac{1}{2}\psi(x)$

$(f(x_i) + f(x_{i-1})) \cdot \dfrac{(x_i - x_{i-1})}{2} - \dfrac{1}{2}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f''\psi(x)\ dx$

$\left|\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot (x_i - x_{i-1}) - \int\limits_a^b f(x)\ dx\right| = \left|\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1}) - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ dx\right)\right|$

$\left|\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{2}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)\psi(x)dx\right| = \dfrac{1}{2}\int\limits_a^b |f''(x)|\,\psi(x)\ dx \le \dfrac{\delta^2}{8}\int\limits_a^b |f''|$

72.3 Простейший случай формулы Эйлера-Маклорена

$m, n \in \mathbb{Z}, f \in C^2[m,n]$. Тогда

$\int\limits_m^n f(x)\ dx = (\sum\limits_{i=m}^{n})^{\triangledown} f(i) - \dfrac{1}{2}\int\limits_m^n f''(x)\{x\}(1 - \{x\})\ dx$

x — дробная часть числа x, $\triangledown$ — крайние суммы, т.е. крайние члены берутся с множителем 0.5.

Очевидно^{TM}, что это формула трапеции.

$[a, b] \leftrightarrow [m, n]$ $x_0 = m, x_1 = m + 1, \ldots, x_{last} = n$

$\{x\}(1 - \{x\})$ — парабола между двумя целыми точками

73 Асимптотика степенных сумм

$f(x) = x^p$, $p \neq -1$

$$1^p + 2^p + \ldots + n^p = \int\limits_1^n x^p dx + \frac{n^p + 1}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_1^n (x^p)'' \{x\} (1 - \{x\}) dx$$

$$1^p + 2^p + \ldots + n^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \frac{1}{2} + \frac{p(p-1)}{2}\int\limits_1^n x^{p-2} \{x\} (1 - \{x\})$$

$$1^p + 2^p + \ldots + n^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \mathcal{O}(\max(1, n^{p-1}))$$

74 Асимптотика частичных сумм гармонического ряда

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=\int\limits_1^n\frac{1}{x}dx+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}+\int\limits_1^n\frac{1}{x^3}\{x\}(1-\{x\})dx$$

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=\ln n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}+\int\limits_1^n\frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^3}dx$$

Интеграл постоянной возрастает и ограничен сверху $\frac{1}{4}\int\limits_1^n\frac{1}{x^3}dx=-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{8}\Big|_{x=1}^{x=n}<\frac{1}{8}$

Всё, что правее логарифма — постоянная Эйлера или γ

Итого

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+o(1)$$

75 Формула Валлиса

75.1 Формулировка

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n}=\frac{\pi}{2}$$

75.2 Доказательство

$$I_n=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^n x dx=\begin{bmatrix} u=sin^{n-1}x & u'=(n-1)\sin^{n-2}x\cos x\\ v'=\sin x dx & v=-\cos x\end{bmatrix}$$

$$-\cos x\sin^{n-1}x\Big|_0^{\pi/2}+(n-1)\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\cos^2 x dx=(n-1)\int\limits_0^{\pi/2}(\sin^{n-2}x-\sin^n x)dx=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$$

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

$$I_0=\int\limits_0^{\pi/2}1\ dx=\frac{\pi}{2}$$

$$I_1=\int\limits_0^{\pi/2}\sin x\ dx=-\cos x\Big|_0^{\pi/2}=1$$

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-4}I_{n-4}=\dots$$

Посчитаем отдельно для случая чётного и нечётного n

$$I_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\ldots\cdot 1=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Так как при $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\quad \sin^{2k+1}x\le\sin^{2k}x$

То и $I_{n+1}\le I_n$

Также, $I_{2n+1}\le I_{2n}\le I_{2n-1}$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\le\frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\le\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

$$\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\le\frac{\pi}{2}\le\frac{1}{2n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$$

Разность правой и левой части стремится к 0, значит

$$\exists \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2k}\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

76 Формула Стирлинга

76.1 Формулировка

$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ при $n \to +\infty$

76.2 Доказательство

$$\sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} = \lim_{k\to+\infty}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2k)}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\sqrt{\pi} = \lim_{k\to+\infty}\frac{(2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2k))^2}{(2k)!}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}} = \lim_{k\to+\infty}\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k)!}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\sqrt{\pi} = \lim_{k\to+\infty}\frac{2^{2k}(k^k\cdot e^{-k}\sqrt{k}\cdot c)^2}{\sqrt{k}(2k)^{2k}e^{-2k}\sqrt{2k}\cdot c} = \lim_{k\to+\infty}\frac{2^{2k}\cdot k^{2k}\cdot e^{-2k}\cdot k\cdot c^2}{\sqrt{2}\cdot k\cdot 2^{2k}\cdot k^{2k}\cdot e^{-2k}\cdot c} = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

$c = \sqrt{2\pi}$

77 Теорема о вычислении аддитивной функции промежутка по плотности

77.1 Формулировка

Пусть заданы f и ϕ на $\langle a, b\rangle$, f — непрерывна, ϕ — аддитивная функция промежутка, f — плотность ϕ

Тогда $\forall [p, q] \subset \langle a, b\rangle$ $\phi([p, q]) = \int\limits_p^q f(x)\ dx$

77.2 Доказательство

Можно принять за факт, что у нас дан промежуток $[a, b]$ (если это не так, то уменьшим его чуть-чуть и переобозначим)

$F(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ \phi([a, x]), & x > a \end{cases}$ — первообразная f

$\inf\limits_{[x,x+h]} f \le \dfrac{\phi([x, x+h])}{h} \le \sup\limits_{[x,x+h]} f$

$x : F'_+(x) = \lim\limits_{h\to 0+0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim \dfrac{\phi([a, x+h]) - \phi([a, x])}{h} = \lim \dfrac{\phi([x, x+h])}{h} = \lim\limits_{h\to 0+0} f(x + \Theta h) = f(x)$, где

$0 \le \Theta \le 1$

$\Theta = \Theta(h)$

Аналогично посчитаем и $F'_-(x)$

$\phi([p, q]) = F(q) - F(p) = \int\limits_p^q f(x)\ dx$

78 Обобщенная теорема о плотности

78.1 Формулировка

Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $\phi : \text{Segm } \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — аддитивная функция.

Пусть $\forall \Delta \subset \text{Segm } \langle a, b\rangle$ заданы числа m_Δ, M_Δ.

1. $m_\Delta \cdot l(\Delta) \leq \phi(\Delta) \leq M_\Delta \cdot l(\Delta)$
2. $\forall x \in \Delta \ m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$
3. $\forall x \in \langle a, b\rangle \ M_\Delta - m_\Delta \to 0$, если $l(\Delta) \to 0$, $x \in \Delta$

3-й пункт можно переформулировать по-другому:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \Delta \in \text{Segm } \langle a, b\rangle : x \in \Delta : l(\Delta) < \delta \Longrightarrow |M_\Delta - m_\Delta| < \varepsilon$

Тогда f — плотность ϕ (и $\forall [p, q] \ \phi([p, q]) = \int\limits_p^q f(x)\ dx$)

78.2 Доказательство

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \phi([a, x]), & x > a \end{cases}$$

Дифференцируем F_+

$$m_\Delta \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq M_\Delta$$

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{n} - f(x)\right| \leq |M_\Delta - m_\Delta| \xrightarrow[h \to 0]{} 0,\ \Delta = [x, x+h]$$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} f(x)$$

Аналогично и с F_-

79 Площадь криволинейного сектора: в полярных координатах и для параметрической кривой

79.1 Формулировка для полярных координат

Пусть $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi)$

$\rho : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ — непрерывная, $\rho \geq 0$

$A = \{(r, \phi) : \phi \in [\alpha, \beta]\ 0 \leq r \leq \rho(\phi)\}$ — «Аналог ПГ»

Тогда $\sigma(A) = \dfrac{1}{2} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\phi)\ d\phi$

79.2 Доказательство

$[\alpha, \beta] \longmapsto \sigma(A)$ — функция промежутка Segm $[\alpha, \beta]$ — аддитивная функция.

Проверим, что $\dfrac{1}{2}\rho^2(\phi)$ — плотность

$[\gamma, \delta]$ — строим $A_{\gamma,\delta}$

$\sigma(A_{\gamma,\delta}) \leq \sigma(\text{Круговой сектор } (0, \max\limits_{[\gamma,\delta]} \rho(\phi), [\gamma, \delta]))$

$\sigma(A_{\gamma,\delta}) \geq \sigma(\text{Круговой сектор } (0, \min\limits_{[\gamma,\delta]} \rho(\phi), [\gamma, \delta]))$

$\min\limits_{[\gamma,\delta]} \dfrac{1}{2}\rho^2(\phi) l([\gamma, \delta]) \leq \sigma(A_{\gamma,\delta}) \leq \max\limits_{[\gamma,\delta]} \dfrac{1}{2}\rho^2(\phi) l([\gamma, \delta])$

По определению плотности получили то, что хотели

(если непонятно, откуда берётся $\dfrac{1}{2}\rho^2(\phi)$, то гуглим форму площади круга)

79.3 Формулировка для параметрической кривой

$\sigma(A) = \dfrac{1}{2} \int\limits_{t_0}^{t_1} (y'(t)x(t) - x'(t)y(t))dt$

79.4 Доказательство

Пусть дано $(x(t), y(t)), t \in [a, b]$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$

Итого:

$r(t) = x(t)^2 + y(t)^2$ и $\varphi(t) = \operatorname{arctg}\dfrac{y(t)}{x(t)}$ — параметрическое задание того же пути в полярных координатах

$\sigma(A) = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2(\varphi)d\varphi = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left(x(t)^2 + y(t)^2\right)\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y(t)}{x(t)}\right)dt$

$\dfrac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}(x^2 + y^2)\dfrac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \dfrac{y'x - x'y}{x^2}dt = \dfrac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\left(y'(t)x(t) - x'(t)y(t)\right)dt$

80 Изопериметрическое неравенство

80.1 Формулировка

Пусть G — замкнутая выпуклая фигура в $\mathbb{R}^2$

$\operatorname{diam} G \leq 1$ ($\operatorname{diam} G = \sup\limits_{x,y \in G} \rho(x,y)$)

Тогда $\sigma(G) \leq \dfrac{\pi}{4}$

80.2 Доказательство

Поскольку G выпукла, значит к ней можно провести касательные $f(x)$ и $g(x)$

$f(x) = \sup \{t : [(x,0),(x,t)] \cap G = \varnothing\}$

$g(x)$ — аналогично, только inf

$\varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$r(-\dfrac{\pi}{2}) = r(\dfrac{\pi}{2}) = 0$

$r(\varphi)$ — непрерывная функция от φ

$$\sigma(G) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-\pi/2}^{0} + \int\limits_{0}^{\pi/2}\right)$$

Проведём какую-нибудь прямую AB, полностью лежащую в фигуре G, а также отметим какую-нибудь точку O, что $OA \perp OB$. Тогда

$$\sigma(G) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2} OA^2 + OB^2$$

$$\sigma(G) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2} r^2(\varphi - \frac{\pi}{2}) + r^2(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2} AB^2\, d\varphi \leq \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2} 1\, d\varphi = \frac{\pi}{4}$$

81 Вычисление длины гладкого пути

81.1 Формулировка

Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, $\gamma \in C^1$ — путь.

Тогда $l(\gamma) = \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\| dt$

81.2 Доказательство

Будем дополнительно считать, что $\gamma' \neq 0$ и что γ — инъективно. Если это не так, то разобьём на несколько частей, и каждую из них посчитаем отдельно.

Пусть $\phi : \text{Segm } [a,b] \to \mathbb{R}$ и $[p,q] \mapsto l\left(\gamma|_{[p,q]}\right)$

Пусть ϕ — аддитивная функция промежутка по следующей аксиоме:

$\forall [a,b]$ и $\forall \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ и $\forall c \in (a,b) \Longrightarrow l(\gamma) = l\left(\gamma|_{[a,c]}\right) + l\left(\gamma|_{[c,b]}\right)$

Проверим, что $\|\gamma'(t)\|$ — её плотность

Это значит, что $\forall \Delta : \exists m_\Delta, M_\Delta$ и выполняются следующие свойства:

1. $l(\Delta) m_\Delta \leq \phi(\Delta) \leq M_\Delta l(\Delta)$
2. $m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$, $x \in \Delta$
3. $\Delta \to x \Longrightarrow M_\Delta - m_\Delta \to 0$

$\Delta \subset [a,b]$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_m(t))$

$m_i(\Delta) = \min\limits_{t \in \Delta} |\gamma_i'(t)|$

$M_i(\Delta) = \max\limits_{\Delta} |\gamma_i'(t)|$

$m_\Delta = \sqrt{\sum m_i(\Delta)^2}$

$M_\Delta = \sqrt{\sum M_i(\Delta)^2}$

Очевидно, что при любом $t \in \Delta \Longrightarrow m_\Delta \leq \|\gamma'(t)\| \leq M_\Delta$, где $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sum (\gamma_i'(t))^2}$

При $\Delta \to x$ выражение $M_\Delta - m_\Delta \to 0$ по непрерывности $\gamma_i'(t)$ в точке $t = x$.

Проверим, что $m_\Delta l(\Delta) \leq \phi(\Delta) \leq M_\Delta l(\Delta)$

$\widetilde{\gamma} : \Delta \to \mathbb{R}^m, \widetilde{\gamma}(t) = (M_1(\Delta)t, M_2(\Delta)t, \ldots, M_m(\Delta)t) = M \cdot t$, где $M = (M_1(\Delta), M_2(\Delta), \ldots, M_m(\Delta))$

Отображение $T : C_\gamma \to C_{\overline{\gamma}} \Longrightarrow \gamma(t) \mapsto \overline{\gamma}(t)$ — проверим, что расстяжение

$\rho(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (\gamma_i(t_0) - \gamma_i(t_1))^2} = \sqrt{\sum (\gamma_i'(\mathcal{T}_i))^2 (t_0 - t_1)^2} \leq \sqrt{\sum M_i \Delta^2 |t_0 - t_1|} = \rho(T(\gamma(t_0)), T(\gamma(t_1)))$,
значит T — растяжение

$l\left(\gamma|_\Delta\right) \leq l(\widetilde{\gamma})$, т.е. $\phi(\Delta) \leq M_\Delta l(\Delta)$.

Аналогично $\phi(\Delta) \geq m_\Delta l(\Delta)$ — сжатие.

Значит $\|\gamma'\|$ — плотность

82 Объем фигур вращения

82.1 Формулировка

Обозначим фигуры, полученную вращением по оси x за $T_x(A) = \Big\{(x, y, z) : (x, \sqrt{y^2 + z^2}) \in A\Big\}$

По оси y — $T_y(A) = \Big\{(x, y, z) : (\sqrt{x^2 + z^2}, y^2) \in A\Big\}$

Пусть $f \in C[a, b]$, $f \geq 0$

Тогда:

1. $V(T_x(\Pi\Gamma(f, [a, b]))) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\ dx$
2. $[a, b] \subset [0, +\infty)$ $V(T_y(\Pi\Gamma(f, [a, b]))) = 2\pi \int\limits_a^b xf(x)\ dx$

82.2 Доказательство

1. $\phi : \Delta \in Segm([a, b]) \mapsto V(T_{x\ or\ y}(\Pi\Gamma(f, \Delta)))$ — аддитивная функция.

   $\pi \min\limits_{x\in\Delta} f^2(x) \cdot l(\Delta) = V(F_\Delta) \leq \phi(\Delta) \leq V(\varepsilon_\Delta) = \pi \max\limits_{x\in\Delta} f^2(x) \cdot l(\Delta)$

   ε_Δ — цилиндр прямой круговой

   $\phi(\Delta)$ — плотность, значит $V(T_x(\Pi\Gamma(f, [a, b]))) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$

   $\Delta : m_\Delta, M_\Delta$

   (a) $m_\Delta l(\Delta) \leq \phi(\Delta) \leq M_\Delta l(\Delta)$

   (b) $m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$, $x \in \Delta$

   (c) $\Delta \to x$ $M_\Delta - m_\Delta \to 0$

2. $V(T_y(\Pi\Gamma(f, [a, b]))) = 2\pi \int\limits_a^b x \cdot f(x)dx$

   $F_\Delta = T_y(\Pi\Gamma(\min\limits_\Delta f, \Delta))$

   $\phi(\Delta) \leq V(\varepsilon_\Delta) = \sigma(ring) \cdot \max\limits_\Delta f = \pi(q^2 - p^2) \cdot \max\limits_{[p,q]} f = \pi(q + p) \max\limits_{x\in[p,q]} f(x) \cdot (q - p) \leq \pi \cdot \max\limits_{x\in[p,q]}(2x) \cdot \max\limits_{x\in[p,q]} f(x) \cdot (q - p)$

   Аналогично

$\pi \min\limits_{x\in[p,q]}(2x) \cdot \min\limits_{x\in[p,q]} f(x)(q-p)$

(a) $m_\Delta l(\Delta) \le \phi(\Delta) \le M_\Delta l(\Delta)$

$\phi(\Delta) = \pi \cdot 2x \cdot f(x) \le \pi \max(2x) \cdot max f(x)$

(b) $m_\Delta \le f(x) \le M_\Delta$

(c) $p \to x_0$, $q \to x_0$, Итого $V(T_y(\Pi\Gamma(f,[a,b]))) = \pi \cdot 2x_0 \cdot f(x_0)$

83 Неравенство Йенсена для сумм

83.1 Формулировка

Пусть f — выпукла на $\langle a, b\rangle$. Тогда

$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \langle a, b\rangle$

$\forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geq 0, \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$

$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n)$

83.2 Доказательство

Если все x совпадают, то тривиально.

Пусть $x^* = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$

$x_{\min} \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \leq x^* \leq x_{\max} \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$

$a \leq x_{\min} \leq x^* \leq x_{\max} \leq b$

К любой выпуклой функции можно провести опорную прямую $y = l(x) : f(x) \geq l(x)$, при $x = x_0$ $f(x_0) = l(x_0)$

Проведём к x^* опорную прямую $l(x) = kx + b$

$f(x^*) = l(x^*) = k \sum \alpha_i x_i + b = \sum\limits_{i=1}^{n} k\alpha_i x_i + \sum\limits_{i=1}^{n} b\alpha_i = \sum \alpha_i (kx_i + b) = \sum \alpha_i l(x_i) \leq \sum \alpha_i f(x_i)$

84 Неравенство Йенсена для интегралов

84.1 Формулировка

Пусть f — выпукла и непрерывна на $\langle A, B\rangle$

$\varphi : [a, b] \to \langle A, B\rangle$ — непрерывна

$\lambda : [a, b] \to [0, +\infty]$, $\int\limits_a^b \lambda = 1$ — непрерывна

Тогда $f\left(\int\limits_a^b \lambda(x)\varphi(x)dx\right) \leq \int\limits_a^b \lambda(x)f(\varphi(x))dx$

84.2 Доказательство

$m := \inf \varphi(x)$

$M := \sup \varphi(x)$

$c := \int\limits_a^b \lambda(x)\varphi(x)dx \leq \int\limits_a^b \lambda(x)dx \cdot M = M \leq$

$c \geq m = A$ — аналогично, значит $c \in \langle A, B\rangle$

Если $m = M$ — тривиально

Пусть $y = kx + b$ — опорная прямая к графику f в точке c

$f(c) = kc + b = k\int\limits_a^b \lambda\varphi + b\int\limits_a^b \lambda = \int\limits_a^b \lambda(k\varphi + b) \leq \int\limits_a^b \lambda(f \circ \varphi)$

$f\left(\int\limits_a^b \lambda\varphi\right) \leq \int\limits_a^b \lambda(f \circ \varphi)$

85 Неравенство Коши (для сумм и для интегралов)

85.1 Неравенство для сумм

85.1.1 Формулировка

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$

Тогда $\dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$

85.1.2 Доказательство

$\ln\left(\dfrac{1}{n}a_1 + \dfrac{1}{n}a_2 + \dots + \dfrac{1}{n}a_n\right) \geq ?\dfrac{1}{n}\ln(a_1 a_2 \dots a_n) = \dfrac{1}{n}\ln a_1 + \dfrac{1}{n}\ln a_2 + \dots + \dfrac{1}{n}\ln a_n$

$x_1 = a_1$

$x_2 = a_2$

$\dots$

$x_n = a_n$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \dfrac{1}{n}$

$f(\sum \alpha_i x_i) \geq \sum \alpha f(x_i)$, поскольку функция $\ln$ — вогнута

85.2 Неравенство для интегралов

85.2.1 Формулировка

$\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$ — среднее арифметическое f на $[a, b]$

$\exp\left(\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b \ln f\right)$ — среднее геометрическое функции f $(f > 0)$

Тогда если $f \in C[a, b\rangle$, $f > 0$

$\exp\left(\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b \ln f\right) \leq \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \ln f \le \ln\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f\right)$$

$\ln \longleftrightarrow f$ — вогнутая

$f \longleftrightarrow \varphi$

$\frac{1}{b-a} \longleftrightarrow \lambda$

86 Неравенство Гёльдера для сумм

86.1 Формулировка

Пусть $p > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$

$q = \dfrac{p}{p-1}$

$a_i, b_i > 0$ для всех $i = 1..n$

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i \leq (\sum a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum b_i^q)^{\frac{1}{q}}$

Если $(a_1^p, a_2^p, \ldots, a_n^p) \parallel (b_1^q, b_2^q, \ldots, b_n^q)$ — равенство

86.2 Доказательство

x^p — строго выпукла при $p > 1$ и $x > 0$

$(x^p)'' = p(p-1)x^{p-2} > 0$

По неравенству Йенсена $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)^p \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^p$

$\alpha_i := \dfrac{b_i^q}{\sum b_i^q}$

$\alpha_i > 0$, $\sum \alpha_i = 1$

Выберем такие x_i, что

$\alpha_i \cdot x_i = a_i \cdot b_i$

$x_i = \dfrac{a_i b_i}{\alpha_i} = \dfrac{a_i b_i}{b_i^q} \sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q = a_i b_i^{1-q} \sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q = a_i b_i^{1-\frac{p}{p-1}} \sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q = a_i b_i^{\frac{p-1-p}{p-1}} \sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q = a_i \cdot b_i^{-\frac{1}{p-1}} \sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q$

Тогда $\alpha_i x_i = a_i b_i$

$(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i)^p = (\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i)^p$

Тогда $\alpha_i x_i^p = a_i^p (\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q)^{p-1}$

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^p = (\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p)(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q)^{p-1} = (\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p)(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q)^{\frac{p}{q}}$

Тогда $(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i)^p \leq (\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p)(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q)^{\frac{p}{q}}$

Возведём в степень $\dfrac{1}{p}$ и получим исходное неравенство

87 Неравенство Гёльдера для интегралов

87.1 Формулировка

Пусть $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $p > 1$

Пусть также f, $g \in C[a, b]$ и $f, g \geq 0$ на $[a, b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b fg \leq \left(\int\limits_a^b f^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_a^b g^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

87.2 Доказательство

Делим $[a, b]$ на n равных частей

$x_k = a + k \cdot \dfrac{b-a}{n}$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \dfrac{b-a}{n}$

$\xi_k := x_k$

$a_k := |f(x_k)|(\Delta x_k)^{\frac{1}{p}}$

$b_k := |g(x_k)|(\Delta x_k)^{\frac{1}{q}}$

$a_k \cdot b_k = |f(x_k)g(x_k)| \cdot \Delta x_k$

$\sum\limits_{k=1}^{n} |f(x_k)g(x_k)|\Delta x_k \leq (\sum |f(x_k)|^p \Delta x_k)^{\frac{1}{p}} (\sum |g(x_k)|^q \Delta x_k)^{\frac{1}{q}}$

Из неравенства Гёльдера для сумм

$\int\limits_a^b |f(x)g(x)| dx \leq (\int\limits_a^b |f|^p)^{\frac{1}{p}} (\int\limits_a^b |g|^q)^{\frac{1}{q}}$

88 Неравенство Минковского

88.1 Формулировка

Пусть $p \geq 1$

Тогда $\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$a_i, b_i \in \mathbb{R}$

88.2 Замечания

- Здесь нет буквы q
- Неравенство Минковского означает, что $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ является нормой

88.3 Доказательство

При $p = 1$ — очевидно

$p > 1$ — применим Гёльдера

Пусть $a_i, b_i > 0$

$\sum |a_i||a_i + b_i|^{p-1} \leq \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$

$\sum |b_i||a_i + b_i|^{p-1} \leq \left(\sum |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$

$\sum |a_i + b_i|^p \leq \sum (|a_i| + |b_i|)|a_i + b_i|^{p-1} \leq \left(\left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\sum |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$

$\left(\sum |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \ldots \leq \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

89 Свойства верхнего и нижнего пределов

89.1 Формулировка

Пусть x_n, x'_n — произвольные последовательности. Тогда

1. $\underline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, x_n$
2. $\forall n \quad x_n \le x'_n$. Тогда

   $\overline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, x'_n$

   $\underline{\lim}\, x_n \le \underline{\lim}\, x'_n$
3. $\forall \lambda > 0$

   $\overline{\lim}(\lambda x_n) = \lambda \cdot \overline{\lim}\, x_n$

   $\underline{\lim}(\lambda x_n) = \lambda \cdot \underline{\lim}\, x_n$
4. $\overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim}(x_n)$

   $\underline{\lim}(-x_n) = -\overline{\lim}(x_n)$
5. $\overline{\lim}(x_n + x'_n) \le \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, x'_n$

   $\underline{\lim}(x_n + x'_n) \ge \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, x'_n$

   Если правые части имеют смысл
6. $t_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$

   $\overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim}\, x_n + \lim t_n$

   Если правая часть имеет смысл
7. $t_n \to l > 0, l \in \mathbb{R}$

   $\overline{\lim}(x_n \cdot t_n) = l \cdot \overline{\lim}\, x_n$

89.2 Доказательство

1. Следует из того факта, что $z_n \le x_n \le y_n$
2. $y_n \le y'_n$

3. $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$

4. $\sup(-A) = -\inf(A)$

5. $\sup(x_n + x'_n, x_{n+1} + x_{n+1}; , \ldots) \leq y_n + y'_n$, т.к. это верхняя граница для всех сумм над sup

6. $l \in \mathbb{R}$, тогда $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_0 : \forall k > N_0$

   $x_k + l - \varepsilon < x_k + t_k < x_k + l_k + \varepsilon$

   $y_n + l - \varepsilon \leq \sup(x_n + t_n, x_{n+1} + t_{n+1}, \ldots) \leq y_n + l + \varepsilon$, при $N \to +\infty$

   $(\overline{\lim}\, x_n) + l - \varepsilon \leq \overline{\lim}(x_n + y_n) \leq (\overline{\lim}\, x_n) + l + \varepsilon$

7. Без доказательства

90 Техническое описание верхнего предела

90.1 Формулировка

1. $\overline{\lim} x_n = +\infty \Longleftrightarrow x_n$ — не ограничена сверху

2. $\overline{\lim} x_n = -\infty \Longleftrightarrow x_n \to -\infty$

3. $\overline{\lim} x_n = l \in \mathbb{R} \Longrightarrow$:

   - $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N \quad x_n < l + \varepsilon$

   - $\forall \varepsilon > 0$ неравенство $x_n > l - \varepsilon$ выполняется для бесконечного множества номеров n

90.2 Доказательство

1. Очевидно, что $x_n < y_n$, y_n убывает Таким образом, если $\lim y_n = +\infty \Longrightarrow y_n = +\infty \Longleftrightarrow x_n$ — не ограничена сверху

2. $y_n \to -\infty, \forall E : \exists N : \forall n > N \; x_n \leq y_n < E \Rightarrow \forall E > 0 : \exists N : \forall n > N : x_n < E, y_n < E$

3. $x_n \leq y_n$, $y_n \to l$

   - $\Rightarrow$) $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N : x_n \leq y_n < l + \varepsilon$

     Если $\exists N_0 : \forall n > N_0 : x_n < l - \varepsilon$, то $\forall n > N_0 : y_n = \sup(\dots) \leq l - \varepsilon$ и тогда $y_n \nrightarrow l$

   - $\Leftarrow$) $\forall \varepsilon : \exists N : \forall n > N : y_n \leq l + \varepsilon$, y_n — супремум

     $x_k \geq l - \varepsilon \Rightarrow y_n \geq l - \varepsilon \Rightarrow y_n \to l$

91 Теорема о существовании предела в терминах верхнего и нижнего пределов

91.1 Формулировка

Пусть существует $\lim x_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда и только тогда $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = l$

91.2 Доказательство

- $\Rightarrow$) $\lim x_n = +\infty \Longleftrightarrow \underline{\lim} x_n = +\infty \Rightarrow \underline{\lim} \leq \overline{\lim} x_n = +\infty$

  $\lim x_n = -\infty \Longleftrightarrow \underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} = -\infty$

  $\lim x_n \in \mathbb{R}$ — очевидно

- $\Leftarrow$) $z_n \leq x_n \leq y_n$, то по теореме о сжатой последовательности $x_n \to l$, поскольку $z_n \to l$ и $y_n \to l$

92 Теорема о характеризации верхнего предела как частичного

92.1 Формулировка

1. Пусть l — частный предел x_n, тогда $\underline{\lim}\, x_n \leq l \leq \overline{\lim}\, x_n$

2. Существуют такие n_k, m_k, что $\lim x_{n_k} = \overline{\lim}\, x_n$ и $\lim x_{m_k} = \underline{\lim}\, x_n$

92.2 Доказательство

1. Пусть $x_{n_j} \to l$

   $z_{n_j} \leq x_{n_j} \leq y_{n_j}$, где $z_{n_j} \to \underline{\lim}\, x_n$, $x_{n_j} \to l$, $y_{n_j} \to \overline{\lim}\, x_n$

2. $\overline{\lim}\, x_k = \pm\infty$ — очевидно

   $\overline{\lim}\, x_k = l \in \mathbb{R}$ — очевидно

   Для $\varepsilon = \dfrac{1}{k}$ $\exists x_{n_k} : l - \dfrac{1}{k} \leq x_{n_k} \leq l + \dfrac{1}{k}$

93 Простейшие свойства несобственного интеграла

93.1 Формулировка

1. Критерий Больцано-Коши сходимости несобственного интеграла

   Сходимость интеграла $\int\limits_a^{\to b} f$ равносильна

   $\forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta \in (a, b) : \forall B_1, B_2 : \Delta < B_1 < B_2 < b : \left| \int\limits_{B_1}^{B_2} f \right| < \varepsilon$

2. f — допустима на $[a, b)$ и $C \in (a, b)$. Тогда

   $\int\limits_a^{\to b} f$ и $\int\limits_c^{\to b} f$ сходятся и расходятся одновременно, и при этом в случае сходимости $\int\limits_a^{\to b} = \int\limits_a^{c} + \int\limits_c^{\to b}$

3. Пусть f, g — допустимы на $[a, b)$, а также

   $\int\limits_a^{\to b} f$ и $\int\limits_a^{\to b} g$ сходятся. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, тогда

   λf и $f \pm g$ — допустимые функции на $[a, b)$ и

   $\int\limits_a^{\to b} \lambda f = \lambda \int\limits_a^{\to b} f$ и $\int\limits_a^{\to b} f \pm g = \int\limits_a^{\to b} f \pm \int\limits_a^{\to b} g$

4. Пусть $\int\limits_a^{\to b} f$ и $\int\limits_a^{\to b} g$ существуют в $\overline{\mathbb{R}}$, $f \le g$ на $[a, b)$ Тогда

   $\int\limits_a^{\to b} f \le \int\limits_a^{\to b} g$

5. Пусть f, g — дифференцируемы на $[a, b)$, f', g' — допустимы на $[a, b)$. Тогда (при существовании двух из трёх пределов)

   $\int\limits_a^{\to b} f g' = f g \Big|_a^{\to b} - \int\limits_a^{\to b} f' g$

6. Пусть $\varphi : [\alpha, \beta) \to \langle A, B \rangle$, $\varphi \in C^1([\alpha, \beta))$, $f \in C(\langle A, B \rangle)$. Пусть также существует $\varphi(\beta - 0) \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда

   $\int\limits_a^{\to b} (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta - 0)} f$

93.2 Доказательство

1. Положим $\Phi(A) = \int\limits_a^A f$. Сходимость интеграла равносильна сходимости $\Phi(A)$ при $A \to b-0$. Воспользуемся критерием Больцано-Коши, а также учтём, что $\Phi(B) - \Phi(A) = \int\limits_a^B$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta \in (a,b) : \forall B_1, B_2 : \Delta < B_1 < B_2 < b : |\Phi(B_2) - \Phi(B_1)| < \varepsilon$$

2. При всех $A \in (c,b)$ согласно аддитивности интеграла

$$\int\limits_a^A f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^A f$$

3. Аналогично предыдущему пункту возьмём такие A и согласно линейности интеграла

$$\int\limits_a^A (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^A f + \beta \int\limits_a^A g$$

4. Также выберем A и очевидно, что

$$\int\limits_a^A f \leq \int\limits_a^A g$$

5. Устремим A к $\to b$

$$\int\limits_a^A fg' = fg\Big|_a^A - \int\limits_a^A f'g$$

6. Кохась сказал, что без доказательства. На экзамене отвечаем ему то же самое

94 Признаки сравнения сходимости несобственного интеграла

94.1 Формулировка

1. Пусть f — допустима на $[a, b)$, $f \geq 0$, $\Phi(B) = \int\limits_a^B f$. Тогда сходимость $\int\limits_a^b f$ равносильна ограниченности функции Φ (это не признак сравнения)

2. Признаки сравнения

   Пусть f, $g > 0$ и допустимы на $[a, b)$

   - Если $f \leq g$ на $[a, b)$

     (a) $\int\limits_a^b g$ — сходится, значит и $\int\limits_a^b f$ — сходится

     (b) $\int\limits_a^b f$ — расходится, значит и $\int\limits_a^b g$ — расходится

   - Пусть существует $\lim\limits_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

     Тогда

     (a) $\int\limits_a^b g$ — сходится, значит и $\int\limits_a^b f$ сходится, если $l \in [0, +\infty)$

     (b) $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ сходятся и расходятся одновременно, если $l \in (0, +\infty)$

94.2 Доказательство

1. Очевидно, что Φ — монотонно возрастает, тогда существование $\lim\limits_{B \to b-0} \Phi \Longleftrightarrow \Phi$ — ограничена

2. - Пусть $\Phi(B) = \int\limits_a^B f$, $\psi(B) = \int\limits_a^B g$, тогда Φ, ψ — монотонные

     $\Phi(B) \leq \psi(B)$

     (a) $\int\limits_a^b g$ — сходится, значит $G(B)$ ограничено сверху, значит $F(B)$ ограничено сверху, значит

     и $\int\limits_a^b f$ — сходится

(b) $\int\limits_a^b f$ — расходится, значит $F(B)$ неограничено сверху, значит и $G(B)$ неограничено, значит и $\int\limits_a^b g$ — расходится

- (a) Возьмём $L > l$. Тогда существует $c \in [a, b) : \forall x \in [c, b)$ $f(x) \leq L \cdot g(x)$ Заменим $\int\limits_a^b$ на $\int\limits_c^b$. Тогда $\int\limits_c^b g$ — сходится, значит и $\int\limits_c^b Lg$ — сходится и $\int\limits_c^b f$ — сходится

  (b) Для $l > 0$ аналогично и $\lambda < l$ и по аналогии $\lim \dfrac{g}{f} = \dfrac{1}{l}$ и $\int\limits_a^b f$ — сходится $\Rightarrow \int\limits_a^b g$ — сходится

95 Интеграл Эйлера-Пуассона

95.1 Формулировка

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

95.2 Доказательство

$$\varphi(t) = \int\limits_0^t e^{-x^2}dx$$

$1 - x^2 \le e^{-x^2} \le \dfrac{1}{1+x^2}$, следует из неравенства $e^t \ge 1 + t$

$$1 + x^2 \le e^{x^2}$$

$$\frac{1}{1+x^2} \ge \frac{1}{e^{x^2}}$$

Интегрируем: $\int\limits_0^1 (1-x^2)^n dx \le \int\limits_0^1 e^{-nx^2} \le \int\limits_0^{+\infty} e^{-nx^2} \le \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{1}{(1+x^2)^n}dx$

Левая часть: $x = \cos t$, тогда делаем замену и $\int\limits_{\pi/2}^0 \sin^{2n} t(-\sin t)dt = W_{2n+1}$ — формула Валлиса

Правая часть: $x = \operatorname{tg} t$ и $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \cos^2 t$

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \cdot \frac{1}{cos^2 t}dt = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} dt = W_{2n-2}$$

Средняя часть: $x = \dfrac{t}{\sqrt{n}}$ и $\sqrt{n}\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \le \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \le \sqrt{n}W_{2n-2}$$

$$W_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}$$

$$W_{2n-2} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\dfrac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!}\dfrac{1}{\sqrt{n}-1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$W_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot \sqrt{n} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{n}{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

96 Гамма функция Эйлера. Простейшие свойства

96.1 Формулировка

$\Gamma(T) = \int\limits_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx$, $t > 0$ — Гамма функция Эйлера

Свойства:

1. Интеграл сходится при $t > 0$
2. Функция выпукла, значит она непрерывна
3. $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$
4. Парабола, вершина — примерно точка $(1,1)$, ветви полностью лежат в первой четверти (когда-нибудь здесь будет рисунок, а так рисуйте примерно)
5. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

96.2 Доказательство

1. $\int\limits_0^{+\infty} = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{+\infty}$

   $\int\limits_0^1 x^{t-1}e^{-x}dx$, при $x \to 0$ эквивалентно x^{t-1}, $t > 1$, значит сходится

   $\int\limits_1^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx = \left(x^{t-1} \cdot e^{-x/2}\right) \cdot e^{-x/2} \leq e^{-x/2}$ при $x \geq x_0$, где $x_0 < 1$.

   $\int\limits_{x_0}^{+\infty} e^{-x/2} = \lim\limits_{B \to +\infty} \left(2 \cdot e^{-x_0/2} - 2 \cdot e^{-B/2}\right)$ — конечен

2. Подынтыгральная функция $h : t \mapsto x^{t-1}e^{-x}$ — выпукла.

   Продифференцируем $h'' = x^{t-1}e^{-x}\ln^2 x \geq 0$

   $\forall x \in [0,1] : h\left(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2, x\right) \leq \alpha h(t_1, x) + (1-\alpha)h(t_2, x)$ — неравенство Йенсена

   $\Gamma(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) \leq \alpha\Gamma(t_1) + (1-\alpha)\Gamma(t_2)$

   $\Gamma(t)$ — выпукла, значит она непрерывна

3. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx = \begin{bmatrix} f = x^t & f' = tx^{t-1} \\ g' = e^{-x} & g = -e^{-x} \end{bmatrix} = x^t(-e^{-x})\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} tx^{t-1}e^{-x}dx = t\Gamma(t)$

   $\Gamma(1) = 1$, значит $\Gamma(n) = n!$

4. Просто рисуем график.

5. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^{-0.5}e^{-x}dx = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2}dy$ — интеграл Эйлера-Пуассона

97 Теорема об абсолютно сходящихся интегралах и рядах

97.1 Формулировка

Пусть f — допустима на $[a, b)$. Тогда эквивалентны утверждения:

1. $\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится
2. $\int\limits_a^b |f|$ сходится
3. $\int\limits_a^b f^+$ и $\int\limits_a^b f^-$ абсолютно сходятся

97.2 доказательство

- $1 \Rightarrow 2$ — очевидно
- $2 \Rightarrow 3$ $0 \leq f^+ \leq |f|$ и $0 \leq f^- \leq |f|$
- $3 \Rightarrow 1$ $f = f^+ - f^- \Rightarrow \int f$ — сходится

  $|f| = f^+ + f^- \Rightarrow \int |f|$ — сходится

97.3 Случай рядов

Аналогично интегралам. Доказывается с помощью интегрального признака Коши.

98 Изучение сходимости интеграла $\int\limits_{2019}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$

98.1 Формулировка

Рассмотрим $\int\limits_{2019}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, тогда

при $\alpha > 1$ — сходится, $\alpha \leq 1$ — расходится

98.2 Доказательство

Случай $\alpha > 1$: $\alpha = 1 + 2a$, $a > 0$, значит сходится

$$\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^b} = \frac{1}{x^{1+a}} \cdot \frac{1}{x^a (\ln x)^\beta} = \frac{1}{x^{1+a}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^a (\ln x)^\beta} = 0$$

Если $\beta \geq 0$, то всё ок. Если $\beta < 0$, то $\lim \frac{(\ln x)^{-\beta}}{x^a} = \left(\lim \frac{\ln x}{x^{a/-\beta}} \right)^{-\beta} = 0$

Если $\alpha < 1$, то $\alpha = 1 - 2\gamma$, $\gamma > 0$ — расходится

$$\frac{1}{x^{1-\gamma}} \cdot \frac{1}{x^{-\gamma} (\ln x)^\beta} \geq \frac{1}{x^{1-\gamma}} \text{ — расходится}$$

$\alpha = 1$, $\int\limits_{2019}^{+\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^\beta} = \int\limits_{2019}^{+\infty} \frac{dy}{y^\beta}$

$\beta > 1$ сходится, $\beta \leq 1$ расходится.

99 Изучение интеграла $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{\sin x\, dx}{x^p}$ на сходимость и абсолютную сходимость

При $p > 1: \left|\dfrac{\sin x}{x^p}\right| \leq \dfrac{1}{x^p}$ — абсолютная сходимость

При $p \leq 0: \int\limits_{2\pi k}^{2\pi k+\pi} \dfrac{\sin x}{x^p} \geq \int\limits_{2\pi k}^{2\pi k+\pi} \sin x = 2$, значит интеграл расходится (и абсолютно тоже)

При $0 < p \leq 1$ нет абсолютной сходимости, но есть обычная сходимость:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} = \begin{bmatrix} f' = \sin x & f = -\cos x \\ g = \dfrac{1}{x^p} & g' = -p\dfrac{1}{x^{p+1}} \end{bmatrix} = -\cos x \cdot \frac{1}{x^p}\Big|_1^{+\infty} - p\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}} dx \text{ — сходится}$$

$\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{|\sin x|}{x^p} \geq \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin^2 x}{x^p} = \dfrac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \left(\dfrac{1}{x^p} - \dfrac{\cos 2x}{x^p}\right)$ — расходится,т.к. $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^p}$ расходится, а $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\cos 2x}{x^p}$ сходится.

100 Признак Абеля–Дирихле сходимости несобственного интеграла

100.1 Формулировка

1. (Дирихле) f — допустима на $[a, b)$, $g \in C^1([a, b))$, $g(x) \xrightarrow[x \to b-0]{} 0$ монотонная

   $F(B) = \int\limits_a^B f$ — ограничена, тогда $\int\limits_a^{\to b} fg$ — сходится

2. (Абеля) f — допустима на $[a, b)$, $\int\limits_a^{\to b} f$ — сходится

   $g \in C^1([a, b))$, монотонная, ограниченная

   Тогда $\int\limits_a^{\to b} fg$ — сходится

100.2 Доказательство

1. Интегрируем по частям $\int\limits_a^B fg = F(x)g(x)\Big|_a^B - \int\limits_a^B F(x)g'(x)dx$ — конечен

   $\int\limits_a^{\to b} |F(x)|\,|g'(x)|dx \leq k \int\limits_a^{\to b} |g'(x)|dx = \pm k \int\limits_a^{\to b} g'(x) = \pm kg(x)\Big|_a^b$

2. $\alpha = \lim\limits_{x \to b-0} g(x)$, поскольку g — ограниченная и монотонная, значит имеет предел

   $fg = f\alpha + f(g - \alpha)$

   $\int f\alpha$ — сходится, $\int\limits_a^b f(g - \alpha)$ — сходится по уже доказанному.

101 Интеграл Дирихле

101.1 Формулировка

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

101.2 Доказательство

$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \dfrac{\sin{(n+0.5)x}}{2\sin 0.5x} - \dfrac{1}{2}$ (просто запомните это)

$$2\sin\frac{x}{2}\cos x + 2\sin\frac{x}{2}\cos^2 x + \ldots = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}$$

$$\sin\frac{3}{2}x - \sin\frac{x}{2} + \left(\sin\frac{5}{2}x - \sin\frac{3}{2}x\right) + \ldots = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}$$

$$0 = \int\limits_0^{\pi} \cos x + \ldots + \cos nx \; dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin{(n+0.5)x}}{2\sin 0.5x} - \frac{\pi}{2}$$

Рассмотрим следующие интегралы:

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin{(n+0.5)x}}{2\sin 0.5x} - \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin{(n+0.5)x}}{x} \to 0$$

$$\int\limits_0^{\pi} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x \cdot \left(\frac{1}{2\sin 0.5x} - \frac{1}{x}\right) dx$$

Пусть $h(x) = \dfrac{1}{2\sin 0.5x} - \dfrac{1}{x}$, доопределим $h(0)$

$h(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2\sin 0.5x} - \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - 2\sin 0.5x}{2x\sin 0.5x}$ и по Тейлору найдём предел

$\dfrac{x - 2\left(0.5x - 1/6 \cdot x^3/8 + o(x^3)\right)}{x^2 + o(x^2)}$ и $h'(0) = \dfrac{1}{24}$

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin{(n+0.5)x}}{2\sin 0.5x} - \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin{(n+0.5)x}}{x} = -\frac{\cos{(n+0.5)x}}{n+0.5}h(x)\Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos{(n+0.5)x}}{n+0.5} \cdot h'(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin{(n+0.5)x}}{x} = \int\limits_0^{(n+0.5)\pi} \frac{\sin y}{y} dy$ и при $n \to +\infty$ заменяем на заданный в условии интеграл.

Итого:

$\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin{(n+0.5)x}}{2\sin 0.5x} - \frac{\pi}{2} = 0$, значит $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{2}$

102 Свойства рядов: линейность, свойства остатка, необх. условие сходимости, критерий Больцано-Коши

102.1 Линейность, свойства остатка

102.1.1 Формулировка

1. Пусть $\sum a_n, \sum b_n$ — сходятся, тогда и ряд $\sum c_n$, где $c_n := a_n + b_n$ тоже сходится
2. Пусть $\sum a_n$ — сходится, тогда и ряд $\sum \lambda a_n$ тоже сходится, где $\lambda \in \mathbb{R}$
3. - $\sum a_n$ — сходится, тогда и любой остаток ряда сходится
   - Какой-нибудь остаток ряда сходится, значит и сам ряд сходится
   - Пусть $R_m = \sum\limits_{k=m}^{+\infty} a_k$, $\sum a_n$ — сходится, значит и $R_m \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$

102.1.2 Доказательство

1. $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{N}(a_n + b_n) = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} a_n + \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} b_n$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$
3. - $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{m-1} a_k + \sum\limits_{k=m}^{N} a_k$, сумма и первое слагаемое конечна, значит и второе слагаемое конечное.
   - Аналогично предыдущему
   - $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{m-1} a_k + \sum\limits_{k=m}^{+\infty} a_k$

102.2 Необходимое условие сходимости рядов

102.2.1 Формулировка

$\sum a_n$ — сходится, тогда $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

102.2.2 Доказательство

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S,\ S_n \to S$$

$$a_N = S_N - S_{N-1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

102.3 Критерий Больцано-Коши

102.3.1 Формулировка

Сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ равносильна условию

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

102.4 Доказательство

По определению сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ равносильна сходимости последовательности $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Воспользуемся критерием Больцано-Коши для последовательностей

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N : |S_m - S_n| < \varepsilon$$

Не умаляя общности можно считать, что $m > n$. Остаётся переобозначить $m = n+p$, где $p \in \mathbb{N}$ и заметить, что $S_m - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k$

103 Признак сравнения сходимости положительных рядов

103.1 Лемма

103.1.1 Формулировка

Пусть $a_k \geq 0$, при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда сходимости $\sum a_k$ равносильно тому, что последовательность $S_n^{(a)}$ — ограничена

103.1.2 Доказательство

Последовательность S_n возрастает, а по теореме о монотонной последовательности сходимость равносильна ограниченности сверху.

103.2 Признак сравнения сходимости положительных рядов

103.2.1 Формулировка

Пусть a_k, $b_k \geq 0$. Тогда

1. $\forall k : a_k \leq b_k$ (или даже $\exists c > 0 : \exists N : \forall k > N : a_k \leq cb_k$)

   Тогда

   $\sum a_k$ расходится. значит и $\sum b_k$ расходится

   $\sum b_k$ сходится, значит и $\sum a_k$ сходится

2. Пусть $\exists \lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = l \in [0, +\infty]$

   Тогда

   При $0 < l < +\infty$ $\sum a_k$ сходится тогда и только тогда, когда $\sum b_k$ сходится

   При $l = 0$ $\sum b_k$ сходится, значит и $\sum a_k$ сходится, или $\sum a_k$ расходится, значит и $\sum b_k$ расходится

   При $l = +\infty$ $\sum a_k$ сходится, значит и $\sum b_k$ сходится, или $\sum b_k$ расходится, значит и $\sum a_k$ расходится

103.2.2 Доказательство

1. Следует из леммы

   $\sum a_k$ сходится $\Leftrightarrow \sum\limits_{k=N}^{+\infty} a_k$ сходится

   $a_k \le cb_k \Rightarrow S_n^{(a)} \le c \cdot S_n^{(b)}$

   $\sum a_k$ расходится $\Rightarrow S_n^{(a)}$ не ограничено сверху, значит и $S_n^{(b)}$ тоже не ограничено сверху

2. Следует из первого случаи $l = 0$ и $l = +\infty$

   $0 < l < +\infty$. По определению предела

   $\exists N : \forall k > N : \dfrac{l}{2} < \dfrac{a_k}{b_k} < \dfrac{3l}{2}$

   $a_k > \dfrac{1}{2} b_k$, значит $\sum a_n$ сходится, значит и $\sum \dfrac{l}{2} b_n$ тоже сходится, значит и $\sum b_n$ сходится. Аналогично разбираются и остальные 3 случая.

104 Признак Коши сходимости положительных рядов

104.1 Формулировка

Пусть $a_n \geq 0$ для всех n и $k_n = \sqrt[n]{a_n}$

1. $\exists q < 1 : k_n \leq q$, начиная с некоторого места, значит ряд сходится
2. $k_n \geq 1$ для бесконечного числа номеров, значит ряд расходится

104.2 Доказательство

1. $k_n \leq q \Longleftrightarrow a_n \leq q^n$ при $n \to +\infty$, а q^n — сходится, значит и $\sum a_n$ — сходится
2. $a_n \geq 1$ — верно для бесконечного числа n, значит $\exists n_k$, что $\lim a_{n_k} \neq 0$, значит $\sum a_n$ расходится.

105 Признак Коши сходимости положительных рядов (pro)

105.1 Формулировка

Пусть $a_n \geq 0$, $k = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$

1. $k > 1$, значит $\sum a_n$ — расходится
2. $k < 1$, значит $\sum a_n$ — сходится

105.2 Доказательство

1. Пусть $k > 1$, тогда для бесконечного числа номеров $\sqrt[n]{a_n} > 1$, а значит $a_n > 1$, значит a_n не стремится к 0, и поэтому ряд расходится.
2. Пусть $k < 1$. Обозначим за $\varepsilon = \dfrac{1-k}{2} > 0$, $q = \dfrac{1+k}{2}$. По свойствам верхнего предела существует такое N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{a_n} < k + \varepsilon = \frac{1+k}{2} = q \in (0, 1)$$

   Тогда $a_n < q^n$ при всех $n > N$, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по признаку сравнения со сходящимся рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$

106 Признак Даламбера сходимости положительных рядов

106.1 Формулировка

Пусть $a_n \geq 0$, $D_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

<u>*light*</u>

1. $\exists q < 1$ начиная с некоторого места $D_n \leq q$, значит $\sum a_n$ сходится
2. $D_n \geq 1$ начиная с некоторого места, значит $\sum a_n$ расходится

<u>*pro*</u>

Пусть $\exists \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = D$

1. $D < 1$, значит $\sum a_n$ сходится
2. $D > 1$, значит $\sum a_n$ расходится

106.2 Доказательство

<u>light</u>

1. $\dfrac{a_{N+1}}{a_N} < q$
   $\dfrac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < q$
   $\dots$
   $\dfrac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} < q$
   $a_{N+k} < q^k \cdot a_{N_0}$ — сходится

   Значит a_n сходится
2. $a_{N_0+k} \geq a_{N_0} > 0$, значит a_k не стремится 0 — расходится

<u>pro</u>

1. $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = D$, значит НСНМ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < q$, значит $\sum a_n$ сходится

2. $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = D > 1$, значит НСНМ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, значит $\sum a_n$ расходится

107 Признак Раабе сходимости положительных рядов

107.1 Лемма

107.1.1 Формулировка

Пусть a_n, $b_n > 0$ и $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ НСНМ. Тогда

b_n — сходится, значит и a_n сходится

или

a_n — расходится, значит и b_n расходится.

107.1.2 Доказательство

Будем считать "НСНМ"как "1"

$a_2 < a_1 \dfrac{b_2}{b_1}$

$a_3 < a_2 \dfrac{b_3}{b_2}$

...

$a_n < a_{n-1} \dfrac{b_n}{b_{n-1}}$, значит $a_n < \dfrac{a_1}{b_1} b_n$, т.е. $a_n < c \cdot b_n$

107.2 Теорема

107.2.1 Формулировка

$a_n > 0$, тогда если

$n \cdot \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq r > 1$ (НСНМ), тогда $\sum a_n$ — сходится

$n \cdot \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$ (НСНМ), тогда $\sum a_n$ — расходится

107.2.2 Доказательство

1. $n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq r \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \frac{r}{n}$

   Пусть $1 < s < r$, $b_n := \frac{1}{n^s}$

   Итак, НСНМ $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$

   $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^s}$ — сходится, значит $\sum a_n$ — сходится

2. $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$, $\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{n+1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}$

   $\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $\sum \frac{1}{n}$ — расходится, значит и $\sum a_n$ — расходится

108 Интегральный признак Коши сходимости числовых рядов

108.1 Формулировка

Пусть $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, непрерывна, ≥ 0, монотонна

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f(k)$ и $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ — сходится или расходится одновременно. Содержательный случай f — убывает и $f(1) > 0$

108.2 Доказательство

- Ряд сходится, значит $S_n^{(f)}$ — ограничена сверху

  Тогда $\Phi(A) = \int\limits_1^A f(x)dx$ — ограничена сверху

  $S_n^{(f)} \leq S$

  $\Phi(A) < \Phi([A]+1) = \int\limits_1^{[A]+1} f(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{[A]} \int\limits_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum \int\limits_k^{k+1} f(k)dx = \sum\limits_{k=1}^{[A]} f(k) \leq S$

- Интеграл сходится, значит и ряд сходится

  $\Phi(A) \leq S$

  Проверим, что $S_n \leq S + f(1)$

  $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + \sum\limits_{k=2}^{n} \int\limits_{k-1}^{k} f(k)dx \leq f(1) + \sum\limits_{k=2}^{n} \int\limits_{k-1}^{k} f(x)dx = f(1) + \int\limits_1^n f(x)dx \leq f(1) + S$

109 Признак Лейбница

109.1 Формулировка

Пусть $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$, $a_n \to 0$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} a_k$ — сходится

109.2 Доказательство

$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$

$S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n}$

$S_{2n} \leq a_1$, $S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$

$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$, итого S — ограничено, значит ряд сходится

110 Признаки Дирихле и Абеля сходимости числового ряда

110.1 Формулировка

110.1.1 Дирихле

Пусть $S_n^{(a)}$ — ограничена

b_n — монотонна. $b_n \to 0$

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ — сходится

110.1.2 Абеля

Пусть $\sum a_k$ — сходится, b_n — ограниченная, монотонная

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ — сходится

110.2 Доказательство

110.2.1 Дирихле

Применим преобразование Абеля $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$

Из того, что A_n ограничена, а b_n бесконечна мала, следует, что $A_n b_n \to 0$, поэтому сходимость эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$

$\sum\limits_{k=1}^{n-1} |A_k (b_k - b_{k+1})| \leq c_a \sum\limits_{k=1}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| = c_a |b_1 - b_n|$ — ограничена

110.2.2 Абеля

Существует конечный $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \beta$

$\sum a_k b_k = \sum a_k \beta + \sum a_k (b_k - \beta)$, первое сходится в силу сходимость $\sum a_k$, а второе сходится в силу признака Дирихле

111 Теорема об условиях сходимости бесконечного произведения

111.1 Формулировка

1. Пусть $a_n > 0$ НСНМ. Тогда равносильность $\prod(1+a_n)$ — сходится $\Longleftrightarrow \sum a_n$ — сходится
2. Пусть $\sum a_n$ — сходится, а также $\sum a_n^2$ — тоже сходится. Тогда $\prod(1+a_n)$ — сходится

111.2 Доказательство

1. $\prod$ — сходится $\Leftrightarrow \sum \ln|1+a_n|$ — сходится $\Leftrightarrow \sum a_n$ — сходится. НСНМ $\ln|1+a_n| \sim a_n$ при $n \to +\infty$
2. $\prod$ сходится $\Leftrightarrow \sum \ln(1+a_n)$ сходится

   $\ln(1+a_n) = a_n - \dfrac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)$

   Докажем, что $\sum |o(a_n^2)|$ абсолютно сходится

   $\lim\limits_{n\to} \dfrac{o(a_n^2)}{a_n^2} = 0$ из сходимости $\sum a_n^2$ следует сходимость $\sum |o(a_n^2)|$, значит и $\sum o(a_n^2)$ сходится

112 Лемма об оценке приближения экспоненты ее замечательным пределом

112.1 Лемма 1

112.1.1 Формулировка

$\Pi(n,x) = \int\limits_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$, где $x > 0$

Тогда $\Pi(n,x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{x(x+1)\ldots(x+n)} \cdot n^x$

112.1.2 Доказательство

$\Pi(n,x) = n^x \int\limits_0^1 (1-s)^n \cdot s^{x-1} ds = n^x \left((1-s)^n \cdot \frac{s^x}{x}\Big|_{s=0}^{s=1} + \frac{n}{x} \int\limits_0^1 (1-s)^{n-1} \cdot s^x ds \right) = n^x \cdot \frac{n}{x} \int\limits_0^1 (1-s)^{n-1} s^x ds =$
$n^x \cdot \frac{n}{x} \cdot \frac{n-1}{x+1} \cdot \int\limits_0^1 (1-s)^{n-2} s^{x-1} ds = \ldots$ получаем то, что хотели

112.2 Лемма 2

112.2.1 Формулировка

При $0 \le t \le n$

$0 \le e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \le \frac{1}{n} t^2 e^{-t}$

112.2.2 Доказательство

$(1+y) \le e^y \le (1-y)^{-1}$, $y \in [0,1]$ в силу выпуклости e^x

$e^y \ge 1 + y$

$e^{-y} \ge 1 - y$

возведём в $(-n)$, $y := \frac{t}{n}$

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n} \geq e^{-t} \geq \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}$$

$$0 \leq e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n} = e^{-t}\left(1-e^{t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}\right) \leq e^{-t}\left(1-\left(1+\frac{t}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}\right)$$

$e^{-t}\left(1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^{n}\right) \leq \frac{t^2}{n}e^{-t}$ (это неравенство Бернулли)

113 Формула Эйлера для гамма-функции

113.1 Формулировка

При $x > 0$ верно, что

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}{x(x+1)\ldots(x+n)} \cdot n^x = \Gamma(x)$$

113.2 Доказательство

$$\Gamma(x) - \lim_{n\to+\infty} \Pi(n,x) = \lim_{n\to+\infty} \left(\int\limits_0^n \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) t^{x-1} dt + \int\limits_n^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \right)$$

$$\int\limits_n^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\int\limits_0^n \frac{1}{n} e^{-t} t^2 t^{x-1} dt \le \frac{1}{n} \int\limits_0^{+\infty} t^{x+1} e^{-t} dt \to 0$$

114 Формула Вейерштрасса для Г-функции

114.1 Формулировка

Пусть $x > 0$, γ — постоянная Эйлера. Тогда

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}$$

114.2 Доказательство

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to+\infty} n^{-x} \frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{1\cdot 2\ldots\cdot n} = \lim_{n\to+\infty} \left(n^{-x}\cdot x \cdot \frac{x+1}{1} \cdot \frac{x+2}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{x+n}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} x \cdot n^{-x} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right) =$$
$$\lim_{n\to+\infty} xe^{x\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)} \cdot e^{-x\ln n} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} = x \cdot e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}$$

115 Вычисление произведений с рациональными сомножителями

Пусть $u_n = A \cdot \dfrac{(n+a_1)(n+a_2)\cdot(n+a_k)}{(n+b_1)(n+b_2)\dots(n+b_l)}$, где a_i и $b_i \in \mathbb{Q}$. Хотим найти $\prod\limits_{i=1}^{+\infty} u_i$. Самый интересный случай, это то, что произведение сходится, тогда $u_n \to 1$, а значит $k = l$ и $A = 1$

$u_n = \dfrac{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)\left(1+\frac{a_2}{n}\right)\dots\left(1+\frac{a_k}{n}\right)}{\left(1+\frac{b_1}{n}\right)\left(1+\frac{b_2}{n}\right)\dots\left(1+\frac{b_k}{n}\right)}$ и при $n \to +\infty$

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)\left(1+\frac{a_2}{n}\right)\dots\left(1+\frac{a_k}{n}\right)}{\left(1+\frac{b_1}{n}\right)\left(1+\frac{b_2}{n}\right)\dots\left(1+\frac{b_k}{n}\right)} = \prod_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)e^{-\frac{a_1}{n}}\left(1+\frac{a_2}{n}\right)e^{-\frac{a_2}{n}}\dots\left(1+\frac{a_k}{n}\right)e^{-\frac{a_k}{n}}}{\left(1+\frac{b_1}{n}\right)e^{-\frac{b_1}{n}}\left(1+\frac{b_2}{n}\right)e^{-\frac{b_2}{n}}\dots\left(1+\frac{b_k}{n}\right)e^{-\frac{b_k}{n}}} = \prod_{i=1}^{+\infty}\frac{\frac{1}{\Gamma(a_1)a_1e^{\gamma a_1}}\cdot\dots\cdot\frac{1}{\Gamma(a_k)a_ke^{\gamma a_k}}}{\frac{1}{\Gamma(b_1)b_1e^{\gamma b_1}}\cdot\dots\cdot\frac{1}{\Gamma(b_k)b_ke^{\gamma b_k}}} =$$

$$\prod_{i=1}^{+\infty}\frac{\Gamma(1+b_1)\dots\Gamma(1+b_k)}{\Gamma(1+a_1)\dots\Gamma(1+a_k)}$$

116 Теорема о группировке слагаемых

116.1 Формулировка

Выберем $n_0 = 0 < n_1 < n_2 < \dots$

Пусть $\sum a_k = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}) + \ldots$

$b_k = \sum\limits_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} a_i$

Тогда

1. $\sum a_n$ — сходится $\Rightarrow \sum b_k$ сходится и имеет ту же сумму
2. $a_k \geq 0 \Rightarrow \sum a_k = \sum b_k$

116.2 Доказательство

$S_k^{(b)} = S_{n_k}^{(a)}$

1. $\lim\limits_{k\to\infty} S_k^{(b)} = \lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k}^{(a)} = S^{(a)}$
2. Если $\sum a_n$ — сходится, то смотри пункт 1

   Если $\sum a_n$ — расходится, значит $S_n^{(a)}$ не ограничено сверху, значит и $S_n^{(b)}$ не ограничено сверху

117 Теорема о перестановке слагаемых

117.1 Формулировка

1. Пусть ряд $\sum a_n$ абсолютно сходится, тогда ряд $\sum b_n$, полученный из ряда $\sum a_n$ перестановкой, будет также абсолютно сходиться и иметь ту же сумму.

2. Также если $a_k \geq 0$ при всех k, то $\sum a_k = \sum b_k$

117.2 Доказательство

2. По определению $S_n^{(b)} = a_{\varphi(1)} + \ldots + a_{\varphi(n)} \leq S^{(a)}_{\max \varphi(i)}$. Устремим $n \to +\infty$, $S^{(b)} \leq S^{(a)}$. Аналогично $S^{(a)} \leq S^{(b)}$.

1. Берём срезки a_n^+ и a_n^-, тогда $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$ — сходятся.

   $a_n^+ = \max(a_n^+, 0)$, $\sum b_n^+$ — перестановка ряда a_n^+

   $a_n^- = \max(-a_n^-, 0)$. Аналогично $\sum b_n^-$

   И по второму пункту всё доказали

P.S. доказательство идёт в обратном порядке

118 Теорема о произведении рядов

118.1 Формулировка

Пусть ряды (A) и (B) абсолютно сходятся к суммам $S^{(a)}$ и $S^{(b)}$. Тогда $\forall \gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ — биекция, произведение рядов абсолютно сходится и имеют сумму $S^{(a)}S^{(b)}$

118.2 Доказательство

Пусть $\sum |a_k| = A$ и $\sum |b_k| = B$, тогда

$\sum\limits_{k=1}^{N} |a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |a_n| \sum\limits_{k=1}^{m} |b_k| \leq A \cdot B$, где $n := \max(\varphi(1), \ldots, \varphi(N))$, $m = \max(\psi(1), \ldots, \psi(N))$

Значит ряд $\sum\limits_{k=1}^{N} |a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}|$ — сходится, значит произведение рядов абсолютно сходится, значит его сумма не зависит от порядка слагаемых, следовательно не зависит и от выбора γ

119 Единственность производной

119.1 Формулировка

Производный оператор единственный

119.2 Доказательство

Проверим, что $\forall n \in \mathbb{R}^m$ $L(n)$ задан однозначно

$h := tu$, $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^m$, t — "маленькое"

$F(a + tu) = F(a) + L(tu) + o(tu)$

$F(a + tu) = F(a) + t \cdot L(u) + o(t)$

$$L(u) = \frac{F(a + tu) - F(a)}{t} - \frac{o(t)}{t}$$

$$L(u) = \lim_{t \to 0} \frac{F(a + tu) - F(a)}{t}$$

120 Лемма о дифференцируемости отображения и его координатных функций

120.1 Формулировка

Пусть $F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, $F = (F_1, \dots, F_l)$, $a \in \text{Int } (E)$

Тогда

1. F — дифференцируема в точке $a \Leftrightarrow$ все F_i дифференцируемы в точке a
2. Строки матрицы Якоби F равны матрицы Якоби функций F_i

120.2 Доказательство

1. - $\Rightarrow$)

     Пусть F дифференцируема в точке a. Тогда для каждой координатной функции должно выполняться следующее равенство:

     $f_i(x+h) = f_i(x) + A_i h + \alpha_i(h)|h|$ для всех i

     т.к. координатные функции линейного оператора A являются линейными, а также непрерывность и равенство нулю в нуле отображения α равносильно такому же свойству его координатных функций, итого получили, что f_i дифференцируема в точке a_i

   - $\Leftarrow$)

     Пусть все f_i дифференцируемы в точке a. Тогда для каждого i существует линейная функция A_i и функция α_i, непрерывная и равная нулю в нуле, для которых справедливо равенство. Значит для f также выполняется равенство

     $f(x+h) = f(x) + Ah + \alpha(h)|h|$

2. Распишем $F(x) = F(a) + F'(a)(x-a) + \alpha(x)|x-a|$

   $$\begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_l(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(a) \\ F_2(a) \\ \vdots \\ F_l(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1m} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{l1} & \lambda_{l2} & \dots & \lambda_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ \vdots \\ x_m - a_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_m(x) \end{pmatrix} |x-a|$$

   Откуда и получаем требуемое условие

121 Необходимое условие дифференцируемости

121.1 Формулировка

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{Int}\ E$

f — дифференцируема в точке a

Тогда $\exists f'_{x_1}(a), \dots, f'_{x_m}(a)$ и тогда $(f'_{x_1}(a), \dots, f'_{x_m}(a))$ — матрица Якоби f в точке a

121.2 Доказательство

$f(a+h) = f(a) + L \cdot h + \alpha(h) \cdot |h|$

Пусть $t \in \mathbb{R}$,

$e_k = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$, где 1 находится на k-ом месте.

Тогда $h_k := t \cdot e_k$

$f(a + t \cdot e_k) = f(a) + l_k \cdot t + \alpha(t \cdot e_k)|t|$, где l_k — строка матрицы Якоби функции F.

$l_k = \varphi'_k(a_k) = \dfrac{\partial f}{\partial_{x_k}}(a_k)$

122 Достаточное условие дифференцируемости

122.1 Формулировка

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $a \in E$, $B(a, r) \subset E$

Пусть в этом шаре $\exists f'_{x_1}(x), \dots, f'_{x_m}(x)$, $x \in B(a, r)$

и все эти производные непрерывны в точке a. Тогда f — дифференцируемы в точке a

122.2 Доказательство

Пусть $m = 2$, на большую размерность обобщается легко

$a = (a_1, a_2)$, $x = (x_1, x_2)$

$f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) = (f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2)) + (f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2)) =$

По теореме Лагранжа $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, значит

$= f'_{x_1}(\overline{x_1}, x_2)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(x_1, \overline{x_2})(x_2 - a_2) = f'_{x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2) + (f'_{x_1}(\overline{x_1}, x_2) - f'_{x_1}(a_1, a_2))(x_1 - a_1) + (f'_{x_2}(a, \overline{x_2}) - f'_{x_2}(a_1, a_2))(x_2 - a_2) \to 0$ при $(x_1, x_2) \to (a_1, a_2)$, поскольку

Пусть $\alpha(h)|h| = (f'_{x_1}(\overline{x_1}, x_2) - f'_{x_1}(a_1, a_2))(x_1 - a_1) + (f'_{x_2}(a, \overline{x_2}) - f'_{x_2}(a_1, a_2))(x_2 - a_2)$, где $|h| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}$

Тогда в качестве примера рассмотрим первое слагаемое $(f'_{x_1}(\overline{x_1}, x_2) - f'_{x_1}(a_1, a_2)) \cdot \dfrac{x_1 - a_1}{|h|}$, которое стремится к нулю, поскольку первый множитель стремится к нулю при $(x_1, x_2) \to (a_1, a_2)$, а второй множитель не превосходит по модулю 1.

123 Лемма об оценке нормы линейного оператора

123.1 Формулировка

Пусть $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, лин. $A = (a_{ij})$. Тогда $\forall x \in \mathbb{R}^m$

$|Ax| \leq C_a|x|$, где $C_a = \sqrt{\sum\limits_{ij} a_{ij}^2}$

123.2 Доказательство

$$|Ax|^2 = \sum_{i=1}^{l}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{l}\left(\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{m} x_j^2\right)\right) = |x|^2 \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2$$

Это КБШ

124 Дифференцирование композиции

124.1 Формулировка

Пусть $F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, $G : I \subset \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$, $F(E) \subset I$

$a \in \text{Int }(E)$, $F(a) \in \text{Int }(I)$, F — дифференцируема в точке a, G — дифференцируема в $b = F(a)$. Тогда

$G \circ F$ — дифференцируема в точке a и $(G \circ F)'(a) = G'(F(a)) \cdot F'(a)$

124.2 Доказательство

$F(a+h) = F(a) + F'(a)h + \alpha(h)|h|$, пусть $k = F'(a)h + \alpha(h)|h|$.

$G(b+k) = G(b) + G'(b)k + \beta(k)|k|$, где $b = F(a)$.

$G(F(a+h)) = G(b) + G'(b)(F'(a)h + \alpha(h)|h|) + \beta(k)|k| =$

$= G(F(a)) + G'(F(a)) \cdot F'(a)h + G'(b)\alpha(h)|h| + \beta(k)|k|$, где $G'(b)\alpha(h)|h| + \beta(k)|k| = o(h)$

$G'(b)\alpha(h)|h| \leq |G'(b)\alpha(h)|h|| \leq C_{G'(b)}\,|\alpha(h)|h|| = C_{G'(b)}|\alpha(h)||h|$ — бесконечно малое

$|\beta(k)\,|F'(a)h + \alpha(h)|h||| \leq |\beta(k)|\,(|F'(a)h| + |\alpha(h)||h|) = \left(|\beta(k)|\left|F'(a)\cdot\frac{h}{|h|}\right| + |\alpha(h)|\right)|h|$ — тоже бесконечно малое.

125 Дифференцирование произведений

125.1 Формулировка

Пусть F, $G : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, $\lambda : E \to \mathbb{R}$, $a \in \text{Int } E$; F, G, λ — дифференцируемые в a, тогда:

1. $(\lambda F)'(a)h = (\lambda'(a)h)F(a) + \lambda(a)\left(F'(a)h\right)$
2. $\langle F, G\rangle'(a)h = \langle F'(a)h, G(a)\rangle + \langle F(a), G'(a)h\rangle$

125.2 Доказательство

1. Пусть $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, тогда $\lambda F = (\lambda f_1, \lambda f_2, \ldots, \lambda f_m)$

   Рассмотрим i-ую строчку матрица Якоби: $((\lambda F)'(a)) = ((\lambda f_i)'_{x_1}(a), \ldots, (\lambda f_i)'_{x_m}(a))$

   $\lambda(a+h)f_i(a+h) - \lambda(a)f_i(a) = (\lambda(a) + \lambda'(a)h + \alpha(h)|h|)(f_i(a) + f_i'(a)h + \beta(h)|H|) - \lambda(a)f_i(a) = (\lambda'(a)h)f_i(a) + \lambda(a)(f_i'(a)h) + (\lambda'(a)h)(f_i'(a)h) + \alpha(h)|h|f_i(a) + \ldots$, всё, кроме $(\lambda'(a)h)f_i(a) + \lambda(a)(f_i'(a)h)$ бесконечно малое.

2. $\langle F, G\rangle'(a)h = \left(\sum\limits_{i=1}^{l} f_i g_i\right)'(a)h = \sum\limits_{i=1}^{l}(f_i g_i)'(a)h = \sum f_i'(a)h \cdot g_i(a) + f_i(a)g_i'(a)h$ — что и требовалось

126 Теорема Лагранжа для векторнозначных функций

126.1 Формулировка

Пусть $F : [a, b] \to \mathbb{R}^l$ — непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на $[a, b]$. Тогда

$\exists c \in (a, b) : |F(b) - F(a)| \leq |F'(c)| \cdot |b - a|$

126.2 Доказательство

Пусть $\varphi(t) := \langle F(b) - F(a), F(t) - F(a) \rangle$, $t \in [a, b]$

$\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = |F(b) - F(a)|^2$, $\varphi'(t) = \langle F(b) - F(a), F'(t) \rangle$

Теорема Лагранжа для φ

$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b - a)$

$|F(b) - F(a)|^2 = \langle F(b) - F(a), F'(c) \rangle (b - a) \leq |F(b) - F(a)| \, |F'(c)| \, (b - a)$

Для $F(b) = F(a)$ неравенство тривиально, пусть $F(b) \neq F(a)$, тогда сократим

$|F(b) - F(a)| \leq |F'(c)| \, (b - a)$

127 Экстремальное свойство градиента

127.1 Формулировка

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, а точка $a \in \text{Int}\ (E)$, причём f дифференцируема в точке a, тогда

$f(a+h) = f(a) + \langle L, h\rangle + o(h)$,

тогда вектор L — градиент f в точке a.

Пусть $\text{grad}\ f(a) \neq 0$ и $l := \dfrac{\text{grad}\ f(a)}{|\text{grad}\ f(a)|}$. Тогда l — направление наибольшего возрастания функции

$\forall h \in \mathbb{R}^m$, $|h| = 1$ следует, что

$-|\text{grad}\ f(a)| \leq \dfrac{\partial f}{\partial h}(a) \leq |\text{grad}\ f(a)|$ и при $h = \pm l$ достигается равенство (правое или левое)

127.2 Доказательство

$\dfrac{\partial f}{\partial h}(a) = \langle \text{grad}\ f(a), h\rangle$ — это снова КБШ.

128 Независимость частных производных от порядка дифференцирования

128.1 Формулировка

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, точка $(x_0, y_0) \in E$, а также существует $r > 0$, что $B((x_0, y_0), r) \subset E$, и в нём определены f''_{xy} и f''_{yx}. Если известно, что f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны в $B((x_0, y_0), r)$, то $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$

128.2 Доказательство

$\Delta^2 f(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$

Пусть $\alpha(h) := \Delta^2 f(h, k)$ при фиксированном k, $\alpha(0) = 0$. Тогда

$\alpha(h) = \alpha(h) - \alpha(0) = \alpha(\overline{h}) \cdot h = (f'_x(x_0 + \overline{h}, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \overline{h}, y_0))h = f''_{xy}(x_0 + \overline{h}, y_0 + \overline{k}) \cdot hk.$

Пусть $\beta(k) := \Delta^2 f(h, k)$ при фиксированном h, аналогично

$\beta(k) = f''_{yx}(x_0 + \widetilde{h}, y_0 + \widetilde{k}) \cdot hk$

$f''_{yx}(x_0 + \widetilde{h}, y_0 + \widetilde{k}) = f''_{xy}(x_0 + \overline{h}, y_0 + \overline{k})$ при $(h, k) \to (0, 0)$, для любых $h, k \neq 0$

129 Полиномиальная формула

129.1 Формулировка

$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^r = \sum\limits_{j:|j|=r} \frac{r!}{j!} a^j$

129.2 Доказательство

По индукции:

<u>$r = 1$</u>

$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$

<u>Переход</u>

Пусть верно для r, докажем для $r + 1$

$(a_1+a_2+\ldots+a_m)^r(a_1+a_2+\ldots+a_m) = (a_1+a_2+\ldots+a_m)\sum \frac{r!}{j_1!j_2!\ldots j_n!} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \ldots a_m^{j_m} = \sum \frac{r!}{j_1!\ldots j_m!} a_1^{j_1+1} a_2^{j_2} \ldots a_m^{j_m} + \sum \frac{r!}{j_1!\ldots j_m!} a_1^{j_1} a_2^{j_2+1} \ldots a_m^{j_m} + \ldots + \sum \frac{r!}{j_1!\ldots j_m!} a_1^{j_1} \ldots a_m^{j_m+1} =$

$= \sum\limits_{|j|=r+1} \sum\limits_{j_1 \geq 1} \frac{r! j_1}{j_1! \ldots j_m!} a_1^{j_1} \ldots a_m^{j_m} + \ldots + \sum\limits_{|j|=r+1} \sum\limits_{j_m \geq 1} \frac{r! j_m}{j_1! j_2! \ldots j_m!} a_1^{j_1} \ldots a_m^{j_m} =$

$= \sum\limits_{|j|=r+1} \frac{r!(j_1 + j_2 + \ldots + j_m)}{j_1! \ldots j_m} a_1^{j_1} \ldots a_m^{j_m}$, а сумма всех j_i равна $r + 1$

130 Лемма о дифференцировании “сдвига”

130.1 Формулировка

Пусть $f \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ и $f \in C^r(E)$

$a \in E$, $h \in \mathbb{R}^m$. Пусть $\forall t \in [-1, 1]$ выражение $a + th \in E$

$\varphi(t) := f(a + th)$, для $t \in [-1, 1]$. Тогда при $k \leq r$

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{|j|=k} \frac{k!}{j!} h^j \frac{\partial^k f}{\partial x^j}(a)$$

130.2 Доказательство

Рассмотрим пример:

<u>$k = 1$</u>

$$\varphi'(0) = \frac{d}{dt}\left(f(a + th)\right) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m} h_m$$

<u>$k = 2$</u>

$$\varphi''(0) = f''_{x_1 x_1}(a) h_1^2 + f''_{x_2 x_2}(a) h_2^2 + \ldots f''_{x_m x_m}(a) h_m^2 + 2 \sum_{i<j} f''_{x_i x_j}(a) h_i h_j$$

<u>В общем случае</u>

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum \sum \ldots \sum \frac{\partial^k f(a + th)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} h_{i_1} \ldots h_{i_k} = \sum \frac{k!}{j!} h^j \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x^j}(a + th)$$

131 Многомерная формула Тейлора (с остатком в форме Лагранжа и Пеано)

131.1 Формулировка

Пусть $f : C^{r+1}(E)$, $B(a,r) \subset E$, $x \in B(a,r)$

1. Тогда $\exists \Theta \in [0,1]$, что $f(x) = \sum\limits_{|k| \le r} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \sum\limits_{|k|=r+1} \dfrac{f^{(k)}(a+\Theta(x-a))}{k!}$ — остаток в форме Лагранжа
2. Тогда $f(x+h) = \sum\limits_{|k| \le r} \dfrac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + o(|h|^r)$, причём $h \to \mathbb{O}$

131.2 Доказательство

Доказывается одним образом:

$\varphi(t) := f(a+th)$, где $x = a+h$, а $h = x-a$. Тогда $f(x) = \varphi(a)$ и применим одномерную формулу Тейлора к φ

$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) \cdot 1 + \ldots + \dfrac{f^{(r)}(a)}{r!} 1^r + \dfrac{\varphi^{(r+1)}(\Theta)}{(r+1)!} 1^{r+1}$

По лемме о дифференцировании сдвига получили то, что хотели.

132 Теорема о пространстве линейных отображений

132.1 Формулировка

Пусть X, Y — линейные пространства, тогда $L(X, Y)$ — множество линейных отображений из X в Y, Lin — множество всех линейных отображений из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^l$

Пусть $A \in L(X, Y)$, тогда $\|A\| = \|A\|_{m,l} = \sup\left(|Ax|, x \in \mathbb{R}^m, |x| = 1\right)$

Тогда

1. $\|A\|$ — норма в $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$, т.е.
   - $\|A\| \geq 0$ и $\|A\| = 0 \Longleftrightarrow A = \mathbb{O}$
   - $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ выполняется $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$
   - $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
2. $A, B \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ выполняется, что $\|BA\| \leq \|B\| \|A\|$

132.2 Доказательство

1. - очевидно
   - очевидно
   - $|(A + B)x| \leq |Ax| + |Bx| \leq \|A\||x| + \|B\||x|$
2. $|BAx| \leq \|B\||Ax| \leq \|B\|\|A\||x|$

133 Лемма об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора

133.1 Формулировка

Пусть X, Y — нормированные пространства, $A \in \mathrm{Lin}(X, Y)$. Тогда эквивалентны следующую утверждения:

1. A — ограничена, т.е. $\|A\| < +\infty$
2. A — непрерывна в $O \in X$
3. A — непрерывна всюду на X
4. A — равномерно непрерывно, т.е.

   $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |Ax_1 - Ax_2| < \varepsilon$

133.2 Доказательство

$4 \Rightarrow 3$ и $3 \Rightarrow 2$ очевидны

$2 \Rightarrow 1$: возьмём $\varepsilon = 1$, тогда $\exists \delta > a : \forall x \in \overline{B(0, \delta)} : |Ax| < 1$. Тогда ясно, что $\|A\| < \dfrac{1}{\delta} \left(\overline{x} = \dfrac{x}{\delta} : |A\overline{x}| < \dfrac{1}{\varepsilon} \right)$

$1 \Rightarrow 4 : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{\|A\|} : \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2|$

134 Теорема Лагранжа для отображений

134.1 Формулировка

Пусть $F : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, дифференцируемо в E, а также $a, b \in E : [a, b] \subset E$

Тогда $\exists c \in [a, b]$ (или $\exists \Theta \in (0, 1) : c = a + \Theta(b - a)$), что

$|F(b) - F(a)| \leq \|F'(c)\||b - a|$

134.2 Доказательство

$f(t) = F(a + t(b - a))$ при $t \in [0, 1]$ и $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^l$

$f'(t) = F'(a + t(b - a))(b - a)$, по т. Лагранжа $|f(1) - f(0)| \leq |f'(\Theta)|$, т.е.

$|F(b) - F(a)| \leq \|F'(c)\||b - a|$

135 Теорема об обратимости линейного отображения, близкого к обратимому

135.1 Вспомогательная лемма

Пусть $B \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ и $\exists c > 0 : \forall x : |Bx| \geq C|x|$, тогда

$B \in \Omega_m$ и $\|B^{-1}\| \leq \dfrac{1}{c}$

135.2 Доказательство

$\ker B = 0$ — эквивалентно обратимости, тогда

$|B^{-1}y| \leq \dfrac{1}{c}|y|$ (заменим $|Bx| = |y|$ и $|x| = |B^{-1}y|$)

135.3 Формулировка

Пусть $A \in \Omega_m$, $B \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ и $\|A - B\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$, B — близка к A (Ω_m — множество всех обратимых операторов в $\mathbb{R}^m$), тогда

1. $B \in \Omega_m$ (т.е. Ω_m — открыто)
2. $\|B^{-1}\| \leq \dfrac{1}{\|A^{-1}\| - \|A - B\|}$
3. $\|A^{-1} - B^{-1}\| \leq \dfrac{\|A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|^{-1} - \|A - B\|}\|A - B\|$

135.4 Доказательство

1. (1) и (2):

   $|Bx| = |Ax + (B - A)x| \geq |Ax| - |(B - A)x| \geq \left(\dfrac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - a\|\right) \cdot |x|$

   по условию теоремы множитель $\left(\dfrac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\|\right)$ больше нуля, значит выполняется условии вспомогательной леммы и B обратим, значит выполняется и условие (2)

2. $A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}$, значит $\|A^{-1} - B^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|\|B - A\|\|B^{-1}\|$

136 Теорема о непрерывно дифференцируемых отображениях

136.1 Формулировка

Пусть $f : D \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, D — открытое и и F дифференцируемо на D, тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $F \in C^1(D)$ (т.е. все частные производные непрерывны)
2. $F' : D \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ — непрерывна, т.е.

   $\forall x \in D : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \overline{x} : |x - \overline{x}| < \delta \Rightarrow \|F'(x) - F'(\overline{x})\| < \varepsilon$

136.2 Доказательство

1. $1 \Rightarrow 2$

   $\|A\| \leq \sqrt{\sum a_{ij}^2}$, тогда $\|F'(x) - F'(\overline{x})\| \leq \sqrt{\sum \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x}) \right)}$

   Пусть $\varepsilon > 0$, тогда возьмём такое δ, что $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x}) \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{ml}}$

   Тогда $\|F'(x) - F'(\overline{x})\| \leq \sqrt{\sum \frac{\varepsilon^2}{ml}} = \varepsilon$

2. $2 \Rightarrow 1$

   Возьмём $h := (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, тогда

   $|(F'(x) - F'(\overline{x}))h| < \|F'(x) - F'(\overline{x})\||h| < \varepsilon$, тогда
   $\sqrt{\sum \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x}) \right)} < \varepsilon$ при всех $k = 1..m$, значит и $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x}) \right| < \varepsilon$

137 Теорема Ферма. Необходимое условие экстремума. Теорема Ролля

137.1 Теорема Ферма

137.1.1 Формулировка

Пусть $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, a — точка локального эсктремума, $a \in \text{Int } D$, f — дифференцируема на D. Тогда

$\forall l \in \mathbb{R}^m$ и $|l| = 1$ верно, что $\dfrac{\partial f}{\partial l} a = 0$

137.1.2 Доказательство

$\langle l \rangle$ — прямая через точку a в направлении l

$f\Big|_{\langle l \rangle}$ — достаточный экстремум в точке a, значит $\varphi(t) = f(a + tl)$ — локальный экстремум при $t = 0$ и

$\varphi'(0) = \dfrac{\partial f}{\partial l}(a) = 0$

137.2 Необходимое условие экстремума

137.2.1 Формулировка

Пусть $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, D — открытое, a — точка локального экстремума, f — дифференцируема на D. Тогда $f'(a)$ — нулевой оператор, т.е. все частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}(a) = 0$ при любом i

137.2.2 Доказательство

Пусть $g(t) = f(a + tl)$, тогда по теореме Ферма $g'(0) = 0$, и из этого следует, что все частные производные равны нулю.

137.3 Теорема Ролля

137.3.1 Формулировка

Пусть $f : K \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, K — компакт, f дифференцируемо на Int K, $f \in C(K)$ и $f\Big|_{\partial k} \equiv \text{const}$. Тогда существует такой x_0, что $f'(x_0) = 0$

137.3.2 Доказательство

По теореме Вейерштрасса f достигает максимума и минимума на ∂k, точка $f = \text{const}$ и $f' = 0$

Если хотя бы один из не на ∂k, то тогда теорема Ферма.

138 Лемма об оценке квадратичной формы и об эквивалентных нормах

138.1 Формулировка

1. Пусть $Q(h)$ — положительно определенная форма в $\mathbb{R}^m$, тогда $\exists \gamma_Q > 0$, что $\forall h \in \mathbb{R}^m : O(h) \geq \gamma_Q |h|^2$
2. ρ — норма в $\mathbb{R}^m$ и $\exists c_1, c_2 > 0$, тогда $\forall x : c_1|x| \leq \rho(x) \leq c_2|x|$

138.2 Доказательство

1. $S(0,1)$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^m$ и пусть $\gamma_Q := \min\limits_{h \in S} Q(h)$ — существует по т. Вейерштрасса и достигается, значит $\gamma_Q > 0$
   $Q(h) = Q\left(|h| \cdot \dfrac{h}{|h|}\right) = |h|^2 \cdot Q\left(\dfrac{h}{|h|}\right) \geq \gamma_Q \cdot |h|^2$
2. $c_1 := \min \rho(x)$ и $c_2 := max \rho(x)$ для всех x из $S(0,1)$
   $\rho(x) = \rho\left(|x| \dfrac{x}{|x|}\right) = |x| \cdot \rho\left(\dfrac{x}{|x|}\right) \geq c_1|x|$, аналогично доказывается и c_2
   Осталось только доказать, что ρ — непрерывна
   $\rho(x-y) = \rho(\sum (x_i - y_i)e_i) \leq \sum \rho((x_i - y_i)e_i) \leq \sum |x_i - y_i| \rho(e_i) \leq |x-y| \cdot \sum \rho(e_i)$

139 Достаточное условие экстремума

139.1 Формулировка

Пусть $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Int } D$ и $f \in C^2(\text{Int } D)$, grad $f(x_0) = 0$

$Q(h) := \partial^2 f$, тогда:

1. $Q(h)$ — положительно определенная, значит x_0 — локальный минимум
2. $Q(h)$ — отрицательно определенная, значит x_0 — локальный максимум
3. $Q(h)$ — неопределенная, значит x_0 — не точка экстремума
4. $Q(h)$ — положительно/отрицательно определенная вырожденное, то информации недостаточно

139.2 Доказательство

$f(x_0+h)-f(x_0) = 0+\frac{1}{2}\partial^2 f(x_0+\overline{h}, h) = \frac{1}{2}Q(h)+\frac{1}{2}\sum f''_{x_i,x_i}(x_0+\Theta h)+\sum \left(f''_{x_i,x_j}(x_0+\Theta h) - f''_{x_i,x_j}(x_0)\right) h_i h_j$ — последнее слагаемое стремится к 0 при $h \to 0$, значит при мелких h сумма меньше $\frac{\gamma_Q}{2^2}|h|^2$ и

$\geq \frac{1}{2}\gamma_q|h|^2 - \frac{1}{4}\gamma_q|h|^2 = \frac{1}{4}\gamma_Q|h|^2$, т.е. $f(x_0+h) > f(x_0)$, значит x_0 — точка локального минимума

Аналогично $f(x_0+\Theta h) < f(x_0)$ — точка локального максимума

Пусть теперь $Q(h)$ — не знакоопределён, тогда

$2(f(x_0+th)-f(a)) = Q(th)+\sum(f''_{x_ix_j}(a+\Theta th)-f''_{x_ix_j}(a))th_ith_j = t^2Q(h)+t^2\sum(f''_{x_ix_j}(a+\Theta th)-f''_{x_ix_j}(a))h_ih_j$ — при t это сумма бесконечна мала по модулю