Содержание

Часть I

Определения

1 Первообразная, неопределенный интеграл

1.1 Первообразная

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

$F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — первообразная f на $\langle a, b\rangle$, если для любого $x \in \langle a, b\rangle$, F — дифференцируема в точке x, и $F'(x) = f(x)$.

Пример

$f(x) = \sin x \Leftrightarrow F(x) = -\cos x + C$

1.2 Неопределенный интеграл

Неопределенным интегралом функции f на $\langle a, b\rangle$ называют множество всех её первообразных.

Обозначение: $\int f$, $\int f(x)dx = \{F + C, C \in \mathbb{R}\}$, где F — любая первообразная.

2 Теорема о существовании первообразной

Пусть f непрерывна на $\langle a, b\rangle \Rightarrow$ существует такая функция F на $\langle a, b\rangle$, что $F' = f$.

Доказательство

В кредит

3 Таблица первообразных

1. $f(x) = k$, $F(x) = kx$
2. $f(x) = x^n$, $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
3. $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \ln|x|$
4. $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$
5. $f(x) = a^x$, $F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$
6. $f(x) = \sin x$, $F(x) = -\cos x$
7. $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x$
8. $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, $F(x) = -\operatorname{ctg} x$
9. $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $F(x) = \operatorname{tg} x$
10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $F(x) = \arcsin x$
11. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $F(x) = \operatorname{arctg} x$

4 Равномерная непрерывность

Функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна на $\langle a, b\rangle$, если:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall x_0, x : |x - x_0| < \delta,\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

5 Площадь, аддитивность площади, ослабленная аддитивность

5.1 Первое определение площади

Пусть E — множество всех ограниченных подмножество в $\mathbb{R}^2$ (или множество всех фигур).

Тогда площадь — это функция $\sigma : E \to [0, +\infty)$ со свойствами:

1. аддитивность

   Если $A = A_1 \sqcup A_2 \Rightarrow \sigma(A) = \sigma(A_1) + \sigma(A_2)$

2. нормировка

   $\sigma(\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle) = (d - c)(b - a)$

<u>Замечание</u>

Площадь монотонна, то есть если:

$A \subset B \Rightarrow \sigma(A) \leq \sigma(B)$

σ(вертикального отрезка) $= 0$

5.2 Второе определение площади

$\sigma : E \to [0, +\infty)$

- монотонна
- нормировка
- ослабленная аддитивность:

  $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$ — вертикальный отрезок, E_1 и E_2 — по разные стороны этого отрезка.

  $\sigma(E) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2)$

Часть II

Теоремы

6 Теорема Кантора о равномерной непрерывности

Пусть $f : X \to Y$ — метрические пространства, f непрерывна на X, X — компактно. Тогда f — равномерное непрерывно на X.

Доказательство (от противного)

Воспользуемся тем свойством, что если X — компактно, то X и секвенциально компактно.

Предположим противное:

$\exists \varepsilon > 0$ $\delta = \frac{1}{n}$ $\exists x_n, \widetilde{x_n}$: $\rho(x_n, \widetilde{x_n}) < \frac{1}{n}$ $\rho(f(x_n), f(\widetilde{x_n})) \geq \varepsilon$

Тогда выберем сходящуюся подпоследовательность из x_n $x_{n_k} \to a \in X$, $\widetilde{x_{n_k}} \to a \in X$.

Тогда $f(x_{n_k}) \to f(a)$ и $f(\widetilde{x_{n_k}}) \to f(a)$, то

$\rho(f(x_{n_k}), f(\widetilde{x_{n_k}})) \to 0$ (по неравенству треугольника)

Что и противоречит изначальному условию.

7 Теорема Брауэра о неподвижной точке

Пусть $f : B(0,1) \subset \mathbb{R}^m \to B(0,1)$ — непрерывное, тогда

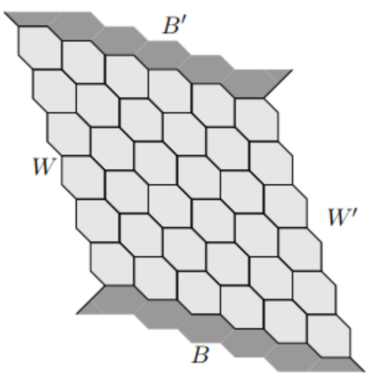
$\exists x_0 : f(x_0) = x_0$

Доказательство

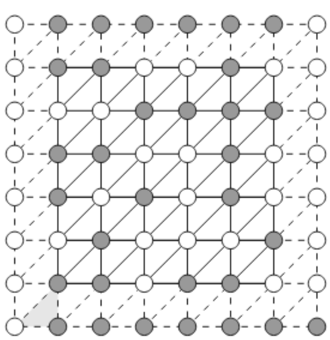
7.1 Игра "Гекс"

Пусть есть поле $n \times m$, состоящее из правильных шестиугольников (гексов). Также два игрока на каждом своём ходу красят гексы в белый или чёрный цвет. Тогда для любой раскраски найдётся либо чёрная тропинка, соединяющая верхнюю и нижнюю часть поля, либо белая тропинка, соединяющая левую и правую часть поля.

Доказывается от противного



7.2 Сама теорема



Теперь заменим гексы на обычную координатную плоскость, причём игра, по сути, останется такой же. Теперь перейдём к самой теореме.

Шар с лёгкостью заменяется на обычный квадрат $[0,1] \times [0,1]$

Пусть $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ — непрерывна. Тогда

$\exists a \in [0,1]^2,\ f(a) = a$

$a \in [0,1]^2$

$a = (a_1, a_2)$

$f(x) \in \mathbb{R}^2$

$f(x) = (f(x)_1, f(x)_2)$

Доказательство

Пусть ρ — функция, заданная на $[0,1]^2 \times [0,1]^2$

$\rho(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ — непрерывна на $[0,1]^2$

$x_n \to a$

$y_n \to b$

$\rho(x_n, y_n) \to \rho(a, b)$

Очевидно, что для любых $x, y : x \neq y \Rightarrow \rho(x, y) > 0$

Теперь к самой теореме

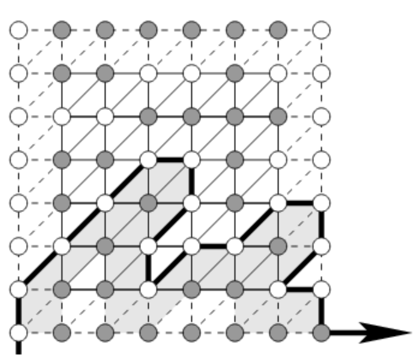
Пусть для любого $x \in [0,1]^2$ $f(x) \neq x$. Тогда $\rho(x, f(x)) > 0$, но ρ непрерывно по x и $[0,1]^2$ — компакт, значит по теореме Вейерштрасса существует такое $\varepsilon > 0$, что

$\min\limits_{x \in [0,1]^2} \rho(x, f(x)) = \varepsilon > 0$

По теореме Кантора для этого ε найдётся такая δ (будем считать, что $\sqrt{2}\delta < \varepsilon$), что

$\forall x, \widehat{x} \in [0,1]^2 : \|x - \widehat{x}\| < \delta \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \|f(x) - f(\widehat{x})\| < \varepsilon$

Берём $\frac{1}{n} < \varepsilon$



Доска

Узел $(l,k) \to (\frac{l}{n}, \frac{k}{n}) \in [0,1]^2$

$0 \le l, k \le n$

Красим узлы

v — логический узел, $v = (v_1, v_2)$

$c(v) = \min \left\{ i : \left\| f(\frac{v}{n})_i - \frac{v_i}{n} \right\| \ge \varepsilon \right\}$

По лемме об игре в гексы есть одноцветная тропинка.

Путь v^0 — начальная точка тропинки, v^N — конечная.

$v_1^0 = 0$

$f(\frac{v^0}{n}) \in [0,1]^2$, т.е. $f(\frac{v^0}{n})_1 \ge 0$

$\varepsilon \le f(\frac{v^0}{n})_1$

Аналогично для $v_1^N = 1$

$f(\frac{v^N}{n})_1 \le 1$

$f(\frac{v^N}{n})_1 - \frac{v_1^N}{n} \le -\varepsilon$

$f(\frac{v^0}{n})_1 - \frac{v_1^0}{n} \ge \varepsilon$

Поскольку для любых x верно, что $|f(x)_1 - x_1| \ge \varepsilon$, то из этого следует, что какой-то прыжок был длиной не меньше 2ε, но такое невозможно, поскольку по условию если $\|x - \widehat{x}\| < \frac{1}{n} \Rightarrow \|f(x) - f(\widehat{x})\| < \varepsilon$

8 Теорема о свойствах неопределенного интеграла

Пусть f, g имеют первообразную на $\langle a, b\rangle$. Тогда:

1. $\int f + \int g = \int(f+g)$

   $\forall\alpha \in \mathbb{R}\ \int(\alpha f) = \alpha \int f$

2. $\forall\varphi : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$, φ дифференцируема

   $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$, где F — первообразная f

3. $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0 : \int f(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + C$

4. f, g — дифференцируемы на $\langle a, b\rangle$

   $f' \cdot g$ имеет первообразную на $\langle a, b\rangle$

   Тогда $f \cdot g'$ тоже имеет первообразную и

   $\int f'g = fg - \int fg'$

Доказательство

1. $(F + G)' = f + g$

   $(\alpha F)' = \alpha f$

2. $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t))\varphi'(t)$

3. $(\frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta))' = f(\alpha x + \beta)$

4. $(fg)' = f'g + fg'$, т.е. $fg = \int f'g + \int fg'$