

Содержание

I	Определения	19
1	Первообразная, неопределенный интеграл	20
1.1	Первообразная	20
1.2	Неопределенный интеграл	20
2	Теорема о существовании первообразной	21
3	Таблица первообразных	22
4	Равномерная непрерывность	23
5	Площадь, аддитивность площади, ослабленная аддитивность	24
5.1	Первое определение площади	24
5.2	Второе определение площади	24
5.3	Площадь как сумма прямоугольников	25
6	Положительная и отрицательная срезки	26
6.1	Определение	26
6.2	Некоторые свойства	26
6.3	Подграфик	26
7	Определённый интеграл	27
7.1	Определение	27
7.2	Замечание	27

8 Среднее значение функции на промежутке	28
9 Кусочно-непрерывная функция	29
10 Почти первообразная	30
11 Дробление отрезка, ранг дробления, оснащение	31
12 Риманова сумма	32
13 Постоянная Эйлера	33
14 Функция промежутка. Аддитивная функция промежутка	34
15 Плотность аддитивной функции промежутка	35
16 Гладкий путь, вектор скорости, носитель пути	36
16.1 Гладкий путь	36
16.2 Вектор скорости	36
16.3 Носитель пути	36
17 Длина гладкого пути	37
18 Формулы для длины пути: в \mathbb{R}^m , в полярных координатах, длина графика	38
18.1 Длина пути в \mathbb{R}^m	38
18.2 Длина графика	38
18.3 Длина кривой в полярных координатах	38
19 Вариация функции на промежутке	39
20 Верхний и нижний пределы	40

20.1 Верхняя и нижняя огибающая	40
20.2 Верхний и нижний пределы	40
21 Частичный предел	41
22 Допустимая функция	42
23 Несобственный интеграл, сходимость, расходимость	43
23.1 Определение	43
23.2 Сходимость и расходимость	43
24 Критерий Больцано–Коши сходимости несобственного интеграла	44
25 Гамма функция Эйлера	45
26 Числовой ряд, сумма ряда, сходимость, расходимость	46
26.1 Числовой ряд	46
26.2 Сумма ряда	46
26.3 Сходимость и расходимость	46
27 n-й остаток ряда	47
28 Абсолютно сходящийся ряд	48
29 Критерий Больцано–Коши сходимости числового ряда	49
30 Преобразование Абеля	50
31 Бесконечное произведение	51
32 Произведение рядов	52

33	Произведение степенных рядов	53
34	Скалярное произведение, евклидова норма и метрика в \mathbb{R}^m	54
35	Окрестность точки в \mathbb{R}^m, открытое множество	55
36	Сходимость последовательности в \mathbb{R}^m, покоординатная сходимость	56
37	Предельная точка, замкнутое множество, замыкание	57
38	Компактность, секвенциальная компактность, принцип выбора Больцано-Вейерштрасса	58
38.1	Компактность	58
38.2	Секвенциальная компактность	58
38.3	Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса	58
39	Координатная функция	59
40	Двойной предел, повторный предел	60
40.1	Повторный предел	60
40.2	Двойной предел	60
41	Предел по направлению, предел вдоль пути	61
42	Предел отображения (определение по Коши и по Гейне)	62
42.1	По Коши	62
42.2	По Гейне	62
43	Линейный оператор	63
44	Отображение бесконечно малое в точке	64

45 $o(h)$ при $h \rightarrow 0$	65
46 Отображение, дифференцируемое в точке	66
47 Производный оператор, матрица Якоби, дифференциал	67
47.1 Производный оператор	67
47.2 Матрица Якоби	67
47.3 Дифференциал	67
48 Частные производные	68
II Теоремы	69
49 Теорема Кантора о равномерной непрерывности	70
49.1 Формулировка	70
49.2 Доказательство (от противного)	70
50 Теорема Брауэра о неподвижной точке	71
50.1 Формулировка	71
50.2 Доказательство	71
50.2.1 Игра "Гекс"	71
50.2.2 Сама теорема	72
50.2.3 Доказательство	72
50.2.4 Теперь к самой теореме	73
50.2.5 Доска	73
51 Теорема о свойствах неопределенного интеграла	75

52 Интегрирование неравенств. Теорема о среднем	76
52.1 Интегрирование неравенств	76
52.1.1 Формулировка	76
52.1.2 Доказательство	76
52.1.3 Следствия	76
52.2 Теорема о среднем значении	77
52.2.1 Формулировка	77
52.2.2 Доказательство 1 (Кохась порофлил)	77
52.2.3 Нормальное доказательство	77
53 Теорема Барроу	78
53.1 Определение	78
53.2 Теорема (Барроу)	78
53.3 Доказательство	78
53.4 Замечания	78
54 Формула Ньютона-Лейбница, в том числе, для кусочно-непрерывных функций	79
54.1 Формулировка теоремы	79
54.2 Доказательство	79
54.3 Для кусочно-непрерывных функций	79
55 Свойства определенного интеграла: линейность, интегрирование по частям, замена переменных	80
55.1 Линейность определенного интеграла	80
55.1.1 Формулировка	80

55.1.2 Доказательство	80
55.2 Интегрирование по частям	80
55.2.1 Формулировка	80
55.2.2 доказательство	80
55.3 Замена переменных	81
55.3.1 Формулировка	81
55.3.2 Доказательство	81
55.3.3 Замечание	81
56 Интегральное неравенство Чебышева. Неравенство для сумм	82
56.1 Интегральное неравенство Чебышева	82
56.1.1 Формулировка	82
56.1.2 Доказательство	82
56.2 Неравенство для сумм	82
56.2.1 Формулировка для сумм	82
56.2.2 Доказательство	83
57 Иррациональность числа π	84
57.1 Вспомогательный интеграл	84
57.2 Теорема	85
57.3 Доказательство (от противного)	85
58 Формула Тейлора с остатком в интегральной форме	86
58.1 Формулировка	86
58.2 Доказательство (по индукции)	86

58.3	Послесловие	86
59	Лемма об ускоренной сходимости	88
59.1	Формулировка	88
59.2	Доказательство	88
60	Правило Лопиталья (с леммой)	89
60.1	Формулировка	89
60.2	Пример из жизни	89
60.3	Доказательство	89
60.4	Собственное доказательство	89
61	Теорема Штольца	91
61.1	Формулировка	91
61.2	Доказательство	91
62	Пример неаналитической функции	93
62.1	Неалитическая функция	93
62.2	Утверждение	93
62.3	Доказательство	93
63	Интеграл как предел интегральных сумм	95
63.1	Формулировка	95
63.2	Доказательство	95
63.3	Замечания	95
64	Теорема об интегральных суммах для центральных прямоугольников	97

64.1	Формулировка	97
64.2	Доказательство	97
65	Теорема о формуле трапеций, формула Эйлера–Маклорена	98
65.1	Формулировка теоремы о формуле трапеций	98
65.2	Доказательство	98
65.3	Простейший случай формулы Эйлера-Маклорена	98
66	Асимптотика степенных сумм	100
67	Асимптотика частичных сумм гармонического ряда	101
68	Формула Валлиса	102
68.1	Формулировка	102
68.2	Доказательство	102
69	Формула Стирлинга	104
69.1	Формулировка	104
69.2	Доказательство	104
70	Теорема о вычислении аддитивной функции промежутка по плотности	105
70.1	Формулировка	105
70.2	Доказательство	105
71	Обобщенная теорема о плотности	106
71.1	Формулировка	106
71.2	Доказательство	106

72 Площадь криволинейного сектора: в полярных координатах и для параметрической кривой	107
72.1 Введение	107
72.2 Пример	107
72.3 Теорема	107
72.4 Доказательство	107
72.5 Замечание	108
73 Изопериметрическое неравенство	110
73.1 Формулировка	110
73.2 Доказательство	110
74 Вычисление длины гладкого пути	111
74.1 Формулировка	111
74.2 Доказательство	111
75 Объем фигур вращения	113
75.1 Формулировка	113
75.2 Доказательство	113
76 Неравенство Йенсена для сумм	115
76.1 Формулировка	115
76.2 Доказательство	115
77 Неравенство Йенсена для интегралов	116
77.1 Формулировка	116
77.2 Доказательство	116

78 Неравенство Коши (для сумм и для интегралов)	117
78.1 Неравенство для сумм	117
78.1.1 Формулировка	117
78.1.2 Доказательство	117
78.2 Неравенство для интегралов	117
78.2.1 Формулировка	117
79 Неравенство Гёльдера для сумм	119
79.1 Формулировка	119
79.2 Доказательство	119
80 Неравенство Гёльдера для интегралов	121
80.1 Формулировка	121
80.2 Доказательство	121
81 Неравенство Минковского	122
81.1 Формулировка	122
81.2 Замечания	122
81.3 Доказательство	122
82 Свойства верхнего и нижнего пределов	123
82.1 Формулировка	123
82.2 Доказательство	123
83 Техническое описание верхнего предела	125
83.1 Формулировка	125

83.2 Доказательство	125
84 Теорема о существовании предела в терминах верхнего и нижнего пределов	126
84.1 Формулировка	126
84.2 Доказательство	126
85 Теорема о характеристике верхнего предела как частичного	127
85.1 Формулировка	127
85.2 Доказательство	127
86 Простейшие свойства несобственного интеграла	128
86.1 Формулировка	128
86.2 Доказательство	129
87 Признаки сравнения сходимости несобственного интеграла	130
87.1 Формулировка	130
87.2 Доказательство	130
88 Интеграл Эйлера-Пуассона	132
88.1 Формулировка	132
88.2 Доказательство	132
89 Гамма функция Эйлера. Простейшие свойства	134
89.1 Формулировка	134
89.2 Доказательство	134
90 Теорема об абсолютно сходящихся интегралах и рядах	136
90.1 Формулировка	136

90.2	доказательство	136
90.3	Случай рядов	136
91	Изучение сходимости интеграла $\int_{2019}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}}$	137
92	Изучение интеграла $\int_1^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x^p}$ на сходимость и абсолютную сходимость	138
93	Признак Абеля–Дирихле сходимости несобственного интеграла	139
93.1	Формулировка	139
93.2	Доказательство	139
94	Интеграл Дирихле	140
94.1	Формулировка	140
94.2	Доказательство	140
95	Свойства рядов: линейность, свойства остатка, необх. условие сходимости, критерий Больцано–Коши	141
95.1	Линейность, свойства остатка	141
95.1.1	Формулировка	141
95.1.2	Доказательство	141
95.2	Необходимое условие сходимости рядов	141
95.2.1	Формулировка	141
95.2.2	Доказательство	142
95.3	Критерий Больцано–Коши	142
95.3.1	Формулировка	142
95.4	Доказательство	142

96	Признак сравнения сходимости положительных рядов	143
96.1	Лемма	143
96.1.1	Формулировка	143
96.1.2	Доказательство	143
96.2	Признак сравнения сходимости положительных рядов	143
96.2.1	Формулировка	143
96.2.2	Доказательство	144
97	Признак Коши сходимости положительных рядов	145
97.1	Формулировка	145
97.2	Доказательство	145
98	Признак Коши сходимости положительных рядов (рго)	146
98.1	Формулировка	146
98.2	Доказательство	146
99	Признак Даламбера сходимости положительных рядов	147
99.1	Формулировка	147
99.2	Доказательство	147
100	Признак Раабе сходимости положительных рядов	149
100.1	Лемма	149
100.1.1	Формулировка	149
100.1.2	Доказательство	149
100.2	Теорема	149
100.2.1	Формулировка	149

100.2.2 Доказательство	150
101 Интегральный признак Коши сходимости числовых рядов	151
101.1 Формулировка	151
101.2 Доказательство	151
102 Признак Лейбница	152
102.1 Формулировка	152
102.2 Доказательство	152
103 Признаки Дирихле и Абеля сходимости числового ряда	153
103.1 Формулировка	153
103.1.1 Дирихле	153
103.1.2 Абеля	153
103.2 Доказательство	153
103.2.1 Дирихле	153
103.2.2 Абеля	153
104 Теорема об условиях сходимости бесконечного произведения	154
104.1 Формулировка	154
104.2 Доказательство	154
105 Лемма об оценке приближения экспоненты ее замечательным пределом	155
105.1 Лемма 1	155
105.1.1 Формулировка	155
105.1.2 Доказательство	155

105.2	Лемма 2	155
105.2.1	Формулировка	155
105.2.2	Доказательство	155
106	Формула Эйлера для гамма-функции	157
106.1	Формулировка	157
106.2	Доказательство	157
107	Формула Вейерштрасса для Г-функции	158
107.1	Формулировка	158
107.2	Доказательство	158
108	Вычисление произведений с рациональными сомножителями	159
108.1	Формулировка	159
109	Теорема о группировке слагаемых	160
109.1	Формулировка	160
109.2	Доказательство	160
110	Теорема о перестановке слагаемых	161
110.1	Формулировка	161
110.2	Доказательство	161
111	Теорема о произведении рядов	162
111.1	Формулировка	162
111.2	Доказательство	162
112	Единственность производной	163

112.1	Формулировка	163
112.2	Доказательство	163
113	Лемма о дифференцируемости отображения и его координатных функций	164
113.1	Формулировка	164
113.2	Доказательство	164
114	Необходимое условие дифференцируемости	165
114.1	Формулировка	165
114.2	Доказательство	165
115	Достаточное условие дифференцируемости	166
115.1	Формулировка	166
115.2	Доказательство	166
116	Лемма об оценке нормы линейного оператора	167
116.1	Формулировка	167
116.2	Доказательство	167
117	Дифференцирование композиции	168
117.1	Формулировка	168
117.2	Доказательство	168
118	Дифференцирование произведений	169
118.1	Формулировка	169
118.2	Доказательство	169
119	Теорема Лагранжа для векторнозначных функций	170

119.1	Формулировка	170
-------	------------------------	-----

Часть I

Определения

1 Первообразная, неопределенный интеграл

1.1 Первообразная

$$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

$F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — первообразная f на $\langle a, b \rangle$, если для любого $x \in \langle a, b \rangle$ F дифференцируема в точке x и $F'(x) = f(x)$.

Пример

$$f(x) = \sin x \iff F(x) = -\cos x + C$$

1.2 Неопределенный интеграл

Неопределенным интегралом функции f на промежутке $\langle a, b \rangle$ называют множество всех её первообразных.

Обозначение: $\int f, \int f(x) dx = \{F + C, C \in \mathbb{R}\}$, где F — любая первообразная.

2 Теорема о существовании первообразной

Пусть f непрерывна на $\langle a, b \rangle \implies$ существует такая функция F на $\langle a, b \rangle$, что $F' = f$.

Доказательство

В кредит

3 Таблица первообразных

1. $f(x) = k, F(x) = kx$
2. $f(x) = x^n, F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1},$ где $n \neq -1$
3. $f(x) = \frac{1}{x}, F(x) = \ln |x|$
4. $f(x) = e^x, F(x) = e^x$
5. $f(x) = a^x, F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$
6. $f(x) = \sin x, F(x) = -\cos x$
7. $f(x) = \cos x, F(x) = \sin x$
8. $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}, F(x) = -\operatorname{ctg} x$
9. $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, F(x) = \operatorname{tg} x$
10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, F(x) = \arcsin x$
11. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, F(x) = \operatorname{arctg} x$
12. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln (x + \sqrt{x^2 \pm 1})$
13. $f(x) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$

4 Равномерная непрерывность

Отображение $f : X \rightarrow Y$, где X и Y — метрические пространства, а также $A \subset X$, называется равномерно непрерывным на A , если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x_0, x \in A : \rho(x, x_0) < \delta \implies \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

5 Площадь, аддитивность площади, ослабленная аддитивность

5.1 Первое определение площади

Пусть E — множество всех ограниченных подмножество в \mathbb{R}^2 (или множество всех фигур).

Тогда площадь — это функция $\sigma : E \rightarrow [0, +\infty)$ со свойствами:

1. аддитивность

$$\text{Если } A = A_1 \sqcup A_2, \text{ то } \sigma(A) = \sigma(A_1) + \sigma(A_2)$$

2. нормировка

$$\sigma(\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle) = (d - c)(b - a)$$

Замечание

1. Площадь монотонна, то есть:

$$A \subset B \Rightarrow \sigma(A) \leq \sigma(B)$$

$$B = A \cup (B \setminus A)$$

$$\sigma(B) = \sigma(A) + \sigma(B \setminus A) \geq \sigma(A)$$

2. $\sigma(\text{вертикального отрезка}) = 0$

Отрезок — прямоугольник, ширина которого стремится к 0, значит и площадь также стремится к 0

5.2 Второе определение площади

$$\sigma : E \rightarrow [0, +\infty)$$

- монотонна
- нормировка
- ослабленная аддитивность:

$E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$ — вертикальный отрезок, E_1 и E_2 — по разные стороны этого отрезка.

$$\sigma(E) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2)$$

5.3 Площадь как сумма прямоугольников

$$\sigma(A) = \inf \left(\sum \sigma(P_i) \right), \text{ где } A \subset \bigcup P_i$$

6 Положительная и отрицательная срезки

6.1 Определение

Пусть $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$f_+(x) = \max(f(x), 0)$ — положительная срезка

$f_-(x) = \max(-f(x), 0)$ — отрицательная срезка

6.2 Некоторые свойства

- $f = f_+ - f_-$
- $f_+ + f_- = |f|$

6.3 Подграфик

Пусть $E \subset \langle a, b \rangle$

$$f(E) \geq 0$$

Тогда $\Pi\Gamma(f, E)$ — подграфик f на E , если:

$$\Pi\Gamma(f, E) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in E, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

7 Определённый интеграл

7.1 Определение

Определённым интегралом функции f по промежутку $[a, b]$ называется: $f : \langle c, d \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b] \subset \langle c, d \rangle$

$$\int_a^b f(x)dx = \sigma(\Pi\Gamma(f_+, [a, b])) - \sigma(\Pi\Gamma(f_-, [a, b]))$$

7.2 Замечание

$$1. f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$$

$$2. f \equiv c \Rightarrow \int_a^b f = c(b - a)$$

$c = 0$ — очевидно

$$c > 0 \quad \int_a^b = \sigma(\Pi\Gamma(c, [a, b])) = c(b - a)$$

$$c < 0 \quad \int_a^b = -\sigma(\Pi\Gamma(f_-, [a, b])) = -(-c)(b - a) = c(b - a)$$

$$3. \int_a^b -f = - \int_a^b f$$

$$(-f)_+ = f_-$$

$$(-f)_- = f_+$$

4. Можно считать, что разрешён случай, когда $a = b$

$$\int_a^a f = 0$$

8 Среднее значение функции на промежутке

Величина $c = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ — среднее значение функции f на промежутке $\langle a, b \rangle$

9 Кусочно-непрерывная функция

Если функция f всюду непрерывна на промежутке $[a, b]$ кроме конечного числа точек, при этом все точки разрыва I рода, то такую функцию называют кусочно-непрерывной.

10 Почти первообразная

Пусть f — кусочно-непрерывная функция на $[a, b]$. Тогда $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — почти первообразная, если существует такое $F'(x)$, что $F'(x) = f(x)$ для всех x кроме конечного числа точек и $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$

11 Дробление отрезка, ранг дробления, оснащение

Пусть задан невырожденный отрезок $[a, b]$

Дробление отрезка — набор таких точек x_0, x_1, \dots, x_n , что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

Оснащение — набор точек $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, что $\forall k \ \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Ранг дробления — величина, равная $\max_{k=1, \dots, n} (x_k - x_{k-1})$

12 Риманова сумма

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, а также задано дробление и оснащение. Тогда $\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ — Риманова сумма

Если ранг дробления стремится к 0, то $\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \rightarrow \int_a^b f(x) dx$. Это историческое определение интеграла

13 Постоянная Эйлера

Постоянная Эйлера — математическая константа γ , определяемая следующим образом:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$$

14 Функция промежутка. Аддитивная функция промежутка

Пусть у нас задано $\langle a, b \rangle$. Тогда

$$\text{Segm } \langle a, b \rangle := \{[p, q] \subset \langle a, b \rangle\}$$

Тогда:

1. $\phi : \text{Segm } \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — функция промежутка

2. $\phi : \text{Segm } \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, а также если

$$\forall [p, q] \subset \langle a, b \rangle \forall c \in (p, q) \Rightarrow \phi([p, q]) = \phi([p, c]) + \phi([c, q]) \quad \text{— аддитивная функция промежутка}$$

15 Плотность аддитивной функции промежутка

Пусть $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ $\phi : \text{Segm } \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — аддитивная функция промежутка

f — плотность ϕ , если $\forall \Delta \in \text{Segm } \langle a, b \rangle \Rightarrow \inf_{x \in \Delta} f(x) \cdot l(\Delta) \leq \phi(\Delta) \leq \sup_{x \in \Delta} f(x) \cdot l(\Delta)$,

где $l(\Delta)$ — длина промежутка.

16 Гладкий путь, вектор скорости, носитель пути

Путь — непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$

$\gamma(a)$ — начало пути

$\gamma(b)$ — конец пути

16.1 Гладкий путь

$$\gamma^{(t)} = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_m(t))$$

γ_i — координатная функция пути γ

Путь $\gamma^{(t)}$ называют гладким, если все $\gamma_i \in C^1[a, b]$

16.2 Вектор скорости

$$\gamma'(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

$$\text{Покоординатно: } \frac{\gamma_i(t) - \gamma_i(t_0)}{t - t_0} \rightarrow \gamma'_i(t)$$

$\gamma'(t_0) = (\gamma'_1(t_0), \gamma'_2(t_0), \dots, \gamma'_n(t_0))$ — вектор скорости в точке t_0

16.3 Носитель пути

Носитель пути — множество всех значений $\gamma([a, b]) \subset \mathbb{R}^m$

17 Длина гладкого пути

Длина гладкого пути — функция l , заданная на множестве гладких путей и удовлетворяющая свойствам:

1. $l \geq 0$

2. l — аддитивна:

$$\forall [a, b]$$

$$\forall \gamma[a, b]$$

$$\forall c \in [a, b]$$

$$l(\gamma) = l\left(\gamma\Big|_{[a, c]}\right) + l\left(\gamma\Big|_{[c, b]}\right)$$

3. $\forall \gamma, \bar{\gamma}$ — гладкие пути, $C_\gamma, C_{\bar{\gamma}}$ — их носители в \mathbb{R}^m

Если существует такое $T : C_\gamma \rightarrow C_{\bar{\gamma}}$ — сжатие, т.е.:

$$\forall M_1, M_2 \in C_\gamma$$

$$\rho(T(M_1), T(M_2)) \leq \rho(M_1, M_2)$$

$$\text{то } l(\bar{\gamma}) \leq l(\gamma)$$

4. γ — линейный путь ($\gamma(t) = t\bar{v} + \bar{u}$)

$$l(\gamma) = \rho(\gamma(a), \gamma(b))$$

Замечание

1. Длина хорды меньше длины дуги (это отображение — сжатие)

2. При растяжении длины путей растут

Всякое сжатие является непрерывным, но для растяжений — **не верно!!!**

3. При движении \mathbb{R}^m длина пути не меняется (это сжатие и растяжение одновременно)

18 Формулы для длины пути: в \mathbb{R}^m , в полярных координатах, длина графика

18.1 Длина пути в \mathbb{R}^m

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\gamma \in C^1$

Утверждение: $l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$

18.2 Длина графика

Параметризация:

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$t \mapsto (t, f(t))$ ($f \in C^1$) — гладкий путь

$$\gamma' = (1, f'(t))$$

$$\|\gamma'\| = \sqrt{1^2 + (f'(t))^2}$$

$$l(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

18.3 Длина кривой в полярных координатах

$$r = r(\varphi)$$

$$\gamma : [\varphi_0, \varphi_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(\varphi) = (r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi)$$

$$\gamma' = (r' \cos \varphi - r \sin \varphi, r' \sin \varphi + r \cos \varphi)$$

$$\|\gamma'\|^2 = (r')^2 + r^2$$

$$l(\gamma) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi$$

19 Вариация функции на промежутке

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — это «путь»

Рассмотрим все такие x , что

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

Тогда вариация f на $[a, b]$

$$\text{Var}_a^b f = \sup \sum_{i=1}^n (|f(x_i) - f(x_{i-1})|)$$

При этом если $f \in C^1([a, b])$, то $\text{Var}_a^b f = \int_a^b |f'(t)| dt$

20 Верхний и нижний пределы

20.1 Верхняя и нижняя огибающая

Пусть x_n — вещественная последовательность.

$y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$ — верхняя огибающая

$z_n = \inf(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$ — нижняя огибающая

Тогда:

1. y_n убывает ($y_n \geq y_{n+1}$)
2. z_n возрастают ($z_n \leq z_{n+1}$)
3. Если изменить конечное число членов x_n , изменится конечное число элементов y_n и z_n , тогда существуют $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$

20.2 Верхний и нижний пределы

Верхний предел x_n — $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup x_n := \lim y_n \in \overline{\mathbb{R}}$

Нижний предел x_n — $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf x_n := \lim z_n \in \overline{\mathbb{R}}$

21 Частичный предел

a — частичный предел x_n ($a \in \overline{\mathbb{R}}$), если

$$\exists n_k : x_{n_k} \rightarrow a$$

Пример

1. $x_n = (-1)^n$, 1 — частичный предел

2. $x_n = \sin n$, $\forall a \in [-1, 1]$ — частичный предел

22 Допустимая функция

Пусть $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, где $-\infty < a < b \leq +\infty$ называют допустимой, если

$\forall B : a < B < b : f|_{[a, B]}$ — кусочно-непрерывная функция.

23 Несобственный интеграл, сходимость, расходимость

23.1 Определение

Пусть $\Phi(B) = \int_a^B f(x)dx$, где $B \in [a, b)$, по логике f — допустима на $[a, b)$.

Если существует $\lim_{B \rightarrow b-0} \Phi(B) \in \overline{\mathbb{R}}$, то этот предел называют несобственным интегралом. Обозначается

$$\int_a^{\rightarrow b} f(x)dx.$$

23.2 Сходимость и расходимость

Если предела нет, то несобственного интеграла не существует

Если предел $\lim_{B \rightarrow b-0} \Phi(B)$ конечен, то несобственный интеграл называют сходящимся

Если предел бесконечный, то несобственный интеграл расходится.

24 Критерий Больцано–Коши сходимости несобственного интеграла

Интеграл $\int_a^{\rightarrow b} f(x)dx$ — сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta \in (a, b) : \forall B_1, B_2 : \Delta < B_1 < B_2 < b : \left| \int_{B_1}^{B_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

Если же

$$\exists \varepsilon : \exists B_n : \overline{B_n} \rightarrow b - 0 : \left| \int_{B_n}^{\overline{B_n}} f(x)dx \right| \geq \varepsilon$$

то интеграл расходится

25 Гамма функция Эйлера

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx, \quad t > 0$$

26 Числовой ряд, сумма ряда, сходимость, расходимость

26.1 Числовой ряд

Пусть a_n — вещественная последовательность. Тогда

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ называется числовым рядом, а a_n — его членами.

26.2 Сумма ряда

Последовательность $S_N = \sum_{i=1}^N a_i$ называют последовательностью частичных сумм. Если последовательность S_n имеет предел, то

$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ — сумма ряда.

26.3 Сходимость и расходимость

Если предел существует и конечный, то ряд сходится. Если предела нет или он бесконечный — то расходится.

27 n-й остаток ряда

$\sum_{k=n}^{+\infty} a_k$ — n-й остаток ряда.

28 Абсолютно сходящийся ряд

Ряд $\sum a_n$ — абсолютно сходится, если

1. $\sum a_n$ — сходится

2. $\sum |a_n|$ — сходится

29 Критерий Больцано–Коши сходимости числового ряда

Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ равносильна условию

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

30 Преобразование Абеля

Пусть a_k, b_k — числовые последовательности, $A_k = \sum_{j=1}^k a_j$ при $k \in \mathbb{N}$. Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

31 Бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{+\infty} p_k := \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n p_k$$

Если предел существует, конечен и не равен нулю, то произведение сходится, иначе расходится.

32 Произведение рядов

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ — числовые ряды, $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ — биекция, $k \mapsto \gamma(k) = (\varphi(k), \psi(k))$. Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}$$

называется произведением рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$.

33 Произведение степенных рядов

Пусть $\sum a_k \cdot x^k$ и $\sum b_k \cdot x^k$ — степенные ряды. Тогда

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 \text{ и}$$

$\sum c_n \cdot x^n$ — произведение степенных рядов.

34 Скалярное произведение, евклидова норма и метрика в \mathbb{R}^m

Скалярное произведение $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ — евклидова норма

$\rho(x, y) = \|x - y\|$ — метрика в \mathbb{R}^m

35 Окрестность точки в \mathbb{R}^m , открытое множество

$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - a| < r\}$ — открытый шар с центром в точке a и радиусом r

$U(a)$ — окрестность точки a или любой шар $B(a, r)$, где $r > 0$

Множество A открыто, если для любой точки $a \in A$ a — внутренняя, то есть $\exists U(a) \subset A$

36 Сходимость последовательности в \mathbb{R}^m , покоординатная сходимость

Последовательность $x^{(n)} \in \mathbb{R}^m \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a \iff |x^{(n)} - a| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ — сходящаяся последовательность в \mathbb{R}^m

$\forall k : 1 \leq k \leq m : x_k^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a_k$ — покоординатная сходимость.

37 Предельная точка, замкнутое множество, замыкание

a — предельная точка множества A , если любая проколота окрестность точки a имеет непустое пересечение с множеством A

Замкнутое множество содержит все свои предельные точки

Замыкание множества A — объединение самого множества A и всех его предельных точек.

38 Компактность, секвенциальная компактность, принцип выбора Больцано-Вейерштрасса

38.1 Компактность

Семейство множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ называется покрытием множества K , если $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$

Покрытие открыто, если все его множества открыты.

Пусть $K \in X$, (X, ρ) — метрическое пространство. K называется компактным, если из любого открытого покрытия множества K можно извлечь конечное покрытие.

38.2 Секвенциальная компактность

K называется секвенциально компактным, если из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

38.3 Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса

Из всякой ограниченной последовательности точек K в \mathbb{R}^m можно извлечь сходящуюся подпоследовательность b .

39 Координатная функция

$F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ или $F : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^l$ — векторнозначная функция.

Координатные функции f :

$f_i : X \in (\mathbb{R}^m \text{ или } \mathbb{C}^m) \rightarrow (\mathbb{R} \text{ или } \mathbb{C})$ — её координатная функция.

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_l(x))$$

40 Двойной предел, повторный предел

40.1 Повторный предел

Пусть $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$, a_1 — предельная точка D_1 , a_2 — предельная точка D_2

Пусть $D \supset (D_1 \setminus \{a_1\}) \times (D_2 \setminus \{a_2\})$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

Если $\forall x_1 \in D_1 \setminus \{a_1\} : \exists \varphi(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow a_2} f(x_1, x_2)$ — конечен, то $\lim_{x_1 \rightarrow a_1} \varphi(x_1)$ называют повторным пределом.

Аналогично $\lim_{x_2 \rightarrow a_2} \left(\lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2) \right)$

40.2 Двойной предел

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2}} f(x_1, x_2) = L$$

$$\forall U(l) : \exists V_1(a_1), V_2(a_2) : \forall x_1 \in \dot{V}_1(a_1), x_2 \in \dot{V}_2(a_2) : f(x_1, x_2) \in U(l)$$

41 Предел по направлению, предел вдоль пути

$\lim_{r \rightarrow 0} f(a_1 + r \cos \varphi, a_2 + r \sin \varphi)$ — предел по направлению к точке (a_1, a_2)

В общем случае

$\lim_{t \rightarrow 0} f(a + tv)$, где $v \in \mathbb{R}^m$, $t \in \mathbb{R}$

$\lim_{t \rightarrow 0} f(x_1(t), x_2(t))$ — предел вдоль кривой, где x_1, x_2 — координатные функции пути γ , $x_1(0) = a_1$,
 $x_2(0) = a_2$

42 Предел отображения (определение по Коши и по Гейне)

Пусть задано $f : D \subset X \rightarrow Y$ — метрические пространства, a — предельная точка D . Тогда A называют пределом отображения f в точке a , если:

42.1 По Коши

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in D \setminus \{a\} : 0 < \rho_x(x, a) < \delta : \rho_y(f(x), A) < \varepsilon$$

42.2 По Гейне

$$\forall \{x_n\} : x_n \in D \setminus \{a\}, x \rightarrow a : f(x_n) \rightarrow A$$

43 Линейный оператор

Пусть X, Y — линейные пространства над \mathbb{R}

$f : X \rightarrow Y$ — линейное отображение, если:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \forall x_1, x_2 \in X : f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

По факту, линейное отображение и линейный оператор одно и то же.

44 Отображение бесконечно малое в точке

Пусть $\varphi : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, x_0 — внутренняя точка E

φ — бесконечно малое в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^l$

45 $o(h)$ при $h \rightarrow 0$

Пусть $\varphi : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, $0 \in \text{Int } (E)$

$\varphi(h) = o(h)$ при $h \rightarrow 0$, если $\frac{\varphi(h)}{|h|}$ — бесконечно малое

46 Отображение, дифференцируемое в точке

Пусть $F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, $a \in \text{Int } (E)$, F — дифференцируема в точке a , если

существует линейный оператор $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, существует бесконечно малое $\alpha : E \rightarrow \mathbb{R}^l$ при $h \rightarrow 0$, что

$$F(a+h) = F(a) + Lh + \alpha(h) \cdot |h|$$

Или существует линейный оператор L и также существует бесконечно малое в точке a отображение φ , что

$$F(x) = F(a) + L(x-a) + |x-a|\varphi(x)$$

47 Производный оператор, матрица Якоби, дифференциал

47.1 Производный оператор

Оператор L — производный оператор [отображение F в точке a]

47.2 Матрица Якоби

Матрица, соответствующая производному оператору называется матрицей Якоби.

47.3 Дифференциал

По определению производной $F(a + h) = F(a) + F'(a)h + o(h)$

Выражение $F'(a)h$ называется дифференциалом отображение F в точке a . Это

1. или линейное отображение $h \mapsto F'(a)h$
2. или отображение $(a, h) \mapsto F'(a)h$

48 Частные производные

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{Int } (E)$. Фиксируем $k \in \{1, \dots, m\} : \varphi_k(u) := f(a_1, \dots, a_{k-1}, u, a_{k+1}, \dots, a_m)$

Функция от одной переменной задана $V(a_k)$

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_k(a_k + t) - \varphi_k(a_k)}{t} = \varphi'_k(a_k)$ называется частной производной функции f в точке a

Часть II

Теоремы

49 Теорема Кантора о равномерной непрерывности

49.1 Формулировка

Пусть $f : X \rightarrow Y$ — метрические пространства, f непрерывна на X , X — компактно. Тогда f — равномерное непрерывно на X .

49.2 Доказательство (от противного)

Воспользуемся тем свойством, что если X — компактно, то X и секвенциально компактно.

Предположим противное:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \delta = \frac{1}{n} \quad \exists x_n, \widetilde{x}_n : \rho(x_n, \widetilde{x}_n) < \frac{1}{n} \Rightarrow \rho(f(x_n), f(\widetilde{x}_n)) \geq \varepsilon$$

Тогда выберем сходящуюся подпоследовательность: $x_{n_k} \rightarrow a \in X$, $\widetilde{x}_{n_k} \rightarrow a \in X$.

Тогда $f(x_{n_k}) \rightarrow f(a)$ и $f(\widetilde{x}_{n_k}) \rightarrow f(a)$, значит

$$\rho(f(x_{n_k}), f(\widetilde{x}_{n_k})) \rightarrow 0 \quad (\text{по неравенству треугольника})$$

Что и противоречит изначальному условию.

50 Теорема Брауэра о неподвижной точке

50.1 Формулировка

Пусть $f : B(0, 1) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow B(0, 1)$ — непрерывная, тогда

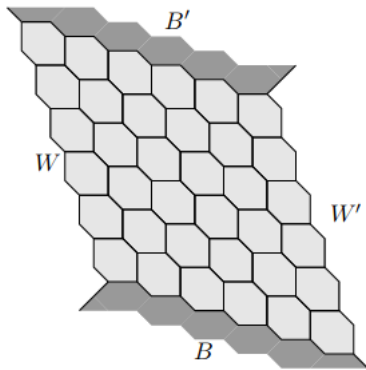
$$\exists x_0 : f(x_0) = x_0$$

50.2 Доказательство

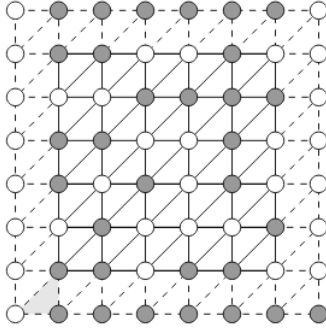
50.2.1 Игра "Текс"

Пусть есть поле $n \times m$, состоящее из правильных шестиугольников (гексов). Также два игрока на каждом своём ходу красят гексы в белый или чёрный цвет. Тогда для любой раскраски найдётся либо чёрная тропинка, соединяющая верхнюю и нижнюю часть поля, либо белая тропинка, соединяющая левую и правую часть поля.

Доказывается от противного



50.2.2 Сама теорема



Теперь заменим гексы на обычную координатную плоскость, причём игра, по сути, останется такой же.

Теперь перейдём к самой теореме.

Шар с лёгкостью заменяется на обычный квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$

Пусть $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ — непрерывна. Тогда

$$\exists a \in [0, 1]^2, f(a) = a$$

$$a \in [0, 1]^2$$

$$a = (a_1, a_2)$$

$$f(x) \in \mathbb{R}^2$$

$$f(x) = (f(x)_1, f(x)_2)$$

50.2.3 Доказательство

Пусть ρ — функция, заданная на $[0, 1]^2 \times [0, 1]^2$

$$\rho(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|) \text{ — непрерывна на } [0, 1]^2$$

$$x_n \rightarrow a$$

$$y_n \rightarrow b$$

$$\rho(x_n, y_n) \rightarrow \rho(a, b)$$

Очевидно, что для любых $x, y : x \neq y \Rightarrow \rho(x, y) > 0$

50.2.4 Теперь к самой теореме

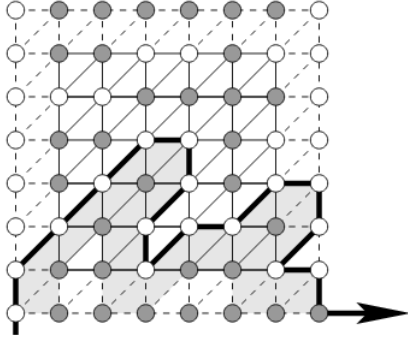
Пусть для любого $x \in [0, 1]^2$ $f(x) \neq x$. Тогда $\rho(x, f(x)) > 0$, но ρ непрерывно по x и $[0, 1]^2$ — компакт, значит по теореме Вейерштрасса существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$\min_{x \in [0, 1]^2} \rho(x, f(x)) = \varepsilon > 0$$

По теореме Кантора для этого ε найдётся такая δ (будем считать, что $\sqrt{2}\delta < \varepsilon$), что

$$\forall x, \hat{x} \in [0, 1]^2 : \|x - \hat{x}\| < \delta \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \|f(x) - f(\hat{x})\| < \varepsilon$$

Берём $\frac{1}{n} < \varepsilon$



50.2.5 Доска

$$\text{Узел } (l, k) \rightarrow \left(\frac{l}{n}, \frac{k}{n} \right) \in [0, 1]^2$$

$$0 \leq l, k \leq n$$

Красим узлы

v — логический узел, $v = (v_1, v_2)$

$$c(v) = \min \left\{ i : \left\| f \left(\frac{v}{n} \right)_i - \frac{v_i}{n} \right\| \geq \varepsilon \right\}$$

По лемме об игре в гексы есть одноцветная тропинка.

Путь v^0 — начальная точка тропинки, v^N — конечная.

$$v_1^0 = 0$$

$$f\left(\frac{v^0}{n}\right) \in [0, 1]^2, \text{ т.е. } f\left(\frac{v^0}{n}\right)_1 \geq 0$$

$$\varepsilon \leq f\left(\frac{v^0}{n}\right)_1$$

Аналогично для $v_1^N = 1$

$$f\left(\frac{v^N}{n}\right)_1 \leq 1$$

$$f\left(\frac{v^N}{n}\right)_1 - \frac{v_1^N}{n} \leq -\varepsilon$$

$$f\left(\frac{v^0}{n}\right)_1 - \frac{v_1^0}{n} \geq \varepsilon$$

Поскольку для любых x верно, что $|f(x)_1 - x_1| \geq \varepsilon$, то из этого следует, что какой-то прыжок был длиной не меньше 2ε , но такое невозможно, поскольку по условию если $\|x - \hat{x}\| < \frac{1}{n}$, то $\|f(x) - f(\hat{x})\| < \varepsilon$

51 Теорема о свойствах неопределенного интеграла

Пусть f, g имеют первообразную на $\langle a, b \rangle$. Тогда:

$$1. \int f + \int g = \int (f + g)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \int (\alpha f) = \alpha \int f$$

$$2. \forall \varphi : \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle, \varphi \text{ дифференцируема}$$

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C, \text{ где } F \text{ — первообразная } f$$

$$3. \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 : \int f(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + C$$

$$4. f, g \text{ — дифференцируемы на } \langle a, b \rangle$$

$$f' \cdot g \text{ имеет первообразную на } \langle a, b \rangle$$

Тогда $f \cdot g'$ тоже имеет первообразную и

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

Доказательство

$$1. (F + G)' = f + g$$

$$(\alpha F)' = \alpha f$$

$$2. (F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

$$3. \left(\frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) \right)' = f(\alpha x + \beta)$$

$$4. (fg)' = f'g + fg', \text{ т.е. } fg = \int f'g + \int fg'$$

52 Интегрирование неравенств. Теорема о среднем

52.1 Интегрирование неравенств

52.1.1 Формулировка

$$f, g \in C[a, b], f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

52.1.2 Доказательство

Если $0 \leq f \leq g$

$$\int_a^b f = \sigma(\Pi\Gamma(f, [a, b])) \leq \sigma(\Pi\Gamma(g, [a, b])) = \int_a^b g$$

В общем случае

$$\Pi\Gamma(f_+, [a, b]) \subset \Pi\Gamma(g_+, [a, b])$$

$$\Pi\Gamma(f_-, [a, b]) \supset \Pi\Gamma(g_-, [a, b])$$

$$\sigma(\Pi\Gamma(f_+, [a, b])) - \sigma(\Pi\Gamma(f_-, [a, b])) \leq \sigma(\Pi\Gamma(g_+, [a, b])) - \sigma(\Pi\Gamma(g_-, [a, b]))$$

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

52.1.3 Следствия

1. $f \in C[a, b]$

$$\min_{[a, b]} f \cdot (b - a) \leq \int_a^b f \leq \max_{[a, b]} f \cdot (b - a)$$

2. $f \in C[a, b]$

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

$$\text{т.к.} \quad - \int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

52.2 Теорема о среднем значении

52.2.1 Формулировка

Пусть f непрерывна на $[a, b] \Rightarrow \exists c \in [a, b] : \int_a^b f = f(c)(b - a)$

52.2.2 Доказательство 1 (Кохась порофлил)

Просто берём прямую и двигаем её сверху вниз, тем самым по теореме о бутерброде мы найдём такое значение c , что $\int_a^b f = f(c)(b - a)$

52.2.3 Нормальное доказательство

Если $a = b$ — очевидно.

Пусть $a < b$

$$\min f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq \max f$$

по теореме Больцано-Коши о промежуточном значении

$$\exists c : \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f = f(c)$$

$$\int_a^b f = f(c)(b-a)$$

53 Теорема Барроу

53.1 Определение

$$f \in C[a, b], \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Интеграл с верхним переменным пределом

53.2 Теорема (Барроу)

В условиях определения оказывается, что φ — дифференцируема на $[a, b]$ и $\varphi'(x) = f(x)$ для любого $x \in [a, b]$

53.3 Доказательство

Фиксируем x и при $y > x$

$$\lim_{y \rightarrow x+0} \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x+0} \frac{1}{y - x} \left(\int_a^y f - \int_a^x f \right) = \lim_{y \rightarrow x+0} \frac{1}{y - x} \int_x^y f = \lim_{y \rightarrow x+0} f(c) = f(x)$$

$\exists c \in [x, y]$ — следует из теоремы о среднем значении.

Аналогично доказываем, что $\lim_{y \rightarrow x-0} = \dots = f(c)$

53.4 Замечания

- Интеграл с нижним переменным пределом

$$\psi(x) = \int_x^b f. \text{ Тогда } \psi'(x) = -f$$

- Эта теорема также доказывает теорему о существовании неопределенного интеграла.

54 Формула Ньютона-Лейбница, в том числе, для кусочно-непрерывных функций

54.1 Формулировка теоремы

Пусть f непрерывна (кусочно-непрерывна) на $[a, b]$, F — (почти) первообразная f .

$$\text{Тогда } \int_a^b f = F(b) - F(a)$$

54.2 Доказательство

φ (из теоремы Барроу) — тоже первообразная, значит

$$\exists c : F = \varphi + c$$

$$F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f - \int_a^a f = \int_a^b f$$

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

$$\text{При } a > b \int_a^b f \stackrel{\text{def}}{=} - \int_b^a f$$

54.3 Для кусочно-непрерывных функций

Для кусков функции распишем формулу Ньютона-Лейбница, получим телескопическую сумму, останется только $F(b) - F(a)$

55 Свойства определенного интеграла: линейность, интегрирование по частям, замена переменных

55.1 Линейность определенного интеграла

55.1.1 Формулировка

$f, g \in C[a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

55.1.2 Доказательство

Из формулы Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

Для $F, G : \alpha F + \beta G$ — первообразная $\alpha f + \beta g$

$$(\alpha F(x) + \beta G(x)) \Big|_a^b = \alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(a) - \beta G(a) = \alpha(F(b) - F(a)) + \beta(G(b) - G(a)) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

55.2 Интегрирование по частям

55.2.1 Формулировка

$f, g \in C^1[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b f g' = f g \Big|_a^b - \int_a^b f' g$$

55.2.2 доказательство

Из свойств для неопределенного интеграла

$$\int_a^b f g' = \left(\int f g' \right) \Big|_a^b = \left(f g - \int f' g \right) \Big|_a^b = f g \Big|_a^b - \int_a^b f' g$$

55.3 Замена переменных

55.3.1 Формулировка

$$f \in C(\langle a, b \rangle)$$

$$\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$$

$$\varphi \in C^1(\langle a, b \rangle)$$

$$[p, q] \in \langle \alpha, \beta \rangle$$

$$\text{Тогда } \int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x) dx$$

55.3.2 Доказательство

Пусть F — первообразная f

$F(\varphi(t))$ — первообразная $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на $[p, q]$

Тогда обе части: $F(\varphi(q)) - F(\varphi(p))$

55.3.3 Замечание

1. Возможен случай $\varphi([p, q]) \supset [\varphi(p), \varphi(q)]$

2. В другую сторону

$$\int_u^v f(x) dx = \int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

Тогда подбираем такие p и q , что когда t ходит от p до q и $\varphi(t)$ ходит от v до u

56 Интегральное неравенство Чебышева. Неравенство для сумм

56.1 Интегральное неравенство Чебышева

56.1.1 Формулировка

$$I_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

$f, g \in C[a, b]$ — монотонно возрастают

Тогда $I_f \cdot I_g \leq I_{fg}$

$$\int_a^b f \cdot \int_a^b g \leq (b-a) \int_a^b fg \quad \text{— неравенство Чебышева}$$

56.1.2 Доказательство

$$\forall x, y \in [a, b] \quad (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$$

Проинтегрируем по переменной x по отрезку $[a, b]$

$$f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

$$I_{fg} - f(y)I_g - I_f g(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

Интегрируем по y на $[a, b]$: $\frac{1}{b-a} \int_a^b$

$$I_{fg} - I_f \cdot I_g - I_f \cdot I_g + I_{fg} \geq 0$$

$$I_{fg} \geq I_f \cdot I_g$$

56.2 Неравенство для сумм

56.2.1 Формулировка для сумм

Пусть задана последовательность $a_n : a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_n : b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$. Тогда

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_k \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k \right)$$

56.2.2 Доказательство

По неравенству Чебышёва

$$I_{fg} \geq I_f I_g$$

$$\text{Пусть } I_f = \frac{1}{n} \int_0^n f = \frac{1}{n} \sum a_k$$

$$f(x) = a_{[x+1]}, \quad x \in [0, n] \quad (\text{где } [x] \text{ — округление к ближайшему целому вниз})$$

$$I_g = \frac{1}{n} \int_0^n g = \frac{1}{n} \sum b_k$$

$$g(x) = b_{[x+1]}, \quad x \in [0, n]$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{n} \sum a_k b_k \geq \left(\frac{1}{n} \sum a_k \right) \left(\frac{1}{n} \sum b_k \right)$$

57 Иррациональность числа π

57.1 Вспомогательный интеграл

Пусть $H_n = \frac{1}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t \, dt$

$$H_n = \begin{bmatrix} f = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n & g = \sin t \\ f' = -2nt \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} & g' = -\cos t \end{bmatrix}$$

$$H_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \sin t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n!} 2n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} \sin t \, dt$$

$$H_n = \frac{1}{n!} 2n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} \sin t \, dt$$

$$H_n = \begin{bmatrix} f = t \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} & g = -\cos t \\ f' = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} - 2(n-1)t^2 \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2} & g' = \sin t \end{bmatrix}$$

$$f' = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} + 2(n-1) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} - \frac{\pi^2}{2}(n-1) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2}$$

$$f' = (2n-1) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} - \frac{\pi^2}{2}(n-1) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2}$$

$$\frac{2}{(n-1)!} t \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} (-\cos t) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{(n-1)!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left((2n-1) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} - \frac{\pi^2}{2}(n-2) \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2} \right) \cos t \, dt$$

Пусть $n \geq 2$, тогда

$$H_n = (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2} = \dots + H_2 + \dots + H_0$$

$$H_0 = 2$$

$$H_1 = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{f} \frac{g'}{\sin t} = 2t(-\cos t) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = 4$$

57.2 Теорема

Число π^2 — иррациональное (и тогда π тоже)

57.3 Доказательство (от противного)

Пусть $\frac{1}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t = P_n(\pi^2)$, где P_n — многочлен с целыми коэффициентами.

$$\deg P \leq n$$

Этого не может быть

Пусть $\pi^2 = \frac{m}{k} \in \mathbb{Q}$. Тогда $k^n P_n \left(\frac{m}{k} \right)$ — целое число

Значит $k^n \cdot P_n \left(\frac{m}{k} \right) \geq 1$, т.е.

$$\frac{k^n}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t \, dt \geq 1$$

$$\frac{k^n}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2 \right)^n \cos t \, dt \leq \frac{k^n}{n!} \left(\frac{\pi^2}{4} \right)^n \cdot \pi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

58 Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

58.1 Формулировка

Пусть $\langle a, b \rangle \in \overline{\mathbb{R}}$, $f \in C^{n+1}(\langle a, b \rangle)$

$x, x_0 \in \langle a, b \rangle$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

58.2 Доказательство (по индукции)

- $n = 0$: $f(x) = f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt$

По формуле Ньютона-Лейбница

- Переход от n к $n + 1$

$$f(x) + T_n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt = \left[\begin{array}{ll} u'(x - t)^n & u = -\frac{(x - t)^{n+1}}{n + 1} \\ v = f^{n-1} & v' = f^{(n+2)} \end{array} \right]$$

$$T_n + \frac{1}{n!} \left(-\frac{(x - t)^{n+1}}{(n + 1)} \cdot f^{(n+1)}(t) \right) \Big|_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^x \frac{(x - t)^{n+1}}{n + 1} \cdot f^{(n+2)}(t) dt$$

$$T_n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n + 1)!} (x - x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n + 1)!} \int_{x_0}^x (x - t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt$$

58.3 Послесловие

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (t - x_0)^k + R_n$$

F — первообразная $f \int_{x_0}^x f(t) dt = F(x) - F(x_0)$

$$F(x) - F(x_0) = \sum_{k=0}^n \int_{x_0}^x \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (t - x_0)^k dt + \int_{x_0}^x R_n = \frac{(t - x_0)^{k+1}}{k + 1} \Big|_{t=x_0}^{t=x}$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{F^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!} (x-x_0)^{k+1} + \int_{x=0}^x R_n$$

Мы имеем право формально интегрировать формулу Тейлора

59 Лемма об ускоренной сходимости

59.1 Формулировка

Пусть $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, a — предельная точка $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$

Пусть также существует $U(a) : f \neq 0$ и $g \neq 0$ в $\dot{U}(a)$

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ и $\lim_{y \rightarrow a} g(y) = 0$ (Также возможен вариант, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ и $\lim_{y \rightarrow a} g(y) = +\infty$)

Тогда для любой последовательности $x_k \rightarrow a$, $x_k \in D$, $x_k \neq a$ найдётся такая последовательность $y_k \rightarrow a$ ($y_k \in D$, $y_k \neq a$), что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(y_k)}{g(x_k)} = 0 \text{ и } \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(y_k)}{f(x_k)} = 0$$

59.2 Доказательство

1. Пусть $f, g \rightarrow 0$, тогда можно добиться того, что $\left| \frac{f(y_k)}{f(x_k)} \right| < \frac{1}{k}$ и $\left| \frac{f(y_k)}{g(x_k)} \right| < \frac{1}{k}$

Тогда найдётся такое K , что $\left| \frac{f(x_k)}{f(x_{2019})} \right| < \frac{1}{2019}$ для любых $k > K \Rightarrow y_{2019} = x_k$

Продолжаем так до бесконечности

$$\left| \frac{f(x_i)}{f(x_k)} \right| < \frac{1}{k}$$

$$\exists i > k \left| \frac{f(x_i)}{f(x_k)} \right| < \frac{1}{k} \Rightarrow y_k := x_i$$

Теперь пусть $\left| \frac{f(x_i)}{g(x_k)} \right| < \frac{1}{k}$ при $x \rightarrow +\infty$ и $\left| \frac{f(x_i)}{f(x_k)} \right| < \frac{1}{k}$ также при $i \rightarrow +\infty$

Тогда для каждого k найдётся такое K , что для всех $i > K$ выполняется сразу оба условия, значит присвоим $y_k := x_i$, где i — какое-то число большее K .

2. Пусть $f, g \rightarrow +\infty$. Считаем, что $f > 0$ и $g > 0$. Пусть $f(x_k)$ и $g(x_k)$ — возрастающие последовательности (остальные случаи рассматриваются аналогично). Тогда

$$i = \min n : \begin{cases} f(x_n) \geq \sqrt{g(x_k)} \\ f(x_n) \geq \sqrt{f(x_k)} \end{cases}$$

Возьмём $y_k := x_{i-1}$

$$\text{Тогда } \frac{f(y_k)}{f(x_k)} < \frac{\sqrt{f(x_k)}}{f(x_k)} = \frac{1}{\sqrt{f(x_k)}} \rightarrow 0$$

$$\frac{f(y_k)}{g(x_k)} < \frac{\sqrt{g(x_k)}}{g(x_k)} = \frac{1}{\sqrt{g(x_k)}} \rightarrow 0$$

60 Правило Лопиталя (с леммой)

60.1 Формулировка

Пусть f, g — дифференцируемы на (a, b) , $g' \neq 0$ на (a, b) и существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

Не стоит забывать, что $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$ — неопределенно.

Тогда $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

60.2 Пример из жизни

Пусть $f, g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

Пусть f — сколько прошёл студент,

g — сколько прошёл Кохась.

Тогда $f, g \rightarrow +\infty$, но если сравним скорости f' и g' , то легко узнать, на сколько больше прошёл Кохась, чем студент.

60.3 Доказательство

$g' \neq 0 \Rightarrow g'$ сохраняет знак (по теореме Дарбу), значит g — строго монотонна

1. $g \rightarrow +\infty \Rightarrow g > 0$ в окрестности точки a

2. $g \rightarrow 0$,

$g \uparrow \Rightarrow g > 0$ в окрестности точки a

$g \downarrow \Rightarrow g < 0$ в окрестности точки a

60.4 Собственное доказательство

Берём последовательность $y_k \rightarrow a$ из леммы.

По теореме Коши $\exists \xi_k \in [x_k, y_k]$ (не факт, что $x_k \leq y_k$)

$$\frac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}$$

Умножаем правую и левую часть на $\frac{g(x_k) - g(y_k)}{g(x_k)}$

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \frac{f(y_k)}{g(x_k)} + \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} \left(1 - \frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right)$$

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} \rightarrow \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}$$

61 Теорема Штольца

61.1 Формулировка

Пусть $x_n, y_n \rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Тогда если существует $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \in [0, +\infty]$

Также y_n — строго монотонна (если $a = 0$, то x_n — тоже строго монотонна)

Тогда $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = a$

61.2 Доказательство

1. Пусть $a > 0$, a — конечное, тогда можно считать, что $y_n \geq y_{n-1}$ из монотонности и $x_n \geq x_{n-1}$ при больших n .

Заметим обидный факт, что $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ и $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d}$, но $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \neq \frac{a+c}{b+d}$. Кохасю обидно, поэтому будем считать, что $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. Если вы с этим не согласны, то окей, но заметим, что справедливо:

$$0 < \alpha < \frac{a}{b} < \beta$$

$$0 < \alpha < \frac{c}{d} < \beta$$

$$\alpha < \frac{a+c}{b+d} < \beta$$

Вернёмся к самой теореме

$$\forall \varepsilon > 0 \ (\varepsilon < a) \ \exists N_1 \ \forall n > N \geq N_1$$

$$a - \varepsilon < \frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} < a + \varepsilon$$

$$a - \varepsilon < \frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}} < a + \varepsilon$$

\vdots

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$$

Складываем всё

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < a + \varepsilon$$

Устремляем n к $+\infty$

$$a - \varepsilon \leq \frac{x_N}{y_N} < a + \varepsilon$$

2. Если $a = +\infty$ — аналогично

$$\forall E > 0 \exists N_1, \forall n > N \geq N_1 \frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} > E$$

$$E < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N}$$

$$E \leq \frac{x_N}{y_N}$$

3. Если $a = 0$, то $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n}{x_n} = +\infty$

4. Если $a < 0$ — меняем знаки

62 Пример неаналитической функции

62.1 Неаналитическая функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

62.2 Утверждение

f — бесконечно дифференцируема на \mathbb{R}

$$(\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists f^{(k)}(x))$$

62.3 Доказательство

Если $x \neq 0$ — то очевидно

Пусть $x = 0$, тогда для любого $k \exists f^{(k)}(0) = 0$

Из теоремы Лагранжа:

Если $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f'(x) = L$, где $L \in \mathbb{R}$, то

f — дифференцируема и $f'(a) = L$

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^3}}{e^{-\frac{1}{x^2}}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{3}{x^4}}{-\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{e^{-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^k} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{-\frac{1}{x^2} \cdot \frac{2}{k}}} \right)^{\frac{k}{2}} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{x^3}}{-\frac{4}{k} \cdot \frac{1}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2} \cdot \frac{2}{k}}} \right)^{\frac{k}{2}} = 0$$

Итого

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0$$

$$f'(0) = 0$$

Аналогічно

$$f'' = -\frac{6}{x^4} \cdot e^{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} - \frac{4}{x^5} \cdot e^{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}, \quad x \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = 0 \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$x \neq 0 \quad f^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^{(k)}(x) = 0 \Rightarrow f^{(k)}(0) = 0$$

63 Интеграл как предел интегральных сумм

63.1 Формулировка

Пусть $f \in C[a, b]$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ что для любого дробления $\mathcal{T} a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ранга меньше δ и любого оснащения $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

63.2 Доказательство

1. Поделим на отрезки в соответствии с дроблением. Очевидно, что $\int_a^b = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k}$. Тогда рассмотрим разность

$$\begin{aligned} & \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k) dx - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \\ & \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(\xi_k) - f(x)) dx \rightarrow 0, \text{ т.к. } x_{k-1} \rightarrow x_k, \text{ а } \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \end{aligned}$$

2. По теореме Кантора о равномерной непрерывности

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \text{ «Китайский } \varepsilon \text{»}$$

Берём $x_0, x_1, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n - \int_a^b \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k) dx - \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \right| = \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(\xi_k) - f(x)) dx \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(\xi_k) - f(x)| dx \\ & | \xi_k - x_k | < \delta \text{ для любых } [x_{k-1}, x_k] \text{ (по условию)} \\ & \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon \end{aligned}$$

63.3 Замечания

1. $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda(\mathcal{T}) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$
2. $\omega(\delta) := \sup_{x, t | x-t| < \delta} |f(x) - f(t)|$ — модуль непрерывной функции f

По теореме Кантора f — непрерывна $\implies \omega(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$

$\omega(\delta)$ монотонно убывает на отрезке

$$\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(\xi_k) - f(x)| \, dx \leq \sum \int \omega(\delta) \, dx = \omega(\delta)(b-a)$$

Пусть f — дифференцируема на $[a, b]$ $|f'| \leq M$

$|f(x) - f(t)| \leq M|x - t|$ — следствие из теоремы Лагранжа

$$|f(\xi_k) - f(x)| \leq M\delta |\xi_k - x|$$

$$\left| \sum - \int \right| \leq M\delta(b-a)$$

64 Теорема об интегральных суммах для центральных прямоугольников

64.1 Формулировка

Пусть $f \in C^2[a, b]$ $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$$\delta := \max |x_k - x_{k-1}|$$

Тогда

$$\left| \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) (x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{\delta^2}{8} \cdot \int_a^b |f''|$$

64.2 Доказательство

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} + \int_{\xi_i}^{x_i} = \begin{bmatrix} u = f & u' = f' \\ v' = 1 & v = x - x_{i-1} \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} u = f & u' = f' \\ v' = 1 & v = x - x_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & f(x)(x - x_{i-1}) \Big|_{x=x_{i-1}}^{x=\xi_i} - \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f'(x)(x - x_{i-1}) dx + f(x)(x - x_i) \Big|_{x=\xi_i}^{x=x_i} - \int_{\xi_i}^{x_i} f'(x)(x - x_i) dx = f(\xi_i)(\xi_i - x_{i-1}) + \\ & f(\xi_i)(x_i - \xi_i) - \left(f'(x) \frac{(x - x_{i-1})^2}{2} \Big|_{x=x_{i-1}}^{x=\xi_i} - \int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f''(x) \frac{(x - x_{i-1})^2}{2} dx + f'(x) \frac{(x - x_i)^2}{2} \Big|_{\xi_i}^{x_i} - \int_{\xi_i}^{x_i} f''(x) \frac{(x - x_i)^2}{2} dx \right) = \\ & f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{i-1})^2}{2}, & x \in [x_{i-1}, \xi_i] \\ \frac{(x - x_i)^2}{2}, & x \in [\xi_i, x_i] \end{cases}$$

Тогда $\varphi(x)$ определена на $[a, b]$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) (x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \left(f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f \right) \right| = \left| \sum_{i=1}^n \left(- \int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x) \varphi(x) dx \right) \right| = \\ & \left| \int_a^b f''(x) \varphi(x) dx \right| \leq \int_a^b |f''(x)| \varphi(x) dx \leq \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''| \end{aligned}$$

$$\text{Поскольку } \max \varphi(x) = \frac{(\frac{\delta}{2})^2}{2} = \frac{\delta^2}{8}$$

65 Теорема о формуле трапеций, формула Эйлера–Маклорена

65.1 Формулировка теоремы о формуле трапеций

Пусть $f \in C^2[a, b]$ $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ $\delta = \max(x_i - x_{i-1})$

$$\text{Тогда } \left| \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} (x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''|$$

65.2 Доказательство

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) = \begin{bmatrix} u = f & u' = f' \\ v'1 = 1 & v = x - \xi_i \end{bmatrix}$$

$$f(x)(x - \xi_i) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)(x - \xi_i) - f(x_{i-1})(x_{i-1} - \xi_i) - \left(f'(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'' \frac{(x - \xi_i)^2}{2} dx \right) = (f(x_i) + f(x_{i-1})) \frac{x_i - x_{i-1}}{2} -$$

$$\left(f'(x) - \frac{1}{2} \psi(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'' \left(-\frac{1}{2} \psi(x) \right) dx \right)$$

$$\begin{bmatrix} u = f' & u' = f'' \\ v' = (x - \xi_i) & \psi(x) = (x - x_{i-1})(x_i - x) \end{bmatrix} \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \text{ на } [a, b]$$

$$v = -\frac{1}{2} \psi(x)$$

$$(f(x_i) + f(x_{i-1})) \cdot \frac{(x_i - x_{i-1})}{2} - \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'' \psi(x) dx$$

$$\left| \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot (x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \sum_{i=1}^n \left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} (x_i - x_{i-1}) - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \right) \right| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x) \psi(x) dx \right|$$

$$\frac{1}{2} \int_a^b |f''(x)| \psi(x) dx \leq \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''|$$

65.3 Простейший случай формулы Эйлера–Маклорена

$m, n \in \mathbb{Z}$ $f \in C^2[m, n]$. Тогда

$$\int_m^n f(x) dx = \left(\sum_{i=m}^n \right)^\nabla f(i) - \frac{1}{2} \int_m^n f''(x) \{x\} (1 - \{x\}) dx$$

ОчевидноTM, что это формула трапеции.

$$[a, b] \leftrightarrow [m, n] \quad x_0 = m, x_1 = m + 1, \dots, x_{last} = n$$

$\{x\} (1 - \{x\})$ — парабола между двумя целыми точками

66 Асимптотика степенных сумм

$$f(x) = x^p$$

$$1^p + 2^p + \dots + n^p = \int_1^n x^p dx + \frac{n^p + 1}{2} + \frac{1}{2} \int_1^n (x^p)'' \{x\} (1 - \{x\}) dx$$

$$1^p + 2^p + \dots + n^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \frac{1}{2} + \frac{p(p-1)}{2} \int_1^n x^{p-2} \{x\} (1 - \{x\}) dx$$

$$1^p + 2^p + \dots + n^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(\max(1, n^{p-1}))$$

67 Асимптотика частичных сумм гармонического ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \int_1^n \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \int_1^n \frac{1}{x^3} \{x\} (1 - \{x\}) dx$$

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \int_1^n \frac{\{x\} (1 - \{x\})}{x^3} dx$$

Интеграл постоянной возрастает и ограничен сверху $\frac{1}{4} \int_1^n \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{8} \Big|_{x=1}^{x=n} < \frac{1}{8}$

Всё, что правее логарифма — постоянная Эйлера или γ

Итого

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$$

68 Формула Валлиса

68.1 Формулировка

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n} = \frac{\pi}{2}$$

68.2 Доказательство

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \left[\begin{array}{ll} u = \sin^{n-1} x & u' = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \\ v' = \sin x dx & v = -\cos x \end{array} \right]$$
$$- \cos x \sin^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} x - \sin^n x) dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} = \dots$$

Посчитаем отдельно для случая чётного и нечётного n

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot 2n-2 \cdot 2n-4 \cdot \dots \cdot 1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot 2n-3 \cdot 2n-5 \cdot \dots \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Так как при $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\sin^{2k+1} x \leq \sin^{2k} x$

То и $I_{n+1} \leq I_n$

Также, $I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \leq \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

Разность правой и левой части стремится к 0, значит

$$\exists \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2k} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

69 Формула Стирлинга

69.1 Формулировка

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \text{ при } n \rightarrow +\infty$$

69.2 Доказательство

$$\sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\sqrt{\pi} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k))^2}{(2k)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2^{2k} (k!)^2}{(2k)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\sqrt{\pi} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2^{2k} (k^k \cdot e^{-k} \sqrt{k} \cdot c)^2}{\sqrt{k} (2k)^{2k} e^{-2k} \sqrt{2k} \cdot c} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2^{2k} \cdot k^{2k} \cdot e^{-2k} \cdot k \cdot c^2}{\sqrt{2} \cdot k \cdot 2^{2k} \cdot k^{2k} \cdot e^{-2k} \cdot c} = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

$$c = \sqrt{2\pi}$$

70 Теорема о вычислении аддитивной функции промежутка по плотности

70.1 Формулировка

Пусть заданы f и ϕ на $\langle a, b \rangle$, f — непрерывна, ϕ — аддитивная функция промежутка, f — плотность ϕ

Тогда $\forall [p, q] \subset \langle a, b \rangle \quad \phi([p, q]) = \int_p^q f(x) \, dx$

70.2 Доказательство

Можно принять за факт, что у нас дан промежуток $[a, b]$ (если это не так, то уменьшим его чуть-чуть и переобозначим)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ \phi([a, x]), & x > a \end{cases} \quad \text{— первообразная } f$$

$$\inf_{[x, x+h]} f \leq \frac{\phi([x, x+h])}{h} \leq \sup_{[x, x+h]} f$$

$$x : F'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{\phi([a, x+h]) - \phi([a, x])}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{\phi([x, x+h])}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+0} f(x + \Theta h) = f(x), \text{ где}$$

$$0 \leq \Theta \leq 1$$

$$\Theta = \Theta(h)$$

Аналогично посчитаем и $F'_-(x)$

$$\phi([p, q]) = F(q) - F(p) = \int_p^q f(x) \, dx$$

71 Обобщенная теорема о плотности

71.1 Формулировка

Пусть $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $\phi : \text{Segm } \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — аддитивная функция.

Пусть $\forall \Delta \subset \text{Segm } \langle a, b \rangle$ заданы числа m_Δ, M_Δ .

1. $m_\Delta \cdot l(\Delta) \leq \phi(\Delta) \leq M_\Delta \cdot l(\Delta)$
2. $\forall x \in \Delta \quad m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$
3. $\forall x \in \langle a, b \rangle \quad M_\Delta - m_\Delta \rightarrow 0$, если $l(\Delta) \rightarrow 0, x \in \Delta$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \Delta \in \text{Segm } \langle a, b \rangle : x \in \Delta, \quad l(\Delta) < \delta$

$|M_\Delta - m_\Delta| < \varepsilon$

Тогда f — плотность ϕ (и $\forall [p, q] \quad \phi([p, q]) = \int_p^q f(x) \, dx$)

71.2 Доказательство

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \phi([a, x]), & x > a \end{cases}$$

Дифференцируем F_+

$$m_\Delta \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq M_\Delta$$

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq |M_\Delta - m_\Delta| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \Delta = [x, x+h]$$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x)$$

Аналогично и с F_-

72 Площадь криволинейного сектора: в полярных координатах и для параметрической кривой

72.1 Введение

Площадь подграфика $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная, $f \geq 0$

$\phi([p, q]) = \sigma \Pi(f, [p, q])$ — аддитивная функция. Мы знаем, что $\phi([p, q]) = \int_p^q f(x) dx$, f — плотность

72.2 Пример

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\sigma(\text{эллипса}) = 2\sigma(\Pi(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, [-a, a])) = 2 \cdot \int_{-a}^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$$

Путь $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x = a \cos t$

$$[0, 2\pi] \mapsto (a \cos t, b \sin t)$$

$$2 \int_{\pi}^0 b\sqrt{1 - \cos^2 t}/a(-\sin t) dt = 2ab \int_{\pi}^0 -\sin^2 t dt = 2ab \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = 2ab \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \pi ab$$

72.3 Теорема

$$[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$$

$\rho : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная, $\rho \geq 0$

$A = \{(r, \phi) : \phi \in [\alpha, \beta] \ 0 \leq r \leq \rho(\phi)\}$ — «Аналог Π »

$$\text{Тогда } \sigma(A) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\phi) d\phi$$

72.4 Доказательство

$[\alpha, \beta] \mapsto \sigma(A)$ — функция промежутка $\text{Segm}[\alpha, \beta]$ — аддитивная функция.

Проверим, что $\frac{1}{2}\rho^2(\phi)$ — плотность

$[\gamma, \delta]$ — строим $A_{\gamma, \delta}$

$$\sigma(A_{\gamma, \delta}) \leq \sigma(\text{Круговой сектор } (0, \max_{[\gamma, \delta]} \rho(\phi), [\gamma, \delta]))$$

$$\sigma(A_{\gamma, \delta}) \geq \sigma(\text{Круговой сектор } (0, \min_{[\gamma, \delta]} \rho(\phi), [\gamma, \delta]))$$

$$\min_{[\gamma, \delta]} \frac{1}{2} \rho(\phi) l([\gamma, \delta]) \leq \sigma(A_{\gamma, \delta}) \leq \max_{[\gamma, \delta]} \frac{1}{2} \rho(\phi) l([\gamma, \delta])$$

По определению плотности

72.5 Замечание

$$(x(t), y(t)) \quad t \in [a, b]$$

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

$$\begin{cases} r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \\ \phi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \end{cases} \quad \text{— параметрическое задание того же пути в полярных координатах}$$

$$\sigma A = \frac{1}{2} \int_{\phi_0}^{\phi_1} r^2(\phi) d\phi = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x(t)^2 + y(t)^2) \left(\operatorname{arctg} \frac{y(t)}{x(t)} \right)' dx = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x^2 + y^2) \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} - \frac{y'x - x'y}{x^2} dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (y'(t)x(t) - x'(t)y(t))$$

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{y(t)}{x(t)}$$

Площадь круга

$$x = \cos t$$

$$y = \sin t$$

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 t - (-\sin t) \sin t dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 dt = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$x = \cos t$$

$$y = -\sin t$$

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} -\cos^2 t - \sin^2 t \, dt = -\pi$$

Она ловит ориентированную площадь

$$x = x(t) = a \cos t$$

$$y = y(t) = b \sin t$$

$$\sigma = \int_a^b y(x) \, dx = \int_a^b y \, dx$$

$$\sigma(\text{эллипса}) = \int_{-a}^a y(x) \, dx = \int_{-a}^a y \, dx = \int_{\pi}^0 y(t) x'(t) dy$$

$$x = x(t)$$

73 Изопериметрическое неравенство

73.1 Формулировка

Пусть G — замкнутая выпуклая фигура в \mathbb{R}^2

$$\text{diam } G < 1 \quad (\text{diam } G = \sup_{x, y \in G} \rho(x, y))$$

$$\text{Тогда } \sigma(G) \leq \frac{\pi}{4}$$

73.2 Доказательство

$$f(x) = \sum \{t : [(x, 0), (x, t)] \cap G = \emptyset\}$$

$g(x)$ — аналогично

$f(x)$ — выпуклая

$$\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$r\left(-\frac{\pi}{2}\right) = r\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$r(\phi)$ — непрерывная функция от ϕ

$$\sigma(G) = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\phi) \, d\phi = \frac{1}{2} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) + r^2(\phi) \, d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} AB^2 \, d\phi \leq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, d\phi = \frac{\pi}{4}$$

74 Вычисление длины гладкого пути

74.1 Формулировка

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\gamma \in C^1$.

$$\text{Тогда } l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

74.2 Доказательство

Будем дополнительно считать, что $\gamma' \neq 0$

γ — инъективно. Если это не так, то разобьём на несколько частей, и каждую из них посчитаем отдельно.

$$\phi : \text{Segm}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$[p, q] \rightarrow l(\gamma|_{[p, q]})$$

Пусть ϕ — аддитивная функция промежутка по аксиоме 2. Проверим, что $\|\gamma'(t)\|$ — её плотность

Это значит, что $\forall \Delta : \exists m_\Delta, M_\Delta$ и выполняются следующие свойства:

1. $l(\Delta)m_\Delta \leq \phi(\Delta) \leq M_\Delta l(\Delta)$
2. $m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$, $x \in \Delta$
3. $\Delta \rightarrow x \quad M_\Delta - m_\Delta \rightarrow 0$

$$\Delta \supset [a, b], \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_m(t))$$

$$m_i(\Delta) = \min_{t \in \Delta} |\gamma'_i(t)|$$

$$M_i(\Delta) = \max_{t \in \Delta} |\gamma'_i(t)|$$

$$m_\Delta = \sqrt{\sum m_i(\Delta)^2}$$

$$M_\Delta = \sqrt{\sum M_i(\Delta)^2}$$

Очевидно, что при любом $t \in \Delta$ $m_\Delta \leq \|\gamma'(t)\| \leq M_\Delta$, где $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sum (\gamma'_i(t))^2}$

При $\Delta \rightarrow x \quad M_\Delta - m_\Delta \rightarrow 0$ по непрерывности $\gamma'_i(t)$ в точке $t = x$.

Проверим, что $m_\Delta l(\Delta) \leq \phi(\Delta) \leq M_\Delta l(\Delta)$

$\tilde{\gamma} : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^m$ $\tilde{\gamma}(t) = (M_1(\Delta)t, M_2(\Delta)t, \dots, M_m(\Delta)t) = M \cdot t$, где $M = (M_1(\Delta), M_2(\Delta), \dots, M_m(\Delta))$

Отображение $T : C_\gamma \rightarrow C_{\tilde{\gamma}}$ $\gamma(t) \mapsto \tilde{\gamma}(t)$ — проверим, что растяжение

$$\rho(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\gamma_i(t_0) - \gamma_i(t_1))^2} = \sqrt{\sum (\gamma'_i(\mathcal{T}_i))^2 (t_0 - t_1)^2} \leq \sqrt{\sum M_i \Delta^2 |t_0 - t_1|} = \rho(T(\gamma(t_0)), T(\gamma(t_1))),$$

значит T — растяжение

$l(\gamma|_\Delta) \leq l(\tilde{\gamma})$, т.е. $\phi(\Delta) \leq M_\Delta l(\Delta)$.

Аналогично $\phi(\Delta) \geq m_\Delta l(\Delta)$ — сжатие.

Значит $\|\gamma'\|$ — плотность

75 Объем фигур вращения

75.1 Формулировка

Обозначим фигуры, полученную вращением по оси x за $T_x(A) = \left\{ (x, y, z) : (x, \sqrt{y^2 + z^2}) \in A \right\}$

По оси y — $T_y(A) = \left\{ (x, y, z) : (\sqrt{x^2 + z^2}, y) \in A \right\}$

Пусть $f \in C[a, b]$, $f \geq 0$

Тогда:

1. $V(T_x(\Pi\Gamma(f, [a, b]))) = \pi \int_a^b f^2(x) dx$
2. $[a, b] \subset [0, +\infty)$ $V(T_y(\Pi\Gamma(f, [a, b]))) = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$

75.2 Доказательство

$\phi : \Delta \in \text{Segm}([a, b]) \mapsto V(T_{x \text{ or } y}(\Pi\Gamma(f, \Delta)))$ — аддитивная функция.

$$\pi \min_{x \in \Delta} f(x) \cdot l(\Delta) = V(F_\Delta) \leq \phi(\Delta) \leq V(\varepsilon_\Delta) = \pi \max_{x \in \Delta} f(x) \cdot l(\Delta)$$

ε_Δ — цилиндр прямой круговой

$$\varepsilon_\Delta = T_x(\Pi\Gamma(\max_\Delta f, \Delta)) = \Delta B(0, \max_\Delta f) \in \mathbb{R}^3$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$$

$$\phi(\Delta) \text{ — плотность, } \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

$$\Delta : m_\Delta, M_\Delta$$

$$1. m_\Delta l(\Delta) \leq \phi(\Delta) \leq M_\Delta l(\Delta)$$

$$2. m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta, x \in \Delta$$

$$3. \Delta \rightarrow x \quad M_\Delta - m_\Delta \rightarrow 0$$

$$V(T_y(\Pi\Gamma(f, [a, b]))) = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

$$F_{\Delta} = T_y(\Pi\Gamma(\min_{\Delta} f, \Delta))$$

$$\phi(\Delta) \leq V(\varepsilon_{\Delta}) = \sigma(ring) \cdot \max_{\Delta} f = \pi(q^2 - p^2) \cdot \max_{[p,q]} f = \pi(p+q) \max f(p-q) \leq \pi \cdot \max_{x \in [p,q]} (2x) \cdot \min_{x \in [p,q]} f(x) \cdot (q-p)$$

Аналогично

$$\pi \min_{x \in [p,q]} \cdot \min_{x \in [p,q]} f(x)(q-p)$$

$$1. \ m_{\Delta} l(\Delta) \leq \phi(\Delta) \leq M_{\Delta} l(\Delta)$$

$$\phi(\Delta) = \pi \cdot 2x \cdot f(x) \leq \pi \max(2x) \cdot \max f(x)$$

$$2. \ m_{\Delta} \leq f(x) \leq M_{\Delta}$$

$$3. \ p \rightarrow x_0, q \rightarrow x_0 \ \pi \cdot 2x_0 \cdot f(x_0)$$

76 Неравенство Йенсена для сумм

76.1 Формулировка

Пусть f — выпукла на $\langle a, b \rangle$. Тогда

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \langle a, b \rangle$$

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

76.2 Доказательство

Если все x совпадают, то тривиально.

Пусть $x^* = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$

$$x_{\min} \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq x^* \leq x_{\max} \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

$$a \leq x_{\min} \leq x^* \leq x_{\max} \leq b$$

К любой выпуклой функции можно провести опорную прямую $y = l(x) : f(x) \geq l(x)$, при $x = x_0$ $f(x_0) = l(x_0)$

Проведём к x^* опорную прямую $l(x) = kx + b$

$$f(x^*) = l(x^*) = k \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + b = \sum_{i=1}^n k \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^n b \alpha_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i (k x_i + b) = \sum_{i=1}^n \alpha_i l(x_i) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$$

77 Неравенство Йенсена для интегралов

77.1 Формулировка

Пусть f — выпукла и непрерывна на $\langle A, B \rangle$

$\varphi : [a, b] \rightarrow \langle A, B \rangle$ — непрерывна

$\lambda : [a, b] \rightarrow [0, +\infty]$, $\int_a^b \lambda = 1$ — непрерывна

Тогда $f\left(\int_a^b \lambda(x)\varphi(x)dx\right) \leq \int_a^b \lambda(x)f(\varphi(x))dx$

77.2 Доказательство

$m := \inf \varphi(x)$

$M := \sup \varphi(x)$

$c := \int_a^b \lambda(x)\varphi(x)dx \leq \int_a^b \lambda(x)dx \cdot M = M \leq b$

$c \geq m = a$ — аналогично, значит $c \in \langle a, b \rangle$

Если $m = M$ — тривиально

Пусть $y = kx + b$ — опорная прямая к графику f в точке c

$f(C) = kC + b = k \int_a^b \lambda \varphi + b \int_a^b \lambda = \int_a^b \lambda(k\varphi + b) \leq \int_a^b \lambda(f \circ \varphi)$

$f\left(\int_a^b \lambda \varphi\right) \leq \int_a^b \lambda(f \circ \varphi)$

78 Неравенство Коши (для сумм и для интегралов)

78.1 Неравенство для сумм

78.1.1 Формулировка

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$

Тогда $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$

78.1.2 Доказательство

$$\ln\left(\frac{1}{n}a_1 + \frac{1}{n}a_2 + \dots + \frac{1}{n}a_n\right) \geq? \frac{1}{n} \ln(a_1 a_2 \dots a_n) = \frac{1}{n} \ln a_1 + \frac{1}{n} \ln a_2 + \dots + \frac{1}{n} \ln a_n$$

$$x_1 = a_1$$

$$x_2 = a_2$$

...

$$x_n = a_n$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{n}$$

$f(\sum \alpha_i x_i) \geq \sum \alpha_i f(x_i)$, поскольку функция \ln — вогнута

78.2 Неравенство для интегралов

78.2.1 Формулировка

$\frac{1}{b-a} \int_a^b f$ — среднее арифметическое f на $[a, b]$

$\exp\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f\right)$ — среднее геометрическое функции f ($f > 0$)

Тогда если $f \in C[a, b]$, $f > 0$

$$\exp\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f \leq \ln \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f \right)$$

$$\ln \longleftrightarrow f \quad \text{— вогнутая}$$

$$f \longleftrightarrow \varphi$$

$$\frac{1}{b-a} \longleftrightarrow \lambda$$

79 Неравенство Гёльдера для сумм

79.1 Формулировка

Пусть $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$q = \frac{p}{p-1}$$

$a_i, b_i > 0$ для всех $i = 1..n$

Тогда $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^n b_i^q)^{\frac{1}{q}}$

Если $(a_1^p, a_2^p, \dots, a_n^p) \parallel (b_1^q, b_2^q, \dots, b_n^q)$ — равенство

79.2 Доказательство

x^p — строго выпукла при $p > 1$ и $x > 0$

$$(x^p)'' = p(p-1)x^{p-2} > 0$$

По неравенству Йенсена $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i)^p \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^p$

$$\alpha_i := \frac{b_i^q}{\sum_{j=1}^n b_j^q}$$

$$\alpha_i > 0, \sum \alpha_i = 1$$

Выберем такие x_i , что

$$\alpha_i \cdot x_i = a_i \cdot b_i$$

$$x_i = \frac{a_i b_i}{\alpha_i} = \frac{a_i b_i}{b_i^q} \sum_{j=1}^n b_j^q = a_i b_i^{1-q} \sum_{j=1}^n b_j^q = a_i b_i^{1-\frac{p}{p-1}} \sum_{j=1}^n b_j^q = a_i b_i^{\frac{p-1-p}{p-1}} \sum_{j=1}^n b_j^q = a_i \cdot b_i^{-\frac{1}{p-1}} \sum_{j=1}^n b_j^q$$

Тогда $\alpha_i x_i = a_i b_i$

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right)^p = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^p$$

Тогда $\alpha_i x_i^p = a_i^p \left(\sum_{j=1}^n b_j^q \right)^{p-1}$

$$\text{Тогда } \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^p = \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j^q \right)^{p-1} = \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j^q \right)^{\frac{p}{q}}$$

Тогда
$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^p \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right) \left(\sum_{j=1}^n b_j^q\right)^{\frac{p}{q}}$$

Возведём в степень $\frac{1}{p}$ и получим исходное неравенство

80 Неравенство Гёльдера для интегралов

80.1 Формулировка

Пусть $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$

Пусть также $f, g \in C[a, b]$ и $f, g \geq 0$ на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b fg \leq \left(\int_a^b f^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

80.2 Доказательство

Делим $[a, b]$ на n равных частей

$$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n} \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$$

$$\xi_k := x_k$$

$$a_k := |f(x_k)|(\Delta x_k)^{\frac{1}{p}}$$

$$b_k := |g(x_k)|(\Delta x_k)^{\frac{1}{q}}$$

$$a_k \cdot b_k = |f(x_k)g(x_k)| \cdot \Delta x_k$$

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k)g(x_k)|\Delta x_k \leq \left(\sum_{k=1}^n |f(x_k)|^p \Delta x_k \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |g(x_k)|^q \Delta x_k \right)^{\frac{1}{q}}$$

Из неравенства Гёльдера для сумм

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

81 Неравенство Минковского

81.1 Формулировка

Пусть $p \geq 1$

$$\text{Тогда } \left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

81.2 Замечания

- Здесь нет буквы q
- Неравенство Минковского означает, что $(a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto \left(\sum |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ является нормой

81.3 Доказательство

При $p = 1$ — очевидно

$p > 1$ — применим Гёльдера

Пусть $a_i, b_i > 0$

$$\sum |a_i| |a_i + b_i|^{p-1} \leq \left(\sum |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum |b_i| |a_i + b_i|^{p-1} \leq \left(\sum |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum |a_i + b_i|^p \leq \sum (|a_i| + |b_i|) |a_i + b_i|^{p-1} \leq \left(\sum |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\sum |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \dots \leq \left(\sum |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

82 Свойства верхнего и нижнего пределов

82.1 Формулировка

Пусть x_n, x'_n — произвольные последовательности. Тогда

1. $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$

2. $\forall n \quad x_n \leq x'_n$. Тогда

$$\overline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x'_n$$

$$\underline{\lim} x_n \leq \underline{\lim} x'_n$$

3. $\forall \lambda > 0$

$$\overline{\lim}(\lambda x_n) = \lambda \cdot \overline{\lim} x_n$$

$$\underline{\lim}(\lambda x_n) = \lambda \cdot \underline{\lim} x_n$$

4. $\overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim}(x_n)$

$$\underline{\lim}(-x_n) = -\overline{\lim}(x_n)$$

5. $\overline{\lim}(x_n + x'_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} x'_n$

$$\underline{\lim}(x_n + x'_n) \geq \underline{\lim} x_n + \underline{\lim} x'_n$$

Если правые части имеют смысл

6. $t_n \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim} x_n + \lim t_n$$

Если правая часть имеет смысл

7. $t_n \rightarrow l > 0, l \in \mathbb{R}$

$$\overline{\lim}(x_n \cdot t_n) = l \cdot \overline{\lim} x_n$$

82.2 Доказательство

1. Следует из того факта, что $z_n \leq x_n \leq y_n$

2. $y_n \leq y'_n$

$$3. \sup(\lambda A) = \lambda \sum(a)$$

$$4. \sup(-A) = -\inf(A)$$

$$5. \sum(x_n + x'_n, x_{n+1} + x'_{n+1}; \dots) \leq y_n + y'_n, \text{ т.к. это верхняя граница для всех сумм над } \sup$$

$$6. l \in \mathbb{R}, \text{ тогда } \forall \varepsilon > 0 \exists N_0 : \forall k > N_0$$

$$x_k + l - \varepsilon < x_k + t_k < x_k + l_k + \varepsilon$$

$$y_n + l - \varepsilon \leq \sum(x_n + t_n, x_{n+1} + t_{n+1}, \dots) \leq y_n + l + \varepsilon, \text{ при } N \rightarrow +\infty$$

$$(\overline{\lim} x_n) + l - \varepsilon \leq \overline{\lim}(x_n + y_n) \leq (\overline{\lim} x_n) + l + \varepsilon$$

$$7. \text{ Без доказательства}$$

83 Техническое описание верхнего предела

83.1 Формулировка

1. $\overline{\lim} x_n = +\infty \iff x_n$ — не ограничена сверху
2. $\overline{\lim} x_n = -\infty \iff x_n \rightarrow -\infty$
3. $\overline{\lim} x_n = l \in \mathbb{R} \implies$
 - $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N \quad x_n < l + \varepsilon$
 - $\forall \varepsilon > 0$ неравенство $x_n > l - \varepsilon$ выполняется для бесконечного множества номеров n

83.2 Доказательство

1. Очевидно, что $x_n < y_n$, y_n убывает. Таким образом, если $\lim y_n = +\infty \implies y_n = +\infty \iff x_n$ — не ограничена сверху
2. $y_n \rightarrow -\infty, \forall E : \exists N : \forall n > N \quad x_n \leq y_n < E \Rightarrow \forall E > 0 : \exists N : \forall n > N : x_n < E, \forall n > N : y_n \leq E$
3. $x_n \leq y_n, y_n \rightarrow l$
 - $\Rightarrow) \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N \quad x_n \leq y_n < l + \varepsilon$
Если $\exists N_0 : \forall n > N_0 \quad y_n < l - \varepsilon$, то $\forall n > N_0 \quad y_n = \sup(\dots) \leq l - \varepsilon$ и тогда $y_n \rightarrow l$
 - $\Leftarrow) \forall \varepsilon : \exists N : \forall n > N \quad y_n \leq l + \varepsilon, y_n$ — супремум
 $x_k \geq l - \varepsilon \Rightarrow y_n \geq l - \varepsilon \Rightarrow y_n \rightarrow l$

84 Теорема о существовании предела в терминах верхнего и нижнего пределов

84.1 Формулировка

Пусть существует $\lim x_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда и только тогда $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = l$

84.2 Доказательство

$$\bullet \Rightarrow) \lim x_n = +\infty \iff \underline{\lim} x_n = +\infty \Rightarrow \underline{\lim} \leq \overline{\lim} x_n = +\infty$$

$$\lim x_n = -\infty \iff \underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} = -\infty$$

$\lim x_n \in \mathbb{R}$ — очевидно

$$\bullet \Leftarrow) z_n \leq x_n \leq y_n, \text{ то по теореме о сжатой последовательности } x_n \rightarrow l, \text{ поскольку } z_n \rightarrow l \text{ и } y_n \rightarrow l$$

85 Теорема о характеристизации верхнего предела как частичного

85.1 Формулировка

1. Пусть l — частный предел x_n , тогда $\underline{\lim} x_n \leq l \leq \overline{\lim} x_n$
2. Существуют такие n_k, m_k , что $\lim x_{n_k} = \overline{\lim} x_n$ и $\lim x_{m_k} = \underline{\lim} x_n$

85.2 Доказательство

1. Пусть $x_{n_j} \rightarrow l$

$$z_{n_j} \leq x_{n_j} \leq y_{n_j}, \text{ где } z_{n_j} \rightarrow \underline{\lim} x_n, x_{n_j} \rightarrow l, y_{n_j} \rightarrow \overline{\lim} x_n$$

2. $\overline{\lim} x_k = \pm\infty$ — очевидно

$$\overline{\lim} x_k = l \in \mathbb{R} \text{ — очевидно}$$

$$\text{Для } \varepsilon = \frac{1}{k} \exists x_{n_k} : l - \frac{1}{k} \leq x_{n_k} \leq l + \frac{1}{k}$$

86 Простейшие свойства несобственного интеграла

86.1 Формулировка

1. Критерий Больцано-Коши сходимости несобственного интеграла

Сходимость интеграла $\int_a^{\rightarrow b} f$ равносильна

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta \in (a, b) : \forall B_1, B_2 : \Delta < B_1 < B_2 < b : \left| \int_{B_1}^{B_2} f \right| < \varepsilon$$

2. f — допустима на $[a, b)$ и $C \in (a, b)$. Тогда

$$\int_a^{\rightarrow b} f \text{ и } \int_c^{\rightarrow b} f \text{ сходятся и расходятся одновременно, и при этом в случае сходимости } \int_a^{\rightarrow b} f = \int_a^c f + \int_c^{\rightarrow b} f$$

3. Пусть f, g — допустимы на $[a, b)$, а также

$$\int_a^{\rightarrow b} f \text{ и } \int_a^{\rightarrow b} g \text{ сходятся. Пусть } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ тогда}$$

λf и $f \pm g$ — допустимые функции на $[a, b)$ и

$$\int_a^{\rightarrow b} \lambda f = \lambda \int_a^{\rightarrow b} f \text{ и } \int_a^{\rightarrow b} f \pm g = \int_a^{\rightarrow b} f \pm \int_a^{\rightarrow b} g$$

4. Пусть $\int_a^{\rightarrow b} f$ и $\int_a^{\rightarrow b} g$ существуют в $\overline{\mathbb{R}}$, $f \leq g$ на $[a, b)$ Тогда

$$\int_a^{\rightarrow b} f \leq \int_a^{\rightarrow b} g$$

5. Пусть f, g — дифференцируемы на $[a, b)$, f', g' — допустимы на $[a, b)$. Тогда (при существовании двух из трёх пределов)

$$\int_a^{\rightarrow b} f g' = f g \Big|_a^{\rightarrow b} - \int_a^{\rightarrow b} f' g$$

6. Пусть $\varphi : [\alpha, \beta) \rightarrow \langle A, B \rangle$, $\varphi \in C^1([\alpha, \beta))$, $f \in C(\langle A, B \rangle)$. Пусть также существует $\varphi(\beta - 0) \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда

$$\int_a^{\rightarrow b} (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-0)} f$$

86.2 Доказательство

1. Положим $\Phi(A) = \int_a^A f$. Сходимость интеграла равносильна сходимости $\Phi(A)$ при $A \rightarrow b - 0$. Вос-

пользуемся критерием Больцано-Коши, а также учтём, что $\Phi(B) - \Phi(A) = \int_a^B$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \Delta \in (a, b) : \forall B_1, B_2 : \Delta < B_1 < B_2 < b : |\Phi(B_2) - \Phi(B_1)| < \varepsilon$$

2. При всех $A \in (c, b)$ согласно аддитивности интеграла

$$\int_a^A f = \int_a^c f + \int_c^A f$$

3. Аналогично предыдущему пункту возьмём такие A и согласно линейности интеграла

$$\int_a^A (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^A f + \beta \int_a^A g$$

4. Также выберем A и очевидно, что

$$\int_a^A f \leq \int_a^A g$$

5. Устремим $A \rightarrow b$

$$\int_a^A f g' = f g \Big|_a^A - \int_a^A f' g$$

6. Кохась сказал, что без доказательства. На экзамене отвечаем ему то же самое

87 Признаки сравнения сходимости несобственного интеграла

87.1 Формулировка

1. Пусть f — допустима на $[a, b)$, $f \geq 0$, $\Phi(B) = \int_a^B f$. Тогда сходимость $\int_a^b f$ равносильна ограниченности функции Φ (это не признак сравнения)

2. Признаки сравнения

Пусть $f, g > 0$ и допустимы на $[a, b)$

- Если $f \leq g$ на $[a, b)$

(а) $\int_a^b g$ — сходится, значит и $\int_a^b f$ — сходится

(б) $\int_a^b f$ — расходится, значит и $\int_a^b g$ — расходится

- Пусть существует $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Тогда

(а) $\int_a^b g$ — сходится, значит и $\int_a^b f$ сходится, если $l \in [0, +\infty)$

(б) $\int_a^b f$ и $\int_a^b g$ сходятся и расходятся одновременно, если $l \in (0, +\infty)$

87.2 Доказательство

1. Очевидно, что Φ — монотонно возрастает, тогда существование $\lim_{B \rightarrow b-0} \Phi \iff \Phi$ — ограничена

2. • Пусть $\Phi(B) = \int_a^B f$, $\psi(B) = \int_a^B g$, тогда Φ, ψ — монотонные

$$\Phi(B) \leq \psi(B)$$

(а) $\int_a^b g$ — сходится, значит $G(B)$ ограничено сверху, значит $F(B)$ ограничено сверху, значит

и $\int_a^b f$ — сходится

(b) $\int_a^b f$ — расходится, значит $F(B)$ неограничено сверху, значит и $G(B)$ неограничено, значит
и $\int_a^b g$ — расходится

- (a) Возьмём $L > l$. Тогда существует $c \in [a, b) : \forall x \in [c, b)$

$f(x) \leq L \cdot g(x)$ Заменяем \int_a^b на \int_c^b . Тогда $\int_c^b g$ — сходится, значит и $\int_c^b Lg$ — сходится и $\int_c^b f$ — сходится

(b) Для $l > 0$ аналогично и $\lambda < l$ и по аналогии $\lim \frac{g}{f} = \frac{1}{l}$ и $\int_a^b f$ — сходится $\Rightarrow \int_a^b g$ — сходится

88 Интеграл Эйлера-Пуассона

88.1 Формулировка

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

88.2 Доказательство

$$\varphi(t) = \int_0^t e^{-x^2} dx$$

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}, \text{ следует из неравенства } e^t \geq 1+t$$

$$1 + x^2 \leq e^{x^2}$$

$$\frac{1}{1+x^2} \geq \frac{1}{e^{x^2}}$$

$$\text{Интегрируем: } \int_0^1 (1-x^2)^n dx \leq \int_0^1 e^{-nx^2} dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

$$\text{Левая часть: } x = \cos t \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^{2n} t (-\sin t) dt = W_{2n+1}$$

$$\text{Правая часть: } x = \operatorname{tg} t \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \cos^2 t$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} t dt = W_{2n-2}$$

$$\text{Средняя часть: } x = \frac{t}{\sqrt{n}} \sqrt{n} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n} W_{2n-2}$$

$$W_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}$$

$$W_{2n-2} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \sqrt{n} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!} \frac{1}{\sqrt{n}-1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$W_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot \sqrt{n} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{n}{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

89 Гамма функция Эйлера. Простейшие свойства

89.1 Формулировка

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx, \quad t > 0 \quad \text{— Гамма функция Эйлера}$$

Свойства:

1. Интеграл сходится при $t > 0$
2. Функция выпукла, значит она непрерывна
3. $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$
4. Парабола, вершина — примерно точка $(1, 1)$, ветви полностью лежат в первой четверти (когда-нибудь здесь будет рисунок, а так рисуйте примерно)
5. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

89.2 Доказательство

$$\begin{aligned} 1. \quad & \int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty} \\ & \int_0^1 x^{t-1} e^{-x} dx, \text{ при } x \rightarrow 0 \text{ эквивалентно } x^{t-1}, t > 1, \text{ значит сходится} \\ & \int_1^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx \left(x^{t-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \right) \cdot e^{-\frac{x}{2}} \leq e^{-\frac{x}{2}} \\ & \int_{x_0}^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \left(2 \cdot e^{-\frac{x_0}{2}} - 2 \cdot e^{-\frac{B}{2}} \right) \text{ — конечен} \end{aligned}$$

2. Подынтегральная функция $h : t \mapsto x^{t-1} e^{-x}$ — выпукла. Продифференцируем $h'' = x^{t-1} e^{-x} \ln^2 x \geq 0$

$\forall x \in [0, 1] : h(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2, x) \leq \alpha h(t_1, x) + (1 - \alpha)h(t_2, x)$ — неравенство Йенсена

$$\Gamma(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2) \leq \alpha \Gamma(t_1) + (1 - \alpha)\Gamma(t_2)$$

$\Gamma(t)$ — выпукла, значит она непрерывна

$$3. \int_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx = \left[\begin{array}{ll} f = x^t & f' = tx^{t-1} \\ g' = e^{-x} & g = -e^{-x} \end{array} \right] = x^t(-e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} tx^{t-1} e^{-x} dx = t\Gamma(t)$$

$\Gamma(1) = 1$, значит $\Gamma(n) = n!$

$$4. \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \quad \text{— интеграл Эйлера-Пуассона}$$

90 Теорема об абсолютно сходящихся интегралах и рядах

90.1 Формулировка

Пусть f — допустима на $[a, b)$. Тогда эквивалентны утверждения:

1. $\int_a^b f$ абсолютно сходится
2. $\int_a^b |f|$ сходится
3. $\int_a^b f^+$ и $\int_a^b f^-$ абсолютно сходятся

90.2 доказательство

- $1 \Rightarrow 2$ — очевидно
- $2 \Rightarrow 3$ $0 \leq f^+ \leq |f|$ и $0 \leq f^- \leq |f|$
- $3 \Rightarrow 1$ $f = f^+ - f^- \Rightarrow \int f$ — сходится
 $|f| = f^+ + f^- \Rightarrow \int |f|$ — сходится

90.3 Случай рядов

Аналогично интегралам. Доказывается с помощью интегрального признака Коши.

91 Изучение сходимости интеграла $\int_{2019}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}}$

Рассмотрим $\int_{2019}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$, $\alpha > 1$ — сходится, $\alpha \leq 1$ — расходится

Случай $\alpha > 1$: $\alpha = 1 + 2a$, $a > 0$, значит сходится

$$\frac{1}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}} = \frac{1}{x^{1+a}} \cdot \frac{1}{x^a(\ln x)^{\beta}} = \frac{1}{x^{1+a}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^a(\ln x)^{\beta}} = 0$$

Если $\beta \geq 0$, то всё ок. Если $\beta < 0$, то $\lim \frac{(\ln x)^{-\beta}}{x^a} = \left(\lim \frac{\ln x}{x^{a/-\beta}} \right)^{-\beta} = 0$

Если $\alpha < 1$, то $\alpha = 1 - 2\gamma$, $\gamma > 0$ — расходится

$$\frac{1}{x^{1-\gamma}} \cdot \frac{1}{x^{-\gamma}(\ln x)^{\beta}} \geq \frac{1}{x^{1-\gamma}} \quad \text{— расходится}$$

$$\alpha = 1, \quad \int_{2019}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\beta}} = \int_{2019}^{+\infty} \frac{dy}{y^{\beta}}$$

$\beta > 1$ сходится, $\beta \leq 1$ расходится.

92 Изучение интеграла $\int_1^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x^p}$ на сходимость и абсолютную сходимость

При $p > 1$ $\left| \frac{\sin x}{x^p} \right| \leq \frac{1}{x^p}$ — абсолютная сходимость

При $p \leq 0$ $\int_{2\pi k}^{2\pi k + \pi} \frac{\sin x}{x^p} \geq \int_{2\pi k}^{2\pi k + \pi} \sin x = 2$, значит интеграл расходится (и абсолютно тоже)

При $0 < p \leq 1$ нет абсолютной сходимости, но есть обычная сходимость $\int_{\pi k}^{2\pi k} \frac{|\sin x|}{x^p} dx \geq \int_{\pi k}^{2\pi k} |\sin x| \cdot$

$\frac{1}{(2\pi k)^p} dx = \frac{2k}{(2\pi k)^p} \geq \frac{2}{(2\pi)^p}$ — это мой эпсилон

93 Признак Абеля–Дирихле сходимости несобственного интеграла

93.1 Формулировка

1. (Дирихле) f — допустима на $[a, b)$, $g \in C^1([a, b))$, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow b-0} 0$ монотонная

$$F(B) = \int_a^B f \text{ — ограничена, тогда } \int_a^{\rightarrow b} fg \text{ — сходится}$$

2. (Абеля) f — допустима на $[a, b)$, $\int_a^{\rightarrow b} f$ — сходится

$g \in C^1([a, b))$, монотонная, ограниченная

$$\text{Тогда } \int_a^{\rightarrow b} fg \text{ — сходится}$$

93.2 Доказательство

Интегрируем по частям $\int_a^B fg = F(x)g(x) \Big|_a^B - \int_a^B F(x)g'(x)dx$ — конечен

$$\int_a^{\rightarrow b} |F(x)| |g'(x)| dx \leq k \int_a^{\rightarrow b} |g'(x)| dx = \pm \int_a^{\rightarrow b} g'(x) = \pm k g(x) \Big|_a^b$$

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow b-0} g(x)$$

$$fg = f\alpha + f(g - \alpha)$$

$$\int fg \text{ — сходится, } \int_a^b f(g - \alpha) \text{ — сходится по уже доказанному.}$$

94 Интеграл Дирихле

94.1 Формулировка

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

94.2 Доказательство

Будет сделано позже

95 Свойства рядов: линейность, свойства остатка, необх. условие сходимости, критерий Больцано-Коши

95.1 Линейность, свойства остатка

95.1.1 Формулировка

1. Пусть $\sum a_n, \sum b_n$ — сходятся, тогда и ряд $\sum c_n$, где $c_n := a_n + b_n$ тоже сходится
2. Пусть $\sum a_n$ — сходится, тогда и ряд $\sum \lambda a_n$ тоже сходится, где $\lambda \in \mathbb{R}$
3.
 - $\sum a_n$ — сходится, тогда и любой остаток ряда сходится
 - Какой-нибудь остаток ряда сходится, значит и сам ряд сходится
 - Пусть $R_m = \sum_{k=m}^{+\infty} a_k$, $\sum a_n$ — сходится, значит и $R_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$

95.1.2 Доказательство

1. $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N (a_n + b_n) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N a_n + \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N b_n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$
3.
 - $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{m-1} a_k + \sum_{k=m}^N a_k$, сумма и первое слагаемое конечное, значит и второе слагаемое конечное.
 - Аналогично предыдущему
 - $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{m-1} a_k + \sum_{k=m}^{+\infty} a_k$

95.2 Необходимое условие сходимости рядов

95.2.1 Формулировка

$\sum a_n$ — сходится, тогда $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

95.2.2 Доказательство

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S, S_n \rightarrow S$$

$$a_N = S_N - S_{N-1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

95.3 Критерий Больцано-Коши

95.3.1 Формулировка

Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ равносильна условию

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

95.4 Доказательство

По определению сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ равносильна сходимости последовательности $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Воспользуемся критерием Больцано-Коши для последовательностей

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N |S_m - S_n| < \varepsilon$$

Не умаляя общности можно считать, что $m > n$. Остаётся переобозначить $m = n + p$, где $p \in \mathbb{N}$ и заметить,

$$\text{что } S_m - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$$

96 Признак сравнения сходимости положительных рядов

96.1 Лемма

96.1.1 Формулировка

Пусть $a_k \geq 0$, при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда сходимости $\sum a_k$ равносильно тому, что последовательность $S_n^{(a)}$ — ограничена

96.1.2 Доказательство

Последовательность S_n возрастает, а по теореме о монотонной последовательности сходимость равносильна ограниченности сверху.

96.2 Признак сравнения сходимости положительных рядов

96.2.1 Формулировка

Пусть $a_k, b_k \geq 0$. Тогда

1. $\forall k : a_k \leq b_k$ (или даже $\exists c > 0 : \exists N : \forall k > N : a_k \leq cb_k$)

Тогда

$\sum a_k$ расходится, значит и $\sum b_k$ расходится

$\sum b_k$ сходится, значит и $\sum a_k$ сходится

2. Пусть $\exists \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k} = l \in [0, +\infty]$

Тогда

При $0 < l < +\infty$ $\sum a_k$ сходится тогда и только тогда, когда $\sum b_k$ сходится

При $l = 0$ $\sum b_k$ сходится, значит и $\sum a_k$ сходится, или $\sum a_k$ расходится, значит и $\sum b_k$ расходится

При $l = +\infty$ $\sum a_k$ сходится, значит и $\sum b_k$ сходится, или $\sum b_k$ расходится, значит и $\sum a_k$ расходится

96.2.2 Доказательство

1. Следует из леммы

$$\sum a_k \text{ сходится} \Leftrightarrow \sum_{k=N}^{+\infty} a_k \text{ сходится}$$

$$a_k \leq cb_k \Rightarrow S_n^{(a)} \leq c \cdot S_n^{(b)}$$

$\sum a_k$ расходится $\Rightarrow A_n^{(a)}$ не ограничено сверху, значит и $S_n^{(b)}$ тоже не ограничено сверху

Аналогично со сходимостью

2. Следует из первой случаи $l = 0$ и $l = +\infty$

$0 < l < +\infty$. По определению предела

$$\exists N : \forall k > N : \frac{l}{2} < \frac{a_k}{b_k} < \frac{3l}{2}$$

$a_k > \frac{1}{2}b_k$, значит $\sum a_n$ сходится, значит и $\sum \frac{l}{2}b_n$ тоже сходится, значит и $\sum b_n$ сходится. Аналогично разбираются и остальные 3 случая.

97 Признак Коши сходимости положительных рядов

97.1 Формулировка

Пусть $a_n \geq 0$ для всех n и $k_n = \sqrt[n]{a_n}$

1. $\exists q < 1 : k_n \leq q$, начиная с некоторого места, значит ряд сходится
2. $k_n \geq 1$ для бесконечного числа номеров, значит ряд расходится

97.2 Доказательство

1. $k_n \geq q \Leftrightarrow a_n \geq q^n$ при $n \rightarrow +\infty$, а q^n — сходится, значит и $\sum a_n$ — сходится
2. $a_n \geq 1$ — верно для бесконечного числа n , значит $\exists n_k$, что $\lim a_{n_k} \neq 0$, значит $\sum a_n$ расходится.

98 Признак Коши сходимости положительных рядов (pro)

98.1 Формулировка

Пусть $a_n \geq 0$, $k = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \sqrt[n]{a_n}$

1. $k > 1$, значит $\sum a_n$ — расходится
2. $k < 1$, значит $\sum a_n$ — сходится

98.2 Доказательство

1. Пусть $k > 1$, тогда для бесконечного числа номеров $\sqrt[n]{a_n} > 1$, а значит $a_n > 1$, значит a_n не стремится к 0, и поэтому ряд расходится.
2. Пусть $k < 1$. Обозначим за $\varepsilon = \frac{1-k}{2} > 0$, $q = \frac{1+k}{2}$. По свойствам верхнего предела существует такое N , что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{a_n} < k + \varepsilon = \frac{1+k}{2} = q \in (0, 1)$$

Тогда $a_n < q^n$ при всех $n > N$, и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по признаку сравнения со сходящимся рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k$$

99 Признак Даламбера сходимости положительных рядов

99.1 Формулировка

Пусть $a_n \geq 0$, $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

light

1. $\exists q < 1$ начиная с некоторого места $D_n \leq q$, значит $\sum a_n$ сходится
2. $D_n \geq 1$ начиная с некоторого места $\sum a_n$ расходится

pro

Пусть $\exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$

1. $D < 1$, значит $\sum a_n$ сходится
2. $D > 1$, значит $\sum a_n$ расходится

99.2 Доказательство

light

1. $\frac{a_{N+1}}{a_N} < q$
 $\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < q$
 \dots
 $\frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} < q$
 $a_{N+k} < q^k \cdot a - N_0$ — сходится

Значит a_n сходится

2. $a_{N_0+k} \geq a_{N_0} > 0$, значит a_k не стремится 0 — расходится

pro

1. $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$, значит НСНМ $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$, значит $\sum a_n$ сходится

2. $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = D > 1$, значит НСНМ $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, значит $\sum a_n$ расходится

100 Признак Раабе сходимости положительных рядов

100.1 Лемма

100.1.1 Формулировка

Пусть $a_n, b_n > 0$ и $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$ НСНМ. Тогда

b_n — сходится, значит и a_n сходится

или

a_n — расходится, значит и b_n расходится.

100.1.2 Доказательство

Будем считать "НСНМ" как "1"

$$a_2 < a_1 \frac{b_2}{b_1}$$

$$a_3 < a_2 \frac{b_3}{b_2}$$

...

$$a_n < a_{n-1} \frac{b_n}{b_{n-1}}, \text{ значит } a_n < \frac{a_1}{b_1} b_n, \text{ т.е. } a_n < c \cdot b_n$$

100.2 Теорема

100.2.1 Формулировка

$a_n > 0$, тогда если

$$n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq r > 1 \text{ (НСНМ)}, \text{ тогда } \sum a_n \text{ — сходится}$$

$$n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1 \text{ (НСНМ)}, \text{ тогда } \sum a_n \text{ — расходится}$$

100.2.2 Доказательство

$$1. \quad n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq r \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \frac{r}{n}$$

Пусть $1 < s < r$, $b_n := \frac{1}{n^s}$

Итак, НСНМ $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$

$\sum b_n = \sum \frac{1}{n^s}$ — сходится, значит $\sum a_n$ — сходится

$$2. \quad n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1, \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{n+1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}$$

$\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $\sum \frac{1}{n}$ — расходится, значит и $\sum a_n$ — расходится

101 Интегральный признак Коши сходимости числовых рядов

101.1 Формулировка

Пусть $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывна, ≥ 0 , монотонна

Тогда $\sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$ и $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ — сходятся или расходятся одновременно. Содержательный случай f — убывает и $f(1) > 0$

101.2 Доказательство

Ряд сходится, значит $S_n^{(f)}$ — ограничена сверху

Тогда $\Phi(A) = \int_1^A f(x)dx$ — ограничена сверху

$$S_n^{(f)} \leq S$$

$$\Phi(A) < \Phi([A] + 1) = \int_1^{[A]+1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{[A]} \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{[A]} \int_k^{k+1} f(k)dx = \sum_{k=1}^{[A]} f(k) \leq S$$

Интеграл сходится, значит и ряд сходится

$$\Phi(A) \leq S$$

Проверим, что $S_n \leq S + f(1)$

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(k) = f(1) + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k f(x)dx \leq f(1) + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k f(k-1)dx = f(1) + \sum_{k=2}^n f(k-1) = f(1) + S_{n-1} \leq f(1) + S$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^a (\ln n)^b} \text{ — сходство одновременно с } \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^a (\ln x)^b} \text{ (уже изучали)}$$

102 Признак Лейбница

102.1 Формулировка

Пусть $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq 0$, $a_n \rightarrow 0$. Тогда $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} a_k$ — сходится

102.2 Доказательство

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}), S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n}$$

$$S_{2n} \leq a_1, S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}, \text{ итого } S \text{ — ограничено, значит ряд сходится}$$

103 Признаки Дирихле и Абеля сходимости числового ряда

103.1 Формулировка

103.1.1 Дирихле

Пусть $S_n^{(a)}$ — ограничена

b_n — монотонна. $b_n \rightarrow 0$

Тогда $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ — сходится

103.1.2 Абеля

Пусть $\sum a_k$ — сходится, b_n — ограниченная, монотонная

Тогда $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ — сходится

103.2 Доказательство

103.2.1 Дирихле

Применим преобразование Абеля $\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$

Из того, что A_n ограничена, а b_n бесконечно мала, следует, что $A_n b_n \rightarrow 0$, поэтому сходимость эквивалентна сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$

$\sum_{k=1}^{n-1} |A_k (b_k - b_{k+1})| \leq c_a \sum_{k=1}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| = c_a |b_1 - b_n|$ — ограничена

103.2.2 Абеля

Существует конечный $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \beta$

$\sum a_k b_k = \sum a_k \beta + \sum a_k (b_k - \beta)$

104 Теорема об условиях сходимости бесконечного произведения

104.1 Формулировка

1. Пусть $a_n > 0$ НСНМ. Тогда равносильность $\prod(1 + a_n)$ — сходится $\Leftrightarrow \sum a_n$ — сходится
2. Пусть $\sum a_n$ — сходится, а также $\sum a_n^2$ — тоже сходится. Тогда $\prod(1 + a_n)$ — сходится

104.2 Доказательство

1. \prod — сходится $\Leftrightarrow \sum \ln|1 + a_n|$ — сходится $\Leftrightarrow \sum a_n$ — сходится. НСНМ $\ln|1 + a_n| \sim a_n$ при $n \rightarrow +\infty$
2. \prod сходится $\Leftrightarrow \sum \ln(1 + a_n)$ сходится

$$\ln(1 + a_n) = a_n - \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)$$

Докажем, что $\sum |o(a_n^2)|$ абсолютно сходится

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{o(a_n^2)}{a_n^2} = 0$ из сходимости $\sum a_n^2$ следует сходимость $\sum |o(a_n^2)|$, значит и $\sum o(a_n^2)$ сходится

105 Лемма об оценке приближения экспоненты ее замечательным пределом

105.1 Лемма 1

105.1.1 Формулировка

$$\Pi(n, x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$$

$$\text{Тогда } \Pi(n, x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{x(x+1) \dots (x+n)} \cdot n^x$$

105.1.2 Доказательство

$$\begin{aligned} \Pi(n, x) &= n^x \int_0^1 (1-s)^n \cdot s^{x-1} ds = n^x \left((1-s)^n \cdot \frac{s}{x} \Big|_{s=0}^{s=1} + \frac{n}{x} \int_0^1 (1-s)^{n-1} \cdot s^x ds \right) = n^x \cdot \frac{n}{x} \int_0^1 (1-s)^{n-1} s^x ds = \\ &= n^x \cdot \frac{n}{x} \cdot (n-1) \int_0^1 (1-s)^{n-2} s^{x-1} ds = \dots \text{получаем то, что хотели} \end{aligned}$$

105.2 Лемма 2

105.2.1 Формулировка

При $0 \leq t \leq n$

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{1}{n} t^2 e^t$$

105.2.2 Доказательство

$(1+y) \leq e^y$ и $(1-y)^{-1} \leq e^y$, $y \in [0, 1]$ в силу выпуклости e^x

$$e^y \geq 1 + y$$

$$e^{-y} \geq 1 - y$$

возведём в $(-n)$, $y := \frac{t}{n}$

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n} \geq e^{-t} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t} \left(1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \leq e^{-t} \left(1 - \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) = e^{-t} \left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right) \leq \frac{1}{n} t^2 e^{-t} \text{ (это неравенство Бернулли)}$$

106 Формула Эйлера для гамма-функции

106.1 Формулировка

При $x > 0$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{x(x+1) \dots (x+n)} \cdot n^x = \Gamma(x)$

106.2 Доказательство

$$\Gamma(x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pi(n, x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^n \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right) t^{x-1} dt + \int_n^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \right)$$

$$\int_n^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$$

$$\int_0^n \frac{1}{n} e^{-t} t^2 t^{x-1} dt \leq \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} t^{x+1} e^{-t} dt \rightarrow 0$$

107 Формула Вейерштрасса для Γ -функции

107.1 Формулировка

Пусть $x > 0$, γ — постоянная Эйлера. Тогда

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}$$

107.2 Доказательство

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(x)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-x} \frac{x(x+1) \dots (x+n)}{1 \cdot 2 \dots n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^{-x} \cdot x \frac{x+1}{1} \frac{x+2}{2} \dots \frac{x+n}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x \cdot n^{-x} \cdot \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} x e^{x(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})} \cdot e^{-x \ln n} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} = x \cdot e^{\gamma} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \\ \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} &= \left(1 + \frac{x}{k}\right) \left(1 - \frac{x}{k} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = 1 - \frac{x^2}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^3}\right) \end{aligned}$$

108 Вычисление произведений с рациональными сомножителями

108.1 Формулировка

Пусть $\sum_{i=1}^k a_i = \sum_{i=1}^k b_i$

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1 + \frac{a_1}{n}\right) \left(1 + \frac{a_2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{a_k}{n}\right)}{\left(1 + \frac{b_1}{n}\right) \left(1 + \frac{b_2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{b_k}{n}\right)} = \frac{\Gamma(1 + b_1) \dots \Gamma(1 + b_k)}{\Gamma(1 + a_1) \dots \Gamma(1 + a_k)}$$

Фиг его знает, что тут хочет Кохась

109 Теорема о группировке слагаемых

109.1 Формулировка

Выберем $n_0 = 1 < n_1 < n_2 < \dots$

Пусть $\sum a_k = (a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}) + \dots$

$$b_k = \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} a_i$$

Тогда

1. $\sum a_n$ — сходится $\Rightarrow \sum b_k$ сходится и имеет ту же сумму
2. $a_k \geq 0 \Rightarrow \sum a_k = \sum b_k$

109.2 Доказательство

$$S_k^{(b)} = S_{n_k}^{(a)}$$

$$1. \lim_{k \rightarrow \infty} S_k^{(b)} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k}^{(a)} = S^{(a)}$$

2. Если $\sum a_n$ — сходится, то смотри пункт 1

Если $\sum a_n$ — расходится, значит $S_n^{(a)}$ не ограничено сверху, значит и $S_n^{(b)}$ не ограничено сверху

110 Теорема о перестановке слагаемых

110.1 Формулировка

Пусть ряд $\sum a_n$ абсолютно сходится, тогда ряд $\sum b_n$, полученный из ряда $\sum a_n$ перестановкой, будет также абсолютно сходиться и иметь ту же сумму.

Также если $a_k \geq 0$ при всех k , то $\sum a_k = \sum b_k$

110.2 Доказательство

По определению $S_n^{(b)} = a_{\varphi(1)} + \dots + a_{\varphi(n)} \leq S_{\max \varphi(i)}^{(a)}$. Устремим $n \rightarrow +\infty$, $S^{(b)} \leq S^{(a)}$. Аналогично $S^{(a)} \leq S^{(b)}$. Берём срезки a_n^+ , a_n^- , $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$ — сходятся.

$a_n^+ = \max(a_n^+, 0)$, $\sum b_n^+$ — перестановка ряда a_n^+

$a_n^- = \max(-a_n^-, 0)$. Аналогично $\sum b_n^-$

111 Теорема о произведении рядов

111.1 Формулировка

Пусть ряды (A) и (B) абсолютно сходятся к суммам $S^{(a)}$ и $S^{(b)}$. Тогда $\forall \gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ — биекция, произведение рядов абсолютно сходится и имеют сумму $S^{(a)}S^{(b)}$

111.2 Доказательство

Пусть $\sum |a_k| = A, \sum |b_k| = B, (A, B \in \mathbb{R})$. $\sum_{k=1}^N |a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}| \leq \sum_{k=1}^n |a_n| \sum_{k=1}^m |b_k| \leq A \cdot B$, где $n := \max(\varphi(1), \dots, \varphi(N))$, $m = \max(\psi(1), \dots, \psi(N))$

Значит ряд $\sum_{k=1}^N |a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}|$ — сходится, значит произведение рядов абсолютно сходится

112 Единственность производной

112.1 Формулировка

Производный оператор единственный

112.2 Доказательство

Проверим, что $\forall n \in \mathbb{R}^m$ $L(n)$ задан однозначно

$h := tu$, $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^m$, t — "маленькое"

$$F(a + tu) = F(a) + L(tu) + o(tu)$$

$$F(a + tu) = F(a) + t \cdot L(u) + o(t)$$

113 Лемма о дифференцируемости отображения и его координатных функций

113.1 Формулировка

Пусть $F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, $F = (F_1, \dots, F_l)$, $a \in \text{Int } (E)$

Тогда

1. F — дифференцируема в точке $a \Leftrightarrow$ все F_i дифференцируемы в точке a
2. Строки матрицы Якоби F равны матрицы Якоби функций F_i

113.2 Доказательство

Будет написано позже когда-нибудь перед экзаменами возможно наверняка да навряд ли

114 Необходимое условие дифференцируемости

114.1 Формулировка

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{Int } E$

f — дифференцируема в точке a

Тогда $\exists f'_{x_1}(a), \dots, f'_{x_m}(a)$ и тогда $(f'_{x_1}(a), \dots, f'_{x_m}(a))$ — матрица Якоби f в точке a

114.2 Доказательство

$$f(a+h) = f(a) + L \cdot h + \alpha(h) \cdot |h|$$

$$f(a+t \cdot e_k) = f(a) + e_k \cdot t + \alpha(t \cdot e_k)|t|$$

$$l_{k_m} = \varphi'_k(a_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a_k)$$

115 Достаточное условие дифференцируемости

115.1 Формулировка

Пусть $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in E$, $B(a, r) \subset E$

Пусть в этом шаре $\exists f'_{x_1}(x), \dots, f'_{x_m}(x)$, $x \in B(a, r)$

и все эти производные непрерывны в точке a . Тогда f — дифференцируемы в точке a

115.2 Доказательство

Пусть $m = 2$, на большую размерность обобщается легко

$$a = (a_1, a_2), x = (x_1, x_2)$$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) &= (f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2)) + (f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2)) = f'_{x_1}(\overline{x_1}, x_2)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(x_1, \overline{x_2})(x_2 - \\ a_2) &= f'_{x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2) + (f'_{x_1}(\overline{x_1}, x_2) - f'_{x_1}(a_1, a_2))(x_1 - a_1) + (f'_{x_2}(a, \overline{x_2}) - f'_{x_2}(a_1, a_2))(x_2 - \\ a_2) \end{aligned}$$

116 Лемма об оценке нормы линейного оператора

116.1 Формулировка

Пусть $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, лин. $A = (a_{ij})$. Тогда $\forall x \in \mathbb{R}^m$

$$|Ax| \leq C_a |x|, \text{ где } C_a = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}$$

116.2 Доказательство

$$|Ax|^2 = \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \right)^2 \leq \sum_{i=1}^l \left(\left(\sum_{j=1}^m a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^m x_j^2 \right) \right) = |x|^2 \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m a_{ij}^2$$

Это КБШ

117 Дифференцирование композиции

117.1 Формулировка

Пусть $F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, $G : I \subset \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(E) \subset I$

$a \in \text{Int } (E)$, $F(a) \in \text{Int } (I)$, F — дифференцируема в точке a , G — дифференцируема в $b = F(a)$. Тогда

$G \circ F$ — дифференцируема в точке a и $(G \circ F)'(a) = G'(F(a)) \cdot F'(a)$

117.2 Доказательство

$$F(a+h) = F(a) + F'(a)h + \alpha(h)|h|$$

$$G(b+k) = G(b) + G'(b)k + \beta(k)|k|$$

$$G(F(a+h)) = G(b) + G'(b)(F'(a)h + \alpha(h)|h|) + \beta(k)|k|$$

$$G(F(a)) + G'(F(a)) \cdot F'(a)h + G'(b)\alpha(h)|h| + \beta(k)|k|, \text{ где } G'(b)\alpha(h)|h| + \beta(k)|k| = o(h)$$

118 Дифференцирование произведений

118.1 Формулировка

Пусть $F, G : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{Int } E$; F, G, λ — дифференцируемые в a , тогда:

1. $(\lambda F)'(a)h = (\lambda'(a)h)F(a) + \lambda(a)(F'(a)h)$
2. $\langle F, G \rangle'(a)h = \langle F'(a)h, G(a) \rangle + \langle F(a), G'(a)h \rangle$

118.2 Доказательство

Будет написано позже

119 Теорема Лагранжа для векторнозначных функций

119.1 Формулировка

Пусть $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^l$ — непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на $[a, b]$. Тогда

$$\exists c \in (a, b) : |F(b) - F(a)| \leq |F'(c)| \cdot |b - a|$$