Содержание

Часть I

Определения

1 Первообразная, неопределенный интеграл

1.1 Первообразная

$f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$

$F : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ — первообразная f на $\langle a, b \rangle$, если для любого $x \in \langle a, b \rangle$ F дифференцируема в точке x и $F'(x) = f(x)$.

Пример

$f(x) = \sin x \Longleftrightarrow F(x) = -\cos x + C$

1.2 Неопределенный интеграл

Неопределенным интегралом функции f на промежутке $\langle a, b \rangle$ называют множество всех её первообразных.

Обозначение: $\displaystyle\int f$, $\displaystyle\int f(x)\ dx = \{F + C, C \in \mathbb{R}\}$, где F — любая первообразная.

2 Теорема о существовании первообразной

Пусть f непрерывна на $\langle a, b\rangle \Longrightarrow$ существует такая функция F на $\langle a, b\rangle$, что $F' = f$.

Доказательство

В кредит

3 Таблица первообразных

1. $f(x) = k$, $F(x) = kx$
2. $f(x) = x^n$, $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, где $n \neq -1$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $F(x) = \ln|x|$
4. $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$
5. $f(x) = a^x$, $F(x) = \dfrac{a^x}{\ln a}$
6. $f(x) = \sin x$, $F(x) = -\cos x$
7. $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x$
8. $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$, $F(x) = -\operatorname{ctg} x$
9. $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $F(x) = \operatorname{tg} x$
10. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $F(x) = \arcsin x$
11. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $F(x) = \operatorname{arctg} x$
12. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\,(x + \sqrt{x^2+1})$
13. $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$

4 Равномерная непрерывность

Отображение $f : X \to Y$, где X и Y — метрические пространства, а также $A \subset X$, называется равномерно непрерывным на A, если:

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0, \;\; \forall x_0, \, x \in A : \rho(x - x_0) < \delta \Longrightarrow \rho(f(x) - f(x_0)) < \varepsilon$

5 Площадь, аддитивность площади, ослабленная аддитивность

5.1 Первое определение площади

Пусть E — множество всех ограниченных подмножество в $\mathbb{R}^2$ (или множество всех фигур).

Тогда площадь — это функция $\sigma : E \to [0, +\infty)$ со свойствами:

1. аддитивность

   Если $A = A_1 \sqcup A_2$, то $\sigma(A) = \sigma(A_1) + \sigma(A_2)$

2. нормировка

   $\sigma(\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle) = (d - c)(b - a)$

<u>Замечание</u>

1. Площадь монотонна, то есть:

   $A \subset B \Rightarrow \sigma(A) \leq \sigma(B)$

   $B = A \cup (B \setminus A)$

   $\sigma(B) = \sigma(A) + \sigma(B \setminus A) \geq \sigma(A)$

2. $\sigma(\text{вертикального отрезка}) = 0$

   Отрезок — прямоугольник, ширина которого стремится к 0, значит и площадь также стремится к 0

5.2 Второе определение площади

$\sigma : E \to [0, +\infty)$

- монотонна
- нормировка
- ослабленная аддитивность:

  $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$ — вертикальный отрезок, E_1 и E_2 — по разные стороны этого отрезка.

  $\sigma(E) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2)$

5.3 Площадь как сумма прямоугольников

$\sigma(A) = \inf\left(\sum \sigma(P_i)\right)$, где $A \subset \bigcup P_i$

6 Положительная и отрицательная срезки

6.1 Определение

Пусть $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$

$f_+(x) = \max(f(x), 0)$ — положительная срезка

$f_-(x) = \max(-f(x), 0)$ — отрицательная срезка

6.2 Некоторые свойства

- $f = f_+ - f_-$
- $f_+ + f_- = |f|$

6.3 Подграфик

Пусть $E \subset \langle a, b \rangle$

$f(E) \geq 0$

Тогда $\text{ПГ}(f, E)$ — подграфик f на E, если:

$\text{ПГ}(f, E) = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in E, 0 \leq y \leq f(x)\big\}$

7 Определённый интеграл

7.1 Определение

Определённым интегралом функции f по промежутку $[a, b]$ называется: $f : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$, $[a, b] \subset \langle c, d\rangle$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sigma(\Pi\Gamma(f_+, [a, b])) - \sigma(\Pi\Gamma(f_-, [a, b]))$$

7.2 Замечание

1. $f \geq 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f \geq 0$

2. $f \equiv c \Rightarrow \int\limits_a^b f = c(b - a)$

   $c = 0$ — очевидно

   $c > 0 \int\limits_a^b = \sigma(\Pi\Gamma(c, [a, b])) = c(b - a)$

   $c < 0 \int\limits_a^b = -\sigma(\Pi\Gamma(f_-, [a, b])) = -(-c)(b - a) = c(b - a)$

3. $\int\limits_a^b -f = -\int\limits_a^b f$

   $(-f)_+ = f_-$

   $(-f)_- = f_+$

4. Можно считать, что разрешён случай, когда $a = b$

   $\int\limits_a^a f = 0$

8 Среднее значение функции на промежутке

Величина $c = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$ — среднее значение функции f на промежутке $\langle a, b\rangle$

9 Кусочно-непрерывная функция

Если функция f всюду непрерывна на промежутке $[a, b]$ кроме конечного числа точек, при этом все точки разрыва I рода, то такую функцию называют кусочно-непрерывной.

10 Почти первообразная

Пусть f — кусочно-непрерывная функция на $[a, b]$. Тогда $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ — почти первообразная, если существует такое $F'(x)$, что $F'(x) = f(x)$ для всех x кроме конечного числа точек и $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$

11 Дробление отрезка, ранг дробления, оснащение

Пусть задан невырожденный отрезок $[a, b]$

Дробление отрезка — набор таких точек x_0, x_1, …, x_n, что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

Оснащение — набор точек ξ_1, ξ_2, …, ξ_n, что $\forall k\ \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Ранг дробления — величина, равная $\max\limits_{k=1,\ldots,n}(x_k - x_{k-1})$

12 Риманова сумма

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, а также задано дробление и оснащение. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ — Риманова сумма

Если ранг дробления стремится к 0, то $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \to \int\limits_a^b f(x)\ dx$. Это историческое определение интеграла

13 Постоянная Эйлера

Постоянная Эйлера — математическая константа γ, определяемая следующим образом:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$

14 Функция промежутка. Аддитивная функция промежутка

Пусть у нас задано $\langle a, b\rangle$. Тогда

$\text{Segm}\ \langle a, b\rangle := \{[p, q] \subset \langle a, b\rangle\}$

Тогда:

1. $\phi : \text{Segm}\ \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — функция промежутка
2. $\phi : \text{Segm}\ \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, а также если

   $\forall [p, q] \subset \langle a, b\rangle\ \forall c \in (p, q) \Rightarrow \phi([p, q]) = \phi([p, c]) + \phi([c, q])$ — аддитивная функция промежутка

15 Плотность аддитивной функции промежутка

Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R} \quad \phi : \text{Segm } \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — аддитивная функция промежутка

f — плотность ϕ, если $\forall \Delta \in \text{Segm } \langle a, b\rangle \Rightarrow \inf\limits_{x \in \Delta} f(x) \cdot l(\Delta) \le \phi(\Delta) \le \sup\limits_{x \in \Delta} f(x) \cdot l(\Delta)$,

где $l(\Delta)$ — длина промежутка.

16 Гладкий путь, вектор скорости, носитель пути

Путь — непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$

$\gamma(a)$ — начало пути

$\gamma(b)$ — конец пути

16.1 Гладкий путь

$\gamma^{(t)} = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_m(t))$

γ_i — координатная функция пути γ

Путь $\gamma^{(t)}$ называют гладким, если все $\gamma_i \in C^1[a, b]$

16.2 Вектор скорости

$\gamma(t_0) := \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$

Покоординатно: $\dfrac{\gamma_i(t) - \gamma_i(t_0)}{t - t_0} \to \gamma_i'(t)$

$\gamma'(t_0) = (\gamma_1'(t_0),\ \gamma_2'(t_0),\ \ldots,\ \gamma_n'(t_0))$

16.3 Носитель пути

Носитель пути — множество всех значений $\gamma([a, b]) \subset \mathbb{R}^m$

17 Длина гладкого пути

Длина гладкого путь — функция l, заданная на множестве гладких путей и удовлетворяющая свойствам:

1. $l \geq 0$
2. l — аддитивна:

   $\forall [a, b]$

   $\forall \gamma [a, b]$

   $\forall c \in [a, b]$

   $l(\gamma) = l\left(\gamma\Big|_{[a,c]}\right) + l\left(\gamma\Big|_{[c,b]}\right)$
3. $\forall \gamma, \overline{\gamma}$ — гладкие пути, $C_\gamma, C_{\overline{\gamma}}$ — их носители в $\mathbb{R}^m$

   Если существует такое $T : C_\gamma \to C_{\overline{\gamma}}$ — сжатие, т.е.:

   $\forall M_1, M_2 \in C_\gamma$

   $\rho\left(T\left(M_1\right), T\left(M_2\right)\right) \leq \rho\left(M_1, M_2\right)$

   то $l(\overline{\gamma}) \leq l(\gamma)$
4. γ — линейный путь ($\gamma(t) = t\overline{v} + \overline{u}$)

   $l(\gamma) = \rho(\gamma(a), \gamma(b))$

Замечание

1. Длина хорды меньше длины дуги (это отображение — сжатие)
2. При растяжении длины путей растут

   Всякое сжатие является непрерывным, но для растяжений — **не верно!!!**
3. При движении $\mathbb{R}^m$ длина пути не меняется (это сжатие и растяжение одновременно)

18 Формулы для длины пути: в $\mathbb{R}^m$, в полярных координатах, длина графика

18.1 Длина пути в $\mathbb{R}^m$

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $\gamma \in C^1$

Утверждение: $l(\gamma) = \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\| dt$

18.2 Длина графика

Параметризация:

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$

$t \mapsto (t, f(t))$ $(f \in C^1)$ — гладкий путь

$\gamma' = (1, f'(t))$

$\|\gamma'\| = \sqrt{1^2 + (f'(t))^2}$

$l(f) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(t))} dt$

18.3 Длина кривой в полярных координатах

$r = r(\varphi)$

$\gamma : [\varphi_0, \varphi_1] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma(\varphi) = (r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi)$

$\gamma' = (r' \cos \varphi - r \sin \varphi, r' \sin \varphi + r \cos \varphi)$

$\|\gamma'\|^2 = (r')^2 + r^2$

$l(\gamma) = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi$

19 Вариация функции на промежутке

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — это «путь»

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

Тогда вариация f на $[a, b]$

$\mathrm{Var}_a^b f = \sup \sum\limits_{i=1}^{n} (|f(x_i) - f(x_{i-1})|)$

При этом $f \in C^1([a, b])$ и $\mathrm{Var}_a^b f = \int\limits_a^b |f'(t)| dt$

20 Частичный предел

a — частичный предел x_n ($a \in \overline{\mathbb{R}}$), если

$\exists n_k : x_{n_k} \to a$

Пример

1. $x_n = (-1)^n$, 1 — частничный предел
2. $x_n = \sin n$, $\forall a \in [-1, 1]$ — частничный предел

21 Верхний и нижний пределы

21.1 Верхняя и нижняя огибающая

Пусть x_n — вещественная последовательность.

$y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$ — верхняя огибающая

$z_n = \inf(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$ — нижняя огибащая

Тогда:

1. y_n убывает ($y_n \leq y_{n+1}$)
2. z_n возрастают ($z_n \geq z_{n+1}$)
3. Если изменить конечное число членов x_n, изменится конечное число элементов y_n и z_n, тогда существуют $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$

21.2 Верхний и нижний пределы

Верхний предел x_n — $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup x_n := \lim y_n \in \overline{\mathbb{R}}$

Нижний предел x_n — $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \inf x_n := \lim x_n \in \overline{\mathbb{R}}$

Часть II

Теоремы

22 Теорема Кантора о равномерной непрерывности

22.1 Формулировка

Пусть $f : X \to Y$ — метрические пространства, f непрерывна на X, X — компактно. Тогда f — равномерное непрерывно на X.

22.2 Доказательство (от противного)

Воспользуемся тем свойством, что если X — компактно, то X и секвенциально компактно.

Предположим противное:

$\exists\varepsilon > 0\ \delta = \dfrac{1}{n}\ \exists x_n,\ \widetilde{x_n} : \rho(x_n, \widetilde{x_n}) < \dfrac{1}{n} \Rightarrow \rho(f(x_n), f(\widetilde{x_n})) \geq \varepsilon$

Тогда выберем сходящуюся подпоследовательность: $x_{n_k} \to a \in X$, $\widetilde{x_{n_k}} \to a \in X$.

Тогда $f(x_{n_k}) \to f(a)$ и $f(\widetilde{x_{n_k}}) \to f(a)$, значит

$\rho(f(x_{n_k}), f(\widetilde{x_{n_k}})) \to 0$ (по неравенству треугольника)

Что и противоречит изначальному условию.

23 Теорема Брауэра о неподвижной точке

23.1 Формулировка

Пусть $f : B(0,1) \subset \mathbb{R}^m \to B(0,1)$ — непрерывная, тогда

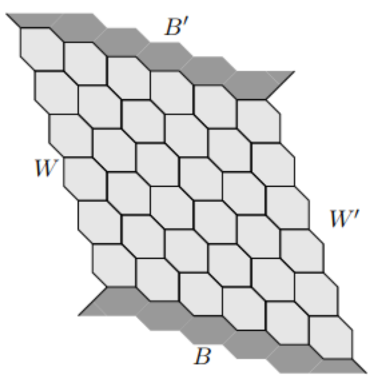
$\exists x_0 : f(x_0) = x_0$

23.2 Доказательство

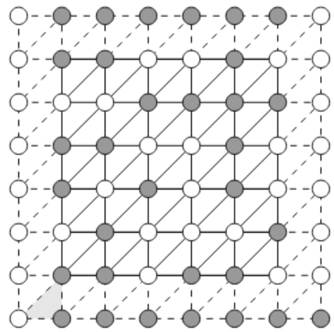
23.2.1 Игра "Гекс"

Пусть есть поле $n \times m$, состоящее из правильных шестиугольников (гексов). Также два игрока на каждом своём ходу красят гексы в белый или чёрный цвет. Тогда для любой раскраски найдётся либо чёрная тропинка, соединяющая верхнюю и нижнюю часть поля, либо белая тропинка, соединяющая левую и правую часть поля.

Доказывается от противного



23.2.2 Сама теорема



Теперь заменим гексы на обычную координатную плоскость, причём игра, по сути, останется такой же. Теперь перейдём к самой теореме.

Шар с лёгкостью заменяется на обычный квадрат $[0,1] \times [0,1]$

Пусть $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ — непрерывна. Тогда

$\exists a \in [0,1]^2,\ f(a) = a$

$a \in [0,1]^2$

$a = (a_1, a_2)$

$f(x) \in \mathbb{R}^2$

$f(x) = (f(x)_1, f(x)_2)$

23.2.3 Доказательство

Пусть ρ — функция, заданная на $[0,1]^2 \times [0,1]^2$

$\rho(x,y) = \max\left(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\right)$ — непрерывна на $[0,1]^2$

$x_n \to a$

$y_n \to b$

$\rho(x_n, y_n) \to \rho(a,b)$

Очевидно, что для любых $x, y : x \neq y \Rightarrow \rho(x,y) > 0$

23.2.4 Теперь к самой теореме

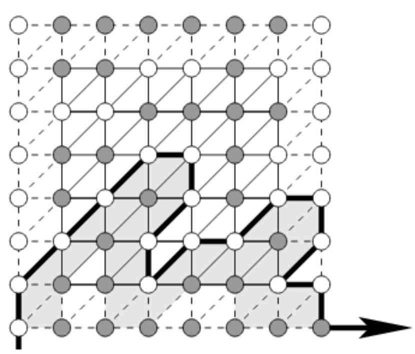
Пусть для любого $x \in [0,1]^2$ $f(x) \neq x$. Тогда $\rho(x, f(x)) > 0$, но ρ непрерывно по x и $[0,1]^2$ — компакт, значит по теореме Вейерштрасса существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$\min_{x \in [0,1]^2} \rho(x, f(x)) = \varepsilon > 0$$

По теореме Кантора для этого ε найдётся такая δ (будем считать, что $\sqrt{2}\delta < \varepsilon$), что

$$\forall x, \widehat{x} \in [0,1]^2 : \|x - \widehat{x}\| < \delta \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \|f(x) - f(\widehat{x})\| < \varepsilon$$

Берём $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$



23.2.5 Доска

Узел $(l,k) \to \left(\dfrac{l}{n}, \dfrac{k}{n}\right) \in [0,1]^2$

$0 \leq l, k \leq n$

Красим узлы

v — логический узел, $v = (v_1, v_2)$

$$c(v) = \min\left\{ i : \left\| f\left(\frac{v}{n}\right)_i - \frac{v_i}{n} \right\| \geq \varepsilon \right\}$$

По лемме об игре в гексы есть одноцветная тропинка.

Путь v^0 — начальная точка тропинки, v^N — конечная.

$v_1^0 = 0$

$f\left(\dfrac{v^0}{n}\right) \in [0,1]^2$, т.е. $f\left(\dfrac{v^0}{n}\right)_1 \geq 0$

$\varepsilon \leq f\left(\dfrac{v^0}{n}\right)_1$

Аналогично для $v_1^N = 1$

$f\left(\dfrac{v^N}{n}\right)_1 \leq 1$

$f\left(\dfrac{v^N}{n}\right)_1 - \dfrac{v_1^N}{n} \leq -\varepsilon$

$f\left(\dfrac{v^0}{n}\right)_1 - \dfrac{v_1^0}{n} \geq \varepsilon$

Поскольку для любых x верно, что $|f(x)_1 - x_1| \geq \varepsilon$, то из этого следует, что какой-то прыжок был длиной не меньше 2ε, но такое невозможно, поскольку по условию если $\|x - \widehat{x}\| < \dfrac{1}{n}$, то $\|f(x) - f(\widehat{x})\| < \varepsilon$

24 Теорема о свойствах неопределенного интеграла

Пусть f, g имеют первообразную на $\langle a, b\rangle$. Тогда:

1. $\displaystyle\int f + \int g = \int (f+g)$

   $\displaystyle\forall \alpha \in \mathbb{R} \int (\alpha f) = \alpha \int f$

2. $\forall \varphi : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$, φ дифференцируема

   $\displaystyle\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$, где F — первообразная f

3. $\displaystyle\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0 : \int f(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + C$

4. f, g — дифференцируемы на $\langle a, b\rangle$

   $f' \cdot g$ имеет первообразную на $\langle a, b\rangle$

   Тогда $f \cdot g'$ тоже имеет первообразную и

   $\displaystyle\int f'g = fg - \int fg'$

Доказательство

1. $(F+G)' = f + g$

   $(\alpha F)' = \alpha f$

2. $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t))\varphi'(t)$

3. $\displaystyle\left(\frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta)\right)' = f(\alpha x + \beta)$

4. $\displaystyle(fg)' = f'g + fg'$, т.е. $\displaystyle fg = \int f'g + \int fg'$

25 Интегрирование неравенств. Теорема о среднем

25.1 Интегрирование неравенств

25.1.1 Формулировка

$$f,\, g \in C[a,b],\; f \le g \Rightarrow \int\limits_a^b f \le \int\limits_a^b g$$

25.1.2 Доказательство

Если $0 \le f \le g$

$$\int\limits_a^b f = \sigma(\Pi\Gamma(f, [a,b])) \le \sigma(\Pi\Gamma(g, [a,b])) = \int\limits_a^b g$$

В общем случае

$\Pi\Gamma(f_+, [a,b]) \subset \Pi\Gamma(g_+, [a,b])$

$\Pi\Gamma(f_-, [a,b]) \supset \Pi\Gamma(g_-, [a,b])$

$\sigma(\Pi\Gamma(f_+, [a,b])) - \sigma(\Pi\Gamma(f_-, [a,b])) \le \sigma(\Pi\Gamma(g_+, [a,b])) - \sigma(\Pi\Gamma(g_-, [a,b]))$

$$\int\limits_a^b f \le \int_a^b g$$

25.1.3 Следствия

1. $f \in C[a,b]$

   $$\min_{[a,b]} f \cdot (b-a) \le \int\limits_a^b f \le \max_{[a,b]} f \cdot (b-a)$$

2. $f \in C[a,b]$

   $$\left|\int\limits_a^b f\right| \le \int\limits_a^b |f|$$

   т.к. $-\int\limits_a^b |f| \le \int\limits_a^b f \le \int\limits_a^b |f|$

25.2 Теорема о среднем значении

25.2.1 Формулировка

Пусть f непрерывна на $[a,b] \Rightarrow \exists c \in [a,b] : \int\limits_a^b f = f(c)(b-a)$

25.2.2 Доказательство 1 (Кохась порофлил)

Просто берём прямую и двигаем её сверху вниз, тем самым по теореме о бутерброде мы найдём такое значение c, что $\int\limits_a^b f = f(c)(b-a)$

25.2.3 Нормальное доказательство

Если $a = b$ — очевидно.

Пусть $a < b$

$\min f \le \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f \le \max f$

по теореме Больцано-Коши о промежуточном значении

$\exists c : \frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b f = f(c)$

$\int\limits_a^b f = f(c)(b-a)$

26 Теорема Барроу

26.1 Определение

$f \in C[a,b]$, $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$$

Интеграл с верхним переменным пределом

26.2 Теорема (Барроу)

В условиях определения оказывается, что φ — диффиринцируема на $[a,b]$ и $\varphi'(x) = f(x)$ для любого $x \in [a,b]$

26.3 Доказательство

Фиксируем x и при $y > x$

$$\lim_{y \to x+0} \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} = \lim_{y \to x+0} \frac{1}{y-x} \left(\int\limits_a^y f - \int\limits_a^x f \right) = \lim_{y \to x+0} \frac{1}{y-x} \int\limits_x^y f = \lim_{y \to x+0} f(c) = f(x)$$

$\exists c \in [x,y]$ — следует из теоремы о среднем значении.

Аналогично доказываем, что $\lim\limits_{y \to x-0} = \ldots = f(c)$

26.4 Замечания

- Интеграл с нижним переменным пределом

  $\psi(x) = \int\limits_x^b f$. Тогда $\psi'(x) = -f$
- Эта теорема также доказывает теорему о существовании неопределенного интеграла.

27 Формула Ньютона-Лейбница, в том числе, для кусочно-непрерывных функций

27.1 Формулировка теоремы

Пусть f кусочно-непрерывна на $[a, b]$, F — первообразная f.

Тогда $\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$

27.2 Доказательство

φ (из теоремы Барроу) — тоже первообразная, значит

$\exists c : F = \varphi + c$

$F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int\limits_a^b f - \int\limits_a^a f = \int\limits_a^b f$

$\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$

При $a > b$ $\int\limits_a^b f \overset{\text{def}}{=} -\int\limits_b^a f$

27.3 Для кусочно-непрерывных функций

Для кусков функции распишем формулу Ньютона-Лейбница, получим телескопическую сумму, останется только $F(b) - F(a)$

28 Свойства определенного интеграла: линейность, интегрирование по частям, замена переменных

28.1 Линейность определенного интеграла

28.1.1 Формулировка

$f, g \in C[a,b]$, α, $\beta \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$$

28.1.2 Доказательство

Из формулы Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Для F, $G : \alpha F + \beta G$ — первообразная $\alpha f + \beta g$

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))\Bigg|_a^b = \alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(a) - \beta G(a) = \alpha(F(b) - F(a)) + \beta(G(b) - G(a)) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$$

28.2 Интегрирование по частям

28.2.1 Формулировка

$f, g \in C[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'g$$

28.2.2 доказательство

Из свойств для неопределенного интеграла

$$\int\limits_a^b fg' = \left(\int fg'\right)\Bigg|_a^b = \left(fg - \int f'g\right)\Bigg|_a^b = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'g$$

28.3 Замена переменных

28.3.1 Формулировка

$f \in C(\langle a, b \rangle)$

$\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \to \langle a, b \rangle$

$\varphi \in C^1(\langle a, b \rangle)$

$[p, q] \in \langle \alpha, \beta \rangle$

Тогда $\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)\ dx$

28.3.2 Доказательство

Пусть F — первообразная f

$F(\varphi(t))$ — первообразная $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на $[p, q]$

Тогда обе части: $F(\varphi(q)) - F(\varphi(p))$

28.3.3 Замечание

1. Возможен случай $\varphi([p, q]) \supset [\varphi(p), \varphi(q)]$

2. В другую сторону
   $\int\limits_u^v f(x)\ dx = \int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt$
   Тогда подбираем такие p и q, что когда t ходит от p до q и $\varphi(t)$ ходит от v до u

29 Интегральное неравенство Чебышева. Неравенство для сумм

29.1 Интегральное неравенство Чебышева

29.1.1 Формулировка

$I_f = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$

$f, g \in C[a,b]$ — монотонно возрастают

Тогда $I_f \cdot I_y \leq I_{fg}$

$\int\limits_a^b f \cdot \int\limits_a^b g \leq (b-a)\int\limits_a^b fg$ — неравенство Чебышева

29.1.2 Доказательство

$\forall x, y \in [a,b]\ (f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \geq 0$

Проинтегрируем по переменной x по отрезку $[a,b]$

$f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y) \geq 0$

$I_{fg} - f(y)I_g - I_f g(y) + f(y)g(y) \geq 0$

Интегрируем по y на $[a,b]$: $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b$

$I_{fg} - I_f \cdot I_g - I_f \cdot I_g + I_{fg} \geq 0$

$I_{fg} \geq I_f \cdot I_g$

29.2 Неравенство для сумм

29.2.1 Формулировка для сумм

Пусть задана последовательность $a_n : a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ и $b_n : b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$. Тогда

$\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k \geq \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right)$

29.2.2 Доказательство

По неравенству Чебышёва

$I_{fg} \geq I_f I_g$

Пусть $I_f = \dfrac{1}{n}\int\limits_0^n f = \dfrac{1}{n}\sum a_k$

$f(x) = a_{[x+1]}$, $x \in [0, n]$ (где $[x]$ — округление к ближайшему целому вниз)

$I_g = \dfrac{1}{n}\int\limits_0^n g = \dfrac{1}{n}\sum b_k$

$g(x) = b_{[x+1]}$, $x \in [0, n]$

Отсюда следует, что

$\dfrac{1}{n}\sum a_k b_k \geq \left(\dfrac{1}{n}\sum a_k\right)\left(\dfrac{1}{n}\sum b_k\right)$

30 Иррациональность числа π

30.1 Вспомогательный интеграл

Пусть $H_n = \frac{1}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t \; dt$

$$H_n = \begin{bmatrix} f = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n & g = \sin t \\ f' = -2nt\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} & g' = -\cos t \end{bmatrix}$$

$$H_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \sin t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n!}2n\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t(\frac{\pi^2}{4} - t^2)^{n-1}\sin t \; dt$$

$$H_n = \frac{1}{n!}2n\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t(\frac{\pi^2}{4} - t^2)^{n-1}\sin t \; dt$$

$$H_n = \begin{bmatrix} f = t\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} & g = -\cos t \\ f' = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} - 2(n-1)t^2\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2} & g' = \sin t \end{bmatrix}$$

$$f' = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} + 2(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} - \frac{\pi^2}{2}(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2}$$

$$f' = (2n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} - \frac{\pi^2}{2}(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2}$$

$$\frac{2}{(n-1)!}t\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1}(-\cos t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{(n-1)!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left((2n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} - \frac{\pi^2}{2}(n-2)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2}\right)\cos t \, dt$$

Пусть $n \geq 2$, тогда

$H_n = (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2} = \ldots + H_2 + \ldots + H_0$

$H_0 = 2$

$$H_1 = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{f}\frac{g'}{\sin t} = 2t(-\cos t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\ dt = 4$$

30.2 Теорема

Число π^2 — иррациональное (и тогда π тоже)

30.3 Доказательство (от противного)

Пусть $\frac{1}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t = P_n(\pi^2)$, где P_n — многочлен с целыми коэффициентами.

$\deg P \le n$

Этого не может быть

Пусть $\pi^2 = \frac{m}{k} \in \mathbb{Q}$. Тогда $k^n P_n\left(\frac{m}{k}\right)$ — целое число

Значит $k^n \cdot P_n\left(\frac{m}{k}\right) \ge 1$, т.е.

$$\frac{k^n}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t\ dt \ge 1$$

$$\frac{k^n}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t\ dt \le \frac{k^n}{n!}\left(\frac{\pi^2}{4}\right)^n \cdot \pi \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

31 Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

31.1 Формулировка

Пусть $\langle a, b\rangle \in \overline{\mathbb{R}}$, $f \in c^{n+1}(\langle a, b\rangle)$

x, $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x - t)^n f^{(n+1)}(t)\ dt$$

31.2 Доказательство (по индукции)

- $n = 0 : f(x) = f(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)\ dt$

  По формуле Ньютона-Лейбница

- Переход от n к $n + 1$

  $$f(x) + T_n + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x - t)^n f^{(n+1)}(t)\ dt = \begin{bmatrix} u'(x-t)^n & u = -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \\ v = f^{n-1} & v' = f^{(n+2)} \end{bmatrix}$$

  $$T_n + \frac{1}{n!}\left(-\frac{(x - t)^{n+1}}{(n + 1)} \cdot f^{(n+1)}(t)\Big|_{t=x_0}^{t=x} + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{(x - t)^{n+1}}{n + 1} \cdot f^{(n+2)}(t)\ dt\right)$$

  $$T_n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n + 1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x - t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\ dt$$

31.3 Послесловие

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(t - x_0)^k + R_n$$

F — первообразная f $\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\ dt = F(x) - F(x_0)$

$$F(x) - F(x_0) = \sum_{k=0}^{n}\int\limits_{x_0}^{x} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(t - x_0)^k\ dt + \int\limits_{x_0}^{x} R_n = \frac{(t - x_0)^{k+1}}{k + 1}\Big|_{t=x_0}^{t=x}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{F^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1} + \int\limits_{x=0}^{x} R_n$$

Мы имеем право формально интегрировать формулу Тейлора

32 Лемма об ускоренной сходимости

32.1 Формулировка

Пусть $f,\, g : D \to \mathbb{R}$, a — предельная точка $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$

Пусть также существует $U(a) : f(a) \neq 0$ и $g(a) \neq 0$ в $\dot{U}(a)$

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{y\to a} g(x) = 0$ (Также возможен вариант, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{y\to a} g(x) = +\infty$)

Тогда для любой последовательности $x_k \to a$, $x_k \in D$, $x_k \neq a$ найдётся такая последовательность $y_k \to a$ ($y_k \in D$, $y_k \neq a$), что

$\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{f(y_k)}{g(x_k)} = 0$ и $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{f(y_k)}{f(x_k)} = 0$

32.2 Доказательство

1. Пусть $f,\, g \to 0$, тогда можно добиться того, что $\left|\dfrac{f(y_k)}{f(x_k)}\right| < \dfrac{1}{k}$ и $\left|\dfrac{f(y_k)}{g(x_k)}\right| < \dfrac{1}{k}$

   Тогда найдётся такое K, что $\left|\dfrac{f(x_k)}{f(x_{2019})}\right| < \dfrac{1}{2019}$ для любых $k > K \Rightarrow y_{2019} = x_k$

   Продолжаем так до бесконечности

   $\left|\dfrac{f(x_i)}{f(x_k)}\right| < \dfrac{1}{k}$

   $\exists i > k\ \left|\dfrac{f(x_i)}{f(x_k)}\right| < \dfrac{1}{k} \Rightarrow y_k := x_i$

   Теперь пусть $\left|\dfrac{f(x_i)}{g(x_k)}\right| < \dfrac{1}{k}$ при $x \to +\infty$ и $\left|\dfrac{f(x_i)}{g(x_k)}\right| < \dfrac{1}{k}$ также при $i \to +\infty$

   Тогда для каждого k найдётся такое K, что для всех $i > K$ выполняется сразу оба условия, значит присвоим $y_k := x_i$, где i — какое-то число большее K.

2. Пусть $f,\, g \to +\infty$. Считаем, что $f > 0$ и $g > 0$. Пусть $f(x_k)$ и $g(x_k)$ — возрастающие последовательности (остальные случаи рассматриваются аналогично). Тогда

   $i = \min n : \begin{cases} f(x_n) \geq \sqrt{g(x_k)} \\ f(x_n) \geq \sqrt{f(x_k)} \end{cases}$

   Возьмём $y_k := x_{i-1}$

   Тогда $\dfrac{f(y_k)}{f(x_k)} < \dfrac{\sqrt{f(x_k)}}{f(x_k)} = \dfrac{1}{\sqrt{f(x_k)}} \to 0$

   $\dfrac{f(y_k)}{g(x_k)} < \dfrac{\sqrt{g(x_k)}}{g(x_k)} = \dfrac{1}{\sqrt{g(x_k)}} \to 0$

33 Правило Лопиталя (с леммой)

33.1 Формулировка

Пусть f, g — дифференцируемы на $\langle a, b\rangle$, $g' \neq 0$ на $\langle a, b\rangle$ и существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$

33.2 Пример из жизни

Пусть f, $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

Пусть f — сколько прошёл студент,

g — сколько прошёл Кохась.

Тогда f, $g \to +\infty$, но если сравним скорости f' и g', то легко узнать, на сколько больше прошёл Кохась, чем студент.

33.3 Доказательство

$g' \neq 0 \Rightarrow g'$ сохраняет знак (по теореме Дарбу), значит g — строго монотонна

1. $g \to +\infty \Rightarrow g > 0$ в окрестности точки a
2. $g \to 0$,

   $g \uparrow \Rightarrow g > 0$ в окрестности точки a

   $g \downarrow \Rightarrow g < 0$ в окрестности точки a

33.4 Собственное доказательство

Берём последовательность $y_k \to a$ из леммы.

По теореме Коши $\exists \xi_k \in [x_k, y_k]$ (не факт, что $x_k \leq y_k$)

$\dfrac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \dfrac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}$

Домножаем правую и левую часть на $\dfrac{g(x_k) - g(y_k)}{g(x_k)}$

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \frac{f(y_k)}{g(x_k)} + \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}\left(1 - \frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right)$$

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} \to \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}$$

34 Теорема Штольца

34.1 Формулировка

Пусть x_n, $y_n \to 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$

Тогда если существует $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - yn - 1} = a \in [0, +\infty]$

Также y_n — строго монотонна (если $a = 0$, то x_n — тоже строго монотонна)

Тогда $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = a$

34.2 Доказательство

1. Пусть $a > 0$, a – конечное, тогда можно считать, что $y_n \geq y_{n-1}$ из монотонности и $x_n \geq x_{n-1}$ при больших n.

   Заметим обидный факт, что $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$ и $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a : c}{b : d}$, но $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} \neq \dfrac{a+c}{b+d}$. Кохасю обидно, поэтому будем считать, что $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d}$. Если вы с этим не согласны, то окей, но заметим, что справедливо:

   $0 < \alpha < \dfrac{a}{b} < \beta$

   $0 < \alpha < \dfrac{c}{d} < \beta$

   $\alpha < \dfrac{a+c}{b+d} < \beta$

   Вернёмся к самой теореме

   $\forall \varepsilon > 0$ $(\varepsilon < a)$ $\exists N_1$ $\forall n > N \geq N_1$

   $a - \varepsilon < \dfrac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} < a + \varepsilon$

   $a - \varepsilon < \dfrac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}} < a + \varepsilon$

   $\vdots$

   $a - \varepsilon < \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$

   Складываем всё

   $a - \varepsilon < \dfrac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < a + \varepsilon$

   Устремляем n к $+\infty$

$a - \varepsilon \leq \dfrac{x_N}{y_N} < a + \varepsilon$

2. Если $a = +\infty$ — аналогично

   $\forall E > 0 \ \exists N_1, \forall n > N \geq N_1 \ \dfrac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} > E$

   $E < \dfrac{x_n - X_N}{y_n - y_N}$

   $E \leq \dfrac{x_N}{y_N}$

3. Если $a = 0$, то $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{y_n}{x_n} = +\infty$

4. Если $a < 0$ — меняем знаки

35 Пример неаналитической функции

35.1 Неалитическая функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

35.2 Утверждение

f — бесконечное дифференцируема на $\mathbb{R}$

$(\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists f^{(k)}(x))$

35.3 Доказательство

Если $x \neq 0$ — то очевидно

Пусть $x = 0$, тогда для любого k $\exists f^{(k)}(0) = 0$

Из теоремы Лагранжа:

Если $\exists \lim\limits_{x \to a+0} f'(x) = \lim\limits_{x \to a-0} f'(x) = L$, где $L \in \mathbb{R}$, то

f — дифференцируема и $f'(a) = L$

$f'(x) = \dfrac{2}{x^3} \cdot e^{\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}$, $x \neq 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x^3}}{e^{\left(\frac{1}{x^2}\right)}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{3}{x^4}}{-\frac{2}{x^3} e^{\left(\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \to 0} \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{e^{\left(\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3} e^{\left(\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \to 0} \cdot x \cdot e^{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} \to 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^k} \cdot e^{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \left(\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{\left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{2}{k}\right)}} \right)^{\frac{k}{2}} = \left(\lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{x^3}}{-\frac{4}{k} \cdot \frac{1}{x^3} \cdot e^{\left(\frac{1}{x^3}\right)}} \right)^{\frac{k}{2}} = 0$$

Итого

$f'(x) = \dfrac{2}{x^3} \cdot e^{\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}$, $x \neq 0$

$f'(0) = 0$

Аналогично

$$f'' = -\frac{6}{x^4} \cdot e^{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} - \frac{4}{x^5} \cdot e^{\left(-\frac{1}{x^2}\right)},\ x \neq 0$$

$\lim\limits_{x \to 0} f''(x) = 0 \Rightarrow f''(0) = 0$

$$x \neq 0\ f^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$\lim\limits_{x \to 0} f^{(k)}(x) = 0 \Rightarrow f^{(k)}(0) = 0$

36 Интеграл как предел интегральных сумм

36.1 Формулировка

Пусть $f \in C[a, b]$

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ что для любого дробления $\mathcal{T}$ $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ ранга меньше δ и любого оснащения $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - \int\limits_a^b f(x)\ dx \right| < \varepsilon$$

36.2 Доказательство

1. Поделим на отрезки в соответствии с дроблением. Очевидно, что $\int\limits_a^b = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}$. Тогда рассмотрим разность
   $$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)\ dx - \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\ dx$$
   $$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (f(\xi_k) - f(x)\ dx) \to 0, \text{ т.к. } x_{k-1} \to x_k, \text{ а } \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$$
2. По теореме Кантора о равномерной непрерывности

   $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta\ \ |f(x_1) - f(x_2)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ «Китайский ε»

   Берём $x_0, x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$
   $$\left| \sum_{k=1}^{n} - \int\limits_a^b \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)\ dx - \sum_{k=1}^{n} f(x)\ dx \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (f(\xi_k) - f(x))\ dx \right| \le \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f(\xi_k) - f(x)|\ dx$$
   $|\xi_k - x_k| < \delta$ для любых $[x_{k-1}, x_k]$ (по условию)
   $$\le \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\varepsilon}{b-a}\ dx = \int\limits_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\ dx = \varepsilon$$

36.3 Замечания

1. $\int\limits_a^b f(x)\ dx = \lim\limits_{\lambda(\mathcal{T}) \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$
2. $\omega(\delta) := \sup\limits_{x,t|x-t|<\delta} |f(x) - f(t)|$ — модуль непрерывной функции f

По теореме Кантора f — непрерывна $\Longrightarrow \omega(\delta) \xrightarrow[f \to 0]{} 0$

$\omega(\delta)$ монотонно убывает на отрезке

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f(\xi_k) - f(x)| \ dx \le \sum \int \omega(\delta) \ dx = \omega(\delta)(b-a)$$

Пусть f — дифференцируема на $[a, b]$ $|f'| \le M$

$|f(x) - f(t)| \le M\,|x - t|$ — следствие из теоремы Лагранжа

$|f(\xi_k) - f(x)| \le M\delta\,|\xi_k - x|$

$$\left|\sum - \int\right| \le M\delta(b-a)$$

37 Теорема об интегральных суммах для центральных прямоугольников

37.1 Формулировка

Пусть $f \in C^2[a,b]$ $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

$\delta := \max |x_k - x_{k-1}|$

Тогда

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)(x_i - x_{i-1}) - \int\limits_a^b f(x)\ dx \right| \le \frac{\delta^2}{8} \cdot \int\limits_a^b (f'')$$

37.2 Доказательство

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ dx = \int\limits_{x_{i-1}}^{\xi_i} + \int\limits_{\xi_i}^{x_i} = \begin{bmatrix} u = f & u' = f' \\ v' = 1 & v = x - x_{i-1} \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} u = f & u' = f' \\ v' = 1 & v = x - x_i \end{bmatrix}$$

$$f(x)(x - x_{i-1})\Big|_{x=x_{i-1}}^{x=\xi_i} - \int\limits_{x_{i-1}}^{\xi_i} f'(x)(x - x_{i-1})\ dx + f(x)(x - x_i)\Big|_{x=\xi_i}^{x=x_i} - \int\limits_{\xi_i}^{x_i} f'(x)(x - x_i)\ dx = f(\xi_i)(\xi_i - x_{i-1}) +$$

$$f(\xi_i)(x_i - \xi_i) - \left(f'(x)\frac{(x - x_{c-1})^2}{2}\Big|_{x=x_{i-1}}^{x=\xi_i} - \int\limits_{x_{i-1}}^{\xi_i} f''(x)\frac{(x - x_{i-1})^2}{2}\ dx + f'(x)\frac{(x - x_i)^2}{2}\Big|_{\xi_i}^{x_i} - \int\limits_{\xi_i}^{x_i} f''(x)\frac{(x - x_i)^2}{2} \right) =$$

$$f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)\ \varphi(x)\ dx$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - x_{i-1})^2}{2},\ x \in [x_{i-1}, \xi_i] \\ \dfrac{(x - x_i)^2}{2}, x \in [\xi_i, x_i] \end{cases}$$

Тогда $\varphi(x)$ определена на $[a,b]$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} - x_i}{2}\right)(x_i - x_{i-1}) - \int\limits_a^b f(x)\ dx \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f \right) \right| = \left| \sum \left(- \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)\varphi(x)\ dx \right) \right| =$$

$$\left| \int\limits_a^b f''(x)\varphi(x)\ dx \right| \le \int\limits_a^b |f''(x)|\varphi(x)\ dx \le \frac{\delta^2}{8} \int\limits_a^b |f''|$$

Поскольку $\max \varphi(x) = \dfrac{(\frac{\delta}{2})^2}{2} = \dfrac{\delta^2}{8}$

38 Теорема о формуле трапеций, формула Эйлера–Маклорена

38.1 Формулировка теоремы о формуле трапеций

Пусть $f \in C^2[a,b]$ $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \quad \delta = \max(x_i - x_{i-1})$

Тогда $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1}) - \int\limits_a^b f(x)\ dx\right| \leq \dfrac{\delta^2}{8} \int\limits_a^b |f''|$

38.2 Доказательство

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) = \begin{bmatrix} u = f & u' = f' \\ v'1 = 1 & v = x - \xi_i \end{bmatrix}$$

$$f(x)(x-\xi_i)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)(x-\xi_i) - f(x_{i-1})(x_{i-1}-\xi_i) - \left(f'(x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f'' \frac{(x-\xi_i)^2}{2}\ dx\right) = (f(x_i) + f(x_{i-1}))\,\frac{x_i - x_{i-1}}{2} -$$
$$\left(f'(x) - \frac{1}{2}\psi(x)\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f''(-\frac{1}{2}\psi(x))\ dx\right)$$

$$\begin{bmatrix} u = f' & u' = f'' \\ v' = (x - \xi_i) & \psi(x) = (x - x_{i-1})(x_i - x) \end{bmatrix}\ x \in [x_{i-1}, x_i] \text{ на } [a,b]$$

$$v = -\frac{1}{2}\psi(x)$$

$$(f(x_i) + f(x_{i-1}) \cdot \frac{(x_i - x_{i-1})}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f''\psi(x)\ dx$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot (x_i - x_{i-1}) - \int\limits_a^b f(x)\ dx\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1}) - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ dx\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)\psi(x)\right.$$
$$\frac{1}{2}\int\limits_a^b |f''(x)|\,\psi(x)\ dx \leq \frac{\delta^2}{8}\int\limits_a^b |f''|$$

38.3 Простейший случай формулы Эйлера-Маклорена

$m, n \in \mathbb{Z}$ $f \in C^2[m,n]$. Тогда

$$\int\limits_m^n f(x)\ dx = (\sum_{i=m}^{n})^{\triangledown} f(i) - \frac{1}{2}\int_m^n f''(x)\,\{x\}\,(1 - \{x\})\ dx$$

Очевидно^{TM}, что это формула трапеции.

$[a, b] \leftrightarrow [m, n]$ $x_0 = m, x_1 = m + 1, \ldots, x_{last} = n$

$\{x\}\,(1 - \{x\})$ — парабола между двумя целыми точками

39 Асимптотика степенных сумм

$$1^p + 2^p + \ldots + n^p = \int\limits_a^n x^p dx + \frac{n^p + 1}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_1^n (x^p)'' \{x\} (1 - \{x\}) dx$$

$$1^p + 2^p + \ldots + n^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \frac{1}{2} + \frac{p(p-1)}{2}\int\limits_1^n x^{p-2} \{x\} (1 - \{x\})$$

$$1^p + 2^p + \ldots + n^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(\max(1, n^{p-1}))$$

40 Асимптотика частичных сумм гармонического ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \int\limits_1^n \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \int\limits_1^n \frac{1}{x^3} \{x\} (1 - \{x\}) dx$$

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \int\limits_1^n \frac{\{x\} (1 - \{x\})}{x^3} dx$$

Интеграл постоянной возрастает и ограничен сверху $\frac{1}{4} \int\limits_1^n \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{8} \Big|_{x=1}^{x=n} < \frac{1}{8}$

Всё, что правее логарифма — постоянная Эйлера или γ

Итого

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$$

41 Формула Валлиса

41.1 Формулировка

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}$$

41.2 Доказательство

$$I_n=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\begin{bmatrix}u=sin^{n-1}x & u'=(n-1)\sin^{n-2}xcosx\\ v'=\sin xdx & v=-\cos x\end{bmatrix}$$

$$-\cos x\sin^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 xdx=(n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{n-2}x-sin^n x)dx=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$$

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

$$I_0=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{2}$$

$$I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-4}I_{n-4}=\dots$$

Посчитаем отдельно для случая чётного и нечётного n

$$I_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}\cdot 2n-22n-1\cdot\ldots\cdot 1=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}\cdot 2n-32n-2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Так как при $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\quad \sin^{2k+1}x\le\sin^{2k}$

То и $I_{n+1}\le I_n$

Также, $I_{2n+1}\le I_{2n}\le I_{2n-1}$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\le\frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\le\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

Разность правой и левой части стремится к 0, значит

$$\exists \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{2k} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

42 Формула Стирлинга

42.1 Формулировка

$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$

42.2 Доказательство

$$\sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} = \lim_{k\to+\infty}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2k)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\sqrt{\pi} = \lim\frac{(2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k))^2}{(2k)!}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}} = \lim\frac{2^{2k}(k!)^n}{(2k)!}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\sqrt{\pi} = \lim_{k\to\infty}\frac{2^{2k}(k^k\cdot e^{-k}\sqrt{k}\cdot c)^2}{\sqrt{k}(2k)^{2k}e^{-2k}\sqrt{2k}\cdot c} = \lim_{k\to\infty}\frac{2^{2k}\cdot k^{2k}\cdot e^{-2k}\cdot k\cdot c^2}{\sqrt{2}\cdot k\cdot 2^{2k}\cdot k^{2k}\cdot e^{-2k}\cdot c} = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

$c = \sqrt{2\pi}$

43 Теорема о вычислении аддитивной функции промежутка по плотности

43.1 Формулировка

Пусть заданы f и ϕ, f — непрерывна, ϕ — аддитивная функция промежутка, f — плотность ϕ

Тогда $\forall [p,q] \subset \langle a,b\rangle$ $\phi([p,q]) = \int\limits_p^q f(x)\ dx$

43.2 Доказательство

Можно принять за факт, что у нас дан промежуток $[a,b]$ (если это не так, то уменьшим его чуть-чуть и переобозначим)

$F(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ \phi([a,x]), & x > a \end{cases}$ — первообразная f

$\inf\limits_{[x,x+h]} f \leq \dfrac{\phi([x,x+h])}{h} \leq \sup\limits_{[x,x+h]} f$

$x : F'_+(x) = \lim\limits_{h\to 0+0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim \dfrac{\phi([a,x+h])-\phi([a,x])}{h} = \lim \dfrac{\phi([x,x+h])}{h} = \lim\limits_{h\to 0+0} f(x+\Theta h) = f(x)$, где

$0 \leq \Theta \leq 1$

$\Theta = \Theta(h)$

Аналогично посчитаем и $F'_-(x)$

$\phi([p,q]) = F(q) - F(p) = \int\limits_p^q f(x)\ dx$

44 Обобщенная теорема о плотности

44.1 Формулировка

Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $\phi : \text{Segm } \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — аддитивная функция.

Пусть $\forall \Delta \subset \text{Segm } \langle a, b\rangle$ заданы числа m_Δ, M_Δ.

1. $m_\Delta \cdot l(\Delta) \le \phi(\Delta) \le M_\Delta \cdot l(\Delta)$
2. $\forall x \in \Delta \ m_\Delta \le f(x) \le M_\Delta$
3. $\forall x \in \langle a, b\rangle \ M_\Delta - m_\Delta \to 0$, если $l(\Delta) \to 0$, $x \in \Delta$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \Delta \in \text{Segm} \quad \langle a, b\rangle : x \in \Delta, \quad l(\Delta) < \delta$

$|M_\Delta - m_\Delta| < \varepsilon$

Тогда f — плотность ϕ (и $\forall [p, q] \ \phi([p, q]) = \int\limits_p^q f(x)\, dx$)

44.2 Доказательство

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \phi([a, x]), & x > a \end{cases}$$

Дифференцируем F_+

$$m_\Delta \le \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \le M_\Delta$$

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{n} - f(x) \right| \le |M_\Delta - m_\Delta| \xrightarrow[h \to 0]{} 0,\ \Delta = [x, x+h]$$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} f(x)$$

Аналогично и с F_-

45 Площадь криволинейного сектора: в полярных координатах и для параметрической кривой

45.1 Введение

Площадь подграфика $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — непрерывная, $f \geq 0$

$\phi([p, q]) = \sigma\Pi\Gamma(f, [p, q])$ — аддитивная функция. Мы знаем, что $\phi([p, q]) = \int\limits_p^q f(x)\ dx$, f — плотность

45.2 Пример

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$\sigma(\text{эллипса}) = 2\sigma(\Pi\Gamma(b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}, [-a, a])) = 2 \cdot \int\limits_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} dx$

Путь $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, $x = a\cos t$

$[0, 2\pi] \longmapsto (a\cos t, b\sin t)$

$$2\int\limits_{\pi}^{0} b\sqrt{1 - \cos^2 t}/a(-\sin t)\ dt = 2ab\int\limits_{\pi}^{0} -\sin^2 t\ dt = 2ab\int\limits_{0}^{\pi} \sin^2 t\ dt = 2ab\int\limits_{0}^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2}\ dt = \pi ab$$

45.3 Теорема

$[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi)$

$\rho : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ — непрерывная, $\rho \geq 0$

$A = \{(r, \phi) : \phi \in [\alpha, \beta]\ 0 \leq r \leq \rho(\phi)\}$ — «Аналог ПГ»

Тогда $\sigma(A) = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\phi)\ d\phi$

45.4 Доказательство

$[\alpha, \beta] \longmapsto \sigma(A)$ — функция промежутка $Segm[\alpha, \beta]$ — аддитивная функция.

Проверим, что $\dfrac{1}{2}\rho^2(\phi)$ — плотность

$[\gamma, \delta]$ — строим $A_{\gamma,\delta}$

$\sigma(A_{\gamma,\delta}) \le \sigma($Круговой сектор $(0, \max\limits_{[\gamma,\delta]} \rho(\phi), [\gamma, \delta]))$

$\sigma(A_{\gamma,\delta}) \ge \sigma($Круговой сектор $(0, \min\limits_{[\gamma,\delta]} \rho(\phi), [\gamma, \delta]))$

$\min\limits_{[\gamma,\delta]} \dfrac{1}{2}\rho(\phi) l([\gamma, \delta]) \le \sigma(A_{\gamma,\delta}) \le \max\limits_{[\gamma,\delta]} \dfrac{1}{2}\rho(\phi) l([\gamma, \delta])$

По определению плотности

45.5 Замечание

$(x(t), y(t))\ t \in [a, b]$

$x = r\cos\phi$

$y = r\sin\phi$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\phi = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$

$\begin{cases} r(t) = x(t)^2 + y(t)^2 \\ \phi = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} \end{cases}$ — параметрическое задание того же пути в полярных координатах

$\sigma A = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\phi_0}^{\phi_1} r^2(\phi)\, d\phi = \dfrac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} (x(t)^2 + y(t)^2)(\operatorname{arctg} \dfrac{y(t)}{x(t)})\, dx = \dfrac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} (x^2+y^2)\dfrac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} - \dfrac{y'x - x'y}{x^2}\, dt = \dfrac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} (y'(t)x(t) - x'(t)y(t))$

$\phi = \operatorname{arctg} \dfrac{y(t)}{x(t)}$

Площадь круга

$x = \cos t$

$y = \sin t$

$S = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t - (-\sin t)\sin t\, dt = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} 1 = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

$x = \cos t$

$y = -\sin t$

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} -\cos^2 t - \sin^2 t \ dt = -\pi$$

Она ловит ориентированную площадь

$$x = x(t) = a\cos t$$

$$y = y(t) = b\sin t$$

$$\sigma = \int\limits_a^b y(x)\ dx = \int\limits_a^b y\ dx$$

$$\sigma(\text{эллипса}) = \int\limits_{-a}^{a} y(x)\ dx = \int\limits_{-a}^{a} y\ dx = \int\limits_{\pi}^{0} y(t)x'(t)dy$$

$$x = x(t)$$

46 Изопериметрическое неравенство

46.1 Формулировка

Пусть G — замкнутая выпуклая фигура в $\mathbb{R}^2$

$diamG < 1$ ($diamG = \sum\limits_{x,y \in G} \rho(x,y)$)

Тогда $\sigma(G) \leq \dfrac{\pi}{4}$

46.2 Доказательство

$f(x) = \sum \{t : [(x,0),(x,t)] \cap G = \varnothing\}$

$g(x)$ — аналогично

$f(x)$ — выпуклая

$\phi \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$r(-\dfrac{\pi}{2}) = r(\dfrac{\pi}{2}) = 0$

$r(\phi)$ — непрерывная функция от ϕ

$$\sigma(G) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\phi)\ d\phi = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\phi - \frac{\pi}{2}) + r^2(\phi)\ d\phi = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} AB^2\ d\phi \leq \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1\ d\phi = \frac{\pi}{4}$$

47 Вычисление длины гладкого пути

47.1 Формулировка

Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, $\gamma \in C^1$.

Тогда $l(\gamma) = \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\| dt$

47.2 Доказательство

Будем дополнительно считать, что $\gamma' \neq 0$

γ — инъективно. Если это не так, то разобьём на несколько частей, и каждую из них посчитаем отдельно.

$\phi : Segm[a,b] \to \mathbb{R}$

$[p,q] \to l\left(\gamma|_{[p,q]}\right)$

Пусть ϕ — аддитивная функция промежутка по аксиоме 2. Проверим, что $\|\gamma'(t)\|$ — её плотность

Это значит, что $\forall \Delta : \exists m_\Delta, M_\Delta$ и выполняются следующие свойства:

1. $l(\Delta) m_\Delta \leq \phi(\Delta) \leq M_\Delta l(\Delta)$
2. $m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$, $x \in \Delta$
3. $\Delta \to x$ $M_\Delta - m_\Delta \to 0$

$\Delta \supset [a,b]$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_m(t))$

$m_i(\Delta) = \min\limits_{t\in\Delta} |\gamma_i'(t)|$

$M_i(\Delta) = \max\limits_{\Delta} |\gamma_i'(t)|$

$m_\Delta = \sqrt{\sum m_i(\Delta)^2}$

$M_\Delta = \sqrt{\sum M_i \Delta^2}$

Очевидно, что при любом $t \in \Delta$ $m_\Delta \leq \|\gamma'(t)\| \leq M_\Delta$, где $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sum (\gamma_i'(t))^2}$

При $\Delta \to x$ $M_\Delta - m_\Delta \to 0$ по непрерывности $\gamma_i'(t)$ в точке $t = x$.

Проверим, что $m_\Delta l(\Delta) \le \phi(\Delta) \le M_\Delta l(\Delta)$

$\widetilde{\gamma} : \Delta \to \mathbb{R}^m$ $\widetilde{\gamma}(t) = (M_1(\Delta)t, M_2(\Delta)t, \ldots, M_m(\Delta)t) = M \cdot t$, где $M = (M_1(\Delta), M_2(\Delta), \ldots, M_m(\Delta))$

Отображение $T : C_\gamma \to C_{\overline{\gamma}}$ $\gamma(t) \mapsto \overline{\gamma}(t)$ — проверим, что расстяжение

$\rho(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\gamma_i(t_0) - \gamma_i(t_1))^2} = \sqrt{\sum (\gamma_i'(\mathcal{T}_i))^2 (t_0 - t_1)^2} \le \sqrt{\sum M_i \Delta^2 |t_0 - t_1|} = \rho(T(\gamma(t_0)), T(\gamma(t_1)))$, значит T — растяжение

$l\left(\gamma|_\Delta\right) \le l(\widetilde{\gamma})$, т.е. $\phi(\Delta) \le M_\Delta l(\Delta)$.

Аналогично $\phi(\Delta) \ge m_\Delta l(\Delta)$ — сжатие.

Значит $\|\gamma'\|$ — плотность

48 Объем фигур вращения

48.1 Формулировка

Обозначим фигуры, полученную вращением по оси x за $T_x(A) = \left\{(x, y, z) : (x, \sqrt{y^2 + z^2}) \in A\right\}$

По оси y — $T_y(A) = \left\{(x, y, z) : (\sqrt{x^2 + z^2}, y^2) \in A\right\}$

Пусть $f \in C[a, b]$, $f \geq 0$

Тогда:

1. $V(T_x(\Pi\Gamma(f, [a, b]))) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\ dx$

2. $[a, b] \supset [0, +\infty)$ $V(T_y(\Pi\Gamma(f, [a, b]))) = 2\pi \int\limits_a^b xf(x)\ dx$

48.2 Доказательство

$\phi : \Delta \in Segm([a, b]) \mapsto V(T_{x\ or\ y}(\Pi\Gamma(f, \Delta)))$ — аддитивная функция.

$\pi \min\limits_{x \in \Delta} f(x) \cdot l(\Delta) = V(F_\Delta) \leq \phi(\Delta) \leq V(\varepsilon_\Delta) = \pi \max\limits_{x \in \Delta} f(x) \cdot l(\Delta)$

ε_Δ — цилиндр прямой круговой

$\varepsilon_\Delta = T_x(\Pi\Gamma(\max\limits_\Delta f, \Delta)) = \Delta B(0, \max\limits_\Delta f) \in \mathbb{R}^3$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$

$\phi(\Delta)$ — плотность, $\pi \int\limits_a^b f^2(x) dx$

$\Delta : m_\Delta, M_\Delta$

1. $m_\Delta l(\Delta) \leq \phi(\Delta) \leq M_\Delta l(\Delta)$

2. $m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$, $x \in \Delta$

3. $\Delta \to x$ $M_\Delta - m_\Delta \to 0$

$V(T_y(\Pi\Gamma(f, [a, b]))) = 2\pi \int\limits_a^b x \cdot f(x) dx$

$F_\Delta = T_y(\Pi\Gamma(\min_\Delta f, \Delta))$

$\phi(\Delta) \le V(\varepsilon_\Delta) = \sigma(ring) \cdot \max_\Delta f = \pi(q^2 - p^2) \cdot \max_{[p,q]} f = \pi(p+q) \max f(p-q) \le \pi \cdot \max_{x\in[p,q]} (2x) \cdot \min_{x\in[p,q]} f(x) \cdot (q-p)$

Аналогично

$\pi \min_{x\in[p,q]} \cdot \min_{x\in[p,q]} f(x)(q-p)$

1. $m_\Delta l(\Delta) \le \phi(\Delta) \le M_\Delta l(\Delta)$

   $\phi(\Delta) = \pi \cdot 2x \cdot f(x) \le \pi \max(2x) \cdot max f(x)$

2. $m_\Delta \le f(x) \le M_\Delta$

3. $p \to x_0,\ q \to x_0\ \pi \cdot 2x_0 \cdot f(x_0)$

49 Неравенство Йенсена для сумм

49.1 Формулировка

Пусть f — выпукла на $\langle a, b\rangle$. Тогда

$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \langle a, b\rangle$

$\forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geq 0, \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$

$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n)$

49.2 Доказательство

Если все x совпадают, то тривиально.

Пусть $x^* = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$

$x_{\min} \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \leq x^* \leq x_{\max} \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$

$a \leq x_{\min} \leq x^* \leq x_{\max} \leq b$

К любой выпуклой функции можно провести опорную прямую $y = l(x) : f(x) \geq l(x)$, при $x = x_0$ $f(x_0) = l(x_0)$

Проведём к x^* опорную прямую $l(x) = kx + b$

$f(x^*) = l(x^*) = k \sum \alpha_i x_i + b = \sum\limits_{i=1}^{n} k\alpha_i x_i + \sum\limits_{i=1}^{n} b\alpha_i = \sum \alpha_i(kx_i + b) = \sum \alpha_i l(x_i) \leq \sum \alpha_i f(x_i)$

50 Неравенство Йенсена для интегралов

50.1 Формулировка

Пусть f — выпукла и непрерывна на $\langle A, B \rangle$

$\varphi : [a, b] \to \langle A, B \rangle$ — непрерывна

$\lambda : [a, b] \to [0, +\infty]$, $\int\limits_a^b \lambda = 1$ — непрерывна

Тогда $f\left(\int\limits_a^b \lambda(x)\varphi(x)dx\right) \leq \int\limits_a^b \lambda(x)f(\varphi(x))dx$

50.2 Доказательство

$m := \inf \varphi(x)$

$M := \sup \varphi(x)$

$c := \int\limits_a^b \lambda(x)\varphi(x)dx \leq \int\limits_a^b \lambda(x)dx \cdot M = M \leq b$

$c \geq m = a$ — аналогично, значит $c \in \langle a, b \rangle$

Если $m = M$ — тривиально

Пусть $y = kx + b$ — опорная прямая к графику f в точке c

$f(C) = kC + b = k\int\limits_a^b \lambda\varphi + b\int\limits_a^b \lambda = \int\limits_a^b \lambda(k\varphi + b) \leq \int\limits_a^b \lambda(f \circ \varphi)$

$f\left(\int\limits_a^b \lambda\varphi\right) \leq \int\limits_a^b \lambda(f \circ \varphi)$

51 Неравенство Коши (для сумм и для интегралов)

51.1 Неравенство для сумм

51.1.1 Формулировка

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$

Тогда $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$

51.1.2 Доказательство

$\ln(\frac{1}{n}a_1 + \frac{1}{n}a_2 + \ldots + \frac{1}{n}a_n) \geq ? \frac{1}{n}\ln(a_1 a_2 \ldots a_n) = \frac{1}{n}\ln a_1 + \frac{1}{n}\ln a_2 + \ldots + \frac{1}{n}\ln a_n$

$x_1 = a_1$

$x_2 = a_2$

$\ldots$

$x_n = a_n$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \dfrac{1}{n}$

$f(\sum \alpha_i x_i) \geq \sum \alpha f(x_i)$, поскольку функция $\ln$ — вогнута

51.2 Неравенство для интегралов

51.2.1 Формулировка

$\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int\limits_a^b f$ — среднее арифметическое f на $[a, b]$

$\exp\left(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int\limits_a^b \ln f\right)$ — среднее геометрическое функции f $(f > 0)$

Тогда если $f \in C[a, b\rangle$, $f > 0$

$$\exp\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \ln f\right) \leq \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$$

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \ln f \le \ln\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f\right)$$

$\ln \longleftrightarrow f$ — вогнутая

$f \longleftrightarrow \varphi$

$\frac{1}{b-a} \longleftrightarrow \lambda$

52 Неравенство Гёльдера для сумм

52.1 Формулировка

Пусть $p > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$

$q = \dfrac{p}{p-1}$

$a_i, b_i > 0$ для всех $i = 1..n$

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i \leq (\sum a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum b_i^q)^{\frac{1}{q}}$

Если $(a_1^p, a_2^p, \dots, a_n^p) \parallel (b_1^q, b_2^q, \dots, b_n^q)$ — равенство

52.2 Доказательство

x^p — строго выпукла при $p > 1$ и $x > 0$

$(x^p)'' = p(p-1)x^{p-2} > 0$

По неравенству Йенсена $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i)^p \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^p$

$\alpha_i := \dfrac{b_i^q}{\sum b_i^q}$

$\alpha_i > 0$, $\sum \alpha_i = 1$

Выберем такие x_i, что

$\alpha_i \cdot x_i = a_i \cdot b_i$

$x_i = \dfrac{a_i b_i}{\alpha_i} = \dfrac{a_i b_i}{b_i^q} \sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q = a_i b_i^{1-q} \sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q = a_i b_i^{1-\frac{p}{p-1}} \sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q = a_i b_i^{\frac{p-1-p}{p-1}} \sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q = a_i \cdot b_i^{-\frac{1}{p-1}} \sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q$

Тогда $\alpha_i x_i = a_i b_i$

$(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i)^p = (\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i)^p$

Тогда $\alpha_i x_i^p = a_i^p (\sum\limits_{j=1}^{n} b_i^q)^{p-1}$

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^p = (\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p)(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q)^{p-1} = (\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p)(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q)^{\frac{p}{q}}$

Тогда $(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i)^p \leq (\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p)(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^q)^{\frac{p}{q}}$

Возведём в степень $\dfrac{1}{p}$ и получим исходное неравенство

53 Неравенство Гёльдера для интегралов

53.1 Формулировка

Пусть $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $p > 1$

Пусть также f, $g \in C[a, b]$ и $f, g \geq 0$ на $[a, b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b |fg| \leq (\int\limits_a^b |f|^p)^{\frac{1}{p}} (\int\limits_a^b |g|^q)^{\frac{1}{q}}$$

53.2 Доказательство

Делим $[a, b]$ на n равных частей

$x_k = a + k \cdot \dfrac{b-a}{n}$ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \dfrac{b-a}{n}$

$\xi_k := x_k$

$a_k := |f(x_k)|(\Delta x_k)^{\frac{1}{p}}$

$b_k := |g(x_k)|(\Delta x_k)^{\frac{1}{q}}$

$a_k \cdot b_k = |f(x_k)g(x_k)| \cdot \Delta x_k$

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)g(x_k)|\Delta x_k \leq (\sum |f(x_k)|^p \Delta x_k)^{\frac{1}{p}} (\sum |g(x_k)|^q \Delta x_k)^{\frac{1}{q}}$$

Из неравенства Гёльдера для сумм

$$\int\limits_a^b |f(x)g(x)|dx \leq (\int\limits_a^b |f|^p)^{\frac{1}{p}} (\int\limits_a^b |g|^q)^{\frac{1}{q}}$$

54 Неравенство Минковского

54.1 Формулировка

Пусть $p \geq 1$

Тогда $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$a_i, b_i \in \mathbb{R}$

54.2 Замечания

- Здесь нет буквы q
- Неравенство Минковского означает, что $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ является нормой

54.3 Доказательство

При $p = 1$ — очевидно

$p > 1$ — применим Гёльдера

Пусть $a_i, b_i > 0$

$\sum |a_i||a_i + b_i|^{p-1} \leq \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$

$\sum |b_i||a_i + b_i|^{p-1} \leq \left(\sum |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$

$\sum |a_i + b_i|^p \leq \sum (|a_i| + |b_i|)|a_i + b_i|^p \leq \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} (\sum |a_i + b_i|^p)^{\frac{1}{q}}$

$\left(\sum |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \ldots \leq \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

55 Свойства верхнего и нижнего пределов

55.1 Формулировка

Пусть x_n, x'_n — произвольные последовательности. Тогда

1. $\underline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, x_n$
2. $\forall n \quad x_n \le x'_n$. Тогда

   $\overline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, x'_n$

   $\underline{\lim}\, x_n \le \underline{\lim}\, x'_n$
3. $\forall \lambda > 0$

   $\overline{\lim}(\lambda x_n) = \lambda \cdot \overline{\lim}\, x_n$

   $\underline{\lim}(\lambda x_n) = \lambda \cdot \underline{\lim}\, x_n$
4. $\overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim}(x_n)$

   $\underline{\lim}(-x_n) = -\overline{\lim}(x_n)$
5. $\overline{\lim}(x_n + x'_n) \le \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, x'_n$

   $\underline{\lim}(x_n + x'_n) \ge \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, x'_n$

   Если правые части имеют смысл
6. $t_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$

   $\overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim}\, x_n + \lim t_n$

   Если правая часть имеет смысл
7. $t_n \to l > 0, l \in \mathbb{R}$

   $\overline{\lim}(x_n + t_n) = l \cdot \overline{\lim}\, x_n$

55.2 Доказательство

1. Следует из того факта, что $z_n \le x_n \le y_n$
2. $y_n \le y'_n$

3. $\sup(\lambda A) = \lambda \sum(a)$

4. $\sup(-A) = -\inf(A)$

5. $\sum(x_n + x'_n, x_{n+1} + x_{n+1};, \ldots) \leq y_n + y'_n$, т.к. это верхняя граница для всех сумм над sup

6. $l \in \mathbb{R}$, тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 : \forall k > N_0$

   $x_k + l - \varepsilon < x_k + t_k < x_k + l_k + \varepsilon$

   $y_n + l - \varepsilon \leq \sum(x_n + t_n, x_{n+1} + t_{n+1}, ldots) \leq y_n + l + \varepsilon$, при $N \to +\infty$

   $(\overline{\lim}\, x_n) + l - \varepsilon \leq \overline{\lim}(x_n + y_n) \leq (\overline{\lim}\, x_n) + l + \varepsilon$

7. Без доказательства

56 Техническое описание верхнего предела

56.1 Формулировка

1. $\overline{\lim} x_n = +\infty \iff x_n$ — не ограничена сверху
2. $\overline{\lim} x_n = -\infty \iff x_n \to -\infty$
3. $\overline{\lim} x_n = l \in \mathbb{R} \implies$:
   - $\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N \quad x_n < l + \varepsilon$
   - $\forall \varepsilon > 0$ неравенство $x_n > l - \varepsilon$ выполняется для бесконечного множества номеров n

56.2 Доказательство

1. Очевидно, что $x_n < y_n$, y_n убывает Таким образом, если $\lim y_n = +\infty \implies y_n = +\infty \iff x_n$ — не ограничена сверху
2. $y_n \to -\infty, \forall E : \exists N : \forall n > N \ x_n \leq y_n < E \Rightarrow \forall E > 0 : \exists N : \forall n > N : x_n < E, \forall n > N : y_n \leq E$
3. $x_n \leq y_n$, $y_n \to l$
   - $\Rightarrow) \ \forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n > N x_n \leq y_n < l + \varepsilon$

     Если $\exists N_0 : \forall N_0 \forall n < l - \varepsilon$, то $\forall n > N_0 y_n = \sup(\dots) \leq l - \varepsilon$ и тогда $y_n \to l$
   - $\Leftarrow) \ \forall \varepsilon : \exists N : \forall n > N y_n \leq l + \varepsilon$, y_n — супремум

     $x_k \geq l - \varepsilon \Rightarrow y_n \geq l - \varepsilon \Rightarrow y_n \to l$

57 Теорема о существовании предела в терминах верхнего и нижнего пределов

57.1 Формулировка

Пусть существует $\lim x_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда и только тогда $\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = l$

57.2 Доказательство

- $\Rightarrow)$ $\lim x_n = +\infty \Longleftrightarrow \underline{\lim}\, x_n = +\infty \Rightarrow \underline{\lim} \leq \overline{\lim}\, x_n = +\infty$

  $\lim x_n = -\infty \Longleftrightarrow \underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim} = -\infty$

  $\lim x_n \in \mathbb{R}$ — очевидно

- $\Leftarrow)$ $z_n \leq x_n \leq y_n$, то по теореме о сжатой последовательности $x_n \to l$, поскольку $z_n \to l$ и $y_n \to l$

58 Теорема о характеризации верхнего предела как частичного

58.1 Формулировка

1. Пусть l — частный предел x_n, тогда $\underline{\lim}\, x_n \leq l \leq \overline{\lim}\, x_n$

2. Существуют такие n_k, m_k, что $\lim x_{n_k} = \overline{\lim}\, x_n$ и $\lim x_{m_k} = \underline{\lim}\, x_n$

58.2 Доказательство

1. Пусть $x_{n_j} \to l$

   $z_{n_j} \leq x_{n_j} \leq y_{n_j}$, где $z_{n_j} \to \underline{\lim}\, x_n$, $x_{n_j} \to l$, $y_{n_j} \to \overline{\lim}\, x_n$

2. $\overline{\lim}\, x_k = \pm\infty$ — очевидно

   $\overline{\lim}\, x_k = l \in \mathbb{R}$ — очевидно

   Для $\varepsilon = \dfrac{1}{k}$ $\exists x_{n_k} : l - \dfrac{1}{k} \leq x_{n_k} \leq l + \dfrac{1}{k}$