Содержание

Часть I

Определения

1 Диффеоморфизм

Область в $\mathbb{R}^m$ — открытое связное множество.

$f : \underset{\text{обл.}}{O} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — *диффеоморфизм*, если:

1. f — обратима;
2. f — дифференцируема;
3. (f^{-1}) — тоже дифференцируема.

2 Формулировка теоремы о локальной обратимости в терминах систем уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_m) = y_1 \\ \ldots \\ f_m(x_1, \ldots, x_m) = y_m \end{cases} \qquad \text{все } f_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \text{ и } f_i \in C^1.$$

Пусть при $y = (b_1, \ldots, b_m)$ существует единственное решение $x = (a_1, \ldots, a_m)$, что $\det\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right) \neq 0$.

Тогда для y_0 близких к $(b_1, \ldots, b_m)$ существует решение $(x_1, \ldots, x_m)$ близкое к $(a_1, \ldots, a_m)$ и зависимое от y, причём оно гладкое.

3 Формулировка теоремы о неявном отображении в терминах систем уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \end{cases} \qquad f_i \in C^r\left(\underset{\text{откр.}}{O} \subset \mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R}\right).$$

$x = a$ и $y = b$ удовлетворяют системе уравнений, а также $\det\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}(a, b)\right) \neq 0$. Тогда

$\exists U(a)$ и $\exists V(b)$ такие, что $\exists! \varphi : U(a) \to V(b)$ класса C^r, что $\forall x \in U(a)$ верно $(x, \varphi(x))$ — решение этой системы.

4 Простое k-мерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$

1. $M \subset \mathbb{R}^m$ — *простое k-мерное многообразие* в $\mathbb{R}^m$ (непрерывное), если оно *гомеоморфно* открытому множеству из $\mathbb{R}^k$, т.е.:

   $\exists \underset{\text{откр.}}{O} \subset \mathbb{R}^{k \leqslant m}$ и $\exists \Phi : O \to M$ такое, что

   - Φ — сюръекция;
   - Φ — непрерывное;
   - Φ — обратимо и Φ^{-1} — непрерывно.

2. $M \subset \mathbb{R}^m$ — *простое k-мерное C^r-гладкое многообразие*, если:

   $\exists \underset{\text{откр.}}{O} \subset \mathbb{R}^{k \leqslant m}$, $\Phi : O \to M$:

   - Φ — гомеоморфизм;
   - $\Phi \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$ — гладкость;
   - $\forall t \in O$ верно, что $\operatorname{rang} \Phi'(t) = k$ — невырожденность.

5 Касательное пространство к k-мерному многообразию в $\mathbb{R}^m$

$M \subset \mathbb{R}^m$ — k-мерное многообразие, $p \in M$ и $\Phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — параметризация, $\Phi(t_0) = p$. Тогда

$\Phi'(t_0)\left(\mathbb{R}^k\right)$ называется *касательным пространством* к k-мерному многообразию M в точке p.

Обозначается $Tp(M) = \left\{\Phi'(t_0)h,\ h \in \mathbb{R}^k\right\}$.

6 Относительный локальный максимум, минимум, экстремум

$f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$, $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$. Тогда

$x_0 \in E$, $\Phi(x_0) = 0$ — точка *относительного локального максимума* f, если

$\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E$ и $\Phi(x) = 0$ верно $f(x) \leqslant f(x_0)$.

Аналогично определяется минимум.

7 Формулировка достаточного условия относительного экстремума

$f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$, $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$, f, $\Phi \in C^1$.

Пусть $a \in E : \operatorname{rang} \Phi'(a) = n$ и $\lambda \in \mathbb{R}^n$ и верно

$$\begin{cases} f'(a) - \lambda\Phi'(a) = 0 \\ \Phi(a) = 0 \end{cases}$$

Если $h = (h_x, h_y) \in \mathbb{R}^{m+n}$ удовлетворяет $\Phi'(a)h = 0$, то можно выразить $h_y = \psi(h_x)$.

Рассмотрим квадратичную форму $Q(h_x) = d^2G(a, (h_x, \psi(h_x)))$, где $G = f - \lambda\Phi$ (форма Лагранжа). Тогда в зависимости от квадратичной формы можно узнать информацию о самой точке a:

- Q — положительно определенная — точка локального минимума;
- Q — отрицательно определенная — точка локального максимума;
- Q — неопределенная — нет экстремума;
- в остальных случаях недостаточно информации.

8 Поточечная сходимость последовательности функций на множестве

$f_n : X \to \mathbb{R}$, если $\exists f : E \subset X \to \mathbb{R}$, что для любого $x_0 \in E$ предел $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$, то $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$ *сходится поточечно* на E.

9 Равномерная сходимость последовательности функций на множестве

f, $f_n : X \to \mathbb{R}$, $E \subset X$, тогда f_n — *равномерно сходится* на E к функции f если

$M_n := \sup\limits_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$

Обозначается как $f_n \rightrightarrows f$ на множестве E.

10 Равномерная сходимость функционального ряда

1. Функциональный ряд *сходится поточечно* на E, если для любого $x \in E$ сумма $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ — сходится к сумме $S(x)$;

2. Функциональный ряд *сходится равномерно* на E (к сумме $S(x)$), если $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на E, где $S_n(x)$ — последовательность частичных сумм.

11 Формулировка критерия Больцано–Коши для равномерной сходимости

Функциональный ряд $\sum u_n$ равномерно сходится на E эквивалентно следующему утверждению:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall m \geqslant n \geqslant N \text{ и } \forall x \in E : \left| \sum_{k=n}^{m} u_k(x) \right| < \varepsilon$$

12 Степенной ряд, радиус сходимости степенного ряда, формула Адамара

$a_n \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $B(z_0, r) \subset \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), тогда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ называют *степенным рядом.*

Назовём R *радиусом сходимости* степенного ряда, если:

- при $|z - z_0| < R$ ряд абсолютно сходится;
- при $|z - z_0| > R$ ряд расходится.

$R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$ — *формула Адамара.*

13 Кусочно-гладкий путь

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — *кусочно-гладкий путь*, если существует такое дробление $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, что для любого $i \in [1, n]$ путь $\gamma\big|_{[t_{i-1}, t_i]}$ — гладкий (в точках t_{i-1} и t_i есть односторонние производные).

14 Векторное поле

$V : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — *векторное поле*. По умолчанию считается, что V — непрерывное.

15 Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути

V — векторное поле в E, E — открытое, γ — кусочно-гладкий путь в E. Тогда *интеграл векторного поля V по кусочно-гладкому пути* γ равен

$$I(V,\gamma) := \int\limits_a^b \langle V\left(\gamma(t)\right), \gamma'(t)\rangle dt = \int\limits_a^b V_1\left(\gamma(t)\right)\gamma_1'(t) + \ldots + V_m\left(\gamma(t)\right)\gamma_m'(t) dt$$

.

16 Потенциал, потенциальное векторное поле

$V : \underset{\text{обл.}}{O} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — *потенциальное векторное поле*, а f — его *потенциал*, если

$f \in C^1(O, \mathbb{R})$ и $\operatorname{grad} f = V$ в области O.

17 Локально потенциальное векторное поле

$V : \underset{\text{обл.}}{O} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — *локально потенциальное векторное поле* в O, если для любого $x \in O$ существует окрестность $U(x)$, что V в $U(x)$ — потенциальное поле.

18 Похожие пути

V — локально потенциальное векторное поле, γ, $\overline{\gamma} : [a, b] \to O$ — непрерывны. Тогда

γ и $\overline{\gamma}$ — *похожие пути*, если у них имеется одинаковая V-гусеница, т.е. существуют такие шары B_1, B_2, …, B_n и такие дробления t_0, t_1, …, t_n и $\overline{t_0}$, $\overline{t_1}$, …, $\overline{t_n}$, что $a = t_0 = \overline{t_0}$, $b = t_n = \overline{t_n}$, что для любого $k \in [1, n]$ $\gamma\big|_{[t_{k-1}, t_k]} \subset B_k$ и $\overline{\gamma}\big|_{[\overline{t_{k-1}}, \overline{t_k}]} \subset B_k$.

19 Интеграл локально-потенциального векторного поля по произвольному пути

$I(V, \gamma) = I(V, \overline{\gamma})$, где $\overline{\gamma}$ — похожий на γ кусочно-гладкий путь. В условиях соответствующей леммы такой всегда существует.

20 Гомотопия путей связанная и петельная

γ_0, $\gamma_1 : [a,b] \to O$, тогда *гомотопия* — это отображение $\Gamma : [a,b] \times [0,1] \to O$ — непрерывное, такое что $\Gamma(\cdot, 0) = \gamma_0(\cdot)$ и $\Gamma(\cdot, 1) = \gamma_1(\cdot)$.

Гомотопия связанная: $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$, $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ и $\forall u \in [0,1]$ $\Gamma(a,u) = \gamma_0(a)$ и $\Gamma(b,u) = \gamma_0(b)$.

Гомотопия петельная: $\gamma_0(a) = \gamma_0(b)$, $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$ и $\forall u \in [0,1]$ $\Gamma(a,u) = \Gamma(b,u)$.

21 Односвязная область

$O \subset \mathbb{R}^m$ — *односвязная область*, если O — область и любой замкнутый путь гомотопен постоянному.

22 Полукольцо, алгебра, сигма-алгебра

X — множество, $\mathcal{P} \subset 2^X$ — *полукольцо* если:

1. $\varnothing \in \mathcal{P}$;
2. $\forall A,\, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$;
3. $\forall A_1,\, A_2 \in \mathcal{P}$ существует конечное число $B_1,\, B_2,\, \ldots,\, B_k \in \mathcal{P}$, что $A_1 \setminus A_2 = \bigsqcup\limits_{i=1}^{k} B_i$.

$\mathcal{A}$ — *алгебра* подмножеств X, если:

1. $A,\, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$;
2. $X \in \mathcal{A}$.

σ-алгебра $\mathcal{A}$, если это *алгебра* и ещё выполнено третье свойство:

$\forall A_1,\, A_2,\, A_3,\, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Можно вместо объединения потребовать пересечение, поскольку из одного следует другое.

23 Объем

$\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — *аддитивная*, если:

1. μ не принимает одновременно бесконечности разных знаков;
2. $\mu(\varnothing) = 0$;
3. $\forall A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{P}$ — дизъюнкты, если $A = \bigsqcup A_n \in \mathcal{P}$, тогда $\mu A = \mu A_1 + \mu A_2 + \ldots + \mu A_n$.

μ — *объём*, если:

1. $\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$;
2. $\mu \geqslant 0$;
3. μ — аддитивная.

24 Ячейка

$a, b \in \mathbb{R}^m$, $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i : a_i \leqslant x_i < b_i\}$ — *ячейка.*

25 Классический объем в $\mathbb{R}^m$

$$\mu[a, b) = \prod_{i=1}^{m}(b_i - a_i).$$

26 Мера, пространство с мерой

$\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера, если μ — *объём*, а также выполнено свойство *счётной аддитивности*, т.е.:

$\forall A$, A_1, A_2, $\ldots$, где A_i — дизъюнкты и $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i \Rightarrow \mu A = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mu A_i$.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, если $\mathcal{A}$ — σ-алгебра на множестве X, а μ — мера на $\mathcal{A}$.

27 Полная мера

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, μ — полная мера, если $\forall E \in \mathcal{A}$ и $\mu E = 0$ верно, что $\forall e \in E : e \in \mathcal{A}$ и $\mu e = 0$.

28 Сигма-конечная мера

$(X, \mathcal{P}, \mu)$, μ — σ-конечная, если можно представить $X = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} B_k$, где $\mu B_k < +\infty$.

29 Дискретная мера

X — множество, A_1, A_2, $\ldots$ — точки множества X, h_1, h_2, $\ldots \geqslant 0$ — их веса, $\mathcal{P} = 2^X$, и для любого $B \subset \mathcal{P}$ $\mu B = \sum\limits_{i:A_i \in B} h_i$.

30 Формулировка теоремы о лебеговском продолжении меры

$(X, \mathcal{P}, \mu_0)$, μ_0 — σ-конечный объём. Тогда

существует σ-алгебра $\mathcal{A}$ и мера $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ и выполняются следующие свойства:

1. $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ и $\mu\big|_{\mathcal{P}} = \mu_0$;
2. μ — полная мера;
3. Если $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}'$ и $\mu'\big|_{\mathcal{A}} = \mu_0$, μ' — полная, то $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ и $\mu'\big|_{\mathcal{A}} = \mu$;
4. $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$ — полукольцо и $\mathcal{P}' \subset \mathcal{A}$, μ' — мера на $\mathcal{P}' \Rightarrow \mu' = \mu\big|_{\mathcal{P}'}$;
5. $\forall A \in \mathcal{A}\ \mu A = \inf\left(\sum \mu_0\left(P_k\right) : A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} P_k, P_k \in \mathcal{P}\right)$.

31 Мера Лебега, измеримое по Лебегу множество

Мера Лебега в $\mathbb{R}^m$ — результат лебеговского продолжения классическое объёма. Обозначается λ или λ^m.

$\mathcal{M}^m$ — σ-алгебра, на которой задана мера Лебега. Все множества из этой σ-алгебры *измеримы по Лебегу*.

32 Борелевская сигма-алгебра

$\mathcal{B}$ — *борелевская σ-алгебра* — минимальная σ-алгебра (в $\mathbb{R}^m$), содержащая все открытые множества.

33 Ступенчатая функция

$f : X \to \mathbb{R}$ — *ступенчатая* $(X, \mathcal{A}, \mu)$, если существует конечное разбиение $X = \bigsqcup e_i$, e_i — измеримы и $f\big|_{e_i} = \text{const}$.

34 Разбиение, допустимое для ступенчатой функции

Разбиение $X = e_1 \sqcup e_2 \sqcup \ldots \sqcup e_n$ — *допустимо для ступенчатой функции* f, если $f\big|_{e_i} = \text{const}$ для каждого $i \in [1, n]$.

35 Измеримая функция

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $E \in \mathcal{A}$. Тогда

f — *измерима* на множестве E, если $\forall a \in \mathbb{R} : E\,(f < a)$ — измерима.

36 Свойство, выполняющееся почти везде

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $E \in \mathcal{A}$, $w(x)$ — высказывание, зависящее от точки пространства. Говорят, что

$w(x)$ *верно при почти всех* x (или *почти везде*), если $\mu\,\{x : w(x) - \text{ложно}\} = 0$.

37 Сходимость почти везде

$f, f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримы, тогда

$f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$ *почти везде*, если существует такое e, что $\mu e = 0$ и $\forall x \in E \setminus e : f_n(x) \to f(x)$.

38 Сходимость по мере

$f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримы, почти везде конечны, тогда

f_n *сходится по мере* к f если $\forall \varepsilon > 0 : \mu X \left(|f_n - f| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

39 Теорема Егорова о сходимости почти везде и почти равномерной сходимости

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\mu X < +\infty$, $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримы, почти везде конечны, $f_n \to f$ — почти везде. Тогда

$\forall \varepsilon > 0 : \exists e : \mu e < \varepsilon : f_n \rightrightarrows f$ на $X \setminus e$.

Часть II

Теоремы

40 Лемма о "почти локальной инъективности"

$F : \underset{\text{обл.}}{O} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — дифференцируема в точке $x_0 \in O$, $\det F'(x_0) \neq 0$.

Тогда $\exists c, \delta > 0 : \forall h : |h| < \delta : |F(x_0 + h) - F(x_0)| \geqslant c \cdot |h|$

40.1 Доказательство

$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F'(x_0)h + \alpha(h)\,|h|| \geqslant |F'(x_0)h| - |\alpha(h)|\,|h| \geqslant (\widetilde{c} - |\alpha(h)|)\,|h| \geqslant \dfrac{\widetilde{c}}{2}\,|h|$, пусть при $|h| < \delta$ будет верно, что $|\alpha(h)| < \dfrac{\widetilde{c}}{2}$.

Возьмём в качестве $\widetilde{c} = \dfrac{1}{\|(F'(x_0))^{-1}\|}$.

41 Теорема о сохранении области

$F : \underset{\text{откр.}}{O} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\forall x \in O : \det F'(x) \neq 0$. Тогда $F(O)$ — открыто.

41.1 Доказательство

Пусть $x_0 \in O$ и $y_0 = F(x_0) \in F(O)$, необходимо проверить, что y_0 — внутренняя точка $F(O)$.

По лемме о "почти локальной инъективности" существуют такие c и δ, что для любого $h \in \overline{B(0,\delta)}$ верно $|F(x_0+h) - F(x_0)| \geqslant c|h|$ (и в частности $F(x_0+h) \neq F(x_0)$ при $|h| = \delta$).

$r := \dfrac{1}{2}\mathrm{dist}\,(y_0, F(S(x_0,\delta))) > 0$

Проверим, что $B(y_0,r) \subset F(O)$. Пусть $y \in B(y_0,r)$ и $g(x) := |F(x) - y|$ — функция на $\overline{B(x_0,\delta)}$.

1. На $S(x_0,\delta)$ верно, что $|F(x) - y| \geqslant r$
2. При $x = x_0$ выполняется, что $|F(x_0) - y| = |y_0 - y| < r$, по теореме Вейерштрасса g достигает минимума внутри шара $B(x_0,\delta)$.

Пусть $l : x \mapsto |F(x) - y|^2$ — достигает минимума таким же образом.

Найдём минимум с помощью необходимого условия экстремума, т.е. производная должна быть равна 0.

$$\begin{cases} l'_{x_1} = 0 \quad 2(f_1(x_1,\dots,x_m) - y_1)\cdot\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \ldots + 2(f_m(x_1,\dots,x_m) - y_m)\cdot\dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} = 0 \\ \ldots \\ l'_{x_m} = 0 \quad 2(f_1(x_1,\dots,x_m) - y_1)\cdot\dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} + \ldots + 2(f_m(x_1,\dots,x_m) - y_m)\cdot\dfrac{\partial f_m}{\partial x_m} = 0 \end{cases}$$

Поскольку матрица $F'(x)$ невырожденная по условию, то получаем, что $f_i(x) - y_i = 0$ для всех i и $g(x) = 0$, т.е. для любого $y \in B(y_0,r)$ существует такой $x \in O$, что $F(x) = y$.

42 Следствие о сохранении области для отображений в пространство меньшей размерности

$F : \underset{\text{откр.}}{O} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, где $l < m$ и $F \in C^1(O)$, $\operatorname{rang} F'(x) = l$ при всех $x \in O$. Тогда

$F(O)$ — открыто.

42.1 Доказательство

В точке x_0 и в её окрестности ранг реализован на первых l столбцах.

Пусть $\widetilde{F} = \begin{pmatrix} F \\ x_{l+1} \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} : O \to \mathbb{R}^m$ или $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (F(x_1, \dots, x_m), x_{l+1}, \dots, x_m)$

$\det \widetilde{F}(x_0) = \det F(x_0) \neq 0$ также $\forall x \in U(x_0)$, значит $\widetilde{F}(U(x_0))$ открыто в $\mathbb{R}^m$, значит и $F(U(x_0))$ открыто в $\mathbb{R}^l$.

43 Теорема о гладкости обратного отображения

$T \in C^r \left(\underset{\text{откр.}}{O} \subset \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \right)$ $(r = 1, 2, \ldots, +\infty)$.

T — обратимо и $\det T'(x) \neq 0$ при $x \in O$. Тогда

1. $T^{-1} \in C^r$;
2. $\left(T^{-1}\right)'(y_0) = \left(T'(x_0)\right)^{-1}$ при $y_0 = T(x_0)$.

43.1 Доказательство

Индукция по r:

- База $r = 1$:

  $S = T^{-1}$ — обратное отображение, S — непрерывно (по теореме о сохранении области).

  $T(O) = O_1$, $y_0 \in O_1$, проверим дифференцируемость S в y_0. Обозначим $A = T'(x_0)$.

  По лемме о почти локальной инъективности $\exists c, \delta : x \in B(x_0, \delta) : |T(x) - T(x_0)| \geqslant c|x - x_0|$

  По определению дифференцирования $T(x) - T(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x)|x - x_0|$

  $S(y) - S(y_0) = A^{-1}(y - y_0) + A^{-1}\alpha\left(S(y)\right)|S(y) - S(y_0)|$.

  Пусть $\beta = A^{-1}\alpha\left(S(y)\right)|S(y) - S(y_0)|$

  Пусть y близко к $y_0 : |x - x_0| = |S(y) - S(y_0)| < \delta$.

  $|\beta(y)| = |x - x_0| \cdot \left|A^{-1}\alpha\left(S(y)\right)\right| \leqslant \dfrac{1}{c}\left|T(x) - T(x_0)\right| \|A^{-1}\| |\alpha\left(S(y)\right)| = \dfrac{\|A^{-1}\|}{c}\left|\alpha\left(S(y)\right)\right| |y - y_0| = o(|y - y_0|)$ при $y \to y_0$. $\left(|T(x) - T(x_0)| \geqslant c|x - x_0| \Rightarrow |x - x_0| \leqslant \dfrac{1}{c}\left|T(x) - T(x_0)\right| \right)$.

  $y \xrightarrow{C^1} T^{-1}(y) = x \xrightarrow{C^1} T'(x) \xrightarrow{C^\infty} \left(T'(x)\right)^{-1} = S'$.

  Таким образом, S' — непрерывно и к тому же, $\left(T^{-1}\right)'(y_0) = \left(T'(x_0)\right)^{-1}$ при $y_0 = T(x_0)$.

- Индукционный переход (без доказательства):

  $r = n \Rightarrow r = n + 1$:

  $T \in C^{n+1} \Rightarrow S \in C^{n+1} \iff S' \in C^n$, но $T' \in C^n$, значит и $\left(T'\right)^{-1} \in C^n \Rightarrow S' \in C^n$.

44 Лемма о приближении отображения его линеаризацией

$T \in C^1(O, \mathbb{R}^m)$, $x_0 \in O$. Тогда

$\forall h : |T(x_0 + h) - T(x_0) - T'(x_0)h| \leqslant M \cdot |h|$, где $M = \sup\limits_{z \in [x_0, x_0 + h]} \|T'(z) - T'(x_0)\|$.

44.1 Доказательство

$|F(x) - F(x_0)| \leqslant \sup\limits_{z \in [x_0, x]} \|F'(z)\| \cdot |x - x_0|$ — по теореме Лагранжа.

$F(x) = T(x) - T'(x_0) \cdot x$,

$F'(x) = T'(x) - T'(x_0)$.

$|T(x_0 + h) - T(x_0) - T'(x_0)h| = |F(x_0 + h) - F(x_0)| \leqslant \sup\limits_{z \in [x_0, x_0 + h]} \|F'(z)\| |h|$.

45 Теорема о локальной обратимости

$T \in C^1(O, \mathbb{R}^m)$, $x_0 \in O$ и $\det T'(x_0) \neq 0$. Тогда

$\exists U(x_0) : T\big|_{U(x_0)}$ — диффеоморфизм.

45.1 Доказательство

Достаточно доказать, что $\exists U(x_0)$, что $T\big|_{U(x_0)}$ — обратимо (и для любого $x \in U(x_0)$ $\det T'(x) \neq 0$).

$T'(x_0)$ — обратимо, значит $\exists c > 0 : \forall h : |T'(x_0)h| \geqslant c|h|$, где $c = \dfrac{1}{\|T'(x_0)^{-1}\|}$.

Возьмём $U = B(x_0, r) \subset O$ так, что при $x \in U$ и было верным:

$\det T'(x) \neq 0$ и $\|T'(x) - T'(x_0)\| < \dfrac{c}{4}$.

Проверим, что $T\big|_{U(x_0)}$ — взаимно-однозначное отображение.

$x, y \in U(x_0)$ и $y = x + h$

$T(y) - T(x) = (T(x+h) - T(x) - T'(x)h) + (T'(x)h - T'(x_0)h) + T'(x_0)h$

(Здесь и ниже римскими цифрами отображается номер скобки в выражении сверху)

$|T(y) - T(x)| \geqslant |T'(x_0)h| - |\mathrm{I}| - |\mathrm{II}| \geqslant c|h| - \dfrac{c}{2}|h| - \dfrac{c}{4}|h| = \dfrac{c}{4}|h| \neq 0.$

$|\mathrm{I}| \leqslant M|h|$

$|T(x+h) - T(x) - T'(x)h| \leqslant M|h|$

$M = \sup\limits_{z \in [x_0, x_0+h]} \|T'(z) - T'(x)\| \leqslant \dfrac{c}{2}.$

46 Теорема о неявном отображении

$F : \underset{\text{откр.}}{O} \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$, $F \in C^r(O, \mathbb{R}^n)$,

$(a, b) \in O$ и $F(a, b) = 0$,

$\det F'_y(a, b) \neq 0$.

Тогда:

1. Существует открытое $P \in \mathbb{R}^m$, $a \in P$ и также существует открытое $Q \in \mathbb{R}^n$, $b \in Q$ такие, что

   $\exists! \varphi : P \to Q$ — C^r-гладкое, такое, что $\forall x \in P\ F(x, \varphi(x)) = 0$.

2. $\varphi'(x) = -\left(F'_y(x, \varphi(x))\right)^{-1} \cdot F'_x(x, \varphi(x))$.

46.1 Доказательство

1. $\Phi : O \to \mathbb{R}^{m+n}$

   $(x, y) \mapsto (x, F(x, y))$

   $\Phi' = \begin{pmatrix} \mathbb{E} & 0 \\ F'_x & F'_y \end{pmatrix}$, $\det \Phi'(a, b) \neq 0$

   $\exists \widetilde{U}(a, b) : \Phi\big|_{\widetilde{U}}$ — диффеоморфизм.

   $\widetilde{U} = P_1 \times Q$, где $a \in P_1$, $b \in Q$.

   (a) $\widetilde{V} = \Phi\left(\widetilde{U}\right)$ — открыто;

   (b) $\exists \psi = \Phi^{-1} : \widetilde{V} \to \widetilde{U}$;

   (c) Φ не меняет первую координату, значит ψ тоже не меняет,

   $\psi(u, v) = (u, H(u, v))$, $H : \widetilde{V} \to \mathbb{R}^n$, $H \in C^r$;

   (d) "ось x" и "ось u" одно и то же $\mathbb{R}^m$,

   $P := (\mathbb{R}^m \times \{\mathbf{0}_n\}) \cap \widetilde{V}$ — открыто в $\mathbb{R}^m$;

   (e) $\varphi(x) := H(x, 0) : P \to Q : F(x, \varphi(x)) = 0$ — единственно,

   $x \in P$, $y \in Q : F(x, y) = 0$, $(x, y) = \varphi\left(\Phi(x, y)\right) = \varphi(x, 0) = (x, H(x, 0))$.

2. $F(x, \varphi(x)) = 0$, $F \circ H = 0$,

$$\begin{pmatrix} F'_x & F'_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ \varphi'(x) \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow F'_x + F'_y \varphi'(x) = 0,$$

$$F'_y \varphi' = -F'_x$$

$$\varphi' = -\left(F'_y\right)^{-1} F'_x$$

47 Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений

$M \subset \mathbb{R}^m$, зафиксируем $1 \leqslant k < m$ и $1 \leqslant r \leqslant +\infty$.

Тогда $\forall p \in M$ эквивалентны следующие два утверждения:

1. $\exists U \subset \mathbb{R}^m$ — открытое, $p \in U$,

   $M \cap U$ — простое k-мерное C^r-гладкое многообразие;

2. $\exists \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ — открытое, $p \in \widetilde{U}$,

   что существуют функции $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_{m-k} : \widetilde{U} \to \mathbb{R} \in C^r$ такие, что

   $x \in M \cap \widetilde{U} \iff f_1(x) = 0,\ f_2(x) = 0,\ \ldots,\ f_{m-k}(x) = 0$ и $(\text{grad } f_1(p),\ \ldots,\ \text{grad } f_{m-k}(p))$ — ЛНЗ.

47.1 Доказательство

- $1 \Rightarrow 2$:

  Существует параметризация $\Phi \in C^r\left(O \subset \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m\right)$,

  $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — координатные функции Φ и $p = \Phi(t_0)$, $\text{rang } \Phi'(t_0) = k$.

  Можно считать, что $\left(\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t_0)\right)$ — невырождена.

  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$.

  $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ — проекция, $x \mapsto (x_1, \ldots, x_k)$.

  $L \circ \Phi$ имеет невырожденный производный оператор в точке t_0.

  $\exists w(t_0)$ — окрестность t_0, $\exists V \in \mathbb{R}^k$ — открытое и $L \circ \Phi : w \to V$ — диффеоморфизм.

  $L(w) \to V$ — взаимно-однозначеное отображение, т.е. $\Phi(w)$ — график некоторого отображения $H : V \to \mathbb{R}^{m-k}$.

  Пусть $\psi = (L \circ \Phi)^{-1} : V \to w$, $\psi \in C^r$.

  Если $\widetilde{x} \in V$, то $(\widetilde{x}, H(\widetilde{x})) = \Phi(w(\widetilde{x})) \Rightarrow H \in C^r$.

  $\Phi(w)$ — открыто в M, $\exists$ открытое $\widetilde{U} \in \mathbb{R}^m$ такое, что $\widetilde{U} \cap M = \Phi(w)$ (можно считать, что $\widetilde{U} \subset V \times \mathbb{R}^{m-k}$.

  $f_j : \widetilde{U} \to \mathbb{R}$, $f_j(x) = H_j\left(L(x)\right) - x_{k+j}$, если $x \in \widetilde{U} \cap M \Leftrightarrow$ все $f_j(x) = 0$.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial H_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial H_1}{\partial x_k} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial H_2}{\partial x_k} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots \\ \dfrac{\partial H_{m-k}}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial X_{m-k}}{x_k} & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$, где $m-k$ строчек и все они ЛНЗ.

- $2 \Rightarrow 1$:

  Из предыдущего пункта у нас есть система уравнение, для которой верно, что grad $f_i(p)$ — ЛНЗ, можно считать, что $\det \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_{k+j}}(p) \right)_{i,j=1..m-k} \neq 0$.

  По теореме о неявном отображении $\exists H : P \to Q$, где P — окрестность $(p_1, \dots, p_k)$, а Q — окрестность $(p_{k+1}, \dots, p_m)$,

  что $\forall\ (x_1, \dots, x_k) \in P$ точка $(x_1, \dots, x_k, H_1(x_1, \dots, x_k), H_2(x_1, \dots, x_k), \dots, H_{m-k}(x_1, \dots, x_k))$ удовлетворяет системе уравнений.

  $\Phi : P \to \mathbb{R}^m$,

  $u \mapsto (u, H(u))$ — параметризация нашего многообразия, $(P \times Q) \cap M$.

48 Следствие о двух параметризациях

$M \subset \mathbb{R}^m$ — k-мерное простое C^r-гладкое многообразие, $p \in M$, U — открытое в M, $p \in U$.

$\Phi_1 : O_1 \subset \mathbb{R}^k \to U \cap M$,

$\Phi_2 : O_2 \subset \mathbb{R}^k \to U \cap M$ (оба отображние "на" и даже гомеоморфизм)

$(\phi_i \in C^r(O_i, \mathbb{R}^m))$. Тогда существует диффеоморфизм $\psi : O_1 \to O_2$ и $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \psi$.

48.1 Доказательство

Допустим, что rang $\Phi_1'(p)$ и rang $\Phi_2'(p)$ на одном и том же наборе столбцов (во всех точках O_1 и O_2).

Возьмём $L \circ \Phi_1 : O_1 \to V_1$, и $L \circ \Phi_2 : O_2 \to V_2$, но можно добиться того, что и $L \circ \Phi_2 : O_2 \to V_1$, таким образом,

$L \circ \Phi_1$ и $L \circ \Phi_2$ — тоже диффеоморфизмы, тогда

$\Phi_1 = \Phi_2 \circ (L \circ \Phi_2)^{-1} \circ (L \circ \Phi_1)$.

49 Лемма о корректности определения касательного пространства

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — C^r-параметризация $U(p) \cap M$, $p \in M$, $\Phi(t_0) = p$, M — простое k-мерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$. Тогда образ оператора $\Phi'(t_0) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — это k-мерное подпространство в $\mathbb{R}^m$, не зависящее от Φ.

49.1 Доказательство

Φ — параметризация, значит $\operatorname{rang} \Phi' = k$, значит образ k-мерный. Если есть параметризацция Φ_2, можно считать, что существует диффеоморфизм ψ, что $\Phi_2 = \Phi \circ \psi$, и при этом $\Phi_2' = \Phi' \cdot \psi'$, где ψ' — невырожденный, значит образ Φ_2' совпадает с Φ'.

50 Касательное пространство в терминах векторов скорости гладких путей

$v \in Tp(M) \subset \mathbb{R}^m \iff$ существует гладкий путь $\gamma_v : [-1, 1] \to M$, $\gamma'(0) = v$ и $\gamma(0) = p$.

50.1 Доказательство

Φ — параметризация в окрестности P, $\Phi(t_0) = p$.

- $\Leftarrow$

  $\phi(t) = \Phi^{-1}(\gamma(t))$ — соответствующий путь в E.

  Путь гладкий, значит $\gamma'(t) = \Phi(\phi(t))' = \Phi'(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$, $\gamma'(0) = \Phi'(t_0)w$, что и требовалось доказать.

- $\Rightarrow$

  $v \in T_p(M) \to \exists w \in \mathbb{R}^k : \Phi'(t_0)w = v$.

  Рассмотрим путь $\gamma(t) = \Phi(t_0 + wt)$: $\gamma'(0) = \Phi'(t_0)w$, что и требовалось доказать.

51 Касательное пространство к графику функции и к поверхности уровня

Касательное пространство к графику $f : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, где $f \in C^1$ в точке $p = (x_0, f(x_0))$ задаётся уравнением

$y - f(x_0) = f_1'(x_1)(x - x_1) + \ldots + f'm(x_m)(x - x_m)$.

Касательное пространство к поверхности уровня функции $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ задаётся уравнением

$f_x'(x_0)(x - x_0) + f_y'(y_0)(y - y_0) + f_z'(z_0)(z - z_0) = 0$.

52 Необходимое условие относительного локального экстремума

$f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$,

$\Phi : E \to \mathbb{R}^n$, $a \in E$ и $\Phi(a) = 0$ — точка относительно локального экстремума.

$\text{rang } \Phi'(a) = n$, и f, $\Phi \in C^1(E)$.

Тогда $\exists \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, что

$\begin{cases} f'(a) - \lambda \cdot \Phi'(a) = 0 \\ \Phi(a) = 0 \end{cases}$

52.1 Доказательство

Пусть $\text{rang } \Phi'(a)$ реализован на столбцах x_{m+1}, …, x_{m+n}

$a = (a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+n}) = (a_x, a_y)$ и $\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\right)$ — невырожденная матрица $n \times n$.

По теореме о неявном отображении $\varphi : U(a_x) \to V(a_y)$ и $\forall x \in U(a_x) : \Phi(X, \varphi(X)) = 0$. Кстати, $U(x) \cap M_\Phi$ — простое m-мерное многообразие. Тогда $a_x = (a_1, \ldots, a_m)$ — точка локального экстремума для функции $g(x) = f(x, \varphi(x))$. Тогда

$$\begin{cases} f'_x(a) + f'_y(a)\varphi'(a_x) = 0 \\ \Phi'_x(a) + \Phi'_y(a) \cdot \varphi'(a_x) = 0 \end{cases}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}^n \;\; \lambda \cdot \Phi'_x + \lambda \cdot \Phi'_y \cdot \varphi' = 0$

$(f'_x - \lambda \Phi'_x) + (f'_y - \lambda \Phi'_y) \cdot \varphi' = 0$, подставляем $\lambda := f'_y(a) \cdot \left(\Phi'_y(a)\right)^{-1}$.

53 Вычисление нормы линейного оператора с помощью собственных чисел

$A \in \mathrm{Lin}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n\right)$, тогда $\|A\| = \max \sqrt{\lambda}$, где λ — собственные числа $A^T A$.

53.1 Доказательство

$\|A\|^2 = \max |Ax|^2 = \max \langle Ax, Ax\rangle = \max \left\langle A^T Ax, x\right\rangle$.

54 Теорема Стокса–Зайдля о непрерывности предельной функций. Следствие для рядов

$f_n,\, f_0 : \underset{\text{м.п.}}{X} \to \mathbb{R},\, c \in X,\, f_n$ — непрерывно в точке c. $f_n \rightrightarrows f_0$ на X. Тогда f_0 — непрерывна в точке c.

54.1 Доказательство

$|f_0(x) - f_0(c)| \leqslant |f_0(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(c)| + |f_n(c) - f_0(c)| < 3\varepsilon$ (китайский эпсилон) — следует из непрерывности по условию.

$\forall \varepsilon > 0 : \exists U(c) : \forall x \in U(c) : |f_n(x) - f_n(c)| < \varepsilon$.

54.2 Следствие для рядов

$u_n : \underset{\text{м.п.}}{X} \to \mathbb{R}$ непрерывно в $x_0 \in X$.

$\sum u_n(x)$ — равномерно сходится на X, $S(x) = \sum u_n(x)$. Тогда $S(x)$ непрерывно в x_0.

54.2.1 Доказательство

$S_n(x) \rightrightarrows S(x) \Rightarrow S(x)$ — непрерывно в x_0.

55 Метрика в пространстве непрерывных функций на компакте, его полнота

$\underset{\text{м.п.}}{X}$ — компакт. $f_1,\ f_2 : X \to \mathbb{R}$, $f_1,\ f_2$ — непрерывны на X.

$\rho(f_1, f_2) = \max\limits_{x \in X} |f_1(x) - f_2(x)|$ — метрика в $C(X)$, тогда пространство $(C(X), \rho)$ — полное.

55.1 Доказательство

56 Теорема о предельном переходе под знаком интеграла. Следствие для рядов

$f_n \in C[a,b]$ и $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$.

Тогда $\int\limits_a^b f_n \to \int\limits_a^b f$

56.1 Доказательство

$$\left|\int\limits_a^b f_n - \int\limits_a^b f\right| \leqslant \int\limits_a^b |f_n - f| \leqslant \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot (b-a) \to 0 \ (a, b \in \mathbb{R}, \text{ не в } \overline{\mathbb{R}})$$

56.2 Следствие для рядов

$u_n \in C[a,b]$ и $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на $[a,b]$,

$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$, $x \in [a,b]$, Тогда

$$\int\limits_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx$$

($\sum u_n$ — равномерно сходится, u_n — непрерывно $\Rightarrow$ $S(x)$ непрерывно $\Rightarrow$ $\int S(x)$ имеет смысл).

56.2.1 Доказательство

$\int\limits_a^b S_n(x)dx \to \int\limits_a^b S(x)dx$ по основной теореме,

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_a^b u_k(x)dx \to \sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_a^b u_k(x)dx.$$

57 Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру

$f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R},\ f,\ f'_y$ — непрерывны на $[a,b] \times [c,d]$, $\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$

Тогда Φ — дифференцируема на $[c,d]$ и $\Phi'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)dx$

57.1 Доказательство

$\Phi'(y) = \dfrac{\Phi\left(y+\frac{1}{n}\right) - \Phi(y)}{\frac{1}{n}} = \int\limits_a^b \dfrac{f\left(x, y+\frac{1}{n}\right) - f(x,y)}{\frac{1}{n}}dx = \int\limits_a^b f'_y\left(x, y + \dfrac{\Theta}{n}\right)dx$ (производная в средней точке), обозначим как $\int\limits_a^b g_n dx$.

$0 \leqslant \Theta \leqslant 1$, докажем $g_n(x,y) \rightrightarrows f'_y(x,y)$ для $x \in [a,b]$.

f'_y непрерывна на компакте, поэтому по теореме Кантора $\forall \varepsilon : \exists \delta : \forall n : \delta < \dfrac{1}{n} : \forall x \in [a,b] : \left| f'_y\left(x, y + \dfrac{1}{n}\right) - f'_y(x,y)\right| < \varepsilon$, отсюда следует, что $g_n \rightrightarrows f'_y(x,y)$, тогда по теореме о предельном переходе под знаком интеграла получаем, что $\int\limits_a^b g_n \to \int\limits_a^b f'_y(x,y)dx$.

58 Теорема о предельном переходе под знаком производной. Дифференцирование функционального ряда

$f_n \in C^1\langle a, b\rangle$ и $f_n \to f_0$ поточечно на $\langle a, b\rangle$, $f'_n \rightrightarrows \varphi$ на $\langle a, b\rangle$. Тогда

1. $f_0 \in C^1\langle a, b\rangle$
2. $f'_0 = \varphi$ на $\langle a, b\rangle$

58.1 Доказательство

$x_0,\, x_1 \in \langle a, b\rangle$, $f'_n \rightrightarrows \varphi$ на $[x_0, x_1]$, $\int\limits_{x_0}^{x_1} f'_n \to \int\limits_{x_0}^{x_1} \varphi$

$f_n(x_0) - f_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int\limits_{x_0}^{x_1} \varphi$, и $f_n(x_1) - f_n(x_0) \to f_0(x_1) - f_0(x_0)$, значит

$\int\limits_{x_0}^{x_1} \varphi = f_0(x_1) - f_0(x_0)$, f_0 — первообразная для φ, φ — непрерывна, значит $f') - \varphi$.

58.2 Дифференцирование функционального ряда

$u_n \in C^1\left(\langle a, b\rangle\right)$

1. $\sum u_n(x) = S(x)$ $x \in \langle a, b\rangle$ (поточечная сходимость)
2. $\sum u'_n(x) = \varphi(x)$ равномерно сходится при $x \in \langle a, b\rangle$.

Тогда

1. $S(x) \in C^1\left(\langle a, b\rangle\right)$
2. $S'(x) = \varphi(x)$ при $x \in \langle a, b\rangle$

Т.е. $\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u'_n(x)$

58.2.1 Доказательство

Следует из основной теоремы.

$f_n \leftrightarrow S_n$ и $f_0 \leftrightarrow S$.

$f_n(x) \to f_0(x)$ и $f'_n \rightrightarrows \varphi$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} u'_k(x) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)\right)' = f'_n$

59 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда

$\sum u_n$ и $u_n : X \to \mathbb{R}$. Также пусть существует вещественная последовательность c_n:

1. $|u_n(x)| \leqslant c_n \ \forall x \in X$;
2. $\sum c_n$ сходится.

Тогда $\sum u_n(x)$ — равномерно сходится на X

59.1 Доказательство

Равномерно сходится тогда и только тогда $R_n \rightrightarrows 0$

$\sup\limits_{x \in X} \left| \sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k(x) \right| \leqslant \sum\limits_{k=n}^{+\infty} c_k \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ как остаток сходящегося ряда.

60 Дифференцируемость гамма функции

$\Gamma(x)$ дифференцируется на $(0, +\infty)$.

60.1 Доказательство

$\dfrac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \prod\limits_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \dfrac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}.$

$-\ln \Gamma(x) = \ln x + \gamma x + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \dfrac{x}{k}\right) - \dfrac{x}{k}\right)$, обозначим за $u_k = \left(\ln\left(1 + \dfrac{x}{k}\right) - \dfrac{x}{k}\right)$.

$u_k'(x) = \dfrac{1}{x+k} - \dfrac{1}{k} = -\dfrac{x}{k(k+x)}.$

$|u_k'(x)| \leqslant \dfrac{M}{k(k+M)}, \sum \dfrac{M}{k(k+M)}$ — сходится по признаку Вейерштрасса.

$\sum u_k'(x)$ равномерно сходится при $x \in (0, M)$, где M — какое угодно.

$-\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \dfrac{1}{x} + \gamma - \sum \dfrac{x}{k(k+x)}.$

61 Теорема о предельном переходе в суммах

$u_n : E \subset \underset{\text{м.п.}}{X} \to \mathbb{R}$, x_0 — предельная точка E.

1. $\forall n : \exists \lim\limits_{x \to x_0} u_n(x) = a_n$;
2. $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E.

Тогда

1. $\sum a_n$ — сходится;
2. $\sum a_n = \lim\limits_{x \to x_0} \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right)$.

61.1 Доказательство

1. $\sum a_n$ — сходится

   $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, $S_n^a = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

   Достаточно проверить, что последовательность S_n^a фундаментальная.

   $\left|S_{n+p}^a - S_n^a\right| \leqslant \left|S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)\right| + \left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right| + \left|S_n(x) - S_n^a\right| < \varepsilon$

2. $\widetilde{u_n}(x) := \left[\begin{array}{l} u_n(x) \ x \neq x_0, x \in E \\ \\ a_n \ x = x_0 \end{array} \right.$

   $\widetilde{u_n}$ — непрерывна в точке x_0. Остаётся только проверить, что $\sum \widetilde{u_n}(x)$ равномерно сходится в $E \cup \{x_0\}$

   $\sup\limits_{x \in E \cup \{x_0\}} \left| \sum\limits_{k=N}^{+\infty} \widetilde{u_k}(x) \right| \leqslant \sup\limits_{x \in E} \left| \sum\limits_{k=N}^{+\infty} u_k(x) \right| + \left| \sum\limits_{k=N}^{+\infty} a_n \right| \to 0$

   $\widetilde{u_n}$ непрерывна в x_0 и равномерно сходится, значит $\lim\limits_{x \to x_0} = a_n$.

62 Теорема о перестановке двух предельных переходов

$f_n : E \subset \underset{\text{м.п.}}{X} \to \mathbb{R}$, x_0 — предельная точка E, и

1. $f_n \rightrightarrows S(x)$ при $n \to +\infty$ на E;
2. $f_n(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} A_n$

Тогда

1. $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} A_n = A \in \mathbb{R}$
2. $S(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} A$

62.1 Доказательство

1. Пусть $u_1 = f_1$, $u_2 = f_2 - f_1$, $\ldots$, $u_k = f_k - f_{k-1}$, тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = f_n$;

   Тогда $\sum u_k$ сходится к A_k, т.к. f_n сходится к A_n, а также просто равномерно сходится, поскольку f_n равномерно сходится к $S(x)$.

   $a_1 = A_1$, $a_2 = A_2 - A_1$, $\ldots$, $a_k = A_k - A_{k-1}$.

   Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} u_k(x) = a_k$, отсюда $\sum a_n$ сходится (из предыдущей теоремы).
2. $A = \sum a_n = \sum \lim\limits_{x \to x_0} u_k = \lim\limits_{x \to x_0} S(x)$.

63 Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда

$\sum a_n(x)b_n(x)$, $x \in X$.

1. $\exists C_a : \forall N : \forall x \in X : \left|\sum\limits_{n=1}^{N} a_n(x)\right| \leqslant C_a$,

   частичные суммы ряда $\sum a_n(x)$ равномерно ограничены.

2. $b_n \rightrightarrows 0$ при $n \to +\infty$ на множестве X, $\forall x : b_n(x)$ — монотонная. Тогда $\sum a_n(x)b_n(x)$ равномерно сходится на X.

63.1 Доказательство

$$\sum_{N \le k \le M} a_k b_k = A_M b_M - A_{N-1} b_{N-1} + \sum_{k=N}^{M-1} (b_k - b_{k+1}) A_k$$

$$\left|\sum_{k=N}^{M} a_k b_k\right| \le |A_M b_M| + |A_{N-1} b_N| + \left|\sum (b_k - b_{k+1}) A_k\right| \le C_A \left(|b_M| + |b_N|\right) + \sum (b_k - b_{k+1}) A_k \le C_a \left(|b_M| + |b_N| + \sum_{k=N}^{M-1} (b_k - b_{k+$$

$$C_a \left(|b_M| + |b_N| + |b_M| + |b_N|\right) \to c$$

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$ — равномерно сходится $x \in X$;

2. $\exists C_B : \forall x \forall n : |b_n(x)| \le C_m$ при каждом x $b_n(x)$ монотонна. $\sum a_n b_n$ равномерно сходится/

64 Теорема о круге сходимости степенного ряда

$\sum a_n(z-z_0)^n$, тогда выполнено одно из трёх условий:

1. ряд сходится только при $z = z_0$;
2. ряд сходится при любых $z \in \mathbb{C}$;
3. $\exists R \in (0, +\infty)$ такое, что при $|z-z_0| < R$ абсолютно сходится, при $|z-z_0| > R$ расходится, при $|z-z_0| = R$ может как сходится, так и расходится.

64.1 доказательство

Изучим $\sum a_n(z-z_0)^n$ на абсолютная сходимость.

$\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n||z-z_0|^n} = |z-z_0|\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$

1. $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, тогда при $z = z_0$ ряд абсолютно сходится, при $z \neq z_0$ ряд расходится;
2. $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, тогда при любых z ряд сходится абсолютно;
3. $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ конечен, тогда при $|z-z_0| < \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$ — сходится, при $|z-z_0| > \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$ — расходится.

   Тогда обозначим $R = \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$ — формула Адамара.

Множество сходимости степенного ряда — это открытый круг радиуса R и некоторые точки на окружности.

65 Теорема о непрерывности степенного ряда

$\sum a_n(z-z_0)^n$, $0 < R \leqslant +\infty$. Тогда

1. $0 < r < R$ — тогда ряд равномерно сходится на $\overline{B(z_0, r)}$;
2. $f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n$ — непрерывен в $B(z_0, R)$.

65.1 Доказательство

1. По признаку Вейерштрасса: $|a_n(z-z_0)^n| \leqslant |a_n| \cdot r^n$ — абсолютно сходится из предыдущей теоремы;
2. По теореме Стокса-Зайдля: $\forall z \in B(z_0, R)$ функция $f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n$ — непрерывна в точке z, поскольку каждый из её слагаемых непрерывен в точке z, а сам ряд равномерно сходится по определению радиуса сходимости.

66 Теорема о дифференцировании степенного ряда. Следствие об интегрировании. Пример

Обозначим за A ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ и за A' ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$, $0 < R \leq +\infty$ — радиус сходимости для (A). Тогда

1. (A') имеет тот же радиус сходимости R;
2. Пусть $f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n$, $z \in B(z_0, R)$. Тогда $\forall z \in B(z_0, R)$ f — дифференцируема и $f'(z) = \sum na_n(z-z_0)^{n-1}$.

66.1 Доказательство

1. $\sum \alpha_n x^n$ и $\sum \alpha_n x^{n+1}$ имеют одинаковый радиус сходимости, т.к. $x \cdot S_N(x) = \widetilde{S_N(x)}$. Пределы этих сумм существуют для одинаковых x, значит и радиус сходимости один и тот же.

   $R_{A'} = \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{na_n}} = \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{a_n}} = R.$
2. $a \in B(z_0, R)$, проверим, что существует $f'(a)$. Возьмём $r < R$ и $a \in B(z_0, r)$. Также пусть $w = z - z_0$ и $w_0 = a - z_0$, $|z - z_0| < r$ и $|a - z_0| < r$, тогда

   $\lim \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a} = \sum a_n \dfrac{(z-z_0)^n - (a-z_0)^n}{(z-z_0) - (a-z_0)} = \sum a_n \dfrac{w^n - w_0^n}{w - w_0}$ и

   $\left| a_n \dfrac{w^n - w_0^n}{w - w_0} \right| \leq |a_n| n r^{n-1}.$

   Заметим, что $\sum n|a_n|r^{n-1}$ сходится, т.к. ряд (A') при $z = z_0 + r$ сходится абсолютно по признаку Вейерштрасса, ряд равномерно сходится в круге $B(z_0, r)$.

   $\lim\limits_{z\to a} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ldots = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n = 1 \lim\limits_{z\to a} \dfrac{(z-z_0)^n - (a-z_0)^n}{z-a} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n n (z-z_0)^{n-1}.$

66.2 Следствие об интегрировании

$f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$, $a_n \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, x — тоже вещественное и лежит в $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Тогда при почленном интегрировании $\sum a_n \dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$ — ряд имеет тот же радиус сходимости и к тому же $\int\limits_{x_0}^{x} \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n \right) dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}$.

66.3 Пример

Разложить $\operatorname{arcctg} x$ в степенной ряд в окрестности $x_0 = 0$ (это же ряд Тейлора)

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2} = -(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots) = -1 + x^2 - x^4 + x^6 + \ldots$ $(|x| < 1)$

$\operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2} - x + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5} + \ldots$. (не забудем, что при возврате к первообразной не надо забывать про константу).

67 Свойства экспоненты

Обозначим $\exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$, $R = +\infty$, сходится при всех $z \in \mathbb{C}$.

1. $\exp(0) = 1$;

2. $(\exp z)' = \exp z$

   $$(\exp(z))' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z);$$

3. $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$ комплексное, $\overline{\sum \dfrac{z^n}{n!}} = \sum \dfrac{\overline{z}^n}{n!}$;

4. $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$

   $$\exp(z+w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-1}}{(n-k)!} \right) = \left(\sum \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum \frac{w^k}{k!} \right)$$

68 Метод Абеля суммирования рядов. Следствие

$\sum c_n$ — сходящийся ряд, $f(x) = \sum c_n x^n$, $-1 < x < 1$ ($\Leftrightarrow R \geq 1$). Тогда $\sum c_n = \lim\limits_{x \to 1-0} f(x)$.

68.1 Доказательство

При $x \in (0,1)$, $\sum c_n x^n$ — сходится по признаку Абеля,

$\sum a_n b_n$, $\sum a_n$ — сходится, b_n — монотонно ограниченная, что чему сопоставить очевидно. Осталось проверить, что $\sum c_n x^n$ непрерывен на $[0,1]$, т.е. равномерную сходимость $\sum c_n x^n$ на $[0,1]$.

$\sum a_n(x)$ — равномерно сходится, b_n — монотонная при каждом фиксированном x, $\exists C_b : \forall n : \forall x : |b_n(x)| \leq C_b$.

68.2 Следствие

$\sum a_n = A$, $\sum b_n = B$, $c_n := a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$, известно, что $\sum c_n = C$. Тогда $A \cdot B = C$.

68.2.1 Доказательство

$f(x) = \sum a_n x^n$, $g(x) = \sum b_n x^n$, $h(x) = \sum c_n x^n$, $x \in [0,1]$.

$x < 1$ ряды для f и g абсолютно сходится, значит $f(x) \cdot g(x) = h(x)$ при $x \to 1$.

69 Единственность разложения функции в ряд

f единственным образом раскладывается в степенной ряд в окрестности x_0 (если можно, конечно, разложить его).

69.1 Доказательство

Потому что $a_n := \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots \Rightarrow f \in C^{+\infty}(U(x_0))$.

$x = x_0 \Rightarrow a_0 = f(x_0)$.

$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots$, $x := x_0 \Rightarrow a_1 = f'(x_0)$ и $a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$ и т.д.

70 Разложение бинома в ряд Тейлора

$\sigma \in \mathbb{R}$, тогда при $|x| < 1$

$$(1+x)^\sigma = 1 + \sigma x + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{\sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma-n+1)}{n!}x^n + \ldots.$$

70.1 Доказательство

Пусть $S(x) = 1 + \sigma x + \dfrac{\sigma(\sigma-1)}{2}x^2 + \ldots$, тогда $S'(x) = \sigma\left(1 + (\sigma-1)x + \dfrac{(\sigma-1)(\sigma-2)}{2}x^2 + \ldots\right)$.

$S'(x)(1+x) = \sigma S(x)$

Проверим, что $f(x) = \dfrac{S(x)}{(1+x)^\sigma} = \mathrm{const}$

$f' = \dfrac{S'(x)}{(1+x)^\sigma} - \dfrac{\sigma S(x)}{(1+x)^{\sigma+1}} = \dfrac{0}{(1+x)^{\sigma+1}} = 0 \Rightarrow \dfrac{S(x)}{(1+x)^\sigma} = \mathrm{const}$

$f(0) = 1 \to S(x) = (1+x)^\sigma$.

71 Теорема о разложимости функции в ряд Тейлора

$f \in C^{\infty}([x_0 - h, x_0 + h])$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. f раскладывается в ряд Тейлора в окрестности x_0;
2. $\exists \delta, C, A > 0 : \forall n : \left| f^{(n)}(x) \right| < C \cdot A^n \cdot n!$ при $|x - x_0| < \delta$.

71.1 Доказательство

- $1 \Leftarrow 2$

  Оценим остаток в форме Лагранжа $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\overline{x})}{n!}(x - x_0)^n$

  $\left| \dfrac{f^{(n)}(\overline{x})}{n!}(x - x_0)^n \right| \leqslant \dfrac{CA^n n!}{n!} |x - x_0|^n \to 0$ при $|A(x - x_0)| < 1$ и $|x - x_0| < \dfrac{1}{A}$.

  Таким образом, $|x - x_0| < \min\left(\dfrac{1}{A}, \delta\right)$, $R_n \to 0$.

- $1 \Rightarrow 2$

  $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$. Пусть при $x = x_1 \neq x_0$ ряд сходится.

  $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x_1 - x_0)^n \to 0$, т.е. меньше какого-то C_1 по модулю.

  $\left| f^{(n)}(x_0) \right| \leqslant C_1 \cdot n! \cdot \dfrac{1}{|x_1 - x_0|^n} B^n$

  $f^{(m)}(x) = \displaystyle\sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n - m)!}(x - x_0)^{n-m}$

  $\left| f^{(m)}(x) \right| \leqslant \displaystyle\sum_{n=m}^{+\infty} \frac{|f^{(n)}(x_0)|}{(n - m)!}|x - x_0|^{n-m} \leqslant \sum \frac{C_1 B^n n!}{(n - m)!}|x - x_0|^{n-m} = C_1 B^m \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{n!}{(n - m)!} |B(x - x_0)|^{n-m} =$ $C_1 \cdot \dfrac{m! B^m}{|1 - (B(x - x_0))}\leqslant C_1 m! B^m 2^{m+1} = (2C_1) m! (2B)^m$.

72 Теорема Коши о перманентности метода средних арифметических

72.1 Дополнительное определение

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$, $S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.

$\sigma_n = \dfrac{1}{n+1}\left(S_0 + S_1 + \ldots + S_n\right)$.

Если существует $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = S$, то S называется суммой ряда $\sum a_n$ в смысле метода средних арифметических (или по Чезаро).

72.2 Формулировка

$\sum a_n = S \Rightarrow \sum a_n = S$ в смысле метода средних арифметических.

72.3 Доказательство

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 > 0 : \forall n > N_1 : |S_n - S| < \varepsilon$

$\sigma_n - S = \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=0}^{n}(S_i - S)$

$|\sigma_n - S| \leqslant \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=0}^{n}|S_i - S| = \dfrac{\sum\limits_{i=0}^{N_1}(S_i - S)}{n+1} + \dfrac{\sum\limits_{i=N_1+1}^{n}|S_i - S|}{n+1} < 2\varepsilon.$

73 Простейшие свойства интеграла векторного поля по кусочно-гладкому пути

1. Линейность по полю:

   $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, U, V — векторные поля, тогда

   $I\left(\alpha U + \beta V, \gamma\right) = \alpha I\left(U, \gamma\right) + \beta I\left(V, \gamma\right)$.

2. Аддитивность при дроблении пути:

   $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $a < c < b$,

   $\gamma_1 := \gamma\big|_{[a,c]}$, $\gamma_2 := \gamma\big|_{[c,b]}$ и

   $I\left(V, \gamma\right) = I\left(V, \gamma_1\right) + I\left(V, \gamma_2\right)$.

3. Замена параметра:

   $\varphi : [p, q] \to [a, b]$, сюрьекция, $\varphi \in C^1\left([p, q]\right)$, $\varphi(p) = a$, $\varphi(q) = b$,

   $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$, $\widetilde{\gamma}(s) = \gamma(\varphi(s))$.

   $I\left(V, \gamma\right) = I\left(V, \overline{\gamma}\right)$.

4. $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^m$ — гладкие пути,

   $\gamma_1(b) = \gamma_2(c) \Rightarrow \gamma = \gamma_2\gamma_1$ — кусочно-гладкий путь (в точке b путь γ может быть и не гладким).

   $$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), t \in [a, b] \\ \gamma_2(t - b + c), t \in [b, b + d - c] \end{cases}$$

   Тогда $I\left(V, \gamma\right) = I\left(V, \gamma_1\right) + I\left(V, \gamma_2\right)$.

5. $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$,

   $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$, $t \in [a, b]$. Тогда $I\left(V, \gamma^-\right) = -I\left(V, \gamma\right)$.

6. Оценка интеграла по пути:

   $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $L := \gamma\left([a, b]\right)$ — носитель пути. Тогда

   $\left|I\left(V, \gamma\right)\right| \leqslant \max\limits_{x \in L} \left|V(x)\right| \cdot l(\gamma)$.

73.1 Доказательство

1. Из определения в силу линейности скалярного произведения;

2. $\int\limits_a^b = \int\limits_a^c + \int\limits_c^b$;

3. $I\left(V, \gamma\right) = \int\limits_a^b V_1\left(\gamma(t)\right)\gamma_1' + \ldots + V_m\left(\gamma(t)\right)\gamma_m' dt = \int\limits_p^q \left(V_1\left(\widetilde{\gamma}(s)\right)\gamma_1'\left(\varphi(s)\right) + \ldots + V_m\left(\widetilde{\gamma}(s)\right)\gamma_m'\left(\varphi(s)\right)\right)\varphi'(s)ds =$ $I\left(V, \widetilde{\gamma}\right)$;

4. $\int\limits_a^{b+d-c} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt = \int\limits_a^b + \int\limits_b^{b+d-c} = \int\limits_a^b + \int\limits_c^d \langle V(\gamma_2(\tau)), \gamma_2'(\tau)\rangle d\tau$;

5. $I\left(V, \gamma^-\right) = \int\limits_a^b \langle V\left(\gamma(a+b-t)\right) \cdot \left(-\gamma'(a+b-t)\right)\rangle dt = -\int\limits_a^b \langle V, \left(\gamma(\tau)\right), \gamma'(\tau)(-d\tau)\rangle = -I\left(v, \gamma\right)$;

6. $\left|\int\limits_a^b \langle V(\gamma), \gamma'\rangle dt\right| \leqslant \int\limits_a^b \left|\langle V, \gamma'\rangle\right| dt \leqslant \int\limits_a^b \left|V\left(\gamma(t)\right)\right| \left|\gamma'(t)\right| dt \leqslant \max\limits_{x\in L} \left|V(x)\right| \cdot \int\limits_a^b \left|\gamma'(t)\right| dt = \max\limits_{x\in L} \left|V(x)\right| \cdot l(\gamma)$.

74 Обобщенная формула Ньютона–Лейбница

$V : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, потенциальное векторное поле, f — потенциал, $\gamma[a,b] \to O$ — кусочно-гладкий путь, $\gamma(a) = A$, $\gamma(b) = B$. Тогда

$$\int\limits_\gamma V_1 dx_1 + \ldots + V_m dx_m = f(B) - f(A).$$

74.1 Доказательство

1. γ — гладкий,

   $\phi(t) = f(\gamma(t))$, $\phi' = f'\gamma' = \langle \text{grad } f, \gamma' \rangle = \langle V\left(\gamma(t)\right), \gamma'(t) \rangle$.

   $$\int\limits_a^b V_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \ldots + V_m(\gamma(t))\gamma_m'(t) = \int\limits_a^b f_1'(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \ldots + f_m'(\gamma(t))\gamma_m'(t)dt = f(\gamma(t))\Big|_a^b = f(B) - f(A).$$

2. кусочно-гладкий,

   $$I\left(V, \gamma\right) = \sum_{k=1}^n \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \ldots = \sum_{k=1}^n f\left(\gamma(t_k)\right) - f\left(\gamma(t_{k-1})\right) = f(\gamma(t_n)) - f(\gamma(t_0)) = f(B) - f(A).$$

75 Характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов

V — векторное поле в O. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. V — потенциальное;
2. Интеграл $\int\limits_\gamma V_1 dx_1 + \ldots + V_m dx_m$ не зависит от пути в O;
3. Для любого кусочно-гладкого замкнутого пути верно, что $\int\limits_\gamma V_1 dx_1 + \ldots + V_m dx_m = 0$.

75.1 Доказательство

- $1 \Rightarrow 2$ — формула Ньютона-Лейбница;
- $2 \Rightarrow 3$ — очевидно;
- $3 \Rightarrow 2$ — очевидно;
- $2 \Rightarrow 1$ фиксируем $A \in O$, $\forall x \in O$ фиксируем кусочно-гладкий путь γ_x, $f(x) := \int\limits_{\gamma_x} V_1 dx_1 + \ldots + V_m dx_m$.

  Надо проверить, что f — потенциал.

  Достаточно проверить, что $f'_{x_1}(x) = V_1(x)$ при всех x.

  $\gamma'_0 = (h, 0, \ldots, 0)$

  $f(x + he_1) - f(x) = \int\limits_{\gamma_0} V_d x_1 + \ldots + V_m dx_m = \int\limits_0^1 V_1(x_1 + th, \ldots, x_m) h dt = V_1(x_1 + \alpha h, x_2, \ldots, x_m) h1 \Rightarrow$ $V_1(x_1, \ldots, x_m) = f'_{x_1}$.

76 Необходимое условие потенциальности гладкого поля. Лемма Пуанкаре

76.1 Необходимое условие потенциальности гладкого поля

V — гладкое потенциальное векторное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$, тогда $\forall x \in O$ и $\forall k, j$ $(1 \leq k, j \leq m)$ верно $\dfrac{\partial v_k}{\partial x_j} = \dfrac{\partial v_j}{\partial x_k}$.

76.2 Лемма Пуанкаре

$O \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклое, $V : O \to \mathbb{R}^m$, $V \in C^1(O)$ и верно $\forall k,\, l : \dfrac{\partial v_k}{\partial x_l} = \dfrac{\partial v_l}{\partial x_k}$. Тогда V — потенциально.

76.2.1 Доказательство

$A \in O$, $\gamma_x : [0,1] \to O$, $\gamma_v(t) = A + t(x - A)$, $(\gamma_x)' = x - A$.

$f(x) := \int\limits_{\gamma_x} \sum v_i dx_i = \int\limits_0^1 \sum v_i \left(A + t\left(x - A\right)\right)\left(x_i - A_i\right) dt$, $I(x) = \int\limits_a^b f(c,x) dt$ и $I'(x) = \int\limits_a^b f'_x dt$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \int\limits_0^1 v_i\left(A + t\left(x - A\right)\right) + \sum \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}\left(A + t\left(x - A\right)\right) t\left(x_i - A_i\right) dt = \int\limits_0^1 \left(t v_j\left(A + t\left(x - A\right)\right)\right)'_t dt - t v_j\left(A + t\left(x - A\right)\right)\Big|_{t=0}^{t=1} = v_j(x)$.

76.3 Следствие к лемме Пуанкаре

O — открытое множество в $\mathbb{R}^m$, $V \in C^1(O)$ и верное $\forall k,\, l : \dfrac{\partial v_k}{\partial x_l} = \dfrac{\partial v_l}{\partial x_k}$, тогда оно локально-потенциальное.

76.3.1 Доказательство

$I(v, \gamma) = \int\limits_a^b \langle V\left(\gamma(t)\right), \gamma'(t)\rangle dt$.

77 Лемма о гусенице

$O \subset \mathbb{R}^m$, $\forall x \in O$ задана окрестность $U(x)$, и $\gamma : [a, b] \to O$ — непрерывный путь. Тогда существует дробление $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ и шары $B_k \subset O$, $\forall k \in [1, n] : \gamma\big|_{[t_{k-1}, t_k]} \subset B_k$.

77.1 Доказательство

$\forall c \in [a, b]$ фиксируем $B_c = B\left(\gamma(c), r_c\right) \subset U\left(\gamma(c)\right)$.

$\overline{\alpha}_c = \inf\left(\alpha \in [a, b] : \gamma\Big|_{[\alpha, c]} \subset B_c\right)$,

$\overline{\beta}_c = \sup\left(\beta \in [a, b] : \gamma\Big|_{[c, \beta]} \subset B_c\right)$.

Заузим $\overline{\alpha}_c < \alpha_c < c < \beta_c < \overline{\beta}_c$, $\bigcup(\alpha_c, \beta_c)$ — открытое покрытие $[a, b]$.

В точках $c = a$ $\alpha_c = a$ и $c = b$ $\beta_c = b$, $[a, b] \subset \bigcup\limits_{\text{кон.}} (\alpha_c, \beta_c)$.

Удалим лишние наложение, т.е. удалим такие пары $(\alpha_i, \beta_i) \subset \bigcup\limits_{i \neq j}(\alpha_j, \beta_j)$. Тогда $\forall(\alpha_c, \beta_c)$ существует уникальная точка $d_c \in (\alpha_c, \beta_c)$ и $\gamma\Big|_{[t_{k-1}, t_k]} \subset B_{C_k}$.

78 Лемма о равенстве интегралов по похожим путям

$V : O \to \mathbb{R}^m$ — локально потенциальное векторное поле, $\gamma, \overline{\gamma}$ — похожие, кусочно гладкие пути, $\gamma(a) = \overline{\gamma}(a)$ и $\gamma(b) = \overline{\gamma}(b)$, тогда

$$\int\limits_{\gamma} \sum V_i dx_i = \int\limits_{\overline{\gamma}} \sum V_i dx_i.$$

78.1 Доказательство

Берём V-гусеницу, f_k — потенциал в B_k, необходимо согласовать потенциалы, $f_k = f_{k+1}$ на $B_k \cap B_{k+1}$,

$$\int\limits_{\gamma} \sum v_i dx_i = \sum_{k=1}^{n} \int (v_1 dx_1 + \ldots + v_m dx_m) = \sum f_k\left(\gamma(t_k)\right) - f_k\left(\gamma(t_{k-1})\right) = f\left(\gamma(b)\right) - f\left(\gamma(a)\right).$$

79 Лемма о похожести путей, близких к данному

$\gamma : [a, b] \to O \subset \mathbb{R}^m$. Тогда $\exists \delta > 0$, если $\overline{\gamma}$ и $\overline{\overline{\gamma}} : [a, b] \to O$, таковы, что $\forall t \in [a, b]$ $|\gamma(t) - \overline{\gamma(t)}| < \delta$ и $|\gamma(t) - \overline{\overline{\gamma}}(t)| < \delta$,

то γ, $\overline{\gamma}$ и $\overline{\overline{\gamma}}$ — похожи.

79.1 Доказательство

Берём V-гусеницу для γ, тогда $\gamma\left([t_{k-1}, t_k]\right)$ — компактное множество в B_k, тогда $\exists \delta_k$ — окрестность этого компакта в B_k, возьмём $\delta := \min\limits_{1 \le k \le n} \delta_k$.

80 Равенство интегралов по гомотопным путям

V — локально потенциальное векторное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$, γ_0 и γ_1 — гомотопно связанные, тогда $I(V, \gamma_0) = I(V, \gamma_1)$.

80.1 Доказательство

Γ — гопотопия, $\gamma_u(t) = \Gamma(t, u)$, $t \in [a, b]$ и $u \in [0, 1]$. $\Phi(u) = I(V, \gamma_1)$. Проверим Φ — локально постоянно, т.е. $\forall u_0 : \exists w(u) : \forall u \in w(u_0) \cap [0, 1]$ верно $\Phi(u) = \Phi(u_0)$. Γ — равномерное непрерывно, тогда

$\forall \delta > 0 : \exists \sigma > 0 : \forall t, t' : |t - t'| < \sigma$ и $\forall u, u' : |u - u'| < \sigma$ выполнено $|\Gamma(t, u) - \Gamma(t', u')| \dfrac{\delta}{2}$.

Берём δ из предыдущей леммы для пути γ_{u_0} и $(u - u_0) < t$ для любого $t \in [a, b]$, $|\Gamma(t, u) - \Gamma(t, u_0)| < \dfrac{\delta}{2}$ и $|\gamma_u(t) - \gamma_{u_0}(t)| < \dfrac{\delta}{2} \Rightarrow \gamma_u$ и γ_{u_0} — похожи. Подберём $\overline{\gamma}_u$ и $\overline{\gamma}_{u_0}$ — кусочно гладкие, $\dfrac{\delta}{4}$ близко к γ_u и γ_{u_0}, $\forall t : |\gamma(t) - \overline{\gamma}(t)| < \delta$, значит $\overline{\gamma}_u$ и $\overline{\gamma}_{u_0}$ — похожи.

$I(V, \gamma_u) = I(V, \overline{\gamma}_{u_0}) = I(V, \overline{\gamma}_{u_0}) = I(V, \gamma_0)$.

81 Теорема о резиночке

$O = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\gamma : [0, 2\pi] \to O$, $\gamma(t) \to (\cos t, \sin t)$ — петля. Тогда эта петля нестягиваема.

81.1 Доказательство

$V(x,y) := \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$

$(x,y) \neq (0,0)$, $\dfrac{\partial v_1}{x} = \dfrac{\partial v_2}{y} \Rightarrow V$ — непрерывное локально потенциальное,

$$I(V,\gamma) = \int\limits_0^{2\pi} v_1 dx + v2dy = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\sin^2 t + \cos^2 t}(-\sin t) + \frac{\cos t}{\sin^2 t + \cos^2 t}\cos t\right) dt = 2\pi \neq 0.$$

82 Теорема Пуанкаре для односвязной области

O — односвязная область в $\mathbb{R}^m$, V — локально потенциальное векторное поле в O. Тогда V — потенциально в O.

82.1 Доказательство

γ_0 — кусочно-гладкий замкнутый путь, значит гомотопен постоянному пути, значит $I(V, \gamma_0) = 0$ постоянному пути. т.е. выполняется критерий потенциальности вектроного поля.

83 Свойства объема: усиленная монотонность, конечная полуаддитивность

$\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объем. Тогда

1. Усиленная монотонность: $\forall A,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n \in \mathcal{P}$, все A_i — дизъюнкты и $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subset A$, тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu A_i \leqslant \mu A$;
2. Конечная полуаддитивность: $\forall A,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n \in \mathcal{P}$, все A_i — дизъюнкты и $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, тогда $\mu A \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \mu A_i$;
3. $A,\ B,\ (A \setminus B) \in \mathcal{P},\ \mu B < +\infty \Rightarrow \mu\,(A \setminus B) \geqslant \mu A - \mu B$.

83.1 Доказательство

1. $A \setminus \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup\limits_{\text{кон.}} B_l,\ B_l \in \mathcal{P},\ A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i \sqcup \bigsqcup\limits_{\text{кон.}} B_k,\ \mu A = \sum \mu A_i + \sum \mu B_l \geqslant \sum \mu A_i$.
2. $B_k = A \cap A_k \in \mathcal{P},\ A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$ — сделаем это объединением дизъюнктов, $C_1 := B_1,\ C_2 := B_2 \setminus B_1$ и т.д., $A = \bigsqcup\limits_{k,j} D_{kj},\ \mu A = \sum \mu D_{kj}$, фиксируем k и получаем $\sum \mu D_{kj} = \mu C_k \leqslant \mu B_k \leqslant \mu A_k$ и получаем $\mu A \leqslant \sum \mu A_k$;
3. - $B \subset A$ и $\mu\,(A \setminus B) + \mu B = \mu A$;
   - $B \not\subset A,\ A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$, причём $A \cap B \in \mathcal{P}$, и $\mu\,(A \setminus B) = \mu A - \mu\,(A \cap B) \geqslant \mu A - \mu B$.

84 Теорема об эквивалентности счетной аддитивности и счетной полуаддитивности

$\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объём. Тогда эквивалентны:

1. μ — счётная аддитивная (т.е. μ — мера);
2. μ — счётная полуаддитивность : $A,\ A_1,\ A_2,\ \ldots \in \mathcal{P}$ и $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i \Rightarrow \mu A \leq \sum \mu A_i$.

84.1 Доказательство

- $1 \Rightarrow 2$

  5 формул $A = \bigcup A_k$ (будут написаны позже)

- $2 \Rightarrow 1$

  $A = \bigsqcup A_i$, надо проверить $\mu A = \sum \mu A_i$, усиленная монотонность: $\mu A \geq \sum\limits_{i=1}^{n} \mu A_i$, по условию $\mu A \leq \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mu A_i \Rightarrow \mu A = \sum \mu A_i$.

85 Теорема о непрерывности снизу

$\mathcal{A}$ — алгебра, $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объём. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. μ — мера, т.е. выполняется счётная аддитивность;
2. μ — непрерывна снизу, т.е. $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, $A = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$ и $\mu A = \lim\limits_{i \to +\infty} \mu A_i$.

85.1 Доказательство

- $1 \Rightarrow 2$

  $B_1 := A_1, \ldots, B_k := A_k \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} A_i$, тогда B_i — дизъюнкты, тогда $A_k = \bigsqcup\limits_{i=1}^{k} B_i$ и $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} B_i$, $\mu A = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mu B_i = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \mu B_i = \lim\limits_{n \to +\infty} A_n$.
- $2 \Rightarrow 1$

  $C = \bigsqcup C_i$, проверим, что $\mu C = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mu C_i$, $A_k = \bigsqcup\limits_{i=1}^{k} C_i$, $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ и $\bigcup A_i = A$,

  $\mu A = \lim\limits_{N \to +\infty} \mu A_N = \lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{i=1}^{N} \mu C_i = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mu C_i$.

86 Теоремы о непрерывности сверху

$\mathcal{A}$ — алгебра, $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ — конечный объём ($\mu X < +\infty$), тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. μ — мера, т.е. выполняется счётная аддитивность;
2. μ — непрерывна сверху, т.е. A, A_1, A_2, $\ldots \in \mathcal{A}$, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, $A = \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$, $\mu A = \lim\limits_{i\to+\infty} \mu A_i$;
3. μ — непрерывна сверху на пустом множестве, т.е. $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A}$, $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} A_i = \varnothing$.

86.1 Доказательство

- $1 \Rightarrow 2$

  $B = A_1 \setminus A$, $B_k := A_1 \setminus A_k$, тогда $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \ldots$ и $\bigcup B_k = B$, $\mu B = \lim\limits_{k\to+\infty} \mu B_k$, $\mu A_1 - \mu A = \lim\limits_{k\to+\infty} (\mu A_1 - \mu A_k) \Rightarrow \mu A = \lim\limits_{k\to+\infty} \mu A_k$.

- $2 \Rightarrow 3$

  Очевидно.

- $3 \Rightarrow 1$

  $C = \bigsqcup C_i$, проверить, что $\mu C = \sum \mu C_i$, $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, $A_k = \bigsqcup\limits_{i=k+1}^{+\infty} C_i = C \setminus \left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{k} C_i \right) \Rightarrow A_k \in \mathcal{A}$.

  $\bigcap A_k = \varnothing \Rightarrow \mu A_k \to 0$, $C = \bigsqcup\limits_{i=1}^{k} C_i \sqcup A_k$ и $\mu C = \sum\limits_{i=1}^{k} \mu C_i + \mu A_k$, $k \to +\infty \Rightarrow \mu C = \sum \mu C_i$.

87 Счетная аддитивность классического объема

Классический объём в $\mathbb{R}^m$ — есть σ-конечная мера.

87.1 Доказательство

σ-конечность: смотреть на клеточки.

Проверим, что μ — счетна аддитивная, для этого достаточно проверить счетную полуаддитивность, т.е.:

$P = [a, b)$, $P_n = [a_n, b_n)$ и $P \in \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} P_n$, проверим, что

$\mu P \leqslant \sum \mu P_i$, можно считать $P \neq \varnothing$.

Возьмём b' чуть меньше, чем b, тогда $\mu\left(P \setminus [a, b']\right) < \varepsilon > 0$.

Возьмём a' чуть меньше, чем a, тогда $\mu\left([a'_n, b_n] \setminus [a_n, b_n)\right) < \dfrac{c}{2^n}$.

$[a, b'] \subset \bigcup\limits_{\text{кон.}} [a'_n, b_n)$,

$[a, b') \subset \bigcup\limits_{\text{кон.}} [a'_n, b_n)$,

$$\mu P - \varepsilon < \mu[a, b') \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu[a'_i, b_i) < \sum_{i=1}^{n} \mu P_i + \frac{c}{2^n} \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \mu P_i + \frac{c}{2^n} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu P_i + \varepsilon.$$

Тогда $\mu P \leqslant \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mu P_i + 2\varepsilon \leqslant \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mu P_i$.

88 Лемма о структуре открытых множеств и множеств меры 0

1. $O \subset \mathbb{R}^m$ — открытое, тогда $\exists Q_i$ — ячейки и $O = \bigsqcup Q_i$, причем можно также считать, что:

   - Q_i — ячейки с рациональными координатными вершинами (или двоично-рациональные);
   - $\overline{Q_i} \subset O$;
   - Q_i — кубы.

2. E — измеримо в $\mathbb{R}^m$, $\lambda E = 0$, тогда $\forall \varepsilon : \exists Q_i$ — ячейки: $E \subset \bigcup Q_i$ и $\sum \lambda Q_i < \varepsilon$.

88.1 Доказательство

1. $\forall x \in O$ возьмём $Q(x) \in O$ — какая-нибудь ячейка из O, можно взять куб. двоичную-рациональную или $\overline{Q(x)} \subset O$.

   $O = \bigcup\limits_{x \in O} Q(x)$ — на самом деле это счётное объединение ячеек, надо сделать их всего-лишь дизъюнктными.

2. $\mu E = \inf \left(\sum \mu P_i, E \subset \bigcup P_i, P_i \in \mathcal{P} \right)$, $E \subset \bigcup P_i$ и $\underset{\text{откр.}}{\widetilde{P}_i} \supset P_i$.

   $E \subset \bigcup \widetilde{P}_i$, где $\widetilde{P}_i = \bigsqcup\limits_{j=1}^{+\infty} Q_{ij}$ (двоично-рациональные кубы).

   $\lambda(\widetilde{P}_i) < \lambda P_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$.

   $\sum \lambda P_i < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\sum \lambda \left(\widetilde{P}_i \right) < \sum \lambda P_i + \frac{\varepsilon}{2}$.

89 Пример неизмеримого по Лебегу множества

$x, y \in \mathbb{R}$, $x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$.

$A = [0,1] \setminus \mathbb{Q} = A$ — множество классов представителей $C[0,1]$.

$\bigcup\limits_{q \in \mathbb{Q}} (A+q) = \bigsqcup\limits_{q \in \mathbb{Q}} (A+q) = \mathbb{R}$.

$A = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, и $B = \bigsqcup\limits_{q \in [-1,1]} A + q \subset [-1,2]$. Допустим, что A — измеримо, тогда

$\forall q : \lambda A = \lambda(A+q) \Rightarrow B$ — измеримо и $\lambda B = \sum\limits_{q} \lambda(A+q)$, и это равно или $+\infty$ или 0, но $\lambda B < 3 (\lambda B \in [-1,2])$, но и $[0,1] \subset B \Rightarrow \lambda B \neq 0$.

90 Регулярность меры Лебега

A — измеримо по Лебегу, тогда

$$\lambda A = \inf_{\underset{\text{откр.}}{G}:A\subset G} \lambda G = \sup_{\underset{\text{замкн.}}{F}:F\subset A} = \sup_{\underset{\text{комп.}}{K}:K\subset A} \lambda K.$$

90.1 Доказательство

Если A — ограничено, то очевидно.

Если A — неограничено $\mathbb{R}^m = \bigcup\limits_n B(0,n)$, $A_n = \bigcap A \cap B(0,n)$ и $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A$, тогда $\lim \lambda A_n = \lambda A$.

λA конечно: $A_n : \lambda A_n > \lambda A - \varepsilon$, $K \subset A_n \subset A$ и $A \setminus K = (A \setminus A_n) \bigcup (A_n \setminus K)$ и $K \subset A_n$ и $\lambda K > \lambda a_n - \varepsilon$, $\lambda(A \setminus K) = \lambda(A \setminus A_n) + \lambda(A_k \setminus K) < 2\varepsilon$.

λA бесконечно: $\forall R : \exists A_n : \lambda A_n > R$ и $\exists K \in A_n : \lambda K > R$.

91 Лемма о сохранении измеримости при непрерывном отображении

$T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное, $\forall E \in \mathcal{M}^m$ и $\lambda E = 0$ выполняется, что $\lambda(T(E)) = 0$. Тогда $\forall A \in \mathcal{M}^m$ $T(A) \in \mathcal{M}^m$.

91.1 Доказательство

$\lambda A = \sum\limits_{\underset{\text{комп.}}{K} \subset A} \lambda K$, $A = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} K_i \cup \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — множество меры 0.

$T(A) = \bigcup T(K_i) \cup T(\mathcal{N})$, где объединение компактов — компакт, а $T(\mathcal{N})$ имеет меру 0.

92 Лемма о сохранении измеримости при гладком отображении. Инвариантность меры Лебега относительно сдвигов

$\Phi : \underset{\text{откр.}}{O} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\Phi \in C^1$. Тогда $\forall A \in \mathcal{M}^m$ $\Phi(A) \in \mathcal{M}^m$.

92.1 Доказательство

Нужно проверить, что $\forall E : \lambda_m E = 0 \Rightarrow \lambda_M\left(\Phi(E)\right) = 0$.

$O = \bigsqcup Q_i$, где Q_i — ячейки, а также $\overline{Q_i} \subset O$.

Достаточно разобрать случай, где $E \subset Q_i$, где $E = \bigsqcup E \cap Q_i$.

$L = \max\limits_{x \in \overline{Q_i}} \|\Phi'(x)\| < +\infty$, тогда $\forall x, y \in Q_i : |\Phi(x) - \Phi(y)| \leqslant L|x - y|$.

$\forall \varepsilon > 0 : E \subset \bigcup (x_i, r_i)$, $\sum \lambda_m(K_i) < \varepsilon$, где K_i — кубы, $\Rightarrow$ $\Phi(E) \subset \bigcup \Phi(K_i) \subset B(\Phi(x_i), L\sqrt{m}r_i) \subset \bigcup K\left(\Phi(x_i), L\sqrt{m}r_i\right)$.

Мера λ_m этого куба $\left(2L\sqrt{m}r_i\right)^m = (L\sqrt{m})^m \lambda(K_i)$.

$\sum \left(L\sqrt{m}\right)^m \lambda(K_i) = (L\sqrt{m})^m \cdot \sum \lambda_m(K_i) < (L\sqrt{m})^m \varepsilon$.

92.2 Следствие

λ_m — инвариантна относительно сдвига, т.е. $\forall E \in \mathcal{M}^m : \forall a \in \mathbb{R}^m : E + a$ — измеримо и $\lambda E = \lambda(E + a)$.

92.2.1 Доказательство

$\lambda E = \inf\left(\sum \lambda(P_i)\right)$, где $E \subset \bigcup P_i$ — ячейки, тогда $\lambda(E + a) = \inf\left(\sum \lambda(P_i)\right)$, где $E \subset \bigcup (P_i + a)$.

93 Инвариантность меры Лебега при ортогональном преобразовании

$T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, T — ортогональное преобразование, тогда

$\forall a \in \mathcal{M}^m$ $T(A) \in \mathcal{M}^m$ и $\lambda_m(T(A)) = \lambda(A)$.

93.1 Доказательство

T — гладкое, значит сохраняет измеримость.

$\mu : \mathcal{M}^m \to \overline{\mathbb{R}}$, $\mu(A) = \lambda_m(T(A))$.

μ — мера (потому что T — биекция) и инвариантна относительно сдвига, значит $\mu = k\lambda_m$.

Рассмотрим шар, тогда $\mu(B(0,1)) = \lambda(T(B(0,1)))$, но $\mu(B(0,1)) = \lambda(B(0,1))$, значит $k = 1$.

94 Лемма о структуре компактного оператора

$V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейный, $\det V \neq 0$. Тогда существуют ортонормированные базисы $(g_1, \ldots, g_m)$ и $(h_1, \ldots, h_m)$, а также существует числа $s_i > 0$, что $\forall x \in \mathbb{R}^m$ верно, что $V(x) = \sum s_i \langle x, g_i \rangle h_i$.

94.1 Доказательство

$W = V^T V$ — симметричная матрица, тогда для неё существует базис из собственных векторов: $g_1, \ldots, g_m :$ $\exists c_1, \ldots, c_m$, что $W g_i = c_i g_i$.

$\langle W g_i, g_i \rangle = c_i |g_i|^2$ и $\langle V^T V g_i, g_i \rangle = \langle V g_i, V g_i \rangle = \|V g_i\| > 0 \Rightarrow c_i > 0$, значит возьмём $s_i = \sqrt{c_i}$ и $h_i = \dfrac{1}{s_i} V g_i$.

$\langle h_k, h_i \rangle = \dfrac{1}{s_k s_i} \langle V g_k, V g_i \rangle = \dfrac{1}{s_k s_i} \langle V^T V g_k, g_i \rangle = \dfrac{1}{s_k s_i} \langle W g_k, g_i \rangle = \dfrac{c_k}{s_k s_i} \langle g_k, g_i \rangle$.

$x \in \mathbb{R}^m$ и $x = \sum \langle x, g_i \rangle g_i$, и $V x = \sum s_i \langle x, g_i \rangle h_i$.

95 Теорема о преобразовании меры Лебега при линейном отображении

$T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, T — линейное отображение. Тогда

$\forall A \in \mathcal{A}^m$ $T(A) \in \mathcal{M}^m$ и $\lambda_m(T(A)) = |\det T|\lambda_m(A)$.

95.1 Доказательство

1. $\det T = 0$, значит образ T — подпространство в $\mathbb{R}^m$, значит он имеет меру 0;

2. $\det T \neq 0$, значит T — невырожденный, тогда $\mu E = \lambda T(E)$ — инвариантна относительно сдвигов.

   $T(\text{огр.}) = \text{огр.} \Rightarrow \mu(\text{огр.}) < +\infty \Rightarrow \exists k : \mu = k\lambda_m$.

   $Q =$ ед. куб на векторах$g_i = \left\{\sum d_i g_i, d_i \in [0, 1]\right\}$.

   $T(g_0) = s_i h_i$, где $T(Q)$ — параллелепипед на векторах h_i.

   $\lambda(TQ) = \prod\limits_i |s_i h_i| = \prod s_i = |\det T|$.

96 Эквивалентность определений измеримости с разными множествами Лебега

1. f — измерима, значит $\forall a : E(f = a)$ — измерима;

2. f — измерима, значит $\forall \alpha > 0 : \alpha_f, \, -f$ — измеримы:

   $E(\alpha f < a) = E\left(f < \dfrac{a}{\alpha}\right);$

   $E(-f < a) = E(f > -a).$

3. f — измерима на E_1 и $E_2, \, \ldots,$ тогда f — измерима на $\bigcup E_k = E$:

   $E(f < a) = \bigcup\limits_k E_k(f < a);$

4. $\underset{\text{изм.}}{E'} \subset \underset{\text{изм.}}{E}$, тогда если f — измерима на $E \Rightarrow f$ — измерима на E':

   $E'(f < a) = E(f < a) \cap E';$

5. $f \neq 0$ — измерима на E, тогда $\dfrac{1}{f}$ — измерима и $E\left(\dfrac{1}{f} < a\right) = \left(E\left(\dfrac{1}{f} < a\right) \cap E(f > 0)\right) \bigcup \left(E\left(\dfrac{1}{f} < a\right) capE(f < 0)\right)$
   $\left(E\left(f > \dfrac{1}{a}\right) \cap E(f > 0)\right) \cup \left(E\left(f < \dfrac{1}{a}\right) \cap E(f < 0)\right);$

6. $f \geqslant 0$ — измерима и $\alpha > 0 \Rightarrow f^{\alpha}$ — измерима.

97 Теорема об измеримости пределов и супремумов

f_n — измерима на X. Тогда

1. $\sum\limits_n f_n(x)$, $\inf\limits_n f_n(x)$ — измеримы;
2. $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} f_n(x)$, $\underline{\lim} f_n(x)$ — измеримы:
3. Если $\forall x : \exists \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, то f — измерима;

97.1 Доказательство

1. $g(x) = \sum\limits_n f_n(x)$, тогда $X(g > a) = \bigcup X(f_n > a)$;
2. $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} f_n(x) = \inf\limits_n \left(\sum\limits_{k\geqslant 0} f_{n+k}(x) \right)$;
3. $\lim\limits_n = \overline{\lim} f_n$.

98 Характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, измерима. Тогда

$\exists f_n$ — ступенчатая функция, что:

1. $0 \leqslant f_1 \leqslant \ldots \leqslant f_n \leqslant f_{n+1} \leqslant f(x)$;
2. $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$.

98.1 Доказательство

$e_k^{(n)} = X\left(\dfrac{k}{n} \leqslant f < \dfrac{k+1}{n}\right)$, при $k = 0, 1, \ldots, n^2 - 1$.

$e_{n^2}^{(n)} = X(f \geqslant n)$.

$g_n = \sum \dfrac{k}{n}$ при $x \in e_k^{(n)}$.

$\forall x : \lim\limits_{n \to +\infty} g_n(x) = f(x)$, тогда $f_n(x) = \max(g_1(x), \ldots, g_n(x))$.

99 Измеримость монотонной функции

100 Теорема Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере

$\mu X < +\infty$, $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измерима, почти везде конечна, тогда $f_n \to f$ почти везде. Тогда $f_n \rightrightarrows f$ на мере.

100.1 Доказательство

$f_n \to f$ на $X \setminus e$. Пусть $f_n(t) = f(t) = 0, t \in e$. Тогда есть сходимость повсюду.

Частный случай. $f_n \to 0$ и $\forall x : f_n(x)$ — монотонная. Тогда $X\left(|f_n| \geqslant \varepsilon\right) \supset X\left(|f_{n+1}| \geqslant \varepsilon\right)$.

$\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} X\left(|f_n| \geqslant \varepsilon\right) = \varnothing \Rightarrow X\left(|f_n| \geqslant \varepsilon\right) \to 0$.

Общий случай. $f_n \to f$, и $\varphi_n(x) = \sum\limits_{k \geqslant n} |f_k(x) - f(x)|$, тогда $\varphi_n(x) \to 0$ и φ_n — монотонная.

$X\left(|fn - f| \geqslant \varepsilon\right) \subset X\left(\varphi_n \geqslant \varepsilon\right)$.

101 Теорема Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, f_n, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измерима почти везде и конечно, $f_n \rightrightarrows f$ по мере. Тогда $\exists n_k : f_{n_k} \to f$ почти везде.

101.1 Доказательство

$\forall k : \mu X \left(|f_n - f| \geqslant \dfrac{1}{k} \right) \to 0.$

$|existsn_k$: при $n > n_k : \mu X \left(|f_n - f| \geqslant \dfrac{1}{k} \right) < \dfrac{1}{2^k}.$

Можно считать, что $n_1 < n_2 < \ldots$.

Проверим, что $f_{n_k} \to f$ почти везде.

$E_k := \bigcup\limits_{j=k}^{+\infty} X \left(|f_{n_j} - f| \geqslant \dfrac{1}{j} \right).$

$E_1 \supset E_2 \supset \ldots$, и $E_0 = \bigcap E_k$.

$\mu E_k = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^j} \leqslant \dfrac{2}{2^k}$ и $\mu E_k \to \mu E_0 \Rightarrow \mu E_0 = 0$, $x \notin E_0 : f_{n_k}(x) \to f(x)$.

$\exists N : x \in E_n$ и всем следующим:

$|f_{n_N}(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{1}{N};$

$|f_{n_{N+1}}(x) - f(x)| < \dfrac{1}{N+1}$, т.е. $f_{n_k}(x) \xrightarrow[k \to +\infty]{} f(x)$.