Содержание

Часть I

Определения

1 Диффеоморфизм

Область в $\mathbb{R}^m$ — открытое связное множество.

Пусть $f : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — *диффеоморфизм*, где O — область, если:

1. f — обратима;
2. f — дифференцируема;
3. (f^{-1}) — тоже дифференцируема.

2 Формулировка теоремы о локальной обратимости в терминах систем уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_m) = y_1 \\ \ldots \\ f_m(x_1, \ldots, x_m) = y_m \end{cases}$$

Все f_i — гладкие.

Пусть при $y = (b_1, \ldots, b_m)$ существует единственное решение $x = (a_1, \ldots, a_m)$, что $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right) \neq 0$.

Тогда для y_0 близких к $(b_1, \ldots, b_m)$ существует решение $(x_1, \ldots, x_m)$ близкое к $(a_1, \ldots, a_m)$ и зависимое от y, причём оно гладкое.

3 Формулировка теоремы о неявном отображении в терминах систем уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0 \\ \ldots \\ f_n(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0 \end{cases}$$

$x = a$ и $y = b$ удовлетворяют системе уравнений, а также f_i — функции класса C^r, также $\det\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}(a, b)\right) \neq 0$. Тогда

$\exists U(a)$ и $V(b)$ такое, что $\exists! \varphi : U(a) \to V(b)$ класса C^r, что $\forall x \in U(a)$ верно $(x, \varphi(x))$ — решение этой системы.

4 Простое k-мерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$

1. $M \subset \mathbb{R}^m$ — простое k-мерное многообразие в $\mathbb{R}^m$ (непрерывное), если оно гомеоморфно открытому множеству из R^k.

   $\exists O \subset \mathrm{R}^k$ и $\exists \Phi : O \to M$ такое, что

   - Φ — сюрьекция;
   - Φ — непрерывное;
   - Φ — обратимо и Φ^{-1} — непрерывно.

2. $M \subset \mathbb{R}^m$ — простое, k —мерное, C^r — гладкое многообразие, если:

   $\exists O \subset \mathrm{R}^k$, $\Phi : O \to \mathbb{R}^m$:

   - $\Phi(O) = M$, и это гомеоморфизм;
   - $\Phi \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$ — это гладкость;
   - $\forall t \in O$ верно, что rang $\Phi'(t) = k$.

5 Касательное пространство к k-мерному многообразию в $\mathbb{R}^m$

Пусть $\Phi : O \subset \mathrm{R}^k \to \mathbb{R}^m$ —C^r-параметризация $U(p) \cap M$, $p \in M$ и $\Phi(t_0) = p$. Тогда $\Phi'(t_0)(\mathrm{R}^k)$ —касательное пространство к k-мерному многообразию M в точке p.

Часть II

Теоремы

6 Лемма о "почти локальной инъективности"

$F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — дифференцируема в точке x_0,

$\det F'(x_0) \neq 0$,

O — область.

Тогда $\exists c, \delta > 0 : \forall h : |h| < \delta : |F(x_0 + h) - F(x_0)| \geq c \cdot |h|$

6.1 Доказательство

$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F'(x_0)h + \alpha(h)\,|h|| \geq |F'(x_0)h| - |\alpha(h)|\,|h| \geq (\widetilde{c} - |\alpha(h)|)\,|h| \geq \dfrac{c}{2}\,|h|$

Возьмём в качестве $\widetilde{c} = \dfrac{1}{\|(F'(x_0))^{-1}\|}$.

Пусть при $|h| < \delta$ будет верно, что $|\alpha(h)| < \dfrac{\widetilde{c}}{2}$.

7 Теорема о сохранении области

$F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, где O — открыто,

для любого $x \in O$ выполняется $\det F'(x) \neq 0$. Тогда $F(O)$ — открыто.

7.1 Доказательство

Пусть $x_0 \in O$ и $y_0 = F(x_0) \in F(O)$, необходимо проверить, что y_0 — внутренняя точка $F(O)$.

По лемме о "почти локальной инъективности" существуют такие c и δ, что для любого $h \in \overline{B(0, \delta)}$ верно $|F(x_0 + h) - F(x_0)| \geq c|h|$ (и в частности $F(x_0 + h) \neq F(x_0)$ при $|h| = \delta$).

$r := \dfrac{1}{2}\text{dist }(y_0, F(S(x_0, \delta))) > 0$

Проверим, что $B(y_0, r) \subset F(O)$. Пусть $y \in B(y_0, r)$ и $g(x) := |F(x) - y|$ — функция на $\overline{B(x_0, \delta)}$.

1. На $S(x_0, \delta)$ верно, что $|F(x) - y| \geq r$
2. При $x = x_0$ выполняется, что $|F(x_0) - y| = |y_0 - y| < r$, по теореме Вейерштрасса g достигается минимума внутри шара $B(x_0, \delta)$.

Пусть $l : x \mapsto |F(x) - y|^2$ — достигает минимума таким же образом.

Найдём минимум с помощью необходимого условию экстремума, т.е. производная должна быть равна 0.

$$\begin{cases} l'_{x_1} = 0 \quad 2(f_1(x_1, \ldots, x_m) - y_1) \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \ldots + 2(f_m(x_1, \ldots, x_m) - y_m) \cdot \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} = 0 \\ \ldots \\ l'_{x_m} = 0 \quad 2(f_1(x_1, \ldots, x_m) - y_1) \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} + \ldots + 2(f_m(x_1, \ldots, x_m) - y_m) \cdot \dfrac{\partial f_m}{\partial x_m} = 0 \end{cases}$$

Поскольку матрица $F'(x)$ невырожденная по условию, то получаем, что $f_i(x) - y = 0$ для всех i.

8 Следствие о сохранении области для отображений в пространство меньшей размерности

$F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, где:

$l < m$,

$F \in C^1(O)$,

rang $F'(x) = l$ при всех x.

Тогда $F(O)$ — открыто.

8.1 Доказательство

В точке x_0 и в окрестности ранг реализован на первых l столбцах.

Пусть $\widetilde{F} = \begin{pmatrix} F \\ x_{l+1} \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} : O \to \mathbb{R}^m$

$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (F(x_1, \dots, x_m), x_{l+1}, \dots, x_m)$

$\det \widetilde{F}(x_0) = \det F(x_0) \neq 0$, а также $\forall x \in U(x_0)$.

Значит $\widetilde{F}(U(x_0))$ открыто в $\mathbb{R}^m$, а $F(U(x_0))$ — проекция на $\mathbb{R}^l$.

9 Теорема о гладкости обратного отображения

$T \in C^r\left(O, \mathbb{R}^m\right)$ $(r = 1,\,2,\,\ldots,\,+\infty)$.

Пусть T — обратимо, $\det T'(x) \neq 0$ всюду. Тогда

$T^{-1} \in C^r$ и при этом $\left(T^{-1}\right)'(y_0) = \left(T'(x_0)\right)^{-1}$, если $y_0 = T(x_0)$.

9.1 Доказательство

Индукция по r:

- База $r = 1$:

  $S = T^{-1}$ — обратное отображение, S — непрерывно (по теореме о сохранении области).

  O — открытое $\Rightarrow T(O)$ — открытое, значит $T : \mathbb{R}^m_{(1)} \to \mathbb{R}^m_{(2)}$, а $S : \mathbb{R}^m_{(2)} \to \mathbb{R}^m_{(1)}$, значит и S^{-1} — тоже открытое.

  $T(O) = O_1$, $y_0 \in O_1$, верно ли, что S — дифференцируема в y_0? Обозначим $A = T'(x_0)$.

  По лемме о почти локальной инъективности $\exists c, \delta : x \in B(x_0, \delta)$, что $|T(x) - T(x_0)| \geq c|x - x_0|$

  По определению дифференцирования $T(x) - T(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x)|x - x_0|$

  $S(y) - S(y_0) = A^{-1}(y - y_0) + A^{-1}\alpha\left(S(y)\right)|S(y) - S(y_0)|$.

  Пусть $\beta = A^{-1}\alpha\left(S(y)\right)|S(y) - S(y_0)|$

  Пусть y близко к $y_0 : |x - x_0| = |S(y) - S(y_0)| < \delta$ — по непрерывности S'.

  $|\beta(y)| = |x - x_0| \cdot \left|A^{-1}\alpha\left(S(y)\right)\right| \leq \dfrac{1}{c}\,|T(x) - T(x_0)| \cdot \|A^{-1}\| \alpha\left(S(y)\right)| = \dfrac{\|A^{-1}\|}{c}\,|\alpha\left(S(y)\right)|\,|y - y_0| = o(|y - y_0|)$ при $y \to y_0$.

  $|T(x) - T(x_0)| \geq c|x - x_0| \Rightarrow |x - x_0| \leq \dfrac{1}{c}\,|T(x) - T(x_0)|$.

  $S' : y \xrightarrow{C^1} T^{-1}(y) = x \xrightarrow{C^1} T'(x) \xrightarrow{C^\infty} \left(T'(x)\right)^{-1} = S'$.

- Индукционный переход без доказательства:

  $r = 1 \Rightarrow r = 2$, т.е. $T \in C^2 \Rightarrow S \in C^2$, т.е. $S' \in C^1$, а также $T \in C^1$ и $S \in C^1$.

10 Лемма о приближении отображения его линеаризацией

$T \in C^1(O, \mathbb{R}^m)$, $x_0 \in O$.

Тогда $|T(x_0 + h) - T(x_0) - T'(x_0)h| \geq M \cdot |h|$, где $M = \sup\limits_{z \in [x_0, x_0 + h]} \|T'(z) - T'(x_0)\|$.

10.1 Доказательство

$|F(x) - F(x_0)| \leq \sup\limits_{z \in [x_0, x]} \|F^{-1}(z)\| \cdot |x - x_0|$ — по теореме Лагранжа.

$F(x) = T(x) - T'(x_0) \cdot X$

$F'(x) = T'(x) - T'(x_0)$

$|T(x_0 + h) - T(x_0) - T'(x_0)h| = |F(x_0 + h) - F(x_0)| \leq \sup\limits_{z \in [x_0, x_0 + h]} \|F'(z)\| |h|$.

11 Теорема о локальной обратимости

$T \in C^1(O, \mathbb{R}^m)$, $x_0 \in O$ и $\det T'(x_0) \neq 0$. Тогда

$\exists U(x_0) : T\big|_{U(x_0)}$ — диффеоморфизм.

11.1 Доказательство

Достаточно доказать, что $\exists U(x_0)$, что $T\big|_{U(x_0)}$ — обратимо (и для любого $x \in U(x_0)$ $\det T'(x) \neq 0$).

$T'(x_0)$ — обратимо, значит $\exists c > 0 : \forall h\ |T'(x_0)h| \geq c|h|$, где $c = \dfrac{1}{\|T'(x_0)^{-1}\|}$.

Возьмём $U = B(x_0, r) \subset O$ так, что при $x \in U$ и было верным:

$\det T'(x) \neq 0$ и $\|T'(x) - T'(x_0)\| < \dfrac{c}{4}$.

Проверим, что $T\big|_U$ — взаимно-однозначное отображение.

$x, y \in U$ и $y = x + h$

$T(y) - T(x) = (T(x+h) - T(x) - T'(x)h) + (T'(x)h - T'(x_0)h) + T'(x_0)h$

(Здесь и ниже римскими цифрами отображается номер скобки в выражении сверху)

$|T(y) - T(x)| \geq |T'(x_0)h| - |\mathrm{I}| - |\mathrm{II}| \geq c|h| - \dfrac{c}{2}|h| - \dfrac{c}{4}|h| = \dfrac{c}{4}|h| \neq 0.$

$|\mathrm{I}| \geq M|h|$

$|T(x_0 + h) - T(x_0) - T'(x_0)h| \leq M|h|$

$M = \sup \|T'(z) - T'(x_0)\|$, $z \in [x_0, x_0 + h]$

$M \leq \dfrac{c}{2}$.

12 Теорема о неявном отображении

$F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$, $F \in C^r(O, \mathbb{R}^n)$,

$(a, b) \in O$ и $F(a, b) = 0$,

$\det F'_y(a, b) \neq 0$.

Тогда:

1. Существует открытое $P \in \mathbb{R}^m$, $a \in P$ и также существует открытое $Q \in \mathbb{R}^n$, $b \in Q$ такие, что

   $\exists! \varphi : P \to Q$ — C^r-гладкое, такое, что $\forall x \in P$ $F(x, \varphi(x)) = 0$.

2. $\varphi'(x) = -\left(F'_y(x, \varphi(x))\right) \cdot F'_x(x, \varphi(x))$.

12.1 Доказательство

1. $\Phi : O \to \mathbb{R}^{m+n}$

   $(x, y) \mapsto (x, F(x, y))$

   $\Phi' = \begin{pmatrix} \mathbb{E} & 0 \\ F'_x & F'_y \end{pmatrix}$, $\det \Phi'(a, b) \neq 0$

   $\exists \widetilde{U}(a, b) : \Phi\big|_{\widetilde{U}}$ — диффеоморфизм.

   $\widetilde{U} = P_1 \times Q$, где $a \in P_1$, $b \in Q$.

   (a) $\widetilde{V} = \Phi\left(\widetilde{U}\right)$ — открыто;

   (b) $\exists \psi = \Phi^{-1} : \widetilde{V} \to \widetilde{U}$;

   (c) Φ не меняет первую координату, значит ψ тоже не меняет,

   $\psi(u, v) = (u, H(u, v))$, $H : \widetilde{V} \to \mathbb{R}^n$, $H \in C^r$;

   (d) "ось x" и "ось u" одно и то же $\mathbb{R}^m$,

   $P := (\mathbb{R}^m \times \{O_n\}) \cap \widetilde{V}$ — открыто в $\mathbb{R}^m$;

   (e) $\psi(x) := H(x, 0) : P \to Q : F(x, \psi(x)) = 0$ — единственно,

   $x \in P$, $y \in Q$ $F(x, y) = 0$, $(x, y) = \psi\left(\Phi(x, Y)\right) = \psi(x, 0) = (x, H(x, 0))$.

2. $F(x, \varphi(x)) = 0$, $F \circ H = 0$,

$$\begin{pmatrix} F'_x & F'_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ \varphi'(x) \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow F'_x + F'_y \varphi'(x) = 0,$$

$$F'_y \varphi' = -F'_x$$

$$\varphi' = -\left(F'_y\right)^{-1} F'_x$$

13 Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений

$M \subset \mathbb{R}^m$, зафиксируем $1 \le k < m$ и $1 \le r \le +\infty$.

Тогда $\forall p \in M$ эквивалентны следующие два утверждения:

1. $\exists U \subset \mathbb{R}^m$ — открытое, $p \in U$,

   $M \cap U$ — простое k-мерное C^r-гладкое многообразие;

2. $\exists \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ — открытое, $p \in \widetilde{U}$,

   что существуют функции $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_{m-k} : \widetilde{U} \to \mathbb{R} \in C^r$ такие, что

   $x \in M \cap \widetilde{U} \iff$

   $$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ \ldots \\ f_{m-k}(x) = 0 \end{cases}$$

   и grad $f_1(p), \ldots,$ grad $f_{m-k}(p)$ — ЛНЗ.

13.1 Доказательство

- $1 \Rightarrow 2$:

  Существует параметризация $\Phi \in C^r\left(O \subset \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m\right)$,

  $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — координатные функции Φ и $p = \Phi(t_0)$, rang $\Phi'(t_0) = k$.

  Можно считать, что $\left(\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t_0)\right)$ — невырождена.

  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$.

  $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ — проекция, $x \mapsto (x_1, \ldots, x_k)$.

  $L \circ \Phi$ имеет невырожденный производный оператор в точке t_0.

  $\exists w(t_0)$ — окрестность t_0, $\exists V \in \mathbb{R}^k$ — открытое и $L \circ \Phi : w \to V$ — диффеоморфизм.

  $L(w) \to V$ — взаимно-однозначеное отображение, т.е. $\Phi(w)$ — график некоторого отображения $H :$ $V \to \mathbb{R}^{m-k}$.

Пусть $\psi = (L \circ \Phi)^{-1} : V \to w$, $\psi \in C^r$.

Если $\widetilde{x} \in V$, то $(\widetilde{x}, H(\widetilde{x})) = \Phi(w(\widetilde{x})) \Rightarrow H \in C^r$.

$\Phi(w)$ — открыто в M, $\exists$ открытое $\widetilde{U} \in \mathbb{R}^m$ такое, что $\widetilde{U} \cap M = \Phi(w)$ (можно считать, что $\widetilde{U} \subset V \times \mathbb{R}^{m-k}$.

$f_j : \widetilde{U} \to \mathbb{R}$, $f_j(x) = H_j\left(L(x)\right) - x_{k+j}$, если $x \in \widetilde{U} \cap M \Leftrightarrow$ все $f_j(x) = 0$.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial H_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial H_1}{\partial x_k} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial H_2}{\partial x_k} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots \\ \dfrac{\partial H_{m-k}}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial X_{m-k}}{x_k} & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$, где $m-k$ строчек и все они ЛНЗ.

- $2 \Rightarrow 1$:

  Из предыдущего пункта у нас есть система уравнение, для которой верно, что $\operatorname{grad} f_i(p)$ — ЛНЗ, можно считать, что $\det\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_{k+j}}(p)\right)_{i,j=1..m-k} \neq 0$.

  По теореме о неявном отображении $\exists H : P \to Q$, где P — окрестность $(p_1, \ldots, p_k)$, а Q — окрестность $(p_{k+1}, \ldots, p_m)$,

  что $\forall\ (x_1, \ldots, x_k) \in P$ точка $(x_1, \ldots, x_k, H_1(x_1, \ldots, x_k), H_2(x_1, \ldots, x_k), \ldots, H_{m-k}(x_1, \ldots, x_k))$ удовлетворяет системе уравнений.

  $\Phi : P \to \mathbb{R}^m$,

  $u \mapsto (u, H(u))$ — параметризация нашего многообразия, $(P \times Q) \cap M$.

14 Следствие о двух параметризациях

$M \subset \mathbb{R}^m$ — k-мерное простое C^r-гладкое многообразие, $p \in M$, U — открытое, $p \in U$.

$\Phi_1 : O_1 \subset \mathbb{R}^k \to U \cap M$,

$\Phi_2 : O_2 \subset \mathbb{R}^k \to U \cap M$ (оба отображние "на" и даже гомеоморфизм)

($\phi_i \in C^r\left(O_i, \mathbb{R}^m\right)$). Тогда существует диффеоморфизм $\psi : O_1 \to O_2$ и $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \psi$.

14.1 Доказательство

Для случая, когда rang $\Phi_1'(p)$ и rang $\Phi_2'(p)$ на одном и том же наборе столбцов (во всех точках O_1 и O_2).

Тогда $\Phi_1 \circ L$ и $\Phi_2 \circ L$ — тоже диффеоморфизмы.

Дальше всё очевидно, что $\Phi_1 = \Phi_2 \circ (L \circ \Phi_2)^{-1} \circ (L \circ \Phi_1)$.

15 Лемма о корректности определения касательного пространства

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — C^r-параметризация $U(p) \cap M$, $p \in M$, $\Phi(t_0) = p$. Тогда образ оператора $\Phi'(t_0) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — это k-мерное подпространство в $\mathbb{R}^m$, не зависящее от Φ.

15.1 Доказательство

Φ — параметризация, значит rang $\Phi' = k$, значит образ k-мерный. Если есть параметризацция Φ_2, можно считать, что существует диффеоморфизм ψ, что $\Phi_2 = \Phi \circ \psi$, и при этом $\Phi_2' = \Phi' \cdot \psi'$, где ψ' — невырожденный, значит Φ_2' совпадает с Φ'.