

# Содержание

|    |  |    |
|----|--|----|
| I  | Определения  | 9  |
| 1  | Диффеоморфизм  | 10 |
| 2  | Формулировка теоремы о локальной обратимости в терминах систем уравнений | 11 |
| 3  | Формулировка теоремы о неявном отображении в терминах систем уравнений   | 12 |
| 4  | Простое $k$ -мерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$                | 13 |
| 5  | Касательное пространство к $k$ -мерному многообразию в $\mathbb{R}^m$    | 14 |
| 6  | Относительный локальный максимум, минимум, экстремум                     | 15 |
| 7  | Формулировка достаточного условия относительного экстремума              | 16 |
| 8  | Поточечная сходимость последовательности функций на множестве            | 17 |
| 9  | Равномерная сходимость последовательности функций на множестве           | 18 |
| 10 | Равномерная сходимость функционального ряда                              | 19 |
| 11 | Формулировка критерия Больцано–Коши для равномерной сходимости           | 20 |
| 12 | Степенной ряд, радиус сходимости степенного ряда, формула Адамара        | 21 |
| 13 | Кусочно-гладкий путь   | 22 |
| 14 | Векторное поле   | 23 |
| 15 | Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути                        | 24 |

|   |    |
|---|----|
| 16 Потенциал, потенциальное векторное поле                                | 25 |
| 17 Локально потенциальное векторное поле                                  | 26 |
| 18 Похожие пути   | 27 |
| 19 Интеграл локально-потенциального векторного поля по произвольному пути | 28 |
| 20 Гомотопия путей связанная и петельная                                  | 29 |
| 21 Односвязная область  | 30 |
| 22 Полукольцо, алгебра, сигма-алгебра                                     | 31 |
| 23 Объем  | 32 |
| 24 Ячейка   | 33 |
| 25 Классический объем в $\mathbb{R}^m$                                    | 34 |
| 26 Мера, пространство с мерой   | 35 |
| 27 Полная мера  | 36 |
| 28 Сигма-конечная мера  | 37 |
| 29 Дискретная мера  | 38 |
| II Теоремы  | 39 |
| 30 Лемма о "почти локальной инъективности"                                | 40 |
| 30.1 Доказательство . . . . .   | 40 |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>31 Теорема о сохранении области</b>  | <b>41</b> |
| 31.1 Доказательство . . . . .   | 41        |
| <b>32 Следствие о сохранении области для отображений в пространство меньшей размерности</b> | <b>42</b> |
| 32.1 Доказательство . . . . .   | 42        |
| <b>33 Теорема о гладкости обратного отображения</b>   | <b>43</b> |
| 33.1 Доказательство . . . . .   | 43        |
| <b>34 Лемма о приближении отображения его линеаризацией</b>                                 | <b>44</b> |
| 34.1 Доказательство . . . . .   | 44        |
| <b>35 Теорема о локальной обратимости</b>   | <b>45</b> |
| 35.1 Доказательство . . . . .   | 45        |
| <b>36 Теорема о неявном отображении</b>   | <b>46</b> |
| 36.1 Доказательство . . . . .   | 46        |
| <b>37 Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений</b>                        | <b>48</b> |
| 37.1 Доказательство . . . . .   | 48        |
| <b>38 Следствие о двух параметризациях</b>  | <b>50</b> |
| 38.1 Доказательство . . . . .   | 50        |
| <b>39 Лемма о корректности определения касательного пространства</b>                        | <b>51</b> |
| 39.1 Доказательство . . . . .   | 51        |
| <b>40 Касательное пространство в терминах векторов скорости гладких путей</b>               | <b>52</b> |

|  |           |
|--|-----------|
| 40.1 Доказательство . . . . .  | 52        |
| <b>41 Касательное пространство к графику функции и к поверхности уровня</b>                            | <b>53</b> |
| <b>42 Необходимое условие относительного локального экстремума</b>                                     | <b>54</b> |
| 42.1 Доказательство . . . . .  | 54        |
| <b>43 Вычисление нормы линейного оператора с помощью собственных чисел</b>                             | <b>55</b> |
| 43.1 Доказательство . . . . .  | 55        |
| <b>44 Теорема Стокса–Зайделя о непрерывности предельной функций. Следствие для рядов</b>               | <b>56</b> |
| 44.1 Доказательство . . . . .  | 56        |
| 44.2 Следствие для рядов . . . . .   | 56        |
| 44.2.1 Доказательство . . . . .  | 56        |
| <b>45 Метрика в пространстве непрерывных функций на компакте, его полнота</b>                          | <b>57</b> |
| 45.1 Доказательство . . . . .  | 57        |
| <b>46 Теорема о предельном переходе под знаком интеграла. Следствие для рядов</b>                      | <b>58</b> |
| 46.1 Доказательство . . . . .  | 58        |
| 46.2 Следствие для рядов . . . . .   | 58        |
| 46.2.1 Доказательство . . . . .  | 58        |
| <b>47 Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру</b>                                    | <b>59</b> |
| 47.1 Доказательство . . . . .  | 59        |
| <b>48 Теорема о предельном переходе под знаком производной. Дифференцирование функционального ряда</b> | <b>60</b> |

|  |           |
|--|-----------|
| 48.1 Доказательство . . . . .  | 60        |
| 48.2 Дифференцирование функционального ряда . . . . .  | 60        |
| 48.2.1 Доказательство . . . . .  | 61        |
| <b>49 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда</b>                       | <b>62</b> |
| 49.1 Доказательство . . . . .  | 62        |
| <b>50 Дифференцируемость гамма функции</b>   | <b>63</b> |
| 50.1 Доказательство . . . . .  | 63        |
| <b>51 Теорема о предельном переходе в суммах</b>   | <b>64</b> |
| 51.1 Доказательство . . . . .  | 64        |
| <b>52 Теорема о перестановке двух предельных переходов</b>                                       | <b>65</b> |
| 52.1 Доказательство . . . . .  | 65        |
| <b>53 Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда</b>                            | <b>66</b> |
| 53.1 Доказательство . . . . .  | 66        |
| <b>54 Теорема о круге сходимости степенного ряда</b>   | <b>67</b> |
| 54.1 доказательство . . . . .  | 67        |
| <b>55 Теорема о непрерывности степенного ряда</b>  | <b>68</b> |
| 55.1 Доказательство . . . . .  | 68        |
| <b>56 Теорема о дифференцировании степенного ряда. Следствие об интегрировании. При-<br/>мер</b> | <b>69</b> |
| 56.1 Доказательство . . . . .  | 69        |

|  |           |
|--|-----------|
| 56.2 Следствие об интегрировании . . . . .                                       | 69        |
| 56.3 Пример . . . . .  | 70        |
| <b>57 Свойства экспоненты</b>  | <b>71</b> |
| 57.1 Следствие . . . . .   | 71        |
| <b>58 Метод Абеля суммирования рядов. Следствие</b>                              | <b>72</b> |
| 58.1 Доказательство . . . . .  | 72        |
| 58.2 Следствие . . . . .   | 72        |
| 58.2.1 Доказательство . . . . .  | 72        |
| <b>59 Единственность разложения функции в ряд</b>                                | <b>73</b> |
| 59.1 Доказательство . . . . .  | 73        |
| <b>60 Разложение бинома в ряд Тейлора</b>  | <b>74</b> |
| 60.1 Доказательство . . . . .  | 74        |
| <b>61 Теорема о разложимости функции в ряд Тейлора</b>                           | <b>75</b> |
| 61.1 Доказательство . . . . .  | 75        |
| <b>62 Теорема Коши о перманентности метода средних арифметических</b>            | <b>76</b> |
| 62.1 Дополнительное определение . . . . .  | 76        |
| 62.2 Формулировка . . . . .  | 76        |
| 62.3 Доказательство . . . . .  | 76        |
| <b>63 Простейшие свойства интеграла векторного поля по кусочно-гладкому пути</b> | <b>77</b> |
| 63.1 Доказательство . . . . .  | 78        |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>64 Обобщенная формула Ньютона–Лейбница</b>                                | <b>79</b> |
| 64.1 Доказательство . . . . .  | 79        |
| <b>65 Характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов</b> | <b>80</b> |
| 65.1 Доказательство . . . . .  | 80        |
| <b>66 Необходимое условие потенциальности гладкого поля. Лемма Пуанкаре</b>  | <b>81</b> |
| 66.1 Необходимое условие потенциальности гладкого поля . . . . .             | 81        |
| 66.2 Лемма Пуанкаре . . . . .  | 81        |
| 66.2.1 Доказательство . . . . .  | 81        |
| 66.3 Следствие к лемме Пуанкаре . . . . .                                    | 81        |
| 66.3.1 Доказательство . . . . .  | 81        |
| <b>67 Лемма о гусенице</b>   | <b>82</b> |
| 67.1 Доказательство . . . . .  | 82        |
| <b>68 Лемма о равенстве интегралов по похожим путям</b>                      | <b>83</b> |
| 68.1 Доказательство . . . . .  | 83        |
| <b>69 Лемма о похожести путей, близких к данному</b>                         | <b>84</b> |
| 69.1 Доказательство . . . . .  | 84        |
| <b>70 Равенство интегралов по гомотопным путям</b>                           | <b>85</b> |
| 70.1 Доказательство . . . . .  | 85        |
| <b>71 Теорема о резиночке</b>  | <b>86</b> |
| 71.1 Доказательство . . . . .  | 86        |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>72 Теорема Пуанкаре для односвязной области</b>                                   | <b>87</b> |
| 72.1 Доказательство . . . . .  | 87        |
| <b>73 Свойства объема: усиленная монотонность, конечная полуаддитивность</b>         | <b>88</b> |
| 73.1 Доказательство . . . . .  | 88        |
| <b>74 Теорема об эквивалентности счетной аддитивности и счетной полуаддитивности</b> | <b>89</b> |
| 74.1 Доказательство . . . . .  | 89        |
| <b>75 Теорема о непрерывности снизу</b>  | <b>90</b> |
| 75.1 Доказательство . . . . .  | 90        |
| <b>76 Теоремы о непрерывности сверху</b>   | <b>91</b> |
| 76.1 Доказательство . . . . .  | 91        |



## Часть I

# Определения

# 1 Диффеоморфизм

Область в  $\mathbb{R}^m$  — открытое связное множество.

Пусть  $f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  — диффеоморфизм, где  $O$  — область, если:

1.  $f$  — обратима;
2.  $f$  — дифференцируема;
3.  $(f^{-1})$  — тоже дифференцируема.

## 2 Формулировка теоремы о локальной обратимости в терминах систем уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_m) = y_1 \\ \dots \\ f_m(x_1, \dots, x_m) = y_m \end{cases}$$

Все  $f_i$  — гладкие.

Пусть при  $y = (b_1, \dots, b_m)$  существует единственное решение  $x = (a_1, \dots, a_m)$ , что  $\det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right) \neq 0$ .

Тогда для  $y_0$  близких к  $(b_1, \dots, b_m)$  существует решение  $(x_1, \dots, x_m)$  близкое к  $(a_1, \dots, a_m)$  и зависящее от  $y$ , причём оно гладкое.

### 3 Формулировка теоремы о неявном отображении в терминах систем уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \end{cases}$$

$x = a$  и  $y = b$  удовлетворяют системе уравнений, а также  $f_i$  — функции класса  $C^r$ , также

$$\det \left( \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a, b) \right) \neq 0. \text{ Тогда}$$

$\exists U(a)$  и  $V(b)$  такое, что  $\exists! \varphi : U(a) \rightarrow V(b)$  класса  $C^r$ , что  $\forall x \in U(a)$  верно  $(x, \varphi(x))$  — решение этой системы.

## 4 Простое $k$ -мерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$

1.  $M \subset \mathbb{R}^m$  — простое  $k$ -мерное многообразие в  $\mathbb{R}^m$  (непрерывное), если оно гомеоморфно открытому множеству из  $\mathbb{R}^k$ , т.е.:

$\exists O \subset \mathbb{R}^k$  и  $\exists \Phi : O \rightarrow M$  такое, что

- $\Phi$  — сюръекция;
- $\Phi$  — непрерывное;
- $\Phi$  — обратимо и  $\Phi^{-1}$  — непрерывно.

2.  $M \subset \mathbb{R}^m$  — простое,  $k$ -мерное,  $C^r$  — гладкое многообразие, если:

$\exists O \subset \mathbb{R}^k$ ,  $\Phi : O \rightarrow \mathbb{R}^m$ :

- $\Phi$  — гомеоморфизм;
- $\Phi \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$  — это гладкость;
- $\forall t \in O$  верно, что  $\text{rang } \Phi'(t) = k$ .

## 5 Касательное пространство к $k$ -мерному многообразию в $\mathbb{R}^m$

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  —  $C^r$ -параметризация  $U(p) \cap M$ ,  $p \in M$ ,  $\Phi(t_0) = p$ . Тогда  $\Phi'(t_0)(\mathbb{R}^k)$  называется касательным пространством к  $k$ -мерному многообразию  $M$  в точке  $p$ . Обозначается  $Tp(M) = \{\Phi'(t_0)h, h \in \mathbb{R}^k\}$ .

## 6 Относительный локальный максимум, минимум, экстремум

$$f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R},$$

$\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ , тогда

$x_0 \in E$ ,  $\Phi(x_0) = 0$  — точка относительного локального максимума  $f$ , если  $\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E, \Phi(x) = 0$   
 $f(x) \leq f(x_0)$ .

Аналогично определяется минимум.

## 7 Формулировка достаточного условия относительного экстремума

$$f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}, \Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^n, f, \Phi \in C^1,$$

$$a \in E : \text{rang } \Phi'(a) = n,$$

$\lambda \in \mathbb{R}^n$  и верно

$$\begin{cases} f'(a) - \lambda \Phi'(a) = 0 \\ \Phi(a) = 0 \end{cases}$$

Если  $h = (h_x, h_y) \in \mathbb{R}^{m+n}$  удовлетворяет  $\Phi'(a)h = 0$ , то можно выразить  $h_y = \psi(h_x)$ .

Рассмотрим квадратичную форму  $Q(h_x) = d^2G(a, (h_x, \psi(h_x)))$ , где  $G = f - \lambda\Phi$  (форма Лагранжа).

$Q$  — положительно определенная, значит точка локального минимума, если отрицательно определенная — точка локального максимума,  $Q$  — неопределенная — нет экстремума, в остальных случаях непонятно.



## 8 Поточечная сходимость последовательности функций на множестве

$f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ , если  $\exists f : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ , что для любого  $x_0 \in E$  предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ , то

$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$  сходится поточечно на  $E$ .

## 9 Равномерная сходимость последовательности функций на множестве

$f, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}, E \subset X$ , тогда  $f_n$  — равномерно сходится на  $E$  к функции  $f$  если

$$M_n := \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Обозначается как  $f_n \rightrightarrows f$  на множестве  $E$ .

## 10 Равномерная сходимость функционального ряда

1. Функциональный ряд сходится поточечно на  $E$ , если для любого  $x \in E$  сумма  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  — сходится к сумме  $S(x)$ ;
2. Функциональный ряд сходится равномерно на  $E$  (к сумме  $S(x)$ ), если  $S_n(x) \Rightarrow S(x)$  на  $E$ , где  $S_n(x)$  — последовательность частичных сумм.

## 11    Формулировка критерия Больцано–Коши для равномерной сходимости

Функциональный ряд  $\sum u_n$  равномерно сходится на  $E$  эквивалентно следующему утверждению:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall m \geq n \geq N \text{ и } \forall x \in E : \left| \sum_{k=n}^m u_k(x) \right| < \varepsilon$$

## 12 Степенной ряд, радиус сходимости степенного ряда, формула Адамара

$a_n \in \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ,  $B(z_0, r) \subset \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ , тогда  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$  называют **степенным рядом**.

Назовём  $R$  **радиусом сходимости** степенного ряда, если:

- при  $|z - z_0| < R$  ряд абсолютно сходится;
- при  $|z - z_0| > R$  ряд расходится.

$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$  — формула Адамара.

## 13 Кусочно-гладкий путь

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  — кусочно-гладкий путь, если существует такое дробление  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ , что для любого  $i \in [1, n]$  путь  $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$  — гладкий (в точка  $t_{i-1}$  и  $t_i$  есть односторонние производные).

## 14 Векторное поле

$V : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  — векторное поле. По умолчанию считается, что  $V$  — непрерывное.

## 15 Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути

$V$  — векторное поле в  $E$ ,  $E$  — открытое,  $\gamma$  — кусочно-гладкий путь в  $E$ . Тогда

$$I(V, \gamma) := \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b V_1(\gamma(t)) \gamma'_1(t) + \dots + V_m(\gamma(t)) \gamma'_m(t) dt$$

интеграл векторного поля  $V$  по кусочно-гладкому пути  $\gamma$ .



## 16 Потенциал, потенциальное векторное поле

$O \subset \mathbb{R}^m$  — область,  $V : O \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Тогда  $V$  — потенциальное векторное поле, а  $f$  — его потенциал, если  $f \in C^1(O, \mathbb{R})$  и  $\text{grad } f = V$  в области  $O$ .

## 17 Локально потенциальное векторное поле

$V : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  — локально потенциальное векторное поле, если  $O$  — область, а  $\forall x \in O : \exists U(x)$ , что  $V$  в  $U(x)$  — потенциальное поле.

## 18 Похожие пути

$V$  — локально потенциальное векторное поле,  $\gamma, \bar{\gamma} : [a, b] \rightarrow O$  — непрерывны. Тогда  $\gamma$  и  $\bar{\gamma}$  — похожи, если у этих путей имеется одинаковая  $V$ -гусеница, т.е. существуют такие дробления  $t_0, t_1, \dots, t_n$  и  $\bar{t}_0, \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n$ , что  $a = t_0 = \bar{t}_0$  и  $b = t_n = \bar{t}_n$ , и шары  $B_1, B_2, \dots, B_k$ , а также  $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]} \subset B_k$  и  $\bar{\gamma}|_{[\bar{t}_{k-1}, \bar{t}_k]} \subset B_k$ .

## 19 Интеграл локально-потенциального векторного поля по произвольному пути

$I(V, \gamma) = I(V, \bar{\gamma}) = \int_a^b \langle V(\bar{\gamma}(t)), \bar{\gamma}'(t) \rangle dt$  — интеграл локально векторное поля  $V$  по произвольному пути  $\gamma$ , где  $\bar{\gamma}$  — похожий на  $\gamma$  кусочно-гладкий путь. В условиях соответствующей леммы такой всегда существует.

## 20 Гомотопия путей связанная и петельная

$\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow O$ , тогда гомотопия — это отображение  $\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow O$  — непрерывное, такое что  $\Gamma(\cdot, 0) = \gamma_0(\cdot)$  и  $\Gamma(\cdot, 1) = \gamma_1(\cdot)$ .

*Гомотопия связанная:*  $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ ,  $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$  и  $\forall u \in [0, 1] \Gamma(a, u) = \gamma_0(a)$  и  $\Gamma(b, u) = \gamma_0(b)$ .

*Гомотопия петельная:*  $\gamma_0(a) = \gamma_0(b)$ ,  $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$  и  $\forall u \in [0, 1] \Gamma(a, u) = \Gamma(b, u)$ .

## 21 Односвязная область

$O \subset \mathbb{R}^m$  — односвязная область, если  $O$  — область и любой замкнутый путь гомотопен постоянному.

## 22 Полукольцо, алгебра, сигма-алгебра

$X$  — множество,  $\mathcal{P} \subset 2^X$  — *полукольцо* если:

1.  $\emptyset \in \mathcal{P}$ ;
2.  $\forall A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$ ;
3.  $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{P}$  существует конечное число  $B_1, B_2, \dots, B_k \in \mathcal{P}$ , что  $A_1 \setminus A_2 = \bigsqcup_{i=1}^k B_i$ .

$\mathcal{A}$  — *алгебра* подмножеств  $X$ , если:

1.  $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$ ;
2.  $X \in \mathcal{A}$ .

$\sigma$ -*алгебра*  $\mathcal{A}$ , если это *алгебра* и ещё выполнено третье свойство:

$$\forall A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

Можно вместо объединения потребовать пересечение, поскольку из одного следует другое

## 23 Объем

$\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — аддитивная, если:

1.  $\mu$  не принимает одновременно бесконечности разных знаков;
2.  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
3.  $\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{P}$  — дизъюнкты, если  $A = \bigsqcup A_n \in \mathcal{P}$ , тогда  $\mu A = \mu A_1 + \mu A_2 + \dots + \mu A_n$ .

$\mu$  — объём, если:

1.  $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ;
2.  $\mu \geq 0$ ;
3.  $\mu$  — аддитивная.



## 24 Ячейка

$a, b \in \mathbb{R}^m$ ,  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i : a_i \leq x_i < b_i\}$  — ячейка.

## 25 Классический объем в $\mathbb{R}^m$

$$\mu[a, b) = \prod_{i=1}^m (b_i - a_i).$$

## 26 Мера, пространство с мерой

$\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — мера, если  $\mu$  — *объём*, а также выполнено свойство *счётной аддитивности*, т.е.:

$$\forall A, A_1, A_2, \dots, \text{ где } A_i \text{ — дизъюнкты и } A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i \Rightarrow \mu A = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu A_i.$$

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  — пространство с мерой, если  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра на множестве  $X$ , а  $\mu$  — мера на  $\mathcal{A}$ .

## 27 Полная мера

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $\mu$  — полная мера, если  $\forall E \in \mathcal{A}$  и  $\mu E = 0$  верно, что  $\forall e \in E : e \in \mathcal{A}$  и  $\mu e = 0$ .

## 28 Сигма-конечная мера

$(X, \mathcal{P}, \mu)$ ,  $\mu$  —  $\sigma$ -конечная, если можно представить  $X = \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k$ , где  $\mu B_k < +\infty$ .

## 29 Дискретная мера

$X$  — множество,  $A_1, A_2, \dots$  — точки множества  $X$ ,  $h_1, h_2, \dots \geq 0$ ,  $\mathcal{P} = 2^X$ , и для любого  $B \subset \mathcal{P}$

$$\mu B = \sum_{i: A_i \in B} h_i.$$

## Часть II

# Теоремы

## 30 Лемма о ”почти локальной инъективности”

$F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  — дифференцируема в точке  $x_0 \in O$ ,

$$\det F'(x_0) \neq 0,$$

$O$  — область.

Тогда  $\exists c, \delta > 0 : \forall h : |h| < \delta : |F(x_0 + h) - F(x_0)| \geq c \cdot |h|$

### 30.1 Доказательство

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F'(x_0)h + \alpha(h)| |h| \geq |F'(x_0)h| - |\alpha(h)| |h| \geq (\tilde{c} - |\alpha(h)|) |h| \geq \frac{c}{2} |h|$$

Возьмём в качестве  $\tilde{c} = \frac{1}{\|(F'(x_0))^{-1}\|}$ .

Пусть при  $|h| < \delta$  будет верно, что  $|\alpha(h)| < \frac{\tilde{c}}{2}$ .



## 31 Теорема о сохранении области

$F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , где  $O$  — открыто,

для любого  $x \in O$  выполняется  $\det F'(x) \neq 0$ . Тогда  $F(O)$  — открыто.

### 31.1 Доказательство

Пусть  $x_0 \in O$  и  $y_0 = F(x_0) \in F(O)$ , необходимо проверить, что  $y_0$  — внутренняя точка  $F(O)$ .

По лемме о "почти локальной инъективности" существуют такие  $c$  и  $\delta$ , что для любого  $h \in \overline{B(0, \delta)}$  верно  $|F(x_0 + h) - F(x_0)| \geq c|h|$  (и в частности  $F(x_0 + h) \neq F(x_0)$  при  $|h| = \delta$ ).

$$r := \frac{1}{2} \text{dist}(y_0, F(S(x_0, \delta))) > 0$$

Проверим, что  $B(y_0, r) \subset F(O)$ . Пусть  $y \in B(y_0, r)$  и  $g(x) := |F(x) - y|$  — функция на  $\overline{B(x_0, \delta)}$ .

1. На  $S(x_0, \delta)$  верно, что  $|F(x) - y| \geq r$
2. При  $x = x_0$  выполняется, что  $|F(x_0) - y| = |y_0 - y| < r$ , по теореме Вейерштрасса  $g$  достигается минимума внутри шара  $B(x_0, \delta)$ .

Пусть  $l : x \mapsto |F(x) - y|^2$  — достигает минимума таким же образом.

Найдём минимум с помощью необходимого условия экстремума, т.е. производная должна быть равна 0.

$$\begin{cases} l'_{x_1} = 0 & 2(f_1(x_1, \dots, x_m) - y_1) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + 2(f_m(x_1, \dots, x_m) - y_m) \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_1} = 0 \\ \dots \\ l'_{x_m} = 0 & 2(f_1(x_1, \dots, x_m) - y_1) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_m} + \dots + 2(f_m(x_1, \dots, x_m) - y_m) \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_m} = 0 \end{cases}$$

Поскольку матрица  $F'(x)$  невырожденная по условию, то получаем, что  $f_i(x) - y = 0$  для всех  $i$ .

## 32 Следствие о сохранении области для отображений в пространстве меньшей размерности

$F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ , где  $l < m$  и  $F \in C^1(O)$ ,

$\text{rang } F'(x) = l$  при всех  $x \in O$ .

Тогда  $F(O)$  — открыто.

### 32.1 Доказательство

В точке  $x_0$  и в окрестности ранг реализован на первых  $l$  столбцах.

Пусть  $\tilde{F} = \begin{pmatrix} F \\ x_{l+1} \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} : O \rightarrow \mathbb{R}^m$

$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (F(x_1, \dots, x_m), x_{l+1}, \dots, x_m)$

$\det \tilde{F}(x_0) = \det F(x_0) \neq 0$ , а также  $\forall x \in U(x_0)$ .

Значит  $\tilde{F}(U(x_0))$  открыто в  $\mathbb{R}^m$ , а  $F(U(x_0))$  — проекция на  $\mathbb{R}^l$ .

### 33 Теорема о гладкости обратного отображения

$T \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$  ( $r = 1, 2, \dots, +\infty$ ).

Пусть  $T$  — обратимо,  $\det T'(x) \neq 0$  при  $x \in O$ . Тогда

$T^{-1} \in C^r$  и при этом  $(T^{-1})'(y_0) = (T'(x_0))^{-1}$  при  $y_0 = T(x_0)$ .

#### 33.1 Доказательство

Индукция по  $r$ :

- База  $r = 1$ :

$S = T^{-1}$  — обратное отображение,  $S$  — непрерывно (по теореме о сохранении области).

$O$  — открытое  $\Rightarrow T(O)$  — открытое, значит  $T : \mathbb{R}_{(1)}^m \rightarrow \mathbb{R}_{(2)}^m$ , а  $S : \mathbb{R}_{(2)}^m \rightarrow \mathbb{R}_{(1)}^m$ , значит и  $S^{-1}$  — тоже открытое.

$T(O) = O_1$ ,  $y_0 \in O_1$ , верно ли, что  $S$  — дифференцируема в  $y_0$ ? Обозначим  $A = T'(x_0)$ .

По лемме о почти локальной инъективности  $\exists c, \delta : x \in B(x_0, \delta)$ , что  $|T(x) - T(x_0)| \geq c|x - x_0|$

По определению дифференцирования  $T(x) - T(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x)|x - x_0|$

$$S(y) - S(y_0) = A^{-1}(y - y_0) + A^{-1}\alpha(S(y))|S(y) - S(y_0)|.$$

Пусть  $\beta = A^{-1}\alpha(S(y))|S(y) - S(y_0)|$

Пусть  $y$  близко к  $y_0$  :  $|x - x_0| = |S(y) - S(y_0)| < \delta$  — по непрерывности  $S'$ .

$$|\beta(y)| = |x - x_0| \cdot |A^{-1}\alpha(S(y))| \leq \frac{1}{c} |T(x) - T(x_0)| \cdot \|A^{-1}\| |\alpha(S(y))| = \frac{\|A^{-1}\|}{c} |\alpha(S(y))| |y - y_0| = o(|y - y_0|)$$

при  $y \rightarrow y_0$ .

$$|T(x) - T(x_0)| \geq c|x - x_0| \Rightarrow |x - x_0| \leq \frac{1}{c} |T(x) - T(x_0)|.$$

$$S' : y \xrightarrow{C^1} T^{-1}(y) = x \xrightarrow{C^1} T'(x) \xrightarrow{C^\infty} (T'(x))^{-1} = S'.$$

- Индукционный переход без доказательства:

$r = 1 \Rightarrow r = 2$ , т.е.  $T \in C^2 \Rightarrow S \in C^2$ , т.е.  $S' \in C^1$ , а также  $T \in C^1$  и  $S \in C^1$ .

## 34 Лемма о приближении отображения его линеаризацией

$$T \in C^1(O, \mathbb{R}^m), x_0 \in O.$$

Тогда для любого  $h$   $|T(x_0 + h) - T(x_0) - T'(x_0)h| \leq M \cdot |h|$ , где  $M = \sup_{z \in [x_0, x_0+h]} \|T'(z) - T'(x_0)\|$ .

### 34.1 Доказательство

$$|F(x) - F(x_0)| \leq \sup_{z \in [x_0, x]} \|F'(z)\| \cdot |x - x_0| \text{ — по теореме Лагранжа.}$$

$$F(x) = T(x) - T'(x_0) \cdot X$$

$$F'(x) = T'(x) - T'(x_0)$$

$$|T(x_0 + h) - T(x_0) - T'(x_0)h| = |F(x_0 + h) - F(x_0)| \leq \sup_{z \in [x_0, x_0+h]} \|F'(z)\| |h|.$$

## 35 Теорема о локальной обратимости

$T \in C^1(O, \mathbb{R}^m)$ ,  $x_0 \in O$  и  $\det T'(x_0) \neq 0$ . Тогда

$\exists U(x_0) : T|_{U(x_0)}$  — диффеоморфизм.

### 35.1 Доказательство

Достаточно доказать, что  $\exists U(x_0)$ , что  $T|_{U(x_0)}$  — обратимо (и для любого  $x \in U(x_0)$   $\det T'(x) \neq 0$ ).

$T'(x_0)$  — обратимо, значит  $\exists c > 0 : \forall h |T'(x_0)h| \geq c|h|$ , где  $c = \frac{1}{\|T'(x_0)^{-1}\|}$ .

Возьмём  $U = B(x_0, r) \subset O$  так, что при  $x \in U$  и было верным:

$\det T'(x) \neq 0$  и  $\|T'(x) - T'(x_0)\| < \frac{c}{4}$ .

Проверим, что  $T|_U$  — взаимно-однозначное отображение.

$x, y \in U$  и  $y = x + h$

$$T(y) - T(x) = (T(x + h) - T(x) - T'(x)h) + (T'(x)h - T'(x_0)h) + T'(x_0)h$$

(Здесь и ниже римскими цифрами отображается номер скобки в выражении сверху)

$$|T(y) - T(x)| \geq |T'(x_0)h| - \text{I} - \text{II} \geq c|h| - \frac{c}{2}|h| - \frac{c}{4}|h| = \frac{c}{4}|h| \neq 0.$$

$$\text{I} \geq M|h|$$

$$|T(x_0 + h) - T(x_0) - T'(x_0)h| \leq M|h|$$

$$M = \sup \|T'(z) - T'(x_0)\|, z \in [x_0, x_0 + h]$$

$$M \leq \frac{c}{2}.$$

## 36 Теорема о неявном отображении

$$F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n, F \in C^r(O, \mathbb{R}^n),$$

$$(a, b) \in O \text{ и } F(a, b) = 0,$$

$$\det F'_y(a, b) \neq 0.$$

Тогда:

1. Существует открытое  $P \in \mathbb{R}^m$ ,  $a \in P$  и также существует открытое  $Q \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in Q$  такие, что

$$\exists! \varphi : P \rightarrow Q - C^r\text{-гладкое, такое, что } \forall x \in P \ F(x, \varphi(x)) = 0.$$

2.  $\varphi'(x) = - (F'_y(x, \varphi(x)))^{-1} \cdot F'_x(x, \varphi(x)).$

### 36.1 Доказательство

1.  $\Phi : O \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$

$$(x, y) \mapsto (x, F(x, y))$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \mathbb{E} & 0 \\ F'_x & F'_y \end{pmatrix}, \det \Phi'(a, b) \neq 0$$

$$\exists \tilde{U}(a, b) : \Phi|_{\tilde{U}} - \text{диффеоморфизм.}$$

$$\tilde{U} = P_1 \times Q, \text{ где } a \in P_1, b \in Q.$$

$$(a) \ \tilde{V} = \Phi(\tilde{U}) - \text{открыто;}$$

$$(b) \ \exists \psi = \Phi^{-1} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{U};$$

$$(c) \ \Phi \text{ не меняет первую координату, значит } \psi \text{ тоже не меняет,}$$

$$\psi(u, v) = (u, H(u, v)), \ H : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}^n, \ H \in C^r;$$

$$(d) \ \text{"ось } x" \text{ и "ось } u" \text{ одно и то же } \mathbb{R}^m,$$

$$P := (\mathbb{R}^m \times \{O_n\}) \cap \tilde{V} - \text{открыто в } \mathbb{R}^m;$$

$$(e) \ \psi(x) := H(x, 0) : P \rightarrow Q : F(x, \psi(x)) = 0 - \text{единственно,}$$

$$x \in P, y \in Q \ F(x, y) = 0, (x, y) = \psi(\Phi(x, Y)) = \psi(x, 0) = (x, H(x, 0)).$$

2.  $F(x, \varphi(x)) = 0, F \circ H = 0,$

$$\begin{pmatrix} F'_x & F'_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ \varphi'(x) \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow F'_x + F'_y \varphi'(x) = 0,$$

$$F'_y \varphi' = -F'_x$$

$$\varphi' = - \left(F'_y\right)^{-1} F'_x$$

## 37 Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений

$M \subset \mathbb{R}^m$ , зафиксируем  $1 \leq k < m$  и  $1 \leq r \leq +\infty$ .

Тогда  $\forall p \in M$  эквивалентны следующие два утверждения:

1.  $\exists U \subset \mathbb{R}^m$  — открытое,  $p \in U$ ,

$M \cap U$  — простое  $k$ -мерное  $C^r$ -гладкое многообразие;

2.  $\exists \tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$  — открытое,  $p \in \tilde{U}$ ,

что существуют функции  $f_1, f_2, \dots, f_{m-k} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R} \in C^r$  такие, что

$x \in M \cap \tilde{U} \iff f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \dots, f_{m-k}(x) = 0$  и  $(\text{grad } f_1(p), \dots, \text{grad } f_{m-k}(p))$  — ЛНЗ.

### 37.1 Доказательство

•  $1 \Rightarrow 2$ :

Существует параметризация  $\Phi \in C^r (O \subset \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$ ,

$\varphi_1, \dots, \varphi_m$  — координатные функции  $\Phi$  и  $p = \Phi(t_0)$ ,  $\text{rang } \Phi'(t_0) = k$ .

Можно считать, что  $\left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t_0) \right)$  — невырождена.

$\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$ .

$L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  — проекция,  $x \mapsto (x_1, \dots, x_k)$ .

$L \circ \Phi$  имеет невырожденный производный оператор в точке  $t_0$ .

$\exists w(t_0)$  — окрестность  $t_0$ ,  $\exists V \in \mathbb{R}^k$  — открытое и  $L \circ \Phi : w \rightarrow V$  — диффеоморфизм.

$L(w) \rightarrow V$  — взаимно-однозначное отображение, т.е.  $\Phi(w)$  — график некоторого отображения  $H : V \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$ .

Пусть  $\psi = (L \circ \Phi)^{-1} : V \rightarrow w$ ,  $\psi \in C^r$ .

Если  $\tilde{x} \in V$ , то  $(\tilde{x}, H(\tilde{x})) = \Phi(w(\tilde{x})) \Rightarrow H \in C^r$ .

$\Phi(w)$  — открыто в  $M$ ,  $\exists$  открытое  $\tilde{U} \in \mathbb{R}^m$  такое, что  $\tilde{U} \cap M = \Phi(w)$  (можно считать, что  $\tilde{U} \subset V \times \mathbb{R}^{m-k}$ ).

$f_j : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_j(x) = H_j(L(x)) - x_{k+j}$ , если  $x \in \tilde{U} \cap M \Leftrightarrow$  все  $f_j(x) = 0$ .



$$\begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial H_1}{\partial x_k} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial H_2}{\partial x_k} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & \\ \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_k} & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}, \text{ где } m-k \text{ строчек и все они ЛНЗ.}$$

- $2 \Rightarrow 1$ :

Из предыдущего пункта у нас есть система уравнение, для которой верно, что  $\text{grad } f_i(p) - \text{ЛНЗ}$ , можно считать, что  $\det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_{k+j}}(p) \right)_{i,j=1..m-k} \neq 0$ .

По теореме о неявном отображении  $\exists H : P \rightarrow Q$ , где  $P$  — окрестность  $(p_1, \dots, p_k)$ , а  $Q$  — окрестность  $(p_{k+1}, \dots, p_m)$ ,

что  $\forall (x_1, \dots, x_k) \in P$  точка  $(x_1, \dots, x_k, H_1(x_1, \dots, x_k), H_2(x_1, \dots, x_k), \dots, H_{m-k}(x_1, \dots, x_k))$  удовлетворяет системе уравнений.

$$\Phi : P \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

$u \mapsto (u, H(u))$  — параметризация нашего многообразия,  $(P \times Q) \cap M$ .

## 38 Следствие о двух параметризациях

$M \subset \mathbb{R}^m$  —  $k$ -мерное простое  $C^r$ -гладкое многообразие,  $p \in M$ ,  $U$  — открытое в  $M$ ,  $p \in U$ .

$$\Phi_1 : O_1 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U \cap M,$$

$$\Phi_2 : O_2 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U \cap M \text{ (оба отображения "на" и даже гомеоморфизм)}$$

( $\phi_i \in C^r(O_i, \mathbb{R}^m)$ ). Тогда существует диффеоморфизм  $\psi : O_1 \rightarrow O_2$  и  $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \psi$ .

### 38.1 Доказательство

Для случая, когда rang  $\Phi'_1(p)$  и rang  $\Phi'_2(p)$  на одном и том же наборе столбцов (во всех точках  $O_1$  и  $O_2$ ).

Тогда  $\Phi_1 \circ L$  и  $\Phi_2 \circ L$  — тоже диффеоморфизмы.

Дальше всё очевидно, что  $\Phi_1 = \Phi_2 \circ (L \circ \Phi_2)^{-1} \circ (L \circ \Phi_1)$ .

## 39 Лемма о корректности определения касательного пространства

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  —  $C^r$ -параметризация  $U(p) \cap M$ ,  $p \in M$ ,  $\Phi(t_0) = p$ ,  $M$  — простое  $k$ -мерное гладкое многообразие в  $\mathbb{R}^m$ . Тогда образ оператора  $\Phi'(t_0) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  — это  $k$ -мерное подпространство в  $\mathbb{R}^m$ , не зависящее от  $\Phi$ .

### 39.1 Доказательство

$\Phi$  — параметризация, значит  $\text{rang } \Phi' = k$ , значит образ  $k$ -мерный. Если есть параметризация  $\Phi_2$ , можно считать, что существует диффеоморфизм  $\psi$ , что  $\Phi_2 = \Phi \circ \psi$ , и при этом  $\Phi'_2 = \Phi' \cdot \psi'$ , где  $\psi'$  — невырожденный, значит  $\Phi'_2$  совпадает с  $\Phi'$ .

## 40 Касательное пространство в терминах векторов скорости гладких путей

$v \in Tp(M) \subset \mathbb{R}^m \iff$  существует гладкий путь  $\gamma_v : [-1, 1] \rightarrow M$ ,  $\gamma'_v(0) = v$  и  $\gamma_v(0) = p$ .

### 40.1 Доказательство

$\Phi$  — параметризация в окрестности  $P$ ,  $\Phi(t_0) = p$ .

•  $\Leftarrow$

$\phi(t) = \Phi^{-1}(\gamma(t))$  — соответствующий путь в  $E$ .

Путь гладкий, значит  $\gamma'(t) = \Phi(\phi(t))' = \Phi'(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$ ,  $\gamma'(0) = \Phi'(t_0)w$ , что и требовалось доказать.

•  $\Rightarrow$

$v \in T_p(M) \rightarrow \exists w \in \mathbb{R}^k : \Phi'(t_0)w = v$ .

Рассмотрим путь  $\gamma(t) = \Phi(t_0 + wt)$ :  $\gamma'(0) = \Phi'(t_0)w$ , что и требовалось доказать.

## 41 Касательное пространство к графику функции и к поверхности уровня

Касательное пространство к графику  $f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $f \in C^1$  в точке  $p = (x_0, f(x_0))$  задаётся уравнением

$$y - f(x_0) = f'_1(x_1)(x - x_1) + \dots + f'_m(x_m)(x - x_m).$$

Касательное пространство к поверхности уровня функции  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  задаётся уравнением

$$f'_x(x_0)(x - x_0) + f'_y(y_0)(y - y_0) + f'_z(z_0)(z - z_0) = 0.$$

## 42 Необходимое условие относительного локального экстремума

$$f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R},$$

$\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $a \in E$  и  $\Phi(a) = 0$  — точка относительно локального экстремума.

$\text{rang } \Phi'(a) = n$ , и  $f, \Phi \in C^1(E)$ .

Тогда  $\exists \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ , что

$$\begin{cases} f'(a) - \lambda \cdot \Phi'(a) = 0 \\ \Phi(a) = 0 \end{cases}$$

### 42.1 Доказательство

Пусть  $\text{rang } \Phi'(a)$  реализован на столбцах  $x_{m+1}, \dots, x_{m+n}$

$a = (a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_{m+n}) = (a_x, a_y)$  и  $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)$  — невырожденная матрица  $n \times n$ .

По теореме о неявном отображении  $\varphi : U(a_x) \rightarrow V(a_y)$  и  $\forall x \in U(a_x) \Phi(X, \varphi(X)) = 0$ . Кстати,  $U(x) \cap M_\Phi$  — простое  $m$ -мерное многообразие. Тогда  $a_x = (a_1, \dots, a_m)$  — точка локального экстремума для функции  $g(x) = f(x, \varphi(x))$ . Тогда

$$\begin{cases} f'_x(a) + f'_y(a)\varphi'(a_x) = 0 \\ \Phi'_x(a) + \Phi'_y(a) \cdot \varphi'(a_x) = 0 \end{cases}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^n \quad \lambda \cdot \Phi'_x + \lambda \cdot \Phi'_y \cdot \varphi' = 0$$

$$(f'_x - \lambda \Phi'_x) + (f'_y - \lambda \Phi'_y) \cdot \varphi' = 0, \text{ подставляем } \lambda := f'_y(a) \cdot (\Phi'_y(a))^{-1}.$$

## 43 Вычисление нормы линейного оператора с помощью собственных чисел

$A \in \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ , тогда  $\|A\| = \max \sqrt{\lambda}$ , где  $\lambda$  — собственные числа  $A^T A$ .

### 43.1 Доказательство

$$\|A\|^2 = \max |Ax|^2 = \max \langle Ax, Ax \rangle = \max \langle A^T A x, x \rangle.$$

## 44 Теорема Стокса–Зайделя о непрерывности предельной функций. Следствие для рядов

$f_n, f_0 : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X$  — метрическое пространство,  $c \in X$ ,  $f_n$  — непрерывно в точке  $c$ .  $f_n \Rightarrow f_0$  на  $X$ . Тогда  $f_0$  — непрерывна в точке  $c$ .

### 44.1 Доказательство

$|f_0(x) - f_0(c)| \leq |f_0(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(c)| + |f_n(c) - f_0(c)| < 3\varepsilon$  (китайский эпсилон), поскольку по непрерывности из условия

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists U(c) : \forall x \in U(c) : |f_0(x) - f_0(c)| < \varepsilon.$$

### 44.2 Следствие для рядов

$u_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывно в  $x_0 \in X$ , где  $X$  — метрическое пространство/

$\sum u_n(x)$  — равномерно сходится на  $X$ ,  $S(x) = \sum u_n(x)$ . Тогда  $S(x)$  непрерывно в  $x_0$ .

#### 44.2.1 Доказательство

$S_n(x) \Rightarrow S(x) \Rightarrow S(x)$  — непрерывно в  $x_0$ ).



## 45 Метрика в пространстве непрерывных функций на компакте, его полнота

$X$  — метрическое пространство, компактен.  $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1, f_2$  — непрерывен на  $X$ .

$\rho(f_1, f_2) = \max_{x \in X} |f_1(x) - f_2(x)|$  — метрика в  $C(X)$ , тогда пространство  $(C(X), \rho)$  — полное.

### 45.1 Доказательство

$f_n \in C(X)$  — фундаментальная последовательность

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m > N : \max_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \Rightarrow \forall x \in X.$

$f_n(x)$  — фундаментальная вещественная последовательность, значит  $\forall x \in X : \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x).$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall m, n > N : \forall x |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \Rightarrow |f_n - f(x)| < \varepsilon$

## 46 Теорема о предельном переходе под знаком интеграла. Следствие для рядов

$$f_n \in C[a, b]$$

$$f_n \Rightarrow f \text{ на } [a, b].$$

$$\text{Тогда } \int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$$

### 46.1 Доказательство

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot (b - a) \rightarrow 0 \quad (a, b \in \mathbb{R}, \text{ не в } \overline{\mathbb{R}})$$

### 46.2 Следствие для рядов

$$u_n \in C[a, b]$$

$$\sum u_n(x) \text{ равномерно сходится на } [a, b]$$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x), \quad x \in [a, b]$$

$$\text{Тогда } \int_a^b S(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b u_n(x) dx$$

$$(\sum u_n - \text{равномерно сходится, } u_n - \text{непрерывно} \Rightarrow S(x) \text{ непрерывно} \Rightarrow \int S(x) \text{ имеет смысл})$$

#### 46.2.1 Доказательство

$$\int_a^b S_n(x) dx \rightarrow \int_a^b S(x) dx \text{ по основной теореме,}$$

$$\sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x) dx \rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b u_k(x) dx.$$

## 47 Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру

$$f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f, f'_y \text{ — непрерывны на } [a, b] \times [c, d], \Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

$$\text{Тогда } \Phi \text{ — дифференцируема на } [c, d] \text{ и } \Phi'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$$

### 47.1 Доказательство

$$\frac{\Phi\left(y + \frac{1}{n}\right) - \Phi(y)}{\frac{1}{n}} = \int_a^b \frac{f\left(x, y + \frac{1}{n}\right) - f(x, y)}{\frac{1}{n}} dx = \int_a^b f'_y\left(x, y + \frac{\Theta}{n}\right) dx, \text{ что есть } \int_a^b g_n dx.$$

$$g_n(x, y) \Rightarrow f'_y(x, y) \text{ для } x \in [a, b].$$

$$\Theta = a_x, 0 \leq a_x \leq 1.$$

## 48 Теорема о предельном переходе под знаком производной. Дифференцирование функционального ряда

$f_n \in C^1\langle a, b \rangle$  и  $f_n \rightarrow f_0$  поточечно на  $\langle a, b \rangle$ ,  $f'_n \rightrightarrows \varphi$  на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда

1.  $f_0 \in C^1\langle a, b \rangle$
2.  $f'_0 = \varphi$  на  $\langle a, b \rangle$

### 48.1 Доказательство

$$x_0, x_1 \in \langle a, b \rangle, f'_n \rightrightarrows \varphi \text{ на } [x_0, x_1], \int_{x_0}^{x_1} f'_n \rightarrow \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

$$f_n(x_1) - f_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi, \text{ и } f_n(x_1) - f_n(x_0) \rightarrow f_0(x_1) - f_0(x_0), \text{ значит}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi = f_0(x_1) - f_0(x_0), f_0 \text{ — первообразная для } \varphi, \varphi \text{ — непрерывна, значит } f' = \varphi.$$

### 48.2 Дифференцирование функционального ряда

$$u_n \in C^1(\langle a, b \rangle)$$

1.  $\sum u_n(x) = S(x) \quad x \in \langle a, b \rangle$  (поточечная сходимость)
2.  $\sum u'_n(x) = \varphi(x)$  равномерно сходится при  $x \in \langle a, b \rangle$ .

Тогда

1.  $S(x) \in C^1(\langle a, b \rangle)$
2.  $S'(x) = \varphi(x)$  при  $x \in \langle a, b \rangle$

$$\text{Т.е. } \left( \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x)$$

### 48.2.1 Доказательство

Следует из основной теоремы.

$$f_n \leftrightarrow S_n \text{ и } f_0 \leftrightarrow S.$$

$$f_n(x) \rightarrow f_0(x) \text{ и } f'_n \Rightarrow \varphi \text{ и } \sum_{k=1}^n u'_k(x) = \left( \sum_{k=1}^n u_k(x) \right)' = f'_n$$

## 49 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда

$\sum u_n$  и  $u_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Также пусть существует вещественная последовательность  $c_n$ :

1.  $|u_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in X$ ;
2.  $\sum c_n$  сходится.

Тогда  $\sum u_n(x)$  — равномерно сходится на  $X$

### 49.1 Доказательство

Равномерно сходится тогда и только тогда  $R_n \Rightarrow 0$

$$\sup_{x \in X} \left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} c_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ как остаток сходящегося ряда.}$$

## 50 Дифференцируемость гамма функции

$\Gamma(x)$  бесконечно дифференцируется на  $(0, +\infty)$ .

### 50.1 Доказательство

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}.$$

$$-\ln \Gamma(x) = \ln x + \gamma x + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k} \right), \text{ обозначим за } u_k = \left( \ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k} \right).$$

$$u'_k(x) = \frac{1}{x+k} - \frac{1}{k} = -\frac{x}{k(k+x)}.$$

$$|u'_k(x)| \leq \frac{M}{k(k+M)}, \sum \frac{M}{k(k+M)} - \text{сходится по признаку Вейерштрасса.}$$

$\sum u'_k(x)$  равномерно сходится при  $x \in (0, M)$ , где  $M$  — какое угодно.

$$-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{x} + \gamma - \sum \frac{x}{k(k+x)}.$$

## 51 Теорема о предельном переходе в суммах

$u_n : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  — предельная точка  $E$ ,  $X$  — метрическое пространство.

1.  $\forall n : \exists \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = a_n$ ;
2.  $\sum u_n(x)$  равномерно сходится на  $E$ .

Тогда

1.  $\sum a_n$  — сходится;
2.  $\sum a_n = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right)$ .

### 51.1 Доказательство

1.  $\sum a_n$  — сходится

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x), \quad S_n^a = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Достаточно проверить, что последовательность  $S_n^a$  фундаментальная.

$$|S_{n+p}^a - S_n^a| \leq |S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| + |S_{n+p}(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n^a| < \varepsilon$$

2. Сводим к предыдущей теореме

$$\widetilde{u}_n(x) := \begin{cases} u_n(x), & x \neq x_0, x \in E \\ a_n, & x = x_0 \end{cases}$$

$\widetilde{u}_n$  — непрерывна в точке  $x_0$ . Остаётся только проверить, что  $\sum \widetilde{u}_n(x)$  равномерно сходится в  $E \cup \{x_0\}$

$$\sup_{x \in E \cup \{x_0\}} \left| \sum_{k=n}^{+\infty} \widetilde{u}_k(x) \right| \leq \sup_{x \in E} \left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x) \right| \rightarrow 0$$



## 52 Теорема о перестановке двух предельных переходов

$f_n : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  — предельная точка  $E$ , и

1.  $f_n \rightrightarrows S(x)$  при  $n \rightarrow +\infty$  на  $E$ ;

2.  $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A_n$

Тогда

1.  $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A \in \mathbb{R}$

2.  $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$

### 52.1 Доказательство

$$\sum_{k=1}^n u_k = f_n, \quad a_k := A_k - A_{k-1}$$

Тогда  $\sum a_n$  — сходится  $\Rightarrow \exists \sum (A_k - A_{k-1}) \Leftrightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$

$f(x, y) \rightrightarrows f(x)$  при  $y \rightarrow y_0$  на множестве  $E$ , т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall y : 0 < |y - y_0| < \delta : \forall x \in E : |f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon$$

## 53 Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда

$$\sum a_n(x)b_n(x), x \in X.$$

$$1. \exists C_a : \forall N : \forall x \in X : \left| \sum_{n=1}^N a_n(x) \right| \leq C_a,$$

частичные суммы ряда  $\sum a_n(x)$  равномерно ограничены.

$$2. b_n \Rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty \text{ на множестве } X, \forall x : b_n(x) \text{ — монотонная. Тогда } \sum a_n(x)b_n(x) \text{ равномерно сходится на } X.$$

### 53.1 Доказательство

$$\sum_{N \leq k \leq M} a_k b_k = A_M b_M - A_{N-1} b_{N-1} + \sum_{k=N}^{M-1} (b_k - b_{k+1}) A_k$$

$$\left| \sum_{k=N}^M a_k b_k \right| \leq |A_M b_M| + |A_{N-1} b_{N-1}| + \left| \sum (b_k - b_{k+1}) A_k \right| \leq C_A (|b_M| + |b_N|) + \sum (b_k - b_{k+1}) A_k \leq C_a \left( |b_M| + |b_N| + \sum_{k=N}^{M-1} (b_k - b_{k+1}) \right) \rightarrow c$$

$$1. \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x) \text{ — равномерно сходится } x \in X;$$

$$2. \exists C_B : \forall x \forall n : |b_n(x)| \leq C_m \text{ при каждом } x \text{ } b_n(x) \text{ монотонна. } \sum a_n b_n \text{ равномерно сходится/}$$

## 54 Теорема о круге сходимости степенного ряда

$\sum a_n(z - z_0)^n$ , тогда выполнено одно из трёх условий:

1. ряд сходится только при  $z = z_0$ ;
2. ряд сходится при любых  $z \in \mathbb{C}$ ;
3.  $\exists R \in (0, +\infty)$  такое, что при  $|z - z_0| < R$  абсолютно сходится, при  $|z - z_0| > R$  расходится, при  $|z - z_0| = R$  может как сходиться, так и расходиться.

### 54.1 доказательство

Изучим  $\sum a_n(z - z_0)^n$  на абсолютная сходимость.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} |z - z_0|^n = \overline{\lim} |z - z_0| \sqrt[n]{|a_n|} = |z - z_0| \sqrt[n]{|a_n|}$$

1.  $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ , тогда при  $z = z_0$  ряд абсолютно сходится, при  $z \neq z_0$  ряд расходится;
2.  $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ , тогда при любых  $z$  ряд сходится абсолютно;
3.  $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$  конечен, тогда при  $|z - z_0| < \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$  — сходится, при  $|z - z_0| > \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$  — расходится.

Тогда обозначим  $R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$  — формула Адамара.

Множество сходимости степенного ряда — это открытый круг радиуса  $R$  и некоторые точки на окружности.

## 55 Теорема о непрерывности степенного ряда

$\sum a_n(z - z_0)^n$ ,  $0 < R \leq +\infty$ . Тогда

1.  $0 < r < R$  — тогда ряд равномерно сходится на  $\overline{B(z_0, r)}$ ;
2.  $f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n$  — непрерывен в  $B(z_0, R)$ .

### 55.1 Доказательство

1. По признаку Вейерштрасса  $|a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n| \cdot r^n$ , ряд  $\sum |a_n| r^n$  — абсолютно сходится;
2. Очевидно из предыдущего пункта.

## 56 Теорема о дифференцировании степенного ряда. Следствие об интегрировании. Пример

Обозначим за  $A$  ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$  и за  $A'$  ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ ,  $0 < R \leq +\infty$  — радиус сходимости для  $(A)$ . Тогда

1.  $(A')$  имеет тот же радиус сходимости  $R$ ;
2. Пусть  $f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n$ ,  $z \in B(z_0, R)$ . Тогда  $\forall z \in B(z_0, R)$   $f$  — дифференцируема и  $f'(z) = \sum na_n(z-z_0)^{n-1}$ .

### 56.1 Доказательство

1.  $\sum \alpha_n x^n$  и  $\sum \alpha_n x^{n+1}$  имеют одинаковый радиус сходимости, т.к.  $x \cdot S_N(x) = \widetilde{S_N(x)}$ . Пределы этих сумм существуют для одинаковых  $x$ , значит и радиус сходимости один и тот же.

$$R_{A'} = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{na_n}} = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{a_n}} = R.$$

2.  $a \in B(z_0, R)$ , проверим, что существует  $f'(a)$ . Возьмём  $r < R$  и  $a \in B(z_0, r)$ . Также пусть  $w = z - z_0$  и  $w_0 = a - z_0$ ,  $|z - z_0| < r$  и  $|a - z_0| < r$ , тогда

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \sum a_n \frac{(z - z_0)^n - (a - z_0)^n}{(z - z_0) - (a - z_0)} = \sum a_n \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0} \text{ и}$$

$$\left| a_n \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0} \right| \leq |a_n| nr^{n-1}.$$

Заметим, что  $\sum n|a_n|r^{n-1}$  сходится, т.к. ряд  $(A')$  при  $z = z_0 + r$  сходится абсолютно по признаку Вейерштрасса, ряд равномерно сходится в круге  $B(z_0, r)$ .

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim \sum_{n=0}^{+\infty} \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} n = 1 \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z - z_0)^n - (a - z_0)^n}{z - a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n (z - z_0)^{n-1}.$$

### 56.2 Следствие об интегрировании

$f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$ ,  $a_n \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x$  — тоже вещественное и лежит в  $(x_0 - R, x_0 + R)$ .

Тогда при почленном интегрировании  $\sum a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$  — ряд имеет тот же радиус сходимости и к тому

$$\text{же } \int_{x_0}^x \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}.$$

### 56.3 Пример

Разложить  $\operatorname{arcsctg} x$  в степенной ряд в окрестности  $x_0 = 0$  (это же ряд Тейлора)

$$(\operatorname{arcsctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} = -(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots) = -1 + x^2 - x^4 + x^6 + \dots \quad (|x| < 1)$$

$$\operatorname{arcsctg} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots \quad (\text{не забудем, что при возврате к первообразной не надо забывать про константу}).$$

## 57 Свойства экспоненты

Обозначим  $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ ,  $R = +\infty$ , сходится при всех  $z \in \mathbb{C}$ .

1.  $\exp(0) = 1$ ;

2.  $(\exp z)' = \exp z$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = (e^z)' \Big|_{z=0} = 1;$$

3.  $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$  комплексное,  $\overline{\sum \frac{z^n}{n}} = \sum \frac{\bar{z}^n}{n}$ ;

4.  $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$

$$\exp(z + w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z + w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \left( \sum \frac{z^k}{k!} \right) \left( \sum \frac{w^k}{k!} \right)$$

### 57.1 Следствие

$\forall z \in \mathbb{C} \exp(z) \neq 0$ .

## 58 Метод Абеля суммирования рядов. Следствие

$\sum c_n$  — сходящийся ряд,  $f(x) = \sum c_n x^n$ ,  $-1 < x < 1$  ( $\Leftrightarrow R \geq 1$ ). Тогда  $\sum c_n = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$ .

### 58.1 Доказательство

При  $x \in (0, 1)$ ,  $\sum c_n x^n$  — сходится по признаку Абеля,

$\sum a_n b_n$ ,  $\sum a_n$  — сходится,  $b_n$  — монотонно ограниченная, что чему сопоставить очевидно. Осталось проверить, что  $\sum c_n x^n$  непрерывен на  $[0, 1]$ , т.е. равномерную сходимость  $\sum c_n x^n$  на  $[0, 1]$ .

$\sum a_n(x)$  — равномерно сходится,  $b_n$  — монотонная при каждом фиксированном  $x$ ,  $\exists C_b : \forall n : \forall x : |b_n(x)| \leq C_b$ .

### 58.2 Следствие

$\sum a_n = A$ ,  $\sum b_n = B$ ,  $c_n := a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$ , известно, что  $\sum c_n = C$ . Тогда  $A \cdot B = C$ .

#### 58.2.1 Доказательство

$$f(x) = \sum a_n x^n, g(x) = \sum b_n x^n, h(x) = \sum c_n x^n, x \in [0, 1].$$

$x < 1$  ряды для  $f$  и  $g$  абсолютно сходятся, значит  $f(x) \cdot g(x) = h(x)$  при  $x \rightarrow 1$ .



## 59 Единственность разложения функции в ряд

$f$  единственным образом раскладывается в степенной ряд в окрестности  $x_0$  (если можно, конечно, разложить его).

### 59.1 Доказательство

Потому что  $a_n := \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots \Rightarrow f \in C^{+\infty}(U(x_0)).$$

$$x := x_0 \Rightarrow a_0 = f(x_0).$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots, \quad x := x_0 \Rightarrow a_1 = f'(x_0) \text{ и } a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!} \text{ и т.д.}$$

## 60 Разложение бинома в ряд Тейлора

$\sigma \in \mathbb{R}$ , тогда при  $|x| < 1$

$$(1+x)^\sigma = 1 + \sigma x + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

### 60.1 Доказательство

$$S'(x)(1+x) = \sigma S(x)$$

$$f(x) = \frac{S(x)}{(1+x)^\sigma} = \text{const}$$

$$f' = \frac{S'(x)}{(1+x)^\sigma} - \frac{\sigma S(x)}{(1+x)^{\sigma+1}} = \frac{0}{(1+x)^{\sigma+1}} \Rightarrow \frac{S(x)}{(1+x)^\sigma} = \text{const}$$

$$f(0) = 1 \rightarrow S(x) = (1+x)^\sigma.$$

## 61 Теорема о разложимости функции в ряд Тейлора

$f \in C^\infty([x_0 - h, x_0 + h])$ . Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1.  $f$  раскладывается в ряд Тейлора в окрестности  $x_0$ ;
2.  $\exists \delta, C, A > 0 : \forall n : \left| f^{(n)}(x) \right| < C \cdot A^n \cdot n!$  при  $|x - x_0| < \delta$ .

### 61.1 Доказательство

- $1 \Leftarrow 2$

Оценим остаток в форме Лагранжа  $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\bar{x})}{n!} (x - x_0)^n$

$$\left| \frac{f^{(n)}(\bar{x})}{n!} (x - x_0)^n \right| \leq \frac{CA^n n!}{n!} |x - x_0|^n \rightarrow 0 \text{ при } |A(x - x_0)| < 1 \text{ и } |x - x_0| < \frac{1}{n}.$$

Таким образом,  $|x - x_0| < \min\left(\frac{1}{A}, \delta\right)$ ,  $r_n \rightarrow 0$ .

- $1 \Rightarrow 2$

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ . Пусть при  $x = x_1 \neq x_0$  ряд сходится.

$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x_1 - x_0)^n \rightarrow 0$ , т.е. меньше  $C_1$  по модулю.

$$\left| f^{(n)}(x_0) \right| \leq C_1 \cdot n! \cdot \frac{1}{|x_1 - x_0|^n} B^n$$

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-m)!} (x_0)(x - x_0)^{n-m}$$

$$\left| f^{(m)}(x) \right| \leq \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{|f^{(n)}(x_0)|}{(n-m)!} |x - x_0|^{n-m} \leq \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{C_1 B^n n!}{(n-m)!} |x - x_0|^{n-m} = C_1 B^n \sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-m+1) |B(x - x_0)|^{n-m}$$

$$1) |B(x - x_0)|^{n-m} = C_1 \cdot \frac{m! B^m}{|1 - (B(x - x_0))|^{(m+1)}} \leq C_1 m! B^m 2^{m+1} = (2C_1) m! (2B)^m.$$

## 62 Теорема Коши о перманентности метода средних арифметических

### 62.1 Дополнительное определение

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n.$$

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} (S_0 + S_1 + \dots + S_n).$$

Если существует  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = S$ , то  $S$  называется суммой ряда  $\sum a_n$  в смысле метода средних арифметических (или по Чезаро).

### 62.2 Формулировка

$\sum a_n = S \Rightarrow \sum a_n = S$  в смысле метода средних арифметических.

### 62.3 Доказательство

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_1 > 0 : \forall n > N_1 : |S_n - S| < \varepsilon$$

$$\sigma_n - S = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (S_i - S), |\sigma_n - S| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n |S_i - S| = \frac{\sum_{i=0}^{N_1} (S_i - S)}{n+1} + \frac{\sum_{i=N_1+1}^n |S_i - S|}{n+1} < 2\varepsilon.$$

## 63 Простейшие свойства интеграла векторного поля по кусочно-гладкому пути

1. Линейность по полю:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, U, V$  — векторные поля, тогда

$$I(\alpha U + \beta V, \gamma) = \alpha I(U, \gamma) + \beta I(V, \gamma).$$

2. Аддитивность при дроблении пути:

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m, a < c < b,$$

$$\gamma_1 := \gamma|_{[a, c]}, \gamma_2 := \gamma|_{[c, b]} \text{ и}$$

$$I(V, \gamma) = I(V, \gamma_1) + I(V, \gamma_2).$$

3. Замена параметра:

$$\varphi : [p, q] \rightarrow [a, b], \text{ сюръекция, } \varphi \in C^1([p, q]), \varphi(p) = a, \varphi(q) = b,$$

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m, \tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi, \tilde{\gamma}(s) = \gamma(\varphi(s)).$$

$$I(V, \gamma) = I(V, \tilde{\gamma}).$$

4.  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m, \gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^m$  — гладкие пути,

$\gamma_1(b) = \gamma_2(c) \Rightarrow \gamma = \gamma_2 \gamma_1$  — кусочно-гладкий путь (в точке  $b$  путь  $\gamma$  может быть и не гладким).

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), t \in [a, b] \\ \gamma_2(t - b + c), t \in [b, b + d - c] \end{cases}$$

Тогда  $I(V, \gamma) = I(V, \gamma_1) + I(V, \gamma_2)$ .

5.  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,

$$\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t), t \in [a, b]. \text{ Тогда } I(V, \gamma^-) = -I(V, \gamma).$$

6. Оценка интеграла по пути:

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m, L := \gamma([a, b])$  — носитель пути. Тогда

$$|I(V, \gamma)| \leq \max_{x \in L} |V(x)| \cdot l(\gamma).$$

### 63.1 Доказательство

1. Из определения в силу линейности скалярного произведения;

$$2. \int_a^b = \int_a^c + \int_c^b;$$

$$3. I(V, \gamma) = \int_a^b V_1(\gamma(t)) \gamma'_1 + \dots + V_m(\gamma(t)) \gamma'_m dt = \int_p^q (V_1(\tilde{\gamma}(s)) \gamma'_1(\varphi(s)) + \dots + V_m(\tilde{\gamma}(s)) \gamma'_m(\varphi(s))) \varphi'(s) ds = I(V, \tilde{\gamma});$$

$$4. \int_a^{b+d-c} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b + \int_b^{b+d-c} = \int_a^b + \int_c^d \langle V(\gamma_2(\tau)), \gamma'_2(\tau) \rangle d\tau;$$

$$5. I(V, \gamma^-) = \int_a^b \langle V(\gamma(a+b-t)) \cdot (-\gamma'(a+b-t)) \rangle dt = - \int_a^b \langle V(\gamma(\tau)), \gamma'(\tau)(-d\tau) \rangle = -I(v, \gamma);$$

$$6. \left| \int_a^b \langle V(\gamma), \gamma' \rangle dt \right| \leq \int_a^b |\langle V, \gamma' \rangle| dt \leq \int_a^b |V(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq \max_{x \in L} |V(x)| \cdot \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

## 64 Обобщенная формула Ньютона–Лейбница

$V : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , потенциальное векторное поле,  $f$  — потенциал,  $\gamma[a, b] \rightarrow O$  — кусочно-гладкий путь,  $\gamma(a) = A$ ,  $\gamma(b) = B$ . Тогда

$$\int_{\gamma} V_1 dx_1 + \dots + V_m dx_m = f(B) - f(A).$$

### 64.1 Доказательство

1.  $\gamma$  — гладкий,  $\phi(t) = f(\gamma(t))$ ,  $\phi' = f' \gamma' = \langle \text{grad } f, \gamma' \rangle = \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = f(B) - f(A)$ .
2. кусочно-гладкий

$$I(V, \gamma) = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dots = \sum_{k=1}^n f(\gamma(t_k)) - f(\gamma(t_{k-1})) = f(\gamma(t_n)) - f(\gamma(t_0)) = f(B) - f(A).$$

## 65 Характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов

$V$  — векторное поле в  $O$ . Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1.  $V$  — потенциальное;
2. Интеграл  $\int_{\gamma} V_1 dx_1 + \dots + V_m dx_m$  не зависит от пути в  $O$ ;
3. Для любого кусочно-гладкого замкнутого пути верно, что  $\int_{\gamma} V_1 dx_1 + \dots + V_m dx_m = 0$ .

### 65.1 Доказательство

- $1 \Rightarrow 2$  — формула Ньютона-Лейбница;
- $2 \Rightarrow 3$  — очевидно;
- $3 \Rightarrow 2$  — очевидно;
- $2 \Rightarrow 1$  фиксируем  $A \in O$ ,  $\forall x \in O$  фиксируем кусочно-гладкий путь  $\gamma_x$ ,  $f(x) := \int_{\gamma_x} V_1 dx_1 + \dots + V_m dx_m$ .

Надо проверить, что  $f$  — потенциал.

Достаточно проверить, что  $f'_{x_1}(x) = V_1(x)$  при всех  $x$ .

$$\gamma'_0 = (h, 0, \dots, 0)$$

$$f(x + he_1) - f(x) = \int_{\gamma_0} V_1 dx_1 + \dots + V_m dx_m = \int_0^1 V_1(x_1 + th, \dots, x_m) h dt = V_1(x_1 + \alpha h, x_2, \dots, x_m) h(1 - \alpha) \rightarrow V_1(x_1, \dots, x_m).$$



## 66 Необходимое условие потенциальности гладкого поля. Лемма Пуанкаре

### 66.1 Необходимое условие потенциальности гладкого поля

$V$  — гладкое потенциальное векторное поле в  $O \subset \mathbb{R}^m$ , тогда  $\forall x \in O$  и  $\forall k, j$  ( $1 \leq k, j \leq m$ ) верно

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_k}.$$

### 66.2 Лемма Пуанкаре

$O \subset \mathbb{R}^m$  — выпуклое,  $V : O \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $V \in C^1(O)$  и верно  $\forall k, l : \frac{\partial v_k}{\partial x_l} = \frac{\partial v_l}{\partial x_k}$ . Тогда  $V$  — потенциально.

#### 66.2.1 Доказательство

$A \in O$ ,  $\gamma_x : [0, 1] \rightarrow O$ ,  $\gamma_v(t) = A + t(x - A)$ ,  $(\gamma_x)' = x - A$ .

$$f(x) := \int_{\gamma_x} \sum v_i dx_i = \int_0^1 \sum v_i(A + t(x - A)) (x_i - A_i) dt, \quad I(x) = \int_a^b f(c, x) dt \text{ и } I'(x) = \int_a^b f'_x dt.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \int_0^1 v_i(A + t(x - A)) + \sum \frac{\partial v_i}{\partial x_j} (A + t(x - A)) t (x_i - A_i) dt = \int_0^1 (tv_j(A + t(x - A)))'_t dt - tv_j(A + t(x - A)) \Big|_{t=0}^{t=1} = v_j(x).$$

### 66.3 Следствие к лемме Пуанкаре

$O$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^m$ ,  $V \in C^1(O)$  и верное  $\forall k, l : \frac{\partial v_k}{\partial x_l} = \frac{\partial v_l}{\partial x_k}$ , тогда оно локально-потенциальное.

#### 66.3.1 Доказательство

$$I(v, \gamma) = \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

## 67 Лемма о гусенице

$O \subset \mathbb{R}^m$ ,  $\forall x \in O$  задана окрестность  $U(x)$  и  $\gamma : [a, b] \rightarrow O$  — непрерывный путь. Тогда существует разбиение  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$  и шары  $B_k \subset O$ ,  $\forall k \in [1, n] : \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]} \subset B_k$ .

### 67.1 Доказательство

$\forall c \in [a, b]$  фиксируем  $B_c = B(\gamma(c), r_c) \subset U(\gamma(c))$ .

$$\bar{\alpha}_c = \inf \left( \alpha \in [a, b] : \gamma|_{[a, \alpha]} \subset B_c \right),$$

$$\bar{\beta}_c = \sup \left( \beta \in [a, b] : \gamma|_{[\beta, b]} \subset B_c \right).$$

Заузм  $\bar{\alpha}_c < \alpha_c < c < \beta_c < \bar{\beta}_c$ ,  $\bigcup (\alpha_c, \beta_c)$  — открытое покрытие  $[a, b]$ .

В точке  $c = a$   $\alpha_c = a$ , в точке  $c = b$   $\beta_c = b$ ,  $[a, b] \subset \bigcup_{finite} (\alpha_c, \beta_c)$ .

Удалим лишние наложение, т.е. удалим такие пары  $(\alpha_i, \beta_i) \subset \bigcup_{i \neq j} (\alpha_j, \beta_j)$ . Тогда  $\forall (\alpha_c, \beta_c)$  существует уникальная точка  $d_c \in (\alpha_c, \beta_c$  и  $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]} \subset B_{C_k}$ .

## 68 Лемма о равенстве интегралов по похожим путям

$V : O \rightarrow \mathbb{R}^m$  — локально потенциальное векторное поле,  $\gamma, \bar{\gamma}$  — похожие, кусочно гладкие пути,  $\gamma(a) = \bar{\gamma}(a)$

и  $\gamma(b) = \bar{\gamma}(b)$ , тогда

$$\int_{\gamma} \sum V_i dx_i = \int_{\bar{\gamma}} \sum V_i dx_i.$$

### 68.1 Доказательство

Берём  $V$ -гусеницу,  $f_k$  — потенциал в  $B_k$ , необходимо согласовать потенциалы,  $f_k = f_{k+1}$  на  $B_k \cap B_{k+1}$ ,

$$\int_{\gamma} \sum v_i dx_i = \sum_{k=1}^n \int (v_1 dx_1 + \dots + v_m dx_m) = \sum f_k(\gamma(t_k)) - f_k(\gamma(t_{k-1})) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

## 69 Лемма о похожести путей, близких к данному

$\gamma : [a, b] \rightarrow O \subset \mathbb{R}^m$ . Тогда  $\exists \delta > 0$ , если  $\bar{\gamma}$  и  $\bar{\bar{\gamma}} : [a, b] \rightarrow O$ , таковы, что  $\forall t \in [a, b] \quad |\gamma(t) - \bar{\gamma}(t)| < \delta$  и  $|\bar{\gamma}(t) - \bar{\bar{\gamma}}(t)| < \delta$ ,

то  $\gamma$ ,  $\bar{\gamma}$  и  $\bar{\bar{\gamma}}$  — похожи.

### 69.1 Доказательство

Берём  $V$ -гусеницу для  $\gamma$ , тогда  $\gamma([t_{k-1}, t_k])$  — компактное множество в  $B_k$ , тогда  $\exists \delta_k$  — окрестность этого компакта в  $B_k$ , возьмём  $\delta := \min_{1 \leq k \leq n} \delta_k$ .

## 70 Равенство интегралов по гомотопным путям

$V$  — локально потенциальное векторное поле в  $O \subset \mathbb{R}^m$ ,  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  — гомотопно связанные, тогда  $I(V, \gamma_0) = I(V, \gamma_1)$ .

### 70.1 Доказательство

$\Gamma$  — гомотопия,  $\gamma_u(t) = \Gamma(t, u)$ ,  $t \in [a, b]$  и  $u \in [0, 1]$ .  $\Phi(u) = I(V, \gamma_u)$ . Проверим  $\Phi$  — локально постоянно, т.е.  $\forall u_0 : \exists w(u) : \forall u \in w(u_0) \cap [0, 1]$  верно  $\Phi(u) = \Phi(u_0)$ .  $\Gamma$  — равномерное непрерывно, тогда

$\forall \delta > 0 : \exists \sigma > 0 : \forall t, t' : |t - t'| < \sigma$  и  $\forall u, u' : |u - u'| < \sigma$  выполнено  $|\Gamma(t, u) - \Gamma(t', u')| < \frac{\delta}{2}$ .

Берём  $\delta$  из предыдущей леммы для пути  $\gamma_{u_0}$  и  $(u - u_0) < t$  для любого  $t \in [a, b]$ ,  $|\Gamma(t, u) - \Gamma(t, u_0)| < \frac{\delta}{2}$  и  $|\gamma_u(t) - \gamma_{u_0}(t)| < \frac{\delta}{2} \Rightarrow \gamma_u$  и  $\gamma_{u_0}$  — похожи. Подберём  $\bar{\gamma}_u$  и  $\bar{\gamma}_{u_0}$  — кусочно гладкие,  $\frac{\delta}{4}$  близко к  $\gamma_u$  и  $\gamma_{u_0}$ ,  $\forall t : |\gamma(t) - \bar{\gamma}(t)| < \delta$ , значит  $\bar{\gamma}_u$  и  $\bar{\gamma}_{u_0}$  — похожи.

$$I(V, \gamma_u) = I(V, \bar{\gamma}_{u_0}) = I(V, \bar{\gamma}_{u_0}) = I(V, \gamma_0).$$

## 71 Теорема о резиночке

$O = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow O$ ,  $\gamma(t) \rightarrow (\cos t, \sin t)$  — петля. Тогда эта петля нестягиваема.

### 71.1 Доказательство

$V(x, y) := \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ ,  $\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial v_2}{\partial y} \rightarrow V$  — локально потенциальное,

$$I(V, \gamma) = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (-\sin t) + V_1(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \frac{\cos t}{1} \cos t dt = 2\pi \neq 0.$$

## 72 Теорема Пуанкаре для односвязной области

$O$  — односвязная область в  $\mathbb{R}^m$ ,  $V$  — локально потенциальное векторное поле в  $O$ . Тогда  $V$  — потенциально в  $O$ .

### 72.1 Доказательство

$\gamma_0$  — кусочно-гладкий замкнутый путь, значит гомотопен постоянному пути, значит  $I(V, \gamma_0) = I(V, \text{постоянному пути}) = 0$ . т.е. выполняется критерий потенциальности векторного поля.

## 73 Свойства объема: усиленная монотонность, конечная полуаддитивность

$\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Тогда

1. Усиленная монотонность:  $\forall A, A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{P}$ , все  $A_i$  — дизъюнкты и  $\bigcup_{i=1}^n A_i \subset A$ , тогда

$$\sum_{i=1}^n \mu A_i \leq \mu A;$$

2. Конечная полуаддитивность:  $\forall A, A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{P}$ , все  $A_i$  — дизъюнкты и  $A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$ , тогда

$$\mu A \leq \sum_{i=1}^n \mu A_i;$$

3.  $A, B, (A \setminus B) \in \mathcal{P}$ ,  $\mu B < +\infty \Rightarrow \mu(A \setminus B) \geq \mu A - \mu B$ .

### 73.1 Доказательство

1.  $A \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigsqcup_{finite} B_l, B_l \in \mathcal{P}, A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \sqcup \bigsqcup_{finite} B_k, \mu A = \sum \mu A_i + \sum \mu B_l \geq \sum \mu A_i$ .

2.  $B_k = A \cap A_k \in \mathcal{P}, A = \bigcup_{k=1}^n B_k$  — сделаем это объединением дизъюнктов,  $C_1 := B_1, C_2 := B_2 \setminus B_1$  и т.д.,  $A = \bigsqcup_{k,j} D_{kj}, \mu A = \sum \mu D_{kj}$ , фиксируем  $k$  и получаем  $\sum \mu D_{kj} = \mu C_k \leq \mu B_k \leq \mu A_k$  и получаем  $\mu A \leq \sum \mu A_k$ ;

3.
  - $B \subset A$  и  $\mu(A \setminus B) + \mu B = \mu A$ ;
  - $B \not\subset A, A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ , причём  $A \cap B \in \mathcal{P}$ , и  $\mu(A \setminus B) = \mu A - \mu(A \cap B) \geq \mu A - \mu B$ .



## 74 Теорема об эквивалентности счетной аддитивности и счетной полуаддитивности

$\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , объём. Тогда эквивалентны:

1.  $\mu$  — счётная аддитивная (т.е.  $\mu$  — мера);
2.  $\mu$  — счётная полуаддитивность :  $A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P}$  и  $A \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \Rightarrow \mu A \leq \sum \mu A_i$ .

### 74.1 Доказательство

- $1 \Rightarrow 2$

5 формул  $A = \bigcup A_k$  (будут написаны позже)

- $2 \Rightarrow 1$

$A = \bigsqcup A_i$ , надо проверить  $\mu A = \sum \mu A_i$ , усиленная монотонность:  $\mu A \geq \sum_{i=1}^n \mu A_i$ , по условию  $\mu A \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu A_i \Rightarrow \mu A = \sum \mu A_i$ .

## 75 Теорема о непрерывности снизу

$\mathcal{A}$  — алгебра,  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — объём. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1.  $\mu$  — мера, т.е. выполняется счётная аддитивность;
2.  $\mu$  — непрерывна снизу, т.е.  $A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ ,  $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ ,  $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$  и  $\mu A = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu A_i$ .

### 75.1 Доказательство

- $1 \Rightarrow 2$

$$B_1 := A_1, \dots, B_k := A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i, \text{ тогда } B_i \text{ — дизъюнкты, тогда } A_k = \bigsqcup_{i=1}^k B_i \text{ и } a = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} B_i, \mu A = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu B_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \mu B_i.$$

- $2 \Rightarrow 1$

$$C = \bigsqcup C_i, \text{ верно ли, что } \mu C = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu C_i, A_k = \bigsqcup_{i=1}^k C_i, A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \text{ и } \bigcup A_i = A,$$

$$\mu A = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mu A_N = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \mu C_i = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu C_i.$$

## 76 Теоремы о непрерывности сверху

$\mathcal{A}$  — алгебра,  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — конечный объём ( $\mu X < +\infty$ ), тогда эквивалентны следующие утверждения:

1.  $\mu$  — мера, т.е. выполняется счётная аддитивность;
2.  $\mu$  — непрерывна сверху, т.е.  $A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}, A_1 \supset A_2 \supset \dots, A = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i, \mu A = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mu A_N$ ;
3.  $\mu$  — непрерывна сверху на пустом множестве, т.е.  $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}, A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots, \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \emptyset$ .

### 76.1 Доказательство

- $1 \Rightarrow 2$

$B = A_1 \setminus A, B_k := A_1 \setminus A_k$ , тогда  $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots$  и  $\bigcup B_k = B, \mu B = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu B_k, \mu A_1 - \mu A = \lim_{k \rightarrow +\infty} (\mu A_1 - \mu A_k) \Rightarrow \mu A = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu A_k$ .

- $2 \Rightarrow 3$

Очевидно.

- $3 \Rightarrow 1$

$C = \bigsqcup C_i$ , проверить, что  $\mu C = \sum \mu C_i, A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots, A_k = \bigsqcup_{i=k+1}^{+\infty} C_i = C \setminus \left( \bigsqcup_{i=1}^k C_i \right) \Rightarrow A_k \in \mathcal{A}$ .

$\bigcap A_k = \emptyset \Rightarrow \mu A_k \rightarrow 0, C = \bigsqcup_{i=1}^k C_i \sqcup A_k$  и  $\mu C = \sum_{i=1}^k \mu C_i + \mu A_k, k \rightarrow +\infty \Rightarrow \mu C = \sum \mu C_i$ .