Содержание

Часть I

Определения

1 Диффеоморфизм

Область в $\mathbb{R}^m$ — открытое связное множество.

Пусть $f : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — *диффеоморфизм*, где O — область, если:

1. f — обратима;
2. f — дифференцируема;
3. (f^{-1}) — тоже дифференцируема.

2 Формулировка теоремы о локальной обратимости в терминах систем уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_m) = y_1 \\ \ldots \\ f_m(x_1, \ldots, x_m) = y_m \end{cases}$$

Все f_i — гладкие.

Пусть при $y = (b_1, \ldots, b_m)$ существует единственное решение $x = (a_1, \ldots, a_m)$, что $\det\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right) \neq 0$.

Тогда для y_0 близких к $(b_1, \ldots, b_m)$ существует решение $(x_1, \ldots, x_m)$ близкое к $(a_1, \ldots, a_m)$ и зависимое от y, причём оно гладкое.

3 Формулировка теоремы о неявном отображении в терминах систем уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \end{cases}$$

$x = a$ и $y = b$ удовлетворяют системе уравнений, а также f_i — функции класса C^r, также

$\det\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}(a, b)\right) \neq 0$. Тогда

$\exists U(a)$ и $V(b)$ такое, что $\exists! \varphi : U(a) \to V(b)$ класса C^r, что $\forall x \in U(a)$ верно $(x, \varphi(x))$ — решение этой системы.

4 Простое k-мерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$

1. $M \subset \mathbb{R}^m$ — простое k-мерное многообразие в $\mathbb{R}^m$ (непрерывное), если оно гомеоморфно открытому множеству из $\mathbb{R}^k$, т.е.:

   $\exists O \subset \mathbb{R}^k$ и $\exists \Phi : O \to M$ такое, что

   - Φ — сюрьекция;
   - Φ — непрерывное;
   - Φ — обратимо и Φ^{-1} — непрерывно.

2. $M \subset \mathbb{R}^m$ — простое, k —мерное, C^r — гладкое многообразие, если:

   $\exists O \subset \mathbb{R}^k$, $\Phi : O \to \mathbb{R}^m$:

   - $\Phi(O) = M$, и это гомеоморфизм;
   - $\Phi \in C^r(O, \mathbb{R}^m)$ — это гладкость;
   - $\forall t \in O$ верно, что rang $\Phi'(t) = k$.

5 Касательное пространство к k-мерному многообразию в $\mathbb{R}^m$

Пусть $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ —C^r-параметризация $U(p) \cap M$, $p \in M$ и $\Phi(t_0) = p$. Тогда $\Phi'(t_0) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — касательное пространство к k-мерному многообразию M в точке p.

6 Относительный локальный максимум, минимум, экстремум

$f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$,

$\Phi : E \to \mathbb{R}^n$, тогда

$x_0 \in E$, $\Phi(x_0) = 0$ — точка относительного локального максимума f, если $\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E$ $f(x) \leq f(x_0)$.

Аналогично определяется минимум.

7 Формулировка достаточного условия относительного экстремума

$f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$,

$\Phi : E \to \mathbb{R}^n$, $a \in E : \text{rang } \Phi'(a) = n$.

$$\begin{cases} f'(a) - \lambda \Phi'(a) = 0 \\ \Phi(a) = 0 \end{cases}$$

Если $h = (h_x, h_y) \in \mathbb{R}^{m+n}$ удовлетворяет $\Phi'(a)h = 0$, то можно выразить $h_y = \psi(h_x)$.

Рассмотрим квадратичную форму $Q(h_x) = d^2G(a, (h_x, \psi(h_x)))$.

Q — положительно определенная, значит точка локального минимума, если отрицательно определенная — точка локального максимума, Q — неопределенная — нет экстремума.

8 Поточечная сходимость последовательности функций на множестве

$f_n : X \to \mathbb{R}$, если $\exists f : E \subset X \to \mathbb{R}$, что для любого $x_0 \in E$ существует $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$, то

$f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$ поточечно на E.

9 Равномерная сходимость последовательности функций на множестве

f, $f_n : X \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, тогда f_n — равномерно сходится на E к функции f если

$M_n := \sup |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Обозначается как $f_n \rightrightarrows f$ на множестве E.

10 Равномерная сходимость функционального ряда

1. Функциональный ряд сходится поточечно на E, если для любого $x \in E$
   $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ — сходится к сумме $S(x)$.

2. Функциональный ряд сходится равномерно на E (к сумме $S(x)$), если

   $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на E.

11 Формулировка критерия Больцано–Коши для равномерной сходимости

Функциональный ряд $\sum u_n$ равномерно сходится на $E \iff \forall\varepsilon > 0 : \exists N : \forall m \geq n \geq N, x \in E :$ $\left|\sum\limits_{k=n}^{m} u_k(x)\right| < \varepsilon.$

12 Степенной ряд, радиус сходимости степенного ряда, формула Адамара

$a_n \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$, $B(z_0, r) \subset \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$, тогда

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ называют степенным рядом.

Назовём R радиусом сходимости степенного ряда, если:

- при $|z - z_0| < R$ ряд абсолютно сходится;
- при $|z - z_0| > R$ ряд расходится.

$R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{a_n}}$ — формула Адамара.

13 Кусочно-гладкий путь

14 Векторное поле

$V : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — векторное поле, где E — открытое, (по умолчанию непрерывное), гладкое.

15 Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути

V — векторное поле в E, γ — кусочно-гладкий путь в E. Тогда

$I(V, \gamma) := \int\limits_a^b \langle V\left(\gamma(t)\right), \gamma'(t)\rangle dt$ — интеграл векторного поля V по кусочно-гладкому пути γ.

16 Потенциал, потенциальное векторное поле

$O \subset \mathbb{R}^m$ — область, $V : O \to \mathbb{R}^m$. Тогда V — потенциальное векторное поле, а f — его потенциал, если $f \in C^1(O, \mathbb{R})$ и $\operatorname{grad} f = V$ в области O.

Часть II

Теоремы

17 Лемма о "почти локальной инъективности"

$F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — дифференцируема в точке $x_0 \in O$,

$\det F'(x_0) \neq 0$,

O — область.

Тогда $\exists c, \delta > 0 : \forall h : |h| < \delta : |F(x_0 + h) - F(x_0)| \geq c \cdot |h|$

17.1 Доказательство

$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F'(x_0)h + \alpha(h)\,|h|| \geq |F'(x_0)h| - |\alpha(h)|\,|h| \geq (\widetilde{c} - |\alpha(h)|)\,|h| \geq \dfrac{c}{2}\,|h|$

Возьмём в качестве $\widetilde{c} = \dfrac{1}{\|(F'(x_0))^{-1}\|}$.

Пусть при $|h| < \delta$ будет верно, что $|\alpha(h)| < \dfrac{\widetilde{c}}{2}$.

18 Теорема о сохранении области

$F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, где O — открыто,

для любого $x \in O$ выполняется $\det F'(x) \neq 0$. Тогда $F(O)$ — открыто.

18.1 Доказательство

Пусть $x_0 \in O$ и $y_0 = F(x_0) \in F(O)$, необходимо проверить, что y_0 — внутренняя точка $F(O)$.

По лемме о "почти локальной инъективности" существуют такие c и δ, что для любого $h \in \overline{B(0,\delta)}$ верно $|F(x_0+h) - F(x_0)| \geq c|h|$ (и в частности $F(x_0+h) \neq F(x_0)$ при $|h| = \delta$).

$r := \dfrac{1}{2}\text{dist }(y_0, F(S(x_0,\delta))) > 0$

Проверим, что $B(y_0, r) \subset F(O)$. Пусть $y \in B(y_0, r)$ и $g(x) := |F(x) - y|$ — функция на $\overline{B(x_0,\delta)}$.

1. На $S(x_0,\delta)$ верно, что $|F(x) - y| \geq r$
2. При $x = x_0$ выполняется, что $|F(x_0) - y| = |y_0 - y| < r$, по теореме Вейерштрасса g достигается минимума внутри шара $B(x_0,\delta)$.

Пусть $l : x \mapsto |F(x) - y|^2$ — достигает минимума таким же образом.

Найдём минимум с помощью необходимого условию экстремума, т.е. производная должна быть равна 0.

$$\begin{cases} l'_{x_1} = 0 \quad 2(f_1(x_1,\ldots,x_m) - y_1)\cdot\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \ldots + 2(f_m(x_1,\ldots,x_m) - y_m)\cdot\dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} = 0 \\ \ldots \\ l'_{x_m} = 0 \quad 2(f_1(x_1,\ldots,x_m) - y_1)\cdot\dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} + \ldots + 2(f_m(x_1,\ldots,x_m) - y_m)\cdot\dfrac{\partial f_m}{\partial x_m} = 0 \end{cases}$$

Поскольку матрица $F'(x)$ невырожденная по условию, то получаем, что $f_i(x) - y = 0$ для всех i.

19 Следствие о сохранении области для отображений в пространство меньшей размерности

$F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, где $l < m$ и $F \in C^1(O)$,

$\operatorname{rang} F'(x) = l$ при всех x.

Тогда $F(O)$ — открыто.

19.1 Доказательство

В точке x_0 и в окрестности ранг реализован на первых l столбцах.

Пусть $\widetilde{F} = \begin{pmatrix} F \\ x_{l+1} \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} : O \to \mathbb{R}^m$

$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (F(x_1, \dots, x_m), x_{l+1}, \dots, x_m)$

$\det \widetilde{F}(x_0) = \det F(x_0) \neq 0$, а также $\forall x \in U(x_0)$.

Значит $\widetilde{F}(U(x_0))$ открыто в $\mathbb{R}^m$, а $F(U(x_0))$ — проекция на $\mathbb{R}^l$.

20 Теорема о гладкости обратного отображения

$T \in C^r\left(O, \mathbb{R}^m\right)$ $(r = 1,\, 2,\, \ldots,\, +\infty)$.

Пусть T — обратимо, $\det T'(x) \neq 0$ всюду. Тогда

$T^{-1} \in C^r$ и при этом $\left(T^{-1}\right)'(y_0) = \left(T'(x_0)\right)^{-1}$ при $y_0 = T(x_0)$.

20.1 Доказательство

Индукция по r:

- База $r = 1$:

  $S = T^{-1}$ — обратное отображение, S — непрерывно (по теореме о сохранении области).

  O — открытое $\Rightarrow T(O)$ — открытое, значит $T : \mathbb{R}^m_{(1)} \to \mathbb{R}^m_{(2)}$, а $S : \mathbb{R}^m_{(2)} \to \mathbb{R}^m_{(1)}$, значит и S^{-1} — тоже открытое.

  $T(O) = O_1$, $y_0 \in O_1$, верно ли, что S — дифференцируема в y_0? Обозначим $A = T'(x_0)$.

  По лемме о почти локальной инъективности $\exists c, \delta : x \in B(x_0, \delta)$, что $|T(x) - T(x_0)| \geq c|x - x_0|$

  По определению дифференцирования $T(x) - T(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x)|x - x_0|$

  $S(y) - S(y_0) = A^{-1}(y - y_0) + A^{-1}\alpha\left(S(y)\right)|S(y) - S(y_0)|$.

  Пусть $\beta = A^{-1}\alpha\left(S(y)\right)|S(y) - S(y_0)|$

  Пусть y близко к $y_0 : |x - x_0| = |S(y) - S(y_0)| < \delta$ — по непрерывности S'.

  $|\beta(y)| = |x - x_0| \cdot \left|A^{-1}\alpha\left(S(y)\right)\right| \leq \frac{1}{c}\,|T(x) - T(x_0)| \cdot \|A^{-1}\| \alpha\left(S(y)\right)| = \frac{\|A^{-1}\|}{c}\,|\alpha\left(S(y)\right)|\,|y - y_0| = o(|y - y_0|)$ при $y \to y_0$.

  $|T(x) - T(x_0)| \geq c|x - x_0| \Rightarrow |x - x_0| \leq \frac{1}{c}\,|T(x) - T(x_0)|$.

  $S' : y \xrightarrow{C^1} T^{-1}(y) = x \xrightarrow{C^1} T'(x) \xrightarrow{C^\infty} \left(T'(x)\right)^{-1} = S'$.

- Индукционный переход без доказательства:

  $r = 1 \Rightarrow r = 2$, т.е. $T \in C^2 \Rightarrow S \in C^2$, т.е. $S' \in C^1$, а также $T \in C^1$ и $S \in C^1$.

21 Лемма о приближении отображения его линеаризацией

$T \in C^1(O, \mathbb{R}^m)$, $x_0 \in O$.

Тогда $|T(x_0+h) - T(x_0) - T'(x_0)h| \geq M \cdot |h|$, где $M = \sup\limits_{z \in [x_0, x_0+h]} \|T'(z) - T'(x_0)\|$.

21.1 Доказательство

$|F(x) - F(x_0)| \leq \sup\limits_{z \in [x_0, x]} \|F^{-1}(z)\| \cdot |x - x_0|$ — по теореме Лагранжа.

$F(x) = T(x) - T'(x_0) \cdot X$

$F'(x) = T'(x) - T'(x_0)$

$|T(x_0+h) - T(x_0) - T'(x_0)h| = |F(x_0+h) - F(x_0)| \leq \sup\limits_{z \in [x_0, x_0+h]} \|F'(z)\| |h|$.

22 Теорема о локальной обратимости

$T \in C^1(O, \mathbb{R}^m)$, $x_0 \in O$ и $\det T'(x_0) \neq 0$. Тогда

$\exists U(x_0) : T\big|_{U(x_0)}$ — диффеоморфизм.

22.1 Доказательство

Достаточно доказать, что $\exists U(x_0)$, что $T\big|_{U(x_0)}$ — обратимо (и для любого $x \in U(x_0)$ $\det T'(x) \neq 0$).

$T'(x_0)$ — обратимо, значит $\exists c > 0 : \forall h\ |T'(x_0)h| \geq c|h|$, где $c = \dfrac{1}{\|T'(x_0)^{-1}\|}$.

Возьмём $U = B(x_0, r) \subset O$ так, что при $x \in U$ и было верным:

$\det T'(x) \neq 0$ и $\|T'(x) - T'(x_0)\| < \dfrac{c}{4}$.

Проверим, что $T\big|_U$ — взаимно-однозначное отображение.

$x, y \in U$ и $y = x + h$

$T(y) - T(x) = (T(x+h) - T(x) - T'(x)h) + (T'(x)h - T'(x_0)h) + T'(x_0)h$

(Здесь и ниже римскими цифрами отображается номер скобки в выражении сверху)

$|T(y) - T(x)| \geq |T'(x_0)h| - |\mathrm{I}| - |\mathrm{II}| \geq c|h| - \dfrac{c}{2}|h| - \dfrac{c}{4}|h| = \dfrac{c}{4}|h| \neq 0.$

$|\mathrm{I}| \geq M|h|$

$|T(x_0 + h) - T(x_0) - T'(x_0)h| \leq M|h|$

$M = \sup \|T'(z) - T'(x_0)\|$, $z \in [x_0, x_0 + h]$

$M \leq \dfrac{c}{2}$.

23 Теорема о неявном отображении

$F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$, $F \in C^r\left(O, \mathbb{R}^n\right)$,

$(a, b) \in O$ и $F(a, b) = 0$,

$\det F'_y(a, b) \neq 0$.

Тогда:

1. Существует открытое $P \in \mathbb{R}^m$, $a \in P$ и также существует открытое $Q \in \mathbb{R}^n$, $b \in Q$ такие, что

   $\exists! \varphi : P \to Q$ — C^r-гладкое, такое, что $\forall x \in P \ F(x, \varphi(x)) = 0$.

2. $\varphi'(x) = -\left(F'_y(x, \varphi(x))\right)^{-1} \cdot F'_x(x, \varphi(x))$.

23.1 Доказательство

1. $\Phi : O \to \mathbb{R}^{m+n}$

   $(x, y) \mapsto (x, F(x, y))$

   $\Phi' = \begin{pmatrix} \mathbb{E} & 0 \\ F'_x & F'_y \end{pmatrix}$, $\det \Phi'(a, b) \neq 0$

   $\exists \widetilde{U}(a, b) : \Phi\big|_{\widetilde{U}}$ — диффеоморфизм.

   $\widetilde{U} = P_1 \times Q$, где $a \in P_1$, $b \in Q$.

   (a) $\widetilde{V} = \Phi\left(\widetilde{U}\right)$ — открыто;

   (b) $\exists \psi = \Phi^{-1} : \widetilde{V} \to \widetilde{U}$;

   (c) Φ не меняет первую координату, значит ψ тоже не меняет,

   $\psi(u, v) = (u, H(u, v))$, $H : \widetilde{V} \to \mathbb{R}^n$, $H \in C^r$;

   (d) "ось x" и "ось u" одно и то же $\mathbb{R}^m$,

   $P := (\mathbb{R}^m \times \{O_n\}) \cap \widetilde{V}$ — открыто в $\mathbb{R}^m$;

   (e) $\psi(x) := H(x, 0) : P \to Q : F(x, \psi(x)) = 0$ — единственно,

   $x \in P$, $y \in Q$ $F(x, y) = 0$, $(x, y) = \psi\left(\Phi(x, Y)\right) = \psi(x, 0) = (x, H(x, 0))$.

2. $F(x, \varphi(x)) = 0$, $F \circ H = 0$,

$$\begin{pmatrix} F'_x & F'_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ \varphi'(x) \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow F'_x + F'_y \varphi'(x) = 0,$$

$$F'_y \varphi' = -F'_x$$

$$\varphi' = -\left(F'_y\right)^{-1} F'_x$$

24 Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений

$M \subset \mathbb{R}^m$, зафиксируем $1 \leq k < m$ и $1 \leq r \leq +\infty$.

Тогда $\forall p \in M$ эквивалентны следующие два утверждения:

1. $\exists U \subset \mathbb{R}^m$ — открытое, $p \in U$,

   $M \cap U$ — простое k-мерное C^r-гладкое многообразие;

2. $\exists \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ — открытое, $p \in \widetilde{U}$,

   что существуют функции $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_{m-k} : \widetilde{U} \to \mathbb{R} \in C^r$ такие, что

   $x \in M \cap \widetilde{U} \Longleftrightarrow f_1(x) = 0,\ f_2(x) = 0,\ \ldots,\ f_{m-k}(x) = 0$ и (grad $f_1(p)$, …, grad $f_{m-k}(p)$) — ЛНЗ.

24.1 Доказательство

- $1 \Rightarrow 2$:

  Существует параметризация $\Phi \in C^r\left(O \subset \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m\right)$,

  $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — координатные функции Φ и $p = \Phi(t_0)$, $\operatorname{rang} \Phi'(t_0) = k$.

  Можно считать, что $\left(\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t_0)\right)$ — невырождена.

  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$.

  $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ — проекция, $x \mapsto (x_1, \ldots, x_k)$.

  $L \circ \Phi$ имеет невырожденный производный оператор в точке t_0.

  $\exists w(t_0)$ — окрестность t_0, $\exists V \in \mathbb{R}^k$ — открытое и $L \circ \Phi : w \to V$ — диффеоморфизм.

  $L(w) \to V$ — взаимно-однозначеное отображение, т.е. $\Phi(w)$ — график некоторого отображения $H : V \to \mathbb{R}^{m-k}$.

  Пусть $\psi = (L \circ \Phi)^{-1} : V \to w$, $\psi \in C^r$.

  Если $\widetilde{x} \in V$, то $(\widetilde{x}, H(\widetilde{x})) = \Phi(w(\widetilde{x})) \Rightarrow H \in C^r$.

  $\Phi(w)$ — открыто в M, $\exists$ открытое $\widetilde{U} \in \mathbb{R}^m$ такое, что $\widetilde{U} \cap M = \Phi(w)$ (можно считать, что $\widetilde{U} \subset V \times \mathbb{R}^{m-k}$.

  $f_j : \widetilde{U} \to \mathbb{R}$, $f_j(x) = H_j\left(L(x)\right) - x_{k+j}$, если $x \in \widetilde{U} \cap M \Leftrightarrow$ все $f_j(x) = 0$.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial H_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial H_1}{\partial x_k} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial H_2}{\partial x_k} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & \\ \dfrac{\partial H_{m-k}}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial X_{m-k}}{x_k} & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$, где $m-k$ строчек и все они ЛНЗ.

- $2 \Rightarrow 1$:

  Из предыдущего пункта у нас есть система уравнение, для которой верно, что $\operatorname{grad} f_i(p)$ — ЛНЗ, можно считать, что $\det \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_{k+j}}(p) \right)_{i,j=1..m-k} \neq 0$.

  По теореме о неявном отображении $\exists H : P \to Q$, где P — окрестность $(p_1, \dots, p_k)$, а Q — окрестность $(p_{k+1}, \dots, p_m)$,

  что $\forall\ (x_1, \dots, x_k) \in P$ точка $(x_1, \dots, x_k, H_1(x_1, \dots, x_k), H_2(x_1, \dots, x_k), \dots, H_{m-k}(x_1, \dots, x_k))$ удовлетворяет системе уравнений.

  $\Phi : P \to \mathbb{R}^m$,

  $u \mapsto (u, H(u))$ — параметризация нашего многообразия, $(P \times Q) \cap M$.

25 Следствие о двух параметризациях

$M \subset \mathbb{R}^m$ — k-мерное простое C^r-гладкое многообразие, $p \in M$, U — открытое в M, $p \in U$.

$\Phi_1 : O_1 \subset \mathbb{R}^k \to U \cap M$,

$\Phi_2 : O_2 \subset \mathbb{R}^k \to U \cap M$ (оба отображние "на" и даже гомеоморфизм)

($\phi_i \in C^r(O_i, \mathbb{R}^m)$). Тогда существует диффеоморфизм $\psi : O_1 \to O_2$ и $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \psi$.

25.1 Доказательство

Для случая, когда rang $\Phi_1'(p)$ и rang $\Phi_2'(p)$ на одном и том же наборе столбцов (во всех точках O_1 и O_2).

Тогда $\Phi_1 \circ L$ и $\Phi_2 \circ L$ — тоже диффеоморфизмы.

Дальше всё очевидно, что $\Phi_1 = \Phi_2 \circ (L \circ \Phi_2)^{-1} \circ (L \circ \Phi_1)$.

26 Лемма о корректности определения касательного пространства

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — C^r-параметризация $U(p) \cap M$, $p \in M$, $\Phi(t_0) = p$, M — простое k-мерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$. Тогда образ оператора $\Phi'(t_0) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — это k-мерное подпространство в $\mathbb{R}^m$, не зависящее от Φ.

26.1 Доказательство

Φ — параметризация, значит $\mathrm{rang}\ \Phi' = k$, значит образ k-мерный. Если есть параметризацция Φ_2, можно считать, что существует диффеоморфизм ψ, что $\Phi_2 = \Phi \circ \psi$, и при этом $\Phi_2' = \Phi' \cdot \psi'$, где ψ' — невырожденный, значит Φ_2' совпадает с Φ'.

27 Касательное пространство в терминах векторов скорости гладких путей

$v \in T_p(M) \subset \mathbb{R}^m \iff$ существует гладкий путь $\gamma_v : [-1, 1] \to M$, $\gamma'(0) = v$ и $\gamma(0) = p$.

27.1 Доказательство

Φ — параметризация в окрестности P, $\Phi(t_0) = p$.

- $\Leftarrow$

  $\phi(t) = \Phi^{-1}(\gamma(t))$ — соответствующий путь в E.

  Путь гладкий, значит $\gamma'(t) = \Phi(\phi(t))' = \Phi'(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$, $\gamma'(0) = \Phi'(t_0)w$, что и требовалось доказать.

- $\Rightarrow$

  $v \in T_p(M) \to \exists w \in \mathbb{R}^k : \Phi'(t_0)w = v$.

  Рассмотрим путь $\gamma(t) = \Phi(t_0 + wt)$: $\gamma'(0) = \Phi'(t_0)w$, что и требовалось доказать.

28 Касательное пространство к графику функции и к поверхности уровня

29 Необходимое условие относительного локального экстремума

$f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$,

$\Phi : E \to \mathbb{R}^n$, $a \in E$ и $\Phi(a) = 0$ — точка относительно локального экстремума.

rang $\Phi'(a) = n$, и f, $\Phi \in C^1(E)$.

Тогда $\exists \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, что

$$\begin{cases} f'(a) - \lambda \cdot \Phi'(a) = 0 \\ \Phi(a) = 0 \end{cases}$$

29.1 Доказательство

Пусть rang $\Phi'(a)$ реализован на столбцах x_{m+1}, …, x_{m+n}

$a = (a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+n}) = (a_x, a_y)$ и $\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\right)$ — невырожденная матрица $n \times n$.

По теореме о неявном отображении $\varphi : U(a_x) \to V(a_y)$ и $\forall x \in U(a_x)$ $\Phi(X, \varphi(X)) = 0$. Кстати, $U(x) \cap M_\Phi$ — простое m-мерное многообразие. Тогда $a_x = (a_1, \ldots, a_m)$ — точка локального экстремума для функции $g(x) = f(x, \varphi(x))$. Тогда

$$\begin{cases} f'_x(a) + f'_y(a)\varphi'(a_x) = 0 \\ \Phi'_x(a) + \Phi'_y(a) \cdot \varphi'(a_x) = 0 \end{cases}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$ $\lambda \cdot \Phi'_x + \lambda \cdot \Phi'_y \cdot \varphi' = 0$

$(f'_x - \lambda \Phi'_x) + (f'_y - \lambda \Phi'_y) \cdot \varphi' = 0$, подставляем $\lambda := f'_y(a) \cdot \left(\Phi'_y(a)\right)^{-1}$.

30 Вычисление нормы линейного оператора с помощью собственных чисел

$A \in \mathrm{Lin}\ (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, тогда $\|A\| = \max\sqrt{\lambda}$, где λ — собственные числа $A^T A$.

30.1 Доказательство

$\|A\|^2 = \max |Ax|^2 = \max \langle Ax, Ax \rangle = \max \left\langle A^T Ax, x \right\rangle$.

31 Теорема Стокса–Зайдля о непрерывности предельной функций. Следствие для рядов

f_n, $f_0 : X \to \mathbb{R}$, X — метрическое пространство, $c \in X$, f_n — непрерывно в точке c. $f_n \rightrightarrows f_0$ на X. Тогда f_0 — непрерывна в точке c.

31.1 Доказательство

$|f_0(x) - f_0(c)| \leq |f_0(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(c)| + |f_n(c) - f_0(c)| < 3\varepsilon$ (китайский эпсилон), поскольку по непрерывности из условия

$\forall \varepsilon > 0 : \exists U(c) : \forall x \in U(c) : |f_0(x) - f_0(c)| < \varepsilon$.

31.2 Следствие для рядов

$u_n : X \to \mathbb{R}$ непрерывно в $x_0 \in X$, где X — метрическое пространство/

$\sum u_n(x)$ — равномерно сходится на X, $S(x) = \sum u_n(x)$. Тогда $S(x)$ непрерывно в x_0.

31.2.1 Доказательство

$S_n(x) \rightrightarrows S(x) \Rightarrow S(x)$ — непрерывно в x_0).

32 Метрика в пространстве непрерывных функций на компакте, его полнота

X — метрическое пространство, комактен. $f_1,\ f_2 : X \to \mathbb{R}$, $f_1,\ f_2$ — непрерывен на X.

$\rho(f_1, f_2) = \max\limits_{x \in X} |f_1(x) - f_2(x)|$ — метрика в $C(x)$, тогда пространство $(C(x), \rho)$ — полное.

32.1 Доказательство

$f_n \in C(x)$ — фундаментальная последовательность

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n, m > N : \max\limits_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \Rightarrow \forall x \in X.$

$f_n(x)$ — фундаментальная вещественна последовательность, значит $\forall x \in X : \exists \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$.

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall m, n > N : \forall x |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \Rightarrow |f_n - f(x)| < \varepsilon$

33 Теорема о предельном переходе под знаком интеграла. Следствие для рядов

$f_n \in C[a, b]$

$f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$.

Тогда $\int\limits_a^b f_n \to \int\limits_a^b f$

33.1 Доказательство

$$\left| \int\limits_a^b f_n - \int\limits_a^b f \right| \le \int\limits_a^b |f_n - f| \le \max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot (b - a) \to 0 \ (a, b \in \mathbb{R}, \text{ не в } \overline{\mathbb{R}})$$

33.2 Следствие для рядов

$u_n \in C[a, b]$

$\sum u_n(x)$ равномерно сходится на $[a, b]$

$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$, $x \in [a, b]$

Тогда $\int\limits_a^b S(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx$

($\sum u_n$ — равномерно сходится, u_n — непрерывно $\Rightarrow$ $S(x)$ непрерывно $\Rightarrow$ $\int S(x)$ имеет смысл)

33.2.1 Доказательство

$\int\limits_a^b S_n(x)dx \to \int\limits_a^b S(x)dx$ по основной теореме,

$\sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_a^b u_k(x)dx \to \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \int\limits_a^b u_k(x)dx$.

34 Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру

$f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$

f, f'_y — непрерывны на $[a, b] \times [c, d]$, $\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y)dx$

Φ — дифференцируема на $[c, d]$ и $\Phi'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x, y)dx$

34.1 Доказательство

$\dfrac{\Phi\left(Y + \frac{1}{n}\right) - \Phi(y)}{\frac{1}{n}} = \int\limits_a^b \dfrac{f\left(x, y + \frac{1}{n}\right) - f(x, y)}{\frac{1}{n}}dx = \int\limits_a^b f'_y\left(x, y + \dfrac{\Theta}{n}\right)dx$, что есть $\int\limits_a^b g_n dx$.

$g_n(x, y) \rightrightarrows f'_y(x, y)$ для $x \in [a, b]$.

$\Theta = a_x$, $0 \leq a_x \leq 1$.

35 Теорема о предельном переходе под знаком производной. Дифференцирование функционального ряда

$f_n \in C^1\langle a, b\rangle$ и $f_n \to f_0$ топочечно на $\langle a, b\rangle$, $f'_n \rightrightarrows \varphi$ на $\langle a, b\rangle$. Тогда

1. $f_0 \in C^1\langle a, b\rangle$
2. $f'_0 = \varphi$ на $\langle a, b\rangle$

35.1 Доказательство

x_0, $x_1 \in \langle a, b\rangle$, $f'_n \rightrightarrows \varphi$ на $[x_0, x_1]$, $\int\limits_{x_0}^{x_1} f'_n \to \int\limits_{x_0}^{x_1} \varphi$

$f_n(x_0) - f_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int\limits_{x_0}^{x_1} \varphi$, и $f_n(x_1) - f_n(x_0) \to f_0(x_1) - f_0(x_0)$, значит

$\int\limits_{x_0}^{x_1} \varphi = f_0(x_1) - f_0(x_0)$, f_0 — первообразная для φ, φ — непрерывна, значит $f') - \varphi$.

35.2 Дифференцирование функционального ряда

$u_n \in C^1\left(\langle a, b\rangle\right)$

1. $\sum u_n(x) = S(x)$ $x \in \langle a, b\rangle$ (поточечная сходимость)
2. $\sum u'_n(x) = \varphi(x)$ равномерно сходится при $x \in \langle a, b\rangle$.

Тогда

1. $S(x) \in C^1\left(\langle a, b\rangle\right)$
2. $S'(x) = \varphi(x)$ при $x \in \langle a, b\rangle$

Т.е. $\left(\sum\limits_{n=1}^{+infty} u_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u'_n(x)$

35.2.1 Доказательство

Следует из основной теоремы.

$f_n \leftrightarrow S_n$ и $f_0 \leftrightarrow S$.

$f_n(x) \to f_0(x)$ и $f'_n \rightrightarrows \varphi$ и $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u'_k(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right)' = f'_n$

36 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда

$\sum u_n$ и $u_n : X \to \mathbb{R}$. Также пусть существует вещественная последовательность c_n:

1. $|u_n(x)| \leq c_n \ \forall x \in X$;
2. $\sum c_n$ сходится.

Тогда $\sum u_n(x)$ — равномерно сходится на X

36.1 Доказательство

Равномерно сходится тогда и только тогда $R_n \rightrightarrows 0$

$\sup\limits_{x \in X} \left| \sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \sum\limits_{k=n}^{+\infty} c_k \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ как остаток сходящегося ряда.

37 Дифференцируемость гамма функции

$\Gamma(x)$ бесконечно дифференцируется на $(0, +\infty)$.

37.1 Доказательство

$\dfrac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \prod\limits_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \dfrac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}$.

$-\ln\Gamma(x) = \ln x + \gamma x + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \dfrac{x}{k}\right) - \dfrac{x}{k}\right)$, обозначим за $u_k = \left(\ln\left(1 + \dfrac{x}{k}\right) - \dfrac{x}{k}\right)$.

$u_k'(x) = \dfrac{1}{x+k} - \dfrac{1}{k} = -\dfrac{x}{k(k+x)}$.

$|u_k'(x)| \leq \dfrac{M}{k(k+M)}, \sum \dfrac{M}{k(k+M)}$ — сходится по признаку Вейерштрасса.

$\sum u_k'(x)$ равномерно сходится при $x \in (0, M)$, где M — какое угодно.

$-\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \dfrac{1}{x} + \gamma - \sum \dfrac{x}{k(k+x)}$.

38 Теорема о предельном переходе в суммах

$u_n : E \subset X \to \mathbb{R}$, x_0 — предельная точка E, X — метрическое пространство.

1. $\forall n : \exists \lim\limits_{x \to x_0} u_n(x) = a_n$;
2. $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E.

Тогда

1. $\sum a_n$ — сходится;
2. $\sum a_n = \lim\limits_{x \to x_0} \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right)$.

38.1 Доказательство

1. $\sum a_n$ — сходится

   $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, $S_n^a = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

   Достаточно проверить, что последовательность S_n^a фундаментальная.

   $\left|S_{n+p}^a - S_n^a\right| \le \left|S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)\right| + |S_{n+p}(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n^a| < \varepsilon$

2. Сводим к предыдущей теореме

   $\widetilde{u_n}(x) := \left[\begin{array}{l} u_n(x), x \ne x_0, x \in E \\ a_n, x = x_0 \end{array} \right.$

   $\widetilde{u_n}$ — непрерывна в точке x_0. Остаётся только проверить, что $\sum \widetilde{u_n}(x)$ равномерно сходится в $E \cup \{x_0\}$

   $\sup\limits_{x \in E \cup \{x_0\}} \left| \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \widetilde{u_k}(x) \right| \le \sup\limits_{x \in E} \left| \sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k(x) \right| \to 0$

39 Теорема о перестановке двух предельных переходов

$f_n : E \subset X \to \mathbb{R}$, x_0 — предельная точка E, и

1. $f_n \rightrightarrows S(x)$ при $n \to +\infty$ на E;
2. $f_n(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} A_n$

Тогда

1. $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} A_n = A \in \mathbb{R}$
2. $S(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} A$

39.1 Доказательство

$\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = f_n$, $a_k := A_k - A_{k-1}$

Тогда $\sum a_n$ — сходится $\Rightarrow \exists \sum (A_k - A_{k-1}) \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{n \to +\infty} A_n$

$f(x, y) \rightrightarrows f(x)$ при $y \to y_0$ на множестве E, т.е.

$\forall \varepsilon > 0 : \exists > 0 : \forall y : 0 < |y - y_0| < \delta : \forall x \in E : |f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon$

40 Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда

$\sum a_n(x)b_n(x)$, $x \in X$.

1. $\exists C_a : \forall N : \forall x \in X : \left|\sum\limits_{n=1}^{N} a_n(x)\right| \le C_a$,

   частичные суммы ряда $\sum a_n(x)$ равномерно ограничены.

2. $b_n \rightrightarrows 0$ при $n \to +\infty$ на множестве X, $\forall x : b_n(x)$ — монотонная. Тогда $\sum a_n(x)b_n(x)$ равномерно сходится на X.

40.1 Доказательство

$$\sum_{N \le k \le M} a_k b_k = A_M b_M - A_{N-1} b_{N-1} + \sum_{k=N}^{M-1} (b_k - b_{k+1}) A_k$$

$$\left|\sum_{k=N}^{M} a_k b_k\right| \le |A_M b_M| + |A_{N-1} b_N| + \left|\sum (b_k - b_{k+1}) A_k\right| \le C_A \left(|b_M| + |b_N|\right) + \sum (b_k - b_{k+1}) A_k \le C_a \left(|b_M| + |b_N| + \sum_{k=N}^{M-1} (b_k - b_{k+\right.$$
$$C_a \left(|b_M| + |b_N| + |b_M| + |b_N|\right) \to c$$

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$ — равномерно сходится $x \in X$;

2. $\exists C_B : \forall x \forall n : |b_n(x)| \le C_m$ при каждом x $b_n(x)$ монотонна. $\sum a_n b_n$ равномерно сходится/

41 Теорема о круге сходимости степенного ряда

$\sum a_n(z-z_0)^n$, тогда выполнено одно из трёх условий:

1. ряд сходится только при $z = z_0$;
2. ряд сходится при любых $z \in \mathbb{C}$;
3. $\exists R \in (0, +\infty)$ такое, что при $|z - z_0| < R$ абсолютно сходится, при $|z - z_0| > R$ расходится, при $|z - z_0| = R$ может как сходится, так и расходится.

41.1 доказательство

Изучим $\sum a_n(z-z_0)^n$ на абсолютная сходимость.

$\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n||z-z_0|^n} = \overline{\lim}|z-z_0| \sqrt[n]{|a_n|} = |z-z_0| \sqrt[n]{|a_n|}$

1. $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = +\infty$, тогда при $z = z_0$ ряд абсолютно сходится, при $z \neq z_0$ ряд расходится;
2. $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = 0$, тогда при любых z ряд сходится абсолютно;
3. $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n}$ конечен, тогда при $|z - z_0| < \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n}}$ — сходится, при $|z - z_0| > \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n}}$ — расходится.

   Тогда обозначим $R = \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n}}$ — формула Адомара.

Множество сходимости степенного ряда — это открытый круг радиуса R и некоторые точки на окружности.

42 Теорема о непрерывности степенного ряда

$\sum a_n(z-z_0)^n$, $0 < R \leq +\infty$. Тогда

1. $0 < r < R$ — тогда ряд равномерно сходится на $\overline{B(z_0, r)}$;
2. $f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n$ — непрерывен в $B(z_0, R)$.

42.1 Доказательство

1. По признаку Вейерштрасса $|a_n(z-z_0)^n| \leq |a_n| \cdot r^n$, ряд $\sum |a_n| r^n$ — абсолютно сходится;
2. Очевидно из предыдущего пункта.

43 Теорема о дифференцировании степенного ряда. Следствие об интегрировании. Пример

Обозначим за A ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ и за A' ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$, $0 < R \leq +\infty$ — радиус сходимости для (A). Тогда

1. (A') тоже равномерно сходится на R;
2. Пусть $f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n$, $z \in B(z_0, R)$. Тогда $\forall z \in B(z_0, R)$ f — дифференцируема и $f'(z) = \sum na_n(z-z_0)^{n-1}$.

43.1 Доказательство

1. $\sum \alpha_n x^n$ и $\sum \alpha_n x^{n+1}$ имеют одинаковый радиус сходимости, т.к. $x \cdot S_N(x) = \widetilde{S_N(x)}$. Пределы этих сумм существуют для одинаковых x, значит и радиус сходимости один и тот же.
   $R_{A'} = \dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{na_n}} = \dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{a_n}} = R.$
2. $a \in B(z_0, R)$, проверим, что существует $f'(a)$. Возьмём $r < R$ и $a \in B(z_0, r)$. Также пусть $w = z - z_0$ и $w_0 = a - z_0$, $|z - z_0| < r$ и $|a - z_0| < r$, тогда
   $\lim \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a} = \sum a_n \dfrac{(z-z_0)^n - (a-z_0)^n}{(z-z_0)-(a-z_0)} = \sum a_n \dfrac{w^n - w_0^n}{w-w_0}$ и
   $\left| a_n \dfrac{w^n - w_0^n}{w - w_0} \right| \leq |a_n| n r^{n-1}.$
   Заметим, что $\sum n|a_n|r^{n-1}$ сходится, т.к. ряд (A') при $z = z_0 + r$ сходится абсолютно по признаку Вейерштрасса, ряд равномерно сходится в круге $B(z_0, r)$.
   $\lim\limits_{z\to a} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ldots = \sum\limits^{+\infty} n = 1 \lim\limits_{z\to a} \dfrac{(z-z_0)^n - (a-z_0)^n}{z-a} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n n (z-z_0)^{n-1}.$

43.2 Следствие о бесконечной дифференцируемости

$f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n$, $0 < R \leq +\infty$. Тогда $f \in C^{+\infty}(B(z_0, R))$ и все производные находится с помощью почленного дифференцирования.

43.3 Следствие об интегрировании

$f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$, $a_n \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, x — тоже вещественное и лежит в $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Тогда при почленном интегрировании $\sum a_n \dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$ — ряд имеет тот же радиус сходимости и к тому же $\int\limits_{x_0}^{x} \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n \right) dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}$.

43.4 Пример

Разложить $\operatorname{arcctg} x$ в степенной ряд в окрестности $x_0 = 0$ (это же ряд Тейлора)

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2} = -(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots) = -1 + x^2 - x^4 + x^6 + \ldots \ (|x| < 1)$

$\operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2} - x + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5} + \ldots$. (не забудем, что при возврате к первообразной не надо забывать про константу).

44 Свойства экспоненты

Обозначим $\exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$, $R = +\infty$, сходится при всех $z \in \mathbb{C}$.

1. $\exp(0) = 1$;

2. $(\exp z)' = \exp z$

   $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{e^z - 1}{z} = (e^z)'\Big|_{z=0} = 1$;

3. $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$ комплексное, $\overline{\sum \dfrac{z^n}{n}} = \sum \dfrac{\overline{z}^n}{n}$;

4. $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$

   $\exp(z + w) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(z + w)^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{z^k}{k!} \dfrac{w^{n-1}}{(n - k)!} \right) = \left(\sum \dfrac{z^k}{k!} \right) \left(\sum \dfrac{w^k}{k!} \right)$

44.1 Следствие

$\forall z \in \mathbb{C}\ \exp(z) \neq 0$.

45 Метод Абеля суммирования рядов. Следствие

$\sum c_n$ — сходящийся ряд, $f(x) = \sum c_n x^n$, $-1 < x < 1$ ($\Leftrightarrow R \geq 1$). Тогда $\sum c_n = \lim\limits_{x \to 1-0} f(x)$.

45.1 Доказательство

При $x \in (0,1)$, $\sum c_n x^n$ — сходится по признаку Абеля,

$\sum a_n b_n$, $\sum a_n$ — сходится, b_n — монотонно ограниченная, что чему сопоставить очевидно. Осталось проверить, что $\sum c_n x^n$ непрерывен на $[0,1]$, т.е. равномерную сходимость $\sum c_n x^n$ на $[0,1]$.

$\sum a_n(x)$ — равномерно сходится, b_n — монотонная при каждом фиксированном x, $\exists C_b : \forall n : \forall x : |b_n(x)| \leq C_b$.

45.2 Следствие

$\sum a_n = A$, $\sum b_n = B$, $c_n := a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$, известно, что $\sum c_n = C$. Тогда $A \cdot B = C$.

45.2.1 Доказательство

$f(x) = \sum a_n x^n$, $g(x) = \sum b_n x^n$, $h(x) = \sum c_n x^n$, $x \in [0,1]$.

$x < 1$ ряды для f и g абсолютно сходится, значит $f(x) \cdot g(x) = h(x)$ при $x \to 1$.

46 Единственность разложения функции в ряд

f единственным образом раскладывается в степенной ряд в окрестности x_0 (если можно, конечно, разложить его).

46.1 Доказательство

Потому что $a_n := \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots \Rightarrow f \in C^{+\infty}(U(x_0))$.

$x := x_0 \Rightarrow a_0 = f(x_0)$.

$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots$, $x := x_0 \Rightarrow a_1 = f'(x_0)$ и $a_2 = \dfrac{f''(x_0)}{2!}$ и т.д.

47 Разложение бинома в ряд Тейлора

$\sigma \in \mathbb{R}$, тогда при $|x| < 1$

$$(1+x)^\sigma = 1 + \sigma x + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{\sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma-n+1)}{n!}x^n + \ldots.$$

47.1 Доказательство

$S'(x)(1+x) = \sigma S(x)$

$f(x) = \dfrac{S(x)}{(1+x)^\sigma} = const$

$f' = \dfrac{S'(x)}{(1+x)^\sigma} - \dfrac{\sigma S(x)}{(1+x)^{\sigma+1}} = \dfrac{0}{(1+x)^{\sigma+1}} \Rightarrow \dfrac{S(x)}{(1+x)^\sigma} = const$

$f(0) = 1 \to S(x) = (1+x)^\sigma.$

48 Теорема о разложимости функции в ряд Тейлора

$f \in C^{\infty}([x_0 - h, x_0 + h])$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. f раскладывается в ряд Тейлора в окрестности x_0;
2. $\exists \delta, C, A > 0 : \forall n : \left|f^{(n)}(x)\right| < C \cdot A^n \cdot n!$ при $|x - x_0| < \delta$.

48.1 Доказательство

- $1 \Leftarrow 2$

  Оценим остаток в форме Лагранжа $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \dfrac{f^{(n)}(\overline{x})}{n!}(x - x_0)^n$

  $\left|\dfrac{f^{(n)}(\overline{x})}{n!}(x - x_0)^n\right| \leq \dfrac{CA^n n!}{n!}|x - x_0|^n \to 0$ при $|A(x - x_0)| < 1$ и $|x - x_0| < \dfrac{1}{n}$.

  Таким образом, $|x - x_0| < \min\left(\dfrac{1}{A}, \delta\right)$, $r_n \to 0$.

- $1 \Rightarrow 2$

  $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$. Пусть при $x = x_1 \neq x_0$ ряд сходится.

  $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x_1 - x_0)^n \to 0$, т.е. меньше C_1 по модулю.

  $\left|f^{(n)}(x_0)\right| \leq C_1 \cdot n! \cdot \dfrac{1}{|x_1 - x_0|^n} B^n$

  $f^{(m)}(x) = \sum\limits_{n=m}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{(n-m)!}(x_0)(x - x_0)^{n-m}$

  $\left|f^{(m)}(x)\right| \leq \sum\limits_{n=m}^{+\infty} \dfrac{|f^{(n)}(x_0)}{(n-m)!}|x - x_0|^{n-m} \leq \sum \dfrac{C_1 B^n n!}{(n-m)!}|x - x_0|^{n-m} = C_1 B^n \sum\limits_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\ldots(n-m+1)\,|B(x - x_0)|^{n-m} = C_1 \cdot \dfrac{m! B^m}{|1 - (B(x - x_0))}^{(m+1)} \leq C_1 m! B^m 2^{m+1} = (2C_1) m! (2B)^m$.

49 Теорема Коши о перманентности метода средних арифметических

49.1 Дополнительное определение

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$, $S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.

$\sigma_n = \dfrac{1}{n+1}\,(S_0 + S_1 + \ldots + S_n)$.

Если существует $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = S$, то S называется суммой ряда $\sum a_n$ в смысле метода средних арифметических (или по Чезаро).

49.2 Формулировка

$\sum a_n = S \Rightarrow \sum a_n = S$ в смысле метода средних арифметических.

49.3 Доказательство

$\forall\varepsilon > 0 : \exists N_1 > 0 : \forall n > N_1 : |S_n - S| < \varepsilon$

$$\sigma_n - S = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(S_i - S),\ |\sigma_n - S| \le \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}|S_i - S| = \frac{\sum\limits_{i=0}^{N_1}(S_i - S)}{n+1} + \frac{\sum\limits_{i=N_1+1}^{n}|S_i - S|}{n+1} < 2\varepsilon.$$

50 Простейшие свойства интеграла векторного поля по кусочно-гладкому пути

1. Линейность по полю:

   $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, U, V — векторные поля, тогда

   $I(\alpha U + \beta V, \gamma) = \alpha I(U, \gamma) + \beta T(V, \gamma)$.

2. Аддитивность при дроблении пути:

   $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $a < c < b$,

   $\gamma_1 := \gamma\Big|_{[a,c]}$, $\gamma_2 := \gamma\Big|_{[c,b]}$ и
   $I(V, \gamma) = I(V, \gamma_1) + I(V, \gamma_2)$.

3. Замена параметра:

   $\varphi : [p, q] \to [a, b]$, сюрьекция, $\varphi \in C^1([p, q])$, $\varphi(p) = a$, $\varphi(q) = b$,

   $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$, $\widetilde{\gamma}(s) = \gamma(\varphi(s))$.

4. $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^m$ — гладкие пути,

   $\gamma_1(b) = \gamma_2(c) \Rightarrow \gamma = \gamma_2\gamma_1$ — кусочно-гладкий путь (в точке b путь γ может быть и не гладким).
   $$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), t \in [a, b] \\ \gamma_2(t - b + c), t \in [b, b + d - c] \end{cases}$$
   Тогда $I(V, \gamma) = I(V, \gamma_1) + I(V, \gamma_2)$.

5. $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$,

   $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$, $t \in [a, b]$. Тогда $I\left(V, \gamma^-\right) = -I(V, \gamma)$.

6. Оценка интеграла по пути:

   $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $L := \gamma([a, b])$ — носитель пути. Тогда

   $|I(V, \gamma)| \leq \max x \in L\, |V(x)| \cdot l(\gamma)$.

50.1 Доказательство

1. Из определения в силу линейности скалярного произведения;

2. $\int\limits_a^b = \int\limits_a^c + \int\limits_c^b$;

3. $I\left(V,\gamma\right) = \int\limits_a^b V_1\left(\gamma(t)\right)\gamma_1' + \ldots + V_m\left(\gamma(t)\right)\gamma_m' dt = \int\limits_p^q \left(V_1\left(\widetilde{\gamma}(s)\right)\gamma_1'\left(\varphi(s)\right) + \ldots + V_m\left(\widetilde{\gamma}(s)\right)\gamma_m'\left(\varphi(s)\right)\right)\varphi'(s)ds = I\left(V,\widetilde{\gamma}\right)$;

4. $\int\limits_a^{b+d-c} \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt = \int\limits_a^b + \int\limits_b^{b+d-c} = \int\limits_a^b + \int\limits_c^d \langle V(\gamma_2(\tau)), \gamma_2'(\tau)\rangle d\tau$;

5. $I\left(V,\gamma^-\right) = \int\limits_a^b \langle V\left(\gamma(a+b-t)\right) \cdot (-\gamma'(a+b-t))\rangle dt = -\int\limits_a^b \langle V, \left(\gamma(\tau)\right), \gamma'(\tau)(-d\tau)\rangle = -I\left(v,\gamma\right)$;

6. $\left|\int\limits_a^b \langle V(\gamma), \gamma'\rangle dt\right| \leq \int\limits_a^b \left|\langle V, \gamma'\rangle\right| dt \leq \int\limits_a^b \left|V\left(\gamma(t)\right)\right| |\gamma'(t)| dt \leq \max - x \in L \left|V(x)\right| \cdot \int\limits_a^b |\gamma'(t)| dt.$

51 Обобщенная формула Ньютона–Лейбница

$V : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, потенциальное векторное поле, f — потенциал, $\gamma[a,b] \to O$ — кусочно-гладкий путь, $\gamma(a) = A$, $\gamma(b) = B$. Тогда

$$\int\limits_{\gamma} V_1 dx_1 + \ldots + V_m dx_m = f(B) - f(A).$$

51.1 Доказательство

1. γ — гладкий, $\phi(t) = f(\gamma(t))$, $\phi' = f'\gamma' = \langle \text{grad } f, \gamma' \rangle = \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = f(B) - f(A)$.

2. кусочно-гладкий
$$I(V, \gamma) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \ldots = \sum_{k=1}^{n} f(\gamma(t_k)) - f(\gamma(t_{k-1})) = f(\gamma(t_n)) - f(\gamma(t_0)) = f(B) - f(A).$$

52 Характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов

V — векторное поле в O. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. V — потенциальное;
2. Итеграл $\int\limits_\gamma v_1 dx_1 + \ldots + v_m dx_m$ не зависит от пути в O;
3. Для любого кусочно-гладкого замкнутого пути верно, что $\int\limits_\gamma v_1 dx_1 + \ldots + v_m dx_m = 0$.

52.1 Доказательство

- $1 \Rightarrow 2$ — формула Ньютона-Лейбница;
- $2 \Rightarrow 3$ — очевидно;
- $3 \Rightarrow 2$ — очевидно;
- $2 \Rightarrow 1$ фиксируем $A \in O$, $\forall x \in O$ фиксируем кусочно-гладкий путь γ_x, $f(x) := \int\limits_{\gamma_x} V_1 dx_1 + \ldots + V_m dx_m$.

  Надо проверить, что f — потенциал.

  Достаточно проверить, что $f'_{x_1}(x) = V_1(x)$ при всех x.

  $\gamma_0' = (h, 0, \ldots, 0)$

  $f(x+he_1) - f(x) = \int\limits_{\gamma_0} V_d x_1 + \ldots + V_m dx_m = \int\limits_0^1 V_1(x_1 + th, \ldots, x_m) h dt = V_1(x_1 + \alpha h, x_2, \ldots, x_m) h (1-\alpha) \to V_1(x_1, \ldots, x_m)$.