Содержание

Часть I

Интеграл по мере

1 Интеграл ступенчатой функции

$f = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \chi_{E_k}$, $f \geqslant 0$, где $E_k \in \mathcal{A}$ — допустимое разбиение, тогда интеграл ступенчатой функции f на множестве X есть

$$\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X f(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mu E_k$$

Дополнительно будем считать, что $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

1.1 Свойства

- Интеграл не зависит от допустимого разбиения:

  $f = \sum \alpha_j \chi_{F_j} = \sum\limits_{k,\, j} \lambda_k \chi_{E_k \cap F_j}$, тогда $\int F = \sum \lambda_k \mu E_k = \sum\limits_k \lambda_k \sum\limits_j \mu(E_k \cap F_j) = \sum \alpha_j \mu F_i = \int F$;

- $f \leqslant g$, то $\int\limits_X f d\mu \leqslant \int\limits_X g d\mu$.

2 Интеграл неотрицательной измеримой функции

$f \geqslant 0$, измерима, тогда интеграл неотрицательной измеримой функции f есть

$$\int\limits_X f d\mu = \sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leqslant g \leqslant f}} \left(\int\limits_X g d\mu \right).$$

2.1 Свойства

- Для ступенчатой функции f (при $f \geqslant 0$) это определение даёт тот же интеграл, что и для ступенчатой функции;
- $0 \leqslant \int\limits_X f \leqslant +\infty$;
- $0 \leqslant g \leqslant f$, g — ступенчатая, f — измеримая, тогда $\int\limits_X g \leqslant \int\limits_X f$.

3 Суммируемая функция

f — измеримая, f_+ и f_- — срезки, тогда если $\int\limits_X f_+$ или $\int\limits_X f_-$ — конечен, тогда интеграл суммируемой функции есть

$\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X f_+ - \int\limits_X f_-$.

Если $\int\limits_X f \neq \pm\infty$, то говорят, что f — *суммируемая*, а также $\int |f|$ — конечен ($|f| = f_+ + f_-$).

3.1 Свойство

Если $f \geqslant 0$ — измерима, то это определение даёт тот же интеграл, что и интеграл измеримой неотрицательной функции.

4 Интеграл суммируемой функции

$E \subset X$ — измеримое множество, f — измеримо на X, тогда интеграл f по множеству E есть

$\int\limits_E f d\mu := \int\limits_X f \chi_E d\mu.$

f — суммируемая на E если $\int\limits_E f+$ — и $\int\limits_E f_-$ — конечны одновременно.

4.1 Свойства

- $f = \sum \lambda_k \chi_{E_k}$, то $\int\limits_E f = \sum \lambda_k \mu\left(E_k \cap E\right);$
- $f \geqslant 0$ — измерима, тогда $\int\limits_E f d\mu = \sup\limits_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leqslant g \leqslant f}} \left(\int\limits_X g d\mu\right).$

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ — произвольное пространство с мерой.

$\mathcal{L}^0(X)$ — множество измеримых почти везде конечных функций.

5 Простейшие свойства интеграла Лебега

1. *Монотонность*:

   $f \leqslant g \Rightarrow \int\limits_E f \leqslant \int\limits_E g.$

5.1 Доказательство

- $\sup\limits_{\substack{\widetilde{f} \text{ - ступ.} \\ 0 \leqslant \widetilde{f} \leqslant f}} \left(\int\limits_X \widetilde{f} d\mu \right) \leqslant \sup\limits_{\substack{\widetilde{g} \text{ - ступ.} \\ 0 \leqslant \widetilde{g} \leqslant g}} \left(\int\limits_X \widetilde{g} d\mu \right);$
- f и g — произвольные, то работаем со срезками, и $f_+ \leqslant g_+$, а $f_- \geqslant g_-$, тогда очевидно и для интегралов.

2. $\int\limits_E 1 \cdot d\mu = \mu E$, $\int\limits_E 0 \cdot d\mu = 0$.

5.2 Доказательство

По определению.

3. $\mu E = 0$, f — измерима, тогда $\int\limits_E f = 0$.

5.3 Доказательство

- f — ступенчатая, то по определению интеграла для ступенчатых функций получаем 0;
- $f \geqslant 0$ — измеримая, то по определению интеграла для измеримых неотрицательных функций также получаем 0;
- f — любая, то разбиваем на срезки f_+ и f_- и снова получаем 0.

4. (a) $\int -f = -\int f$;

   (b) $\forall c > 0 : \int cf = c \int f$.

5.4 Доказательство

- $(-f)_+ = f_-$ и $(-f)_= f_+$ и $\int -f = f_- - f_+ = -\int f$.
- $f \geqslant 0$ — очевидно, $\sup\limits_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leqslant g \leqslant cf}} \left(\int g\right) = c \sup\limits_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leqslant g \leqslant f}} \left(\int g\right)$.

5. Пусть существует $\int\limits_E f d\mu$, тогда $\left|\int\limits_E f\right| \leqslant \int\limits_E |f|$.

5.5 Доказательство

$-|f| \leqslant f \leqslant |f|$,

$-\int\limits_E |f| \leqslant \int\limits_E f \leqslant \int\limits_E |f|$.

6. f — измерима на E, $\mu E < +\infty$, $\forall x \in E : a \leqslant f(x) \leqslant b$. Тогда

$a\mu E \leqslant \int\limits_E f \leqslant b\mu E$.

5.6 Доказательство

$\int\limits_E a \leqslant \int\limits_E f \leqslant \int\limits_E b$,

$a\mu E \leqslant \int\limits_E f \leqslant b\mu E$.

6 Счетная аддитивность интеграла (по множеству)

6.1 Лемма

$A = \bigsqcup A_i$, где A, A_i — измеримы, $g \geqslant 0$ — ступенчатые. Тогда

$$\int\limits_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int\limits_{A_i} g d\mu.$$

6.1.1 Доказательство

$g = \sum \lambda_k \chi_{E_k}$.

$$\int\limits_A g d\mu = \sum \lambda_k \mu(A \cap E_k) = \sum_k \lambda_k \sum_i \mu(A_i \cap E_k) = \sum_i \left(\sum_k \lambda_k \mu(A_i \cap E_k) \right) = \sum_i \int\limits_{A_i} g d\mu.$$

6.2 Теорема

$f : C \to \overline{R}$, $f \geqslant 0$ — измеримая на A, A — измерима, $A = \bigsqcup A_i$, все A_i — измеримы. Тогда

$$\int\limits_A f d\mu = \sum_i \int\limits_{A_i} f d\mu$$

6.2.1 Доказательство

- $\leqslant$

  g — ступенчатая, $0 \leqslant g \leqslant f$, тогда $\int\limits_A g = \sum \int\limits_{A_i} g \leqslant \sum \int\limits_{A_i} f$. Осталось перейти к sup.

- $\geqslant$

  $A = A_1 \sqcup A_2$, $\sum \lambda_k \chi_{E_k} = g_1 \leqslant f \chi_{A_1}$, $g_2 \leqslant f \cdot \chi_{A_2} = \sum \lambda_k \chi_{E_k}$, $g_1 + g_2 \leqslant f \cdot \chi_A$

  $\int\limits_{A_1} g_1 + \int\limits_{A_2} g_2 = \int\limits_A g_1 + g_2$.

  переходим к sup g_1 и g_2

  $\int\limits_{A_1} f + \int\limits_{A_2} f \leqslant \int\limits_A f$

  по индукции разобьём для $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_n$, $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$ и $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_n \sqcup B_n$, где $B_n = \bigsqcup\limits_{i \geqslant n+1} A_i$, тогда

$$\int_A \geqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f + \int_B f \geqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f \Rightarrow \int_A f \geqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f$$

6.3 Следствие

$f \geqslant 0$ — измеримая, $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $\nu E = \int\limits_E f d\mu$. Тогда ν — мера.

6.4 Следствие 2

$A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$, f — суммируемая на A, тогда

$\int\limits_A f = \sum\limits_i \int\limits_{A_i} f$.

Часть II

Предельный переход под знаком интеграла

7 Теорема Леви

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, f_n — измерима, $\forall n : 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ при почти всех x.

$f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ при почти всех x. Тогда

$\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n(x) d\mu = \int\limits_X f d\mu$.

7.1 Доказательство

f — измерима как предел измеримых функций.

- $\leqslant$

  $f_n(x) \leqslant f(x)$ почти везде, тогда $\forall n : \int\limits_X f_n(x) d\mu \leqslant \int\limits_X f d\mu$, откуда следует, что и предел интегралов не превосходит интеграл предела.

- $\geqslant$

  Достаточно доказать, что для любой ступенчатой функции $g : 0 \leqslant g \leqslant f$ верно $\lim \int\limits_X f_n \geqslant \int\limits_X g$.

  Достаточно доказать, что $\forall c \in (0, 1)$ верно $\lim \int\limits_X f_n \geqslant c \int\limits_X g$.

  $E_n := X\ (f_n \geqslant cg)$, $E_n \subset E_{n+1} \subset \ldots$.

  $\bigcup E_n = X$, т.к. $c < 1$, то $cg(x) < f(x)$, $f_n(x) \to f(x) \Rightarrow f_n$ попадёт в "зазор" $cg(x) < f(x)$.

  $\int\limits_X f_n \geqslant \int\limits_{E_n} f_n \geqslant \int\limits_{E_n} cg = c \int\limits_{E_n} g$,

  $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty} c \int\limits_{E_n} g = c \int\limits_X g$, потому что это непрерывность снизу меры $A \mapsto \int\limits_A g$.

8 Линейность интеграла Лебега

Пусть f, g — измеримы на E, $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$. Тогда $\int\limits_E f + g = \int\limits_E f + \int\limits_E g$.

8.1 Доказательство

Если f, g — ступенчатые, то очевидно.

Разберём общий случай. Существуют ступенчатые функции $f_n : 0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1} \leqslant \ldots \leqslant f$, и $g_n : 0 \leqslant g_n \leqslant g_{n+1} \leqslant \ldots \leqslant g$, и $f_n(x) \to f(x)$ и $g_n(x) \to g(x)$. Тогда

$\int\limits_E f_n + g_n = \int\limits_E f_n + \int\limits_E g_n$, сделаем предельный переход, значит при $n \to +\infty$

$\int\limits_E f + g = \int\limits_E f + \int\limits_E g$

8.2 Следствие

Пусть f, g — суммируемые на множестве E, тогда $f + g$ тоже суммируема и $\int\limits_E f + g = \int\limits_E f + \int\limits_E g$.

8.2.1 Доказательство

$(f + g)_\pm \leqslant |f + g| \leqslant |f| + |g|$.

$h := f + g$,

$h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-$,

$h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+$,

$\int h_+ + \int f_- + \int g_- = \int h_- + \int f_+ \int g_+$,

$\int h_+ - \int h_- = \int f_+ - \int f_- + \int g_+ - \int g_-$, тогда

$\int h = \int f + \int g$.

9 Теорема об интегрировании положительных рядов

$u_n \geqslant 0$ почти везде, измеримы на E. Тогда

$$\int\limits_E \left(\sum_{i=1}^{+\infty} u_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_E u_n d\mu.$$

9.1 Доказательство

Очевидно по теореме Леви.

$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ и $p \leqslant S_N \leqslant S_{N+1} \leqslant \ldots$ и $S_N \to S(X)$.

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_E S_N = \int\limits_E S,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_E u_k(x) = \int\limits_E S(x) d\mu.$$

9.2 Следствие

u_n — измеримая функция, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_E |u_n| < +\infty$. Тогда

$\sum u_n$ — абсолютно сходится почти везде на E.

9.2.1 Доказательство

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(x)|$$

$\int\limits_E S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int |u_n(x)| < +\infty$, значит $S(x)$ конечна почти всюду.

10 Абсолютная непрерывность интеграла

f — суммируемая функция, тогда верно:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall E \in \mathcal{A} : \mu E < \delta : \left| \int\limits_E f \right| < \varepsilon$$

.

10.1 Доказательство

$X_n = X\left(f \geqslant n\right)$, $X_n \supset X_{n+1} \supset \ldots$ и $\mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} X_n\right) = 0$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon : \int\limits_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ ($A \mapsto \int\limits_A |f|$ — мера, тогда $\int\limits_{\bigcap X_n} |f| = 0$ и по непрерывности меры сверху).

$\delta := \dfrac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$, берём $E : \mu E < \delta$.

$\left| \int\limits_E f \right| \leqslant \int\limits_E |f| = \int\limits_{E \cap X_{n_\varepsilon}} |f| + \int\limits_{E \setminus X_{n_\varepsilon}} |f| \leqslant \int\limits_{X_{n_\varepsilon}} |f| + n_\varepsilon \mu E < \dfrac{\varepsilon}{2} + n_\varepsilon \dfrac{\varepsilon}{2n_\varepsilon} = \varepsilon.$

10.2 Следствие

e_n — измеримое множество, $\mu e_n \to 0$, f — суммируемая. Тогда $\int\limits_{e_n} f \to 0$.

Часть III

Произведение мер

11 Произведение мер

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ — пространства с мерой.

$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ — семейство подмножеств в $X \times Y$.

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — полукольца, значит и $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ — полукольцо.

$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ — полукольцо *измеримых прямоугольников* (на самом деле это не всегда так).

Тогда введём меру на $A \times B$ — $\mu_0(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$.

Обозначим $(X \times Y, A \otimes B, \mu \times \nu)$ как произведение пространств с мерой.

12 Теорема о произведении мер

1. μ_0 — мера на полукольце $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$;

2. μ, ν — σ-конечное, значит μ_0 — σ-конечное.

12.1 Доказательство

1. Проверим счётную аддитивность μ_0. $\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$, $(x, y) \in X \times Y$.

   $P = \bigsqcup\limits_{\text{сч.}} P_k$ — измеримые прямоугольники. $P = A \times B$ и $P_k = A_k \times B_k$, $\chi_P = \sum \chi_{P_k}$.

   $\chi_A(x)\chi_B(y) = \sum\limits_k \chi_{A_k}(x)\chi_{B_k}(y)$. Интегрируем по ν (по пространству Y).

   $\chi_A(x) \cdot \nu(B) = \sum \chi_{A_k}(x)\nu(B_k)$. Интегрируем по μ.

   $\mu A \cdot \nu B = \sum \mu A_k \cdot \nu B_k$.

2. $X = \bigcup X_k$, $Y = \bigcup Y_j$, где μX_k и νY_j — конечные, $X \times Y = \bigcup\limits_{k,j} X_k \times Y_j$.

   $(\mathbb{R}^m, \mathcal{M}^m, \lambda_m)$ и $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}^n, \lambda_n)$.

   $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu_0)$, где $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ — полукольцо.

   Запускаем теорему о продолжении меры.

   $\rightsquigarrow (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu)$, где $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ — σ-алгебра.

   μ, ν — σ-конечная, следовательно продолжение определено однозначно.

12.2 Замечание

Произведение мер ассоциативно.

12.3 Дополнительная теорема (без доказательства)

λ_{m+n} есть произведение мер λ_m и λ_n.

13 Сечения множества

X, Y и $C \subset X \times Y$, $C_x = \{y \in Y : (x, y) \in C\} \subset Y$ — сечение множества C, аналогично определим $C^y = \{x \in X : (x, y) \in C\}$.

Допустимы объедения, пересечения и т.п.

14 Принцип Кавальери

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$, а также μ, ν — σ-конечные и полные.

$m = \mu \times \nu$, $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Тогда:

1. при почти всех $x \in X$ сечение $C_x \in \mathcal{B}$;
2. $x \mapsto \nu(C_x)$ — измерима (почти везде) на X;
3. $mC = \int\limits_X \nu(C_x) d\mu(x)$.

14.1 Замечание

1. C — измеримая $\not\Rightarrow$ что $\forall x : C_x$ — измеримое.
2. $\forall x$, $\forall y$, C_x, C^y — измеримы $\not\Rightarrow$ что C — измеримо (пример можно взять из Серпинскиго).

14.2 Доказательство

D — класс множеств $X \times Y$, для который принцип Кавальери верен.

1. $D \times \mathcal{B} \subset D$, $C = A \times B$, $C_x = \begin{cases} B & x \in A \\ \varnothing & x \notin A \end{cases}$.

   $x \longmapsto C_x : \nu B \cdot \chi_A(x)$.

   $\int\limits_X \nu B \chi_A(x) d\mu(x) = \mu A \cdot \nu B = mC$.

2. E_i — дизъюнктные, $E_i \in D$. Тогда $\bigsqcup E_i \in D$.

   $(E_i)_x$ — измеримые при почти всех x.

   При почти всех x все сечения $(E_i)_x$, $i = 1, 2, \ldots$ — измеримые.

   $E_x = \bigsqcup (E_i)_x$ — измеримые при почти всех x.

   $\nu E_x = \sum \nu(E_i)_x$, значит $x \mapsto \nu E_x$ измеримая функция.

   $\int\limits_X \nu E_x d\mu = \int\limits_X \sum \nu(E_i)_x d\mu = \sum \int\limits_X \nu(E_i)_x d\mu = \sum mE_i = mE$

3. $E_i \in D$, $\ldots \supset E_i \supset E_{i+1} \supset \ldots$, $E = \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} E_i$, $mE_i < +\infty$. Тогда $E \in D$.

$\int\limits_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty \Rightarrow \nu(E_i)_x$ — почти везде конечны.

$(E_i)_x \supset (E_{i+1})_x \supset \ldots$, $E_x = \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} (E_i)_x \Rightarrow E_x$ — измеримое при почти всех x.

При почти всех x (для тех x, для который $\nu(E_i)_x$ — конечные сразу все i или при $i = 1$), поэтому можно утверждать, что $\nu E_x = \lim\limits_{i\to+\infty} \nu(E_i)_x \Rightarrow x \mapsto \nu E_X$ — измерима.

$\int\limits_X \nu E_x d\mu = \int\limits_X \lim(\nu E_i)_x = \lim\limits_{i\to+\infty} \int\limits_X \nu(E_i)_x d\mu = \lim mE_i = mE$ (по непрерывности сверху меры m).

Перестановка пределов доказывается из теоремы Лебега, которую ещё не доказывали $|\nu(E_i)_x| \leqslant \nu(E_1)_x$ — суммируемая функция.

Мы доказали, что если $A_{ij} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, то $\bigcap\limits_j \left(\bigcup\limits_i A_{ij} \right) \in D$.

$mE = \inf\left(\sum mP_k,\ E \subset \bigcup P_k\right)$.

4. $mE = 0 \Rightarrow E \in D$. $H = \bigcap\limits_j \bigcup\limits_i P_{ij}$, $mH = 0$ ($P_{ij} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$), тогда $E \subset H$ ($H \in D$).

$0 = mH = \int\limits_X \nu H_x d\mu \Rightarrow \nu H_x = 0$ при почти всех x, но $E_x \subset H_x \Rightarrow$ при почти всех x $\nu E_x = 0$, значит и $\int \nu E_x = 0 = mE$.

5. $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $mC < +\infty \Rightarrow C \in D$.

Для множества C существует множество e, что $me = 0$ и $H = \bigcap \bigcup P_{ij}$ и $C = H \setminus e$, $C_x = H_x \setminus e_x$ и $mC = mH$.

$\nu e_x = 0$ при почти всех x, значит $\nu C_x = \nu H_x - \nu e_x$ при почти всех x.

$\int\limits_X \nu C_x d\mu = \int\limits_X \nu H_x - \nu e_x = \int\limits_X \nu H_x - \int\limits_X \nu e_x = mH = mC$.

6. C — произвольное, m-измеримое множество, $X = \bigsqcup X_k$ и $Y = \bigsqcup Y_j$, тогда $C = \bigsqcup\limits_{i,j} \left(C \bigcap (X_i \times Y_j) \right) \in D$ по пункту 2. (μX_k, μY_j — конечные).

14.3 Следствие

$C \in Q \otimes B$, $P_1(C) := \{x : C_x \neq \varnothing\}$, тогда если $P_1(C)$ — измеримое в X, тогда $mC = \int\limits_{P_1(C)} \nu C_x d\mu x$.

14.4 Замечание

Из того, что C измеримое $\not\Rightarrow$ что его проекция измерима.

15 Совпадение определенного интеграла и интеграла Лебега

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, непрерывное. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{[a,b]} f d\lambda_1$.

15.1 Доказательство

Достаточно доказать для $f \geqslant 0$.

f — непрерывно $\Rightarrow C = \Pi\Gamma\,(f, [a, b])$ измеримо в $\mathbb{R}^2$ (почти очевидно).

$C_x = [0, f(x)]$ (или $\varnothing$) $\Rightarrow$ измеримость $\lambda_1 C_x = f(x)$.

$\int\limits_a^b f(x)dx = \lambda_2\,(\Pi\Gamma\,(f, [a, b])) = \int\limits_{[a,b]} f(x)d\lambda_1(x)$.

15.2 Замечание

$f \geqslant 0$ измеримое, значит $\lambda_2\Pi\Gamma(f, [a, b]) = \int\limits_{[a,b]} f(x)d\lambda_2(x)$.

$f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $C \in X \times Y$, C_x, $f_x : C_x \to \mathbb{R}$, т.е. $y \mapsto f(x, y)$, аналогично $f^y : C^y \to \overline{\mathbb{R}}$.

16 Теорема Тонелли

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$, μ, ν — σ-конечные, полные. $m = \mu \times \nu$.

$f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, измеримое. Тогда

1. при почти всех x функция f_x — измерима почти везде на Y [аналогично при почти всех y функция f^y также измерима на X].
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int\limits_Y f_x(y) d\nu(y) = \int\limits_Y f(x,y) d\nu(y)$ — измерима* на X [аналогично $y \mapsto \psi(y) = \int\limits_X f(x,y) d\mu(x)$ — измерима* на Y].
3. $\int\limits_{X\times Y} f(x,y) d\mu = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$

*Почти везде

16.0.1 Доказательство

1. $f = \chi_c$, $C \subset X \times Y$, измеримая. $f_x = \chi_{C_x}(y)$. C_x — измеримое при почти всех $x \Rightarrow f_x$ — измеримая при почти всех x.

   $\varphi(x) = \int\limits_Y \chi_{C_x}(y) d\nu(y) = \nu(C_x)$ ($x \mapsto \nu C_x$ — измерима по принципу Кавальери).

   $\int\limits_X \varphi(x) = \int\limits_X \nu C_X = mC = \int\limits_{X\times Y} \chi_C dm$.
2. $f = \sum\limits_{\text{кон.}} a_k \chi_{C_k}$, $f \geqslant 0$.

   $f_x = \sum a_k \chi_{(C_k)_x}(y)$.

   $x \mapsto \int f_x(y) d\nu(y) = \sum a_k \nu(C_k)_x$ — измеримая (отдельные слагаемые — измеримые, значит и вся сумма измеримая).

   $\int\limits_X \left(\int\limits_Y f_x(y) d\nu \right) d\mu = \sum a_k \int\limits_X \nu(C_k)_x d\mu = \sum a_k m C_k = \int\limits_{X\times Y} f dm$
3. $f \geqslant 0$, g_n — ступенчатые, что $\ldots \leqslant g_n \leqslant g_{n+1} \leqslant \ldots$, $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n = f$.

   $f_x = \lim\limits_{n\to+\infty} (g_n)_x$ — измерима как предел измеримых функций.

   $\varphi(x) = \int\limits_Y f_x(y) d\nu(y) = \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_Y g_n d\nu = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(x)$, значит $\varphi(x)$ измерима из-за измеримости φ_n (Теорема Леви).

$g_n \leqslant g_{n+1} \leqslant \ldots \Rightarrow \varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x) \leqslant \ldots$

$$\int\limits_X \varphi(x) = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_X \varphi_n(x) = \lim_{n\to} \int\limits_{X\times Y} g_n dm = \int\limits_{X\times Y} f dm \text{ (по теореме Леви)}$$

Везде должна быть приговорка "при почти всех x".

16.1 Теорема Фубини

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$, μ, ν — σ-конечные, полные.

$f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, суммируемая. Тогда

1. при почти всех x функция f_x — суммируемая почти везде на Y [аналогично при почти всех y функция f^y также измерима на X].
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int\limits_Y f_x(y)d\nu(y) = \int\limits_Y f(x,y)d\nu(y)$ — суммируемая* на X [аналогично $y \mapsto \psi(y) = \int\limits_X f(x,y)d\mu(x)$ — суммируемая* на Y].
3. $\int\limits_{X\times Y} f(x,y)d\mu = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x,y)d\mu(x)\right) d\nu(y) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x)$

*почти везде

без доказательства

16.1.1 Следствие

$$\int\limits_C f = \int\limits_{X\times Y} f\chi_C = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f\cdot\chi_C\right) d\mu = \int\limits_{P_1(C)} \left(\int\limits_{C_x} f(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x).$$

$P_1(C)$ — проекция, измеримая, $\{x : C_x \neq \varnothing\}$.

$B(0,1) \subset \mathbb{R}^m$, Хотим найти $\lambda_m B(0,1) = \alpha_m$.

$\lambda_m B(0,R) = \alpha_m \cdot R^M$.

$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 \leqslant 1$.

интеграл обычного кружочка: $\int \chi_B d\lambda_2 = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 dydydx = \int\limits_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}dx = \pi$

$$\alpha_m = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \chi_B = \int\limits_{-1}^{1} \left(\int\limits_{B(0,\sqrt{1-x_1^2}) \subset \mathbb{R}^{m-1}} 1 d\nu \right) dx_1 = \int\limits_{-1}^{1} (1-x_1^2)^{\frac{m-1}{2}} \alpha_{m-1} dx_1.$$

$$B(x,y) = \int\limits_{)}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\ \Gamma(n) = (n-1)!,\ \Gamma(x+1) = \Gamma(x) \cdot x.$$

Тогда объём шара в $\mathbb{R}^m$ равен $\alpha_{m-1} 2 \int\limits_{0}^{1} (1-t)^{\frac{m-1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt = B(\frac{1}{2}, \frac{m+1}{2})\alpha_{m-1}$. Тогда объём шара можно переписать как $\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)\alpha_{m-1}}$.