Содержание

Часть I

Интеграл по мере

1 Интеграл ступенчатой функции

$f = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \chi_{E_k}$, $f \geqslant 0$, где $E_k \in \mathcal{A}$ — допустимое разбиение, тогда интеграл ступенчатой функции f на множестве X есть

$\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X f(x) d\mu(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \mu E_k$

Дополнительно будем считать, что $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

1.1 Свойства

- Интеграл не зависит от допустимого разбиения:

  $f = \sum \alpha_j \chi_{F_j} = \sum\limits_{k,\, j} \lambda_k \chi_{E_k \cap F_j}$, тогда $\int F = \sum \lambda_k \mu E_k = \sum\limits_{k} \lambda_k \sum\limits_{j} \mu(E_k \cap F_j) = \sum \alpha_j \mu F_i = \int F$;

- $f \leqslant g$, то $\int\limits_X f d\mu \leqslant \int\limits_X g d\mu$.

2 Интеграл неотрицательной измеримой функции

$f \geqslant 0$, измерима, тогда интеграл неотрицательной измеримой функции f есть

$$\int\limits_X f d\mu = \sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leqslant g \leqslant f}} \left(\int\limits_X g d\mu \right).$$

2.1 Свойства

- Для ступенчатой функции f (при $f \geqslant 0$) это определение даёт тот же интеграл, что и для ступенчатой функции;
- $0 \leqslant \int\limits_X f \leqslant +\infty$;
- $0 \leqslant g \leqslant f$, g — ступенчатая, f — измеримая, тогда $\int\limits_X g \leqslant \int\limits_X f$.

3 Суммируемая функция

f — измеримая, f_+ и f_- — срезки, тогда если $\int\limits_X f_+$ или $\int\limits_X f_-$ — конечен, тогда интеграл суммируемой функции есть

$\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X f_+ - \int\limits_X f_-$.

Если $\int\limits_X f \neq \pm\infty$, то говорят, что f — *суммируемая*, а также $\int |f|$ — конечен ($|f| = f_+ + f_-$).

3.1 Свойство

Если $f \geqslant 0$ — измерима, то это определение даёт тот же интеграл, что и интеграл измеримой неотрицательной функции.

4 Интеграл суммируемой функции

$E \subset X$ — измеримое множество, f — измеримо на X, тогда интеграл f по множеству E есть

$\int\limits_E f d\mu \coloneqq \int\limits_X f \chi_E d\mu.$

f — суммируемая на E если $\int\limits_E f+-$ и $\int\limits_E f_-$ — конечны одновременно.

4.1 Свойства

- $f = \sum \lambda_k \chi_{E_k}$, то $\int\limits_E f = \sum \lambda_k \mu\left(E_k \cap E\right)$;
- $f \geqslant 0$ — измерима, тогда $\int\limits_E f d\mu = \sup\limits_{\substack{g\text{ - ступ.}\\ 0 \leqslant g \leqslant f}} \left(\int\limits_X g d\mu\right).$

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ — произвольное пространство с мерой.

$\mathcal{L}^0(X)$ — множество измеримых почти везде конечных функций.

5 Простейшие свойства интеграла Лебега

1. *Монотонность*:

   $f \leqslant g \Rightarrow \int\limits_E f \leqslant \int\limits_E g.$

5.1 Доказательство

- $\sup\limits_{\substack{\widetilde{f}\text{ - ступ.} \\ 0 \leqslant \widetilde{f} \leqslant f}} \left(\int\limits_X \widetilde{f} d\mu \right) \leqslant \sup\limits_{\substack{\widetilde{g}\text{ - ступ.} \\ 0 \leqslant \widetilde{g} \leqslant g}} \left(\int\limits_X \widetilde{g} d\mu \right);$
- f и g — произвольные, то работаем со срезками, и $f_+ \leqslant g_+$, а $f_- \geqslant g_-$, тогда очевидно и для интегралов.

2. $\int\limits_E 1 \cdot d\mu = \mu E$, $\int\limits_E 0 \cdot d\mu = 0$.

5.2 Доказательство

По определению.

3. $\mu E = 0$, f — измерима, тогда $\int\limits_E f = 0$.

5.3 Доказательство

- f — ступенчатая, то по определению интеграла для ступенчатых функций получаем 0;
- $f \geqslant 0$ — измеримая, то по определению интеграла для измеримых неотрицательных функций также получаем 0;
- f — любая, то разбиваем на срезки f_+ и f_- и снова получаем 0.

4. (a) $\int -f = -\int f;$

   (b) $\forall c > 0 : \int cf = c \int f.$

5.4 Доказательство

- $(-f)_+ = f_-$ и $(-f)_= f_+$ и $\int -f = f_- - f_+ = -\int f$.
- $f \geqslant 0$ — очевидно, $\sup\limits_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leqslant g \leqslant cf}} \left(\int g\right) = c \sup\limits_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leqslant g \leqslant f}} \left(\int g\right)$.

5. Пусть существует $\int\limits_E f d\mu$, тогда $\left|\int\limits_E f\right| \leqslant \int\limits_E |f|$.

5.5 Доказательство

$-|f| \leqslant f \leqslant |f|$,

$-\int\limits_E |f| \leqslant \int\limits_E f \leqslant \int\limits_E |f|$.

6. f — измерима на E, $\mu E < +\infty$, $\forall x \in E : a \leqslant f(x) \leqslant b$. Тогда

$a\mu E \leqslant \int\limits_E f \leqslant b\mu E$.

5.6 Доказательство

$\int\limits_E a \leqslant \int\limits_E f \leqslant \int\limits_E b$,

$a\mu E \leqslant \int\limits_E f \leqslant b\mu E$.

6 Счетная аддитивность интеграла (по множеству)

6.1 Лемма

$A = \bigsqcup A_i$, где A, A_i — измеримы, $g \geqslant 0$ — ступенчатые. Тогда

$$\int\limits_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int\limits_{A_i} g d\mu.$$

6.1.1 Доказательство

$g = \sum \lambda_k \chi_{E_k}$.

$$\int\limits_A g d\mu = \sum \lambda_k \mu(A \cap E_k) = \sum_k \lambda_k \sum_i \mu(A_i \cap E_k) = \sum_i \left(\sum_k \lambda_k \mu(A_i \cap E_k) \right) = \sum_i \int\limits_{A_i} g d\mu.$$

6.2 Теорема

$f : C \to \overline{R}$, $f \geqslant 0$ — измеримая на A, A — измерима, $A = \bigsqcup A_i$, все A_i — измеримы. Тогда

$$\int\limits_A f d\mu = \sum_i \int\limits_{A_i} f d\mu$$

6.2.1 Доказательство

- $\leqslant$

  g — ступенчатая, $0 \leqslant g \leqslant f$, тогда $\int\limits_A g = \sum \int\limits_{A_i} g \leqslant \sum \int\limits_{A_i} f$. Осталось перейти к sup.

- $\geqslant$

  $A = A_1 \sqcup A_2$, $\sum \lambda_k \chi_{E_k} = g_1 \leqslant f \chi_{A_1}$, $g_2 \leqslant f \cdot \chi_{A_2} = \sum \lambda_k \chi_{E_k}$, $g_1 + g_2 \leqslant f \cdot \chi_A$

  $$\int\limits_{A_1} g_1 + \int\limits_{A_2} g_2 = \int\limits_A g_1 + g_2.$$

  переходим к sup g_1 и g_2

  $$\int\limits_{A_1} f + \int\limits_{A_2} f \leqslant \int\limits_A f$$

  по индукции разобьём для $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_n$, $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$ и $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_n \sqcup B_n$, где $B_n = \bigsqcup\limits_{i \geqslant n+1} A_i$, тогда

  $$\int\limits_A \geqslant \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{A_i} f + \int\limits_B f \geqslant \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{A_i} f \Rightarrow \int\limits_A f \geqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \int\limits_{A_i} f$$

6.3 Следствие

$f \geqslant 0$ — измеримая, $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $\nu E = \int\limits_E f d\mu$. Тогда ν — мера.

6.4 Следствие 2

$A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$, f — суммируемая на A, тогда

$\int\limits_A f = \sum\limits_i \int\limits_{A_i} f.$

Часть II

Предельный переход под знаком интеграла

7 Теорема Леви

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, f_n — измерима, $\forall n : 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ при почти всех x.

$f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ при почти всех x. Тогда

$\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n(x) d\mu = \int\limits_X f d\mu$.

7.1 Доказательство

f — измерима как предел измеримых функций.

- $\leqslant$

  $f_n(x) \leqslant f(x)$ почти везде, тогда $\forall n : \int\limits_X f_n(x) d\mu \leqslant \int\limits_X f d\mu$, откуда следует, что и предел интегралов не превосходит интеграл предела.

- $\geqslant$

  Достаточно доказать, что для любой ступенчатой функции $g : 0 \leqslant g \leqslant f$ верно $\lim \int\limits_X f_n \geqslant \int\limits_X g$.

  Достаточно доказать, что $\forall c \in (0, 1)$ верно $\lim \int\limits_X f_n \geqslant c \int\limits_X g$.

  $E_n \coloneqq X\,(f_n \geqslant cg)$, $E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$.

  $\bigcup E_n = X$, т.к. $c < 1$, то $cg(x) < f(x)$, $f_n(x) \to f(x) \Rightarrow f_n$ попадёт в "зазор" $cg(x) < f(x)$.

  $\int\limits_X f_n \geqslant \int\limits_{E_n} f_n \geqslant \int\limits_{E_n} cg = c \int\limits_{E_n} g$,

  $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty} c \int\limits_{E_n} g = c \int\limits_X g$, потому что это непрерывность снизу меры $A \mapsto \int\limits_A g$.

8 Линейность интеграла Лебега

Пусть f, g — измеримы на E, $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$. Тогда $\int\limits_E f + g = \int\limits_E f + \int\limits_E g$.

8.1 Доказательство

Если f, g — ступенчатые, то очевидно.

Разберём общий случай. Существуют ступенчатые функции $f_n : 0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1} \leqslant \ldots \leqslant f$, и $g_n : 0 \leqslant g_n \leqslant g_{n+1} \leqslant \ldots \leqslant g$, и $f_n(x) \to f(x)$ и $g_n(x) \to g(x)$. Тогда

$\int\limits_E f_n + g_n = \int\limits_E f_n + \int\limits_E g_n$, сделаем предельный переход, значит при $n \to +\infty$

$\int\limits_E f + g = \int\limits_E f + \int\limits_E g$

8.2 Следствие

Пусть f, g — суммируемые на множестве E, тогда $f + g$ тоже суммируема и $\int\limits_E f + g = \int\limits_E f + \int\limits_E g$.

8.2.1 Доказательство

$(f + g)_\pm \leqslant |f + g| \leqslant |f| + |g|$.

$h := f + g$,

$h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-$,

$h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+$,

$\int h_+ + \int f_- + \int g_- = \int h_- + \int f_+ \int g_+$,

$\int h_+ - \int h_- = \int f_+ - \int f_- + \int g_+ - \int g_-$, тогда

$\int h = \int f + \int g$.

9 Теорема об интегрировании положительных рядов

$u_n \geqslant 0$ почти везде, измеримы на E. Тогда

$$\int\limits_E \left(\sum_{i=1}^{+\infty} u_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_E u_n d\mu.$$

9.1 Доказательство

Очевидно по теореме Леви.

$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ и $p \leqslant S_N \leqslant S_{N+1} \leqslant \ldots$ и $S_N \to S(X)$.

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_E S_N = \int\limits_E S,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_E u_k(x) = \int\limits_E S(x) d\mu.$$

9.2 Следствие

u_n — измеримая функция, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_E |u_n| < +\infty$. Тогда

$\sum u_n$ — абсолютно сходится почти везде на E.

9.2.1 Доказательство

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(x)|$$

$\int\limits_E S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int |u_n(x)| < +\infty$, значит $S(x)$ конечна почти всюду.

10 Абсолютная непрерывность интеграла

f — суммируемая функция, тогда верно:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall E \in \mathcal{A} : \mu E < \delta : \left| \int\limits_E f \right| < \varepsilon$$

.

10.1 Доказательство

$X_n = X\left(f \geqslant n\right)$, $X_n \supset X_{n+1} \supset \ldots$ и $\mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} X_n\right) = 0$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon : \int\limits_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \frac{\varepsilon}{2}$ ($A \mapsto \int\limits_A |f|$ — мера, тогда $\int\limits_{\bigcap X_n} |f| = 0$ и по непрерывности меры сверху).

$\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$, берём $E : \mu E < \delta$.

$\left| \int\limits_E f \right| \leqslant \int\limits_E |f| = \int\limits_{E \cap X_{n_\varepsilon}} |f| + \int\limits_{E \setminus X_{n_\varepsilon}} |f| \leqslant \int\limits_{X_{n_\varepsilon}} |f| + n_\varepsilon \mu E < \frac{\varepsilon}{2} + n_\varepsilon \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon} = \varepsilon$.

10.2 Следствие

e_n — измеримое множество, $\mu e_n \to 0$, f — суммируемая. Тогда $\int\limits_{e_n} f \to 0$.

11 02.03.2020

$f_n \rightrightarrows f$ по мере то же самое, что и $\mu X(|f_n - f| \geqslant \varepsilon) \to 0$. Ещё есть способ $\int\limits_X |f_n - f| d\mu \to 0$. Можно ли вывести хоть какую-нибудь импликацию.

$\Rightarrow$ нельзя, пример: $f_n(x) = \dfrac{1}{nx}$ в $(\mathbb{R}, \lambda)$, тогда $f_n \rightrightarrows 0$ по мере. а $\int \left|\dfrac{1}{nx}\right| d\mu = +\infty$.

$\Leftarrow$ можно: $\mu X(|f_n - f| \geqslant \varepsilon) = \int\limits_{x_n} 1 d\mu \leqslant \int\limits_{x_n} \dfrac{|f_n - f|}{\varepsilon} d\mu \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon} \int\limits_X |f_n - f| \to 0$.

Хотим доказать подобие $f_n \to f$, то $\int f_n \to \int f$.

11.1 Теорема Лебега о мажорированной сходимости

f_n, f — измеримые, почти везде конечные функции. $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$. Также существует g, что:

1. $\forall n : |f_n| \leqslant g$ почти везде;
2. g — суммируема на X (g — мажоранта).

Тогда $\int\limits_X |f_n - f| d\mu \to 0$, и тем более $\int\limits_X f_n \to \int\limits_X f$.

11.1.1 Доказательство

f_n — суммируема в силу первого утверждения про g, f — суммируема по следствию теоремы Рисса. Тем более $\left|\int\limits_X f_n - \int\limits_X f\right| \leqslant \left|\int\limits_X f_n - f\right| \leqslant \int |f_n - f|$.

1. $\mu X < +\infty$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. $X_n \coloneqq X(|f_n - f| \geqslant \varepsilon)$, $\mu X_n \to 0$.

   $\int\limits_X |f_n - f| = \int\limits_{x_n} + \int\limits_{x_n^c} \leqslant \int\limits_{x_n} 2g + \int\limits_{x_n^c} \varepsilon_0 \leqslant \int\limits_{x_n} 2g + \int\limits_{x} \varepsilon < \varepsilon(1 + \mu X)$. (при больших n выражение $\int\limits_{x_n} 2g \leqslant \varepsilon$).

2. $\mu X = +\infty$, $\varepsilon > 0$.

   Утверждение: $\exists A$ — измеримое, μA — конечное, $\int\limits_{X \setminus A} g < \varepsilon$.

   Доказательство

   $\int G = \sup\left\{\int g_n : h - \text{ступенчатая функция} 0 \leqslant h \leqslant g\right\}$

   $\exists h_0 : \int\limits_X g - \int\limits_X h_0 < \varepsilon$, $A \coloneqq \mathrm{supp}\ h_0$. (где supp — носитель (support))

$$\int\limits_{X\setminus A} g + \int\limits_A g - h_0 < \varepsilon.$$

$$\int\limits_X |f_n - f| = \int\limits_A + \int\limits_{X\setminus A} \leqslant \int\limits_A |f_n - f| + 2\varepsilon < 3\varepsilon \text{ при больших } n.$$

11.2 Теорема Лебега о мажорированной сходимости почти везде

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, f_n, f — измеримые, $f_n \to f$ — почти везде.

Существует такая g, что:

1. $|f_n| \leqslant g$ почти везде;
2. g — суммируема.

11.2.1 Доказательство

f_n, f — суммируемая, тем более — как и раньше.

$h_n := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, \ldots)$, h_n убывает. $0 \leqslant h_n \leqslant 2g$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(x) = \overline{\lim}|f_n - f| = 0$ почти везде.

$2g-h \geqslant 0$, возрастают, тогда по теореме Леви $\int\limits_X 2g-h \to \int\limits_X 2g$, значит $\int\limits_X h_n \to 0$, тогда $\int\limits_X |f_n-f| \leqslant \int\limits_X h_n \to 0$.

11.3 Теорема Фату

$(X, \mathcal{A}, \mu$, $f_n \geqslant 0$ — измеримые, $f_n \to f$ почти везде. Если $\exists C > 0$, что $\forall n : \int\limits_X f_n \leqslant C$, то $\int\limits_X f \leqslant C$.

11.3.1 Замечание

Вообще говоря $\int\limits_X f_n \not\to \int\limits_X f$.

11.3.2 Доказательство

$g_n = \int (f_n, f_{n+1}, \ldots)$.

g_n возрастает, $g_n \to f$ почти везде. $\lim g_n = \underline{\lim} f_n = f$ почти везде.

$\int\limits_X g_n \leqslant \int\limits_X f_n \leqslant C$, тогда $\int F \leqslant C$.

Примерчик

$f_n = n \cdot \chi_{[0, \frac{1}{n}} \to 0$ почти везде.

$\int\limits_{\mathbb{R}} f_n = 1, \int f = 0$.

Положительность важна:

$f_n \geqslant 0$, тогда $\int -f_n \leqslant -1$, но $\int f = 0 \geqslant -1$.

11.3.3 Следствие

$f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f \ (f_{n_k} \to f)$.

11.3.4 Следствие 2

$f_n \geqslant 0$, измеримая. Тогда

$\int\limits_X \underline{\lim} f_n \leqslant \underline{\lim} \int\limits_X f_n$.

Доказательство

$\int\limits_X g_n \leqslant \int\limits_X f_n \leqslant C$.

Берём n_k

$\underline{\lim} \left(\int\limits_X f_n \right) = \lim\limits_{k \to +\infty} \left(\int\limits_X f_{n_k} \right)$.

$\int\limits_X f_{n_k} \to \lim \left(\int\limits_X f_n \right)$, а $\int\limits_x g_n \to \int\limits_X \underline{\lim} f_n$.

Часть III

Произведение мер

12 Произведение мер

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ — пространства с мерой.

$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ — семейство подмножеств в $X \times Y$.

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — полукольца, значит и $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ — полукольцо.

$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ — полукольцо *измеримых прямоугольников* (на самом деле это не всегда так).

Тогда введём меру на $A \times B$ — $\mu_0(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$.

Обозначим $(X \times Y, A \otimes B, \mu \times \nu)$ как произведение пространств с мерой.

13 Теорема о произведении мер

1. μ_0 — мера на полукольце $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$;

2. μ, ν — σ-конечное, значит μ_0 — σ-конечное.

13.1 Доказательство

1. Проверим счётную аддитивность μ_0. $\chi_{A\times B}(x,y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$, $(x,y) \in X \times Y$.

   $P = \bigsqcup\limits_{\text{сч.}} P_k$ — измеримые прямоугольники. $P = A \times B$ и $P_k = A_k \times B_k$, $\chi_P = \sum \chi_{P_k}$.

   $\chi_A(x)\chi_B(y) = \sum\limits_k \chi_{A_k}(x)\chi_{B_k}(y)$. Интегрируем по ν (по пространству Y).

   $\chi_A(x) \cdot \nu(B) = \sum \chi_{A_k}(x)\nu(B_k)$. Интегрируем по μ.

   $\mu A \cdot \nu B = \sum \mu A_k \cdot \nu B_k$.

2. $X = \bigcup X_k$, $Y = \bigcup Y_j$, где μX_k и νY_j — конечные, $X \times Y = \bigcup\limits_{k,j} X_k \times Y_j$.

   $(\mathbb{R}^m, \mathcal{M}^m, \lambda_m)$ и $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}^n, \lambda_n)$.

   $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu_0)$, где $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ — полукольцо.

   Запускаем теорему о продолжении меры.

   $\rightsquigarrow (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu)$, где $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ — σ-алгебра.

   μ, ν — σ-конечная, следовательно продолжение определено однозначно.

13.2 Замечание

Произведение мер ассоциативно.

13.3 Дополнительная теорема (без доказательства)

λ_{m+n} есть произведение мер λ_m и λ_n.

14 Сечения множества

X, Y и $C \subset X \times Y$, $C_x = \{y \in Y : (x, y) \in C\} \subset Y$ — сечение множества C, аналогично определим $C^y = \{x \in X : (x, y) \in C\}$.

Допустимы объедения, пересечения и т.п.

15 Принцип Кавальери

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$, а также μ, ν — σ-конечные и полные.

$m = \mu \times \nu$, $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Тогда:

1. при почти всех $x \in X$ сечение $C_x \in \mathcal{B}$;
2. $x \mapsto \nu(C_x)$ — измерима (почти везде) на X;
3. $mC = \int\limits_X \nu(C_x) d\mu(x)$.

15.1 Замечание

1. C — измеримая $\not\Rightarrow$ что $\forall x : C_x$ — измеримое.
2. $\forall x$, $\forall y$, C_x, C^y — измеримы $\not\Rightarrow$ что C — измеримо (пример можно взять из Серпинскиго).

15.2 Доказательство

D — класс множеств $X \times Y$, для который принцип Кавальери верен.

1. $D \times \mathcal{B} \subset D$, $C = A \times B$, $C_x = \begin{cases} B & x \in A \\ \varnothing & x \notin A \end{cases}$.

   $x \longmapsto C_x : \nu B \cdot \chi_A(x)$.

   $\int\limits_X \nu B \chi_A(x) d\mu(x) = \mu A \cdot \nu B = mC$.
2. E_i — дизъюнктные, $E_i \in D$. Тогда $\bigsqcup E_i \in D$.

   $(E_i)_x$ — измеримые при почти всех x.

   При почти всех x все сечения $(E_i)_x$, $i = 1, 2, \ldots$ — измеримые.

   $E_x = \bigsqcup (E_i)_x$ — измеримые при почти всех x.

   $\nu E_x = \sum \nu(E_i)_x$, значит $x \mapsto \nu E_x$ измеримая функция.

   $\int\limits_X \nu E_x d\mu = \int\limits_X \sum \nu(E_i)_x d\mu = \sum \int\limits_X \nu(E_i)_x d\mu = \sum mE_i = mE$

3. $E_i \in D,\ \ldots \supset E_i \supset E_{i+1} \supset \ldots,\ E = \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} E_i,\ mE_i < +\infty$. Тогда $E \in D$.

   $\int\limits_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty \Rightarrow \nu(E_i)_x$ — почти везде конечны.

   $(E_i)_x \supset (E_{i+1})_x \supset \ldots,\ E_x = \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} (E_i)_x \Rightarrow E_x$ — измеримое при почти всех x.

   При почти всех x (для тех x, для который $\nu(E_i)_x$ — конечные сразу все i или при $i = 1$), поэтому можно утверждать, что $\nu E_x = \lim\limits_{i \to +\infty} \nu(E_i)_x \Rightarrow x \mapsto \nu E_X$ — измерима.

   $\int\limits_X \nu E_x d\mu = \int\limits_X \lim(\nu E_i)_x = \lim\limits_{i \to +\infty} \int\limits_X \nu(E_i)_x d\mu = \lim mE_i = mE$ (по непрерывности сверху меры m).

   Перестановка пределов доказывается из теоремы Лебега, которую ещё не доказывали $|\nu(E_i)_x| \leqslant \nu(E_1)_x$ — суммируемая функция.

   Мы доказали, что если $A_{ij} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, то $\bigcap\limits_j \left(\bigcup\limits_i A_{ij} \right) \in D$.

   $mE = \inf\left(\sum mP_k,\ E \subset \bigcup P_k \right)$.

4. $mE = 0 \Rightarrow E \in D$. $H = \bigcap\limits_j \bigcup\limits_i P_{ij},\ mH = 0\ (P_{ij} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B})$, тогда $E \subset H\ (H \in D)$.

   $0 = mH = \int\limits_X \nu H_x d\mu \Rightarrow \nu H_x = 0$ при почти всех x, но $E_x \subset H_x \Rightarrow$ при почти всех x $\nu E_x = 0$, значит и $\int \nu E_x = 0 = mE$.

5. $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B},\ mC < +\infty \Rightarrow C \in D$.

   Для множества C существует множество e, что $me = 0$ и $H = \bigcap \bigcup P_{ij}$ и $C = H \setminus e,\ C_x = H_x \setminus e_x$ и $mC = mH$.

   $\nu e_x = 0$ при почти всех x, значит $\nu C_x = \nu H_x - \nu e_x$ при почти всех x.

   $\int\limits_X \nu C_x d\mu = \int\limits_X \nu H_x - \nu e_x = \int\limits_X \nu H_x - \int\limits_X \nu e_x = mH = mC$.

6. C — произвольное, m-измеримое множество, $X = \bigsqcup X_k$ и $Y = \bigsqcup Y_j$, тогда $C = \bigsqcup\limits_{i,j} (C \bigcap (X_i \times Y_j)) \in D$ по пункту 2. (μX_k, μY_j — конечные).

15.3 Следствие

$C \in Q \otimes B$, $P_1(C) := \{x : C_x \neq \varnothing\}$, тогда если $P_1(C)$ — измеримое в X, тогда $mC = \int\limits_{P_1(C)} \nu C_x d\mu x$.

15.4 Замечание

Из того, что C измеримое $\not\Rightarrow$ что его проекция измерима.

16 Совпадение определенного интеграла и интеграла Лебега

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, непрерывное. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{[a,b]} f d\lambda_1$.

16.1 Доказательство

Достаточно доказать для $f \geqslant 0$.

f — непрерывно $\Rightarrow C = \Pi\Gamma\left(f, [a, b]\right)$ измеримо в $\mathbb{R}^2$ (почти очевидно).

$C_x = [0, f(x)]$ (или $\varnothing$) $\Rightarrow$ измеримость $\lambda_1 C_x = f(x)$.

$\int\limits_a^b f(x)dx = \lambda_2\left(\Pi\Gamma\left(f, [a, b]\right)\right) = \int\limits_{[a,b]} f(x)d\lambda_1(x)$.

16.2 Замечание

$f \geqslant 0$ измеримое, значит $\lambda_2 \Pi\Gamma(f, [a, b]) = \int\limits_{[a,b]} f(x)d\lambda_2(x)$.

$f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $C \in X \times Y$, C_x, $f_x : C_x \to \mathbb{R}$, т.е. $y \mapsto f(x, y)$, аналогично $f^y : C^y \to \overline{\mathbb{R}}$.

17 Теорема Тонелли

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ и μ, ν — σ-конечные и полные, а также $m = \mu \times \nu$.

$f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, измеримая. Тогда

1. при почти всех x функция f_x — измерима почти везде на Y (аналогично при почти всех y функция f^y также измерима на X);
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int\limits_Y f_x(y) d\nu(y) = \int\limits_Y f(x,y) d\nu(y)$ — измерима почти везде на X (аналогично $y \mapsto \psi(y) = \int\limits_X f(x,y) d\mu(x)$ — измерима почти везде на Y);
3. $\int\limits_{X\times Y} f(x,y) d\mu = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$.

17.1 Доказательство

1. $f = \chi_c$, $C \subset X \times Y$, измеримая. $f_x = \chi_{C_x}(y)$. C_x — измеримое при почти всех $x \Rightarrow f_x$ — измеримая при почти всех x.

   $\varphi(x) = \int\limits_Y \chi_{C_x}(y) d\nu(y) = \nu(C_x)$ ($x \mapsto \nu C_x$ — измерима по принципу Кавальери).

   $\int\limits_X \varphi(x) = \int\limits_X \nu C_X = mC = \int\limits_{X\times Y} \chi_C dm$.
2. $f = \sum\limits_{\text{кон.}} a_k \chi_{C_k}$, $f \geqslant 0$.

   $f_x = \sum a_k \chi_{(C_k)_x}(y)$.

   $x \mapsto \int f_x(y) d\nu(y) = \sum a_k \nu(C_k)_x$ — измеримая (отдельные слагаемые — измеримые, значит и вся сумма измеримая).

   $\int\limits_X \left(\int\limits_Y f_x(y) d\nu \right) d\mu = \sum a_k \int\limits_X \nu(C_k)_x d\mu = \sum a_k m C_k = \int\limits_{X\times Y} f dm$
3. $f \geqslant 0$, g_n — ступенчатые, что $\ldots \leqslant g_n \leqslant g_{n+1} \leqslant \ldots$, $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n = f$.

   $f_x = \lim\limits_{n\to+\infty} (g_n)_x$ — измерима как предел измеримых функций.

   $\varphi(x) = \int\limits_Y f_x(y) d\nu(y) = \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_Y g_n d\nu = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(x)$, значит $\varphi(x)$ измерима из-за измеримости φ_n (Теорема Леви).

   $g_n \leqslant g_{n+1} \leqslant \ldots \Rightarrow \varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x) \leqslant \ldots$

$$\int\limits_X \varphi(x) = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_X \varphi_n(x) = \lim_{n\to} \int\limits_{X\times Y} g_n dm = \int\limits_{X\times Y} f dm \text{ (по теореме Леви)}$$

Везде должна быть приговорка „при почти всех x“.

18 Теорема Фубини

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ и μ, ν — σ-конечные и полные.

$f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, суммируемая. Тогда

1. при почти всех x функция f_x — суммируемая почти везде на Y (аналогично при почти всех y функция f^y также измерима на X).
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int\limits_Y f_x(y) d\nu(y) = \int\limits_Y f(x,y) d\nu(y)$ — суммируемая почти везде на X (аналогично $y \mapsto \psi(y) = \int\limits_X f(x,y) d\mu(x)$ — суммируемая почти везде на Y).
3. $\int\limits_{X \times Y} f(x,y) d\mu = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$

без доказательства

18.0.1 Следствие

$\int\limits_C f = \int\limits_{X \times Y} f \chi_C = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f \cdot \chi_C \right) d\mu = \int\limits_{P_1(C)} \left(\int\limits_{C_x} f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x).$

$P_1(C)$ — проекция, измеримая, $\{x : C_x \neq \varnothing\}$.

19 Какая-то нужная штука для лекции 02.03.2020, потом удалю

$B(0,1) \subset \mathbb{R}^m$, Хотим найти $\lambda_m B(0,1) = \alpha_m$.

$\lambda_m B(0,R) = \alpha_m \cdot R^M$.

$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 \leqslant 1$.

интеграл обычного кружочка: $\int \chi_B d\lambda_2 = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 dy dy dx = \int\limits_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2} dx = \pi$

$$\alpha_m = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \chi_B = \int\limits_{-1}^{1} \left(\int\limits_{B(0,\sqrt{1-x_1^2}) \subset \mathbb{R}^{m-1}} 1 d\nu \right) dx_1 = \int\limits_{-1}^{1} (1-x_1^2)^{\frac{m-1}{2}} \alpha_{m-1} dx_1.$$

$B(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$.

$B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\Gamma(x+1) = \Gamma(x) \cdot x$.

Тогда объём шара в $\mathbb{R}^m$ равен $\alpha_{m-1} 2 \int\limits_0^1 (1-t)^{\frac{m-1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt = B(\dfrac{1}{2}, \dfrac{m+1}{2})\alpha_{m-1}$. Тогда объём шара можно переписать как $\dfrac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)\alpha_{m-1}}$.

Часть IV

Замена переменных в интеграле

20 Образ меры при отображении

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B},)$ (пространство и алгебру изобрели, а меру нет).

$\Phi : X \to Y$, $\forall B \in \mathcal{B}$ $\Phi^{-1}(B)$ — измеримо ($\in \mathcal{A}$).

$\nu : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}$, $E \in \mathcal{B}$, $\nu E \coloneqq \mu(\Phi^{-1}(E))$ — это мера на $\mathcal{B}$, а также *образ меры* μ *при отображении* Φ.

20.1 Замечание 1

$\nu E = \int\limits_{\Phi^{-1}(E)} 1 d\mu.$

$\nu\left(\bigsqcup B_i\right) = \mu\left(\Phi^{-1}\left(\bigsqcup B_i\right)\right) = \mu\left(\bigsqcup \Phi^{-1}(B_i)\right) = \sum \mu \Phi^{-1}(B_i) = \sum \nu B_i.$

20.2 Замечание 2

f — измерима относительна $\mathcal{B}$, тогда $f \circ \Phi$ — измерима относительна $\mathcal{A}$.

$X\left(f\left(\Phi(x)\right) < a\right) = \Phi^{-1}\left(Y(f < a)\right).$

21 Взвешенный образ меры

$\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geqslant 0$, измеримая.

Тогда $\nu(B) := \int\limits_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$ — мера, которая назначает *взвешенный образ меры* μ, где ω — её вес.

22 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры

$\Phi : X \to Y$ — измеримое отображение, $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geqslant 0$ —измеримая на X. ν — взвешенный образ меры μ (ω — её вес). Тогда

$\forall f \geqslant 0$ — измеримой на Y верно, что $f \circ \Phi$ — измерима на X и выполняется следующее свойство:

$\int\limits_Y f(y) d\nu(y) = \int\limits_X f(\Phi(x))\omega(x) d\mu(x).$

22.1 Замечание

То же верно для случая f — суммируемая.

22.2 Доказательство

1. $f = \chi_B$, $B \in \mathcal{B}$. Тогда $(f \circ \Phi)(x) = \begin{cases} 1 & \Phi(X) \in B \\ 0 & \Phi(x) \notin B \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(B)}$.

   Доказывать нечего ☺ : $\nu B = \int\limits_{\Phi(B)} \omega d\mu$;

2. f – ступенчатая, для каждой ступеньки — правда, и по линейности интеграла получаем результат;

3. $f \geqslant 0$ — измеримая. Теорема об аппроксимизации измеримых функций ступенчатыми плюс предельный переход по теореме Леви;

4. f — измеримая, значит $|f|$ — всё верно.

22.3 Следствие

f — суммируема на Y, $B \in \mathcal{B}$, $\int\limits_B f d\nu(y) = \int\limits_{\Phi^{-1}} (B)(f \circ \Phi) w d\mu$.

Частный случай: $X = Y$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\Phi = \mathrm{id}$, $\omega \geqslant 0$ — измерима.

23 Плотность одной меры по отношению к другой

$\nu B = \int\limits_B \omega(x) d\mu(x)$, тогда ω — *плотность меры* ν *относительно меры* μ.

23.1 Замечание

$\int\limits_X f(x) d\nu(x) = \int\limits_X f(x)\omega(x) d\mu(x)$.

24 Критерий плотности

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, ν — ещё одна мера на $\mathcal{A}$, $\omega \geqslant 0$ — измеримая. Тогда

ω — плотность ν относительно $\mu \iff \forall A \in \mathcal{A}$ верно: $\inf\limits_A \omega \cdot \mu A \leqslant \nu A \leqslant \sup\limits_A \omega \cdot \mu A$ $(0 \cdot \infty = 0)$.

24.0.1 Доказательство

- $\Rightarrow$ Очевидно (интеграл μA обладает этими свойствами из-за плотностей);
- $\Leftarrow$ Считаем, что $\omega > 0$. Для $\omega = 0$ получаем: $e \coloneqq X(\omega = 0)$, $\nu e = 0 = \int\limits_e \omega d\mu$, тогда $\nu(A) = \int\limits_A \omega d\mu = 0$.

  Теперь пусть $\omega > 0$, то $q \in (0,1)$. $A_j \coloneqq A(q^j \leqslant \omega \leqslant q^{j-1})$, $j \in \mathbb{Z}$, $A = \bigsqcup\limits_{j \in \mathbb{Z}} A_j$.

  $q^j \mu A_j \leqslant \nu A_j \leqslant q^{j-1} \mu A_j$.

  $q^j \mu A_j \leqslant \int\limits_{A_j} \omega d\mu \leqslant q^{j-1} \mu A_j$.

  $q \int\limits_A \omega d\mu = q \sum \int\limits_{A_j} \leqslant \sum q^j \mu A_j \leqslant \nu A \leqslant \frac{1}{q} \sum q^j \mu A_j \leqslant \frac{1}{q} \int\limits_A \omega.$

  Устремим $q \to 1$ и получим доказательство равенства.

25 Единственность плотности

f, g — суммируемые на X, $\forall A$ — измеримых верно: $\int\limits_A f = \int\limits_a g$. Тогда $f = g$ почти везде.

25.0.1 Доказательство

$h = f - g$, $\forall A$ — измеримых, $\int\limits_A h = 0$.

$A_+ = X(h \geqslant 0)$, $A_- = X(h < 0)$, $A_+ \bigcap A_- = \varnothing$.

$\int\limits_{A_+} |h| = \int\limits_{A_+} h = 0$.

$\int\limits_{A_-} |h| = -\int\limits_{A_-} h = 0$.

$X = A_+ \bigsqcup A_-$, $\int\limits_X |h| = 0$, тогда $h = 0$.

25.1 Следствие

Плотность ν относительно ν определена однозначно с точностью до μ почти везде.

26 Лемма об образе малых кубических ячеек

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $a \in O$. Φ — дифференцируема G в окрестности точки a, $\det \Phi'(a) \neq 0$. Пусть $c > |\det \Phi'(a)|$.

Тогда существует такое $\delta > 0$, что для любого куба $Q \subset B(a, \delta)$, $a \in Q$ верно, что $c \cdot \lambda Q > \lambda \Phi(Q)$.

26.0.1 Доказательство

$L := \Phi'(a)$ — обратимое линейное отображение.

$\Phi(x) = \Phi(a) + L(x - a) + o(x - a)$.

$a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a)) = x + o(x - a)$ (увеличили в константу, поэтому *о маленькое* остаётся *о маленьким*).

$\forall \varepsilon > 0$ можно записать шар $B_\varepsilon(a)$, что при $x \in B_\varepsilon(a)$ $|\psi(x) - x| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{m}}|x - a|$.

$Q \subset B_\varepsilon$, $a \in Q$ — куб со стороной h, при $x \in Q : |\psi(x) - x| < \varepsilon h$. $|x_i - a_i| \leqslant h$.

x, $y \in Q$, тогда $|\psi(x)_i - \psi(y)_i| = |\psi(x)_i - x_i| + |\psi(y)_i - y_i| + |x_i - y_i| \leqslant |\psi(x) - x| + |\psi(y) - y| + h < (1 + 2\varepsilon)h$.

$\psi(Q)$ — содержится в кубе со стороной $(1 + 2\varepsilon)h$, тогда $\lambda\psi(Q) \leqslant (1 + 2\varepsilon)^m \lambda Q$.

$\lambda\Phi(Q) \leqslant (1 + 2\varepsilon)^m |\det L| \lambda Q < C\lambda Q$.

Берём $\varepsilon : (1 + 2\varepsilon)|\det L| < C$, где δ — радиус $B_\varepsilon(a)$.

$\lambda A = \inf\limits_{\text{G - открытое}, A \subset G} \lambda G$

27 Теорема об образе меры Лебега при диффеоморфизме

27.1 Лемма

$f : \underset{\text{откр.}}{O} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, O — непрерывное. A — измеримое, $A \subset Q \subset \overline{Q} \subset O$.

Тогда $\displaystyle\int\limits_{A\subset G\text{открытое}} \left(\lambda(G) \sup_G f\right) = \lambda A \sup_A f$.

Без доказательства.

27.2 Теорема

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм. $A \in \mathcal{M}^m$, $A \subset O$. Тогда

$\lambda\Phi(A) = \displaystyle\int\limits_A |\det \Phi'(a)| \, d\lambda$.

27.2.1 Доказательство

$\nu A := \lambda\Phi(A)$. Верно ли, что $J_\Phi(x) := |\det \Phi'(x)|$ — это плотность ν по отношению к μ.

Достаточно проверить, что $\forall A$ верно: $\inf\limits_A J_\Phi \cdot \lambda A \leqslant \nu A \leqslant \sup\limits_A J_\Phi \cdot \lambda A$.

Достаточно проверить правое неравенство. Левое — правое для Φ^{-1} и $\widetilde{A} = \Phi(A)$.

$\lambda\Phi^{-1}\left(\widetilde{A}\right) \leqslant \sup J_{\Phi^{-1}} \cdot \lambda\widetilde{A}$.

$\lambda A \leqslant \sup \left|\det(\Phi^{-1})'\right| \lambda\Phi(A)$.

$\sup \dfrac{1}{|\det \Phi'|}$

$\dfrac{1}{\inf |\det \Phi'|}$

1. A — кубическая ячейка, $\overline{A} \subset O$. От противного: пусть оказалось, что $\lambda Q \sup J_\Phi < \nu Q$. Возьмём $c > \sup\limits_Q J_\Phi$, так, что $\lambda Q \cdot c < \nu Q$. Значит существует такая часть Q_i, что $\lambda Q_i \cdot c < \nu Q_i$. $\lambda Q_n \cdot c < nu Q_n$, $a = \bigcap \overline{Q_n}$, накроем точку a этим кубиков. $c > |\det \Phi'(a)|$, тогда $\nu Q_n = \lambda\Phi(Q_n)$. Получили, что $\lambda\Phi(Q_n) > c\lambda Q_n$, а по лемме нужно наоборот.

2. Оценка $\nu A \leqslant \sup J_\Phi \lambda A$, верна для случая, когда A — открытое множество.

$\nu Q \leqslant \sup\limits_A J_\Phi \lambda Q.$

Суммируя по Q: $\nu A \leqslant \sup\limits_A J_\Phi \lambda A.$

Что было в лемме (и что мы потеряли):

$\inf\limits_{A \subset G} \left(\lambda G \cdot \sup\limits_G f \right) = \lambda A \cdot \sup\limits_A f.$

G — открытое, тогда

$\nu G \leqslant \sup\limits_G J_\Phi \cdot \lambda G.$

$\nu A \leqslant \nu G \leqslant \lambda \lambda A \sup\limits_A f.$

$\forall A \in \mathcal{M}^m$, $\Phi(A)$ — измерима

$$\lambda\Phi(A) = \int\limits_A |\det \Phi'(x)|\, d\lambda(x).$$

$\Phi : X \to Y$

$$\nu(E) = \int -\Phi^{-1}(E)\omega d\mu.$$

$E = \Phi(A)$.

28 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм, f — измеримое, $f \geqslant 0$, $\mathcal{O} = \Phi(O)$. Тогда

$$\int\limits_{\mathcal{O}} f(y)dy = \int\limits_{O} f(\Phi(x)) \left|\det \Phi'(x)\right| dx.$$

То же верно для суммируемой функции f.

28.1 Доказательство

Следует из теоремы об образе меры Лебега.

29 Сферические координаты в $\mathbb{R}^m$

r — расстояние от центра до точки

φ_1, φ_2, …, φ_{m-1} — соответствующие углы, определяются по индукции на меньшие подпространства.

$x_1 = r\cos\varphi_1$;

$x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2$;

$\vdots$

$x_m = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_{m-1}$.

$x_1,\dots,x_m$. Выразим последние две переменные через угол φ_{m-1} и какое-то расстояние ρ_{m-1}.

$x_1,\dots,x_{m-2}$, ρ_{m-1}, φ_{m-1}, тогда

$x_{m-1} = \rho_{m-1}\cos\varphi_{m-1}$, а $x_m = \rho_{m-1}\sin\varphi_{m-1}$.

$x_{m-2} = \rho_{m-2}\cos\varphi_{m-2}$.

$\vdots$

Пусть осталось только x_1, тогда $x_1 = r\cos\varphi_1$ и $\rho_2 = r\sin\varphi_1$, т.е. $\rho_1 = r$.

$\int dx_1\dots dx_m = \int \rho_{m-1}dx_1\dots dx_{m-2}d\rho_{m-1}d\varphi_{m-1} = \int \rho_{m-2}^2\sin\varphi_{m-2}dx_1\dots dx_{m-3}d\rho_{m-2}d\varphi_{m-2}d\varphi_{m-1} =$

$= \int \rho_{m-3}^3\sin^2\varphi_{m-3}\sin\varphi_{m-2}dx_1\dots = \int r^{m-1}\sin^{m-2}\varphi_1\sin^{m-3}\varphi_2\dots\sin\varphi_{m-2}\dots$

$r^{m-1}sin^{m-2}\varphi_1\sin^{m-3}\varphi_2\dots\sin\varphi_{m-2}$ — это Якобиан.

30 Формула для Бета-функции

$$B(s,t) = \int\limits_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}dx = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}.$$

30.0.1 Доказательство

По определению гаммы-функции:

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}e^{x}\left(\int\limits_0^{+\infty} y^{t-1}e^{-y}dy\right)dx = \int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\int\limits_X (u-x)^{t-1}e^{-u+x}dudx, \text{ где } y = u - x,$$

$$\int\limits_0^{+\infty} du \int\limits_0^{u} dx x^{s-1}(u-x)^{t-1}e^{-u}, \text{ заменим } x = uv \text{ и получим}$$

$$\int\limits_0^{+\infty} du \int\limits_0^{1} dv u^{s-1}v^{s-1}u^{t-1}(1-v)^{t-1}ue^{-u} = \int\limits_0^{+\infty} du u^{s+t-1}e^{-u}\int\limits_0^{1} v^{s-1}(1-v)^{t-1}dv = \Gamma(s+t)B(s,t).$$

31 Объем шара в $\mathbb{R}^m$

$\lambda_m B(0,R) = \int\limits_{x_1^2+\ldots+x_m^2=R^2} 1dx$, введём сферические координаты.

$\int\limits_0^R dr \int\limits_0^\pi d\varphi_1 \ldots \int\limits_0^\pi d\varphi_{m-2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_{m-1} r^{m-1} \sin^{m-2}\varphi_1 \sin^{m-3}\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{m-2}$, а дальше воспользуемся бетой-функцией.

Пример как вычислять sin в какой-то степени:

$\int\limits_0^\pi (\sin\varphi_k)^{m-1-k} = 2\int\limits_0^{\pi/2} t^{\frac{m-1-k}{2}-\frac{1}{2}}(1-t)^{-0.5}dt = B\left(\frac{m-k}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{m-k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-k}{2}+\frac{1}{2}\right)}$.

Часть V

Функция распределения

32 Теорема о вычислении интеграла по мере Бореля—Стилтьеса (с леммой)

32.1 Определение

$(X, \mathcal{O}, \mu)$, $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая, пространство конечное.

Пусть $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mu X(h < t) < +\infty$.

$H(t) \coloneqq \mu X(h < t)$ — функция распределения функции h по μ ($H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Очевидно, что H возрастает, $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\nu \coloneqq h(\mu)$, $\nu(A) = \mu\left(h^{-1}(A)\right)$.

Пусть h — измеримая, тогда $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $h^{-1}(\mathcal{B})$ — измеримая.

$\mu_H[a, b) = H(b - 0) - H(a - 0)$ — *мера Бореля-Стилтьеса.*

32.2 Лемма

$h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая, почти везде конечная.

H — функция распределения (корректно заданная), $\forall t$ $\mu X(h < t) < +\infty$.

Тогда на $\mathcal{B}$, μ_H совпадает с $h(\mu)$.

32.2.1 Доказательство

$\mu_h[a, b) = H(b - 0) - H(a - 0) = H(b) - H(a)$ — непрерывность меры снизу.

$H(b) - H(a) = \mu X(a \leqslant h < b) = \mu\left(h^{-1}[a, b)\right) = \nu[a, b]$, где $\nu = h(\mu)$

Значит $\mu_H = \nu$ на $\mathcal{B}$.

32.3 Теорема

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\geqslant 0$, измеримое по Борелю.

$h : X \to \overline{\mathbb{R}}$, измеримая, почти везде конечная, с функцией распределения H.

μ_H — мера Бореля-Стилтьеса. Тогда

$$\int_X f(h(x))\,d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) d\mu_H(t).$$

32.3.1 Доказательство

По теореме о взвешенном образе меры:

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y = \mathbb{R}, \mathcal{B}, h(\mu))$,

$\Phi = h : X \to Y$, $\omega = 1$.

$$\int_Y f(y) d\nu = \int_X f(\Phi(x)) 1 d\mu(x).$$

Путь $f \geqslant 0$, измеримая, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} f(|x|)\,d\lambda_m = \int_0^{+\infty} f(t) d\mu_H$ при $h(x) = |x|$, где $H(r) = \mu\mathbb{R}^m(|x| < r) = \alpha_m r^m$.

$$\mu_H[a,b) = H(b) - H(a) = \int_a^b H'(t) dt = \int_a^b m\alpha_m t^{m-1} dt.$$

μ_H и мера $\nu : \nu(A) = \displaystyle\int_A m\alpha_m t^{m-1} dt$, значит $\mu_h = \nu$ на $\mathcal{B}$.

$$\int_0^{+\infty} f(t) m\alpha_m t^{m-1} dt.$$

32.3.2 Следствие

Мы проверили, что g возрастает, $g \in C^1(\mathbb{R})$ и $M_g(A) = \displaystyle\int_A g'(x) dx$.

Часть VI

Ряды Фурье

33 Интегральные неравенства Гельдера и Минковского

1. Неравенство Гёльдера:

   $p,\ q > 1,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, заданы почти везде, измеримы.

   $(X, \mathcal{A}, \mu),\ f,\ g : X \to \mathbb{C}\ (\mathbb{R})$. Тогда

   $$\int\limits_X |fg| d\mu \leqslant \left(\int\limits_X |f|^p \right)^{1/p} \left(\int\limits_X |g|^q \right)^{1/q}$$

2. Неравенство Минковского

   $(X, \mathcal{A}, \mu),\ f,\ g : X \to \mathbb{C}$ — измерима почти везде, конечна, $1 \leqslant p < +\infty$. Тогда

   $$\left(\int\limits_X |f+g|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\int\limits_X |f|^p \right)^{1/p} + \left(\int\limits_X |g|^p \right)^{1/p}$$

34 Интеграл комплекснозначной функции

$(X, \mathcal{A}, \mu),\ f : X \to \mathbb{C},\ f(x) = g(x) + ih(x).$

f — измерима $\Longleftrightarrow g = \mathrm{Re} f$ и $h = \mathrm{Im} f$ — измеримые.

f — суммируемая $\Longleftrightarrow g = \mathrm{Re} f$ и $h = \mathrm{Im} f$ — суммируемые.

$\int\limits_X f = \int\limits_X g + i \int\limits_X h.$

34.1 Вывод

$\left| \int\limits_X f d\mu \right| \leqslant \int\limits_X |f| d\mu.$

35 Пространство $L^p(E,\mu)$

$L^p(X,\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$

$$\mathcal{L}^p(X,\mu) = \left\{ f : X \xrightarrow[\text{п.в.}]{} \overline{\mathbb{R}}(\overline{\mathbb{C}}), f \text{ — измерима}, \int\limits_X |f|^p d\mu < +\infty \right\}$$

- $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ — линейное пространство — по н. Минковского;
- Введём норму $\|f\| = \left(\int\limits_X |f|^p \right)^{1/p}$;
- f эквивалентно g если $f(x) = g(x)$ при почти всех x

L^p — уберём из $\mathcal{L}$ все одинаковые функции, оставив только одного представителя из каждого класса эквивалентности.

36 Существенный супремум

$f : X \underset{\text{п.в.}}{\longrightarrow} \overline{\mathbb{R}}$, $\operatorname{ess\,sup} f = \inf \left\{ A \in \overline{\mathbb{R}} : f(x) \leqslant A \text{ п.в.} \right\}$.

36.1 Свойства

1. $\operatorname{ess\,sup} f \leqslant \sup f$;

2. $f(x) \leqslant \operatorname{ess\,sup} f$ при почти всех x;

3. $\left| \int\limits_{\mathbb{R}} fg \right| \leqslant \operatorname{ess\,sup} |f| \cdot \int\limits_{X} |g|$.

36.1.1 Доказательство

1. Очевидно

2. $M = \operatorname{ess\,sup} f$

   $\forall n \in \mathbb{N}$ верно $f(x) \leqslant M + \dfrac{1}{n}$ почти везде.

3. Очевидно $\left| \int\limits_{X} fg \right| \leqslant \int\limits_{X} |fg|$,

   $|fg| \leqslant M|g|$ почти везде.

37 Пространство $L^\infty(E,\mu)$

$\mathcal{L}^\infty(X,\mu) = \left\{ f : X \underset{\text{п.в.}}{\longrightarrow} \mathbb{R}(\mathbb{C}), f \text{ — измерима}, \operatorname{ess\,sup}|f| < +\infty \right\}$

$f,\ g \in \mathcal{L}^\infty \Rightarrow f + g \in \mathcal{L}^\infty$.

т.е. $\mathcal{L}^\infty$ — линейное пространство, норма $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_x |f|$.

$\operatorname{ess\,sup}|f+g| \leqslant \operatorname{ess\,sup}|f| + \operatorname{ess\,sup}|g|$.

37.1 Замечание

$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$ — неравенство Гёльдера (можно брать $p = 1$ и $q = +\infty$).

$f \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $\Rightarrow f$ — почти всюду конечно $\Rightarrow$ можно считать, что f задана почти всюду на X и всюду конечна.

38 Теорема о вложении пространств L^p

X, $\mu X < +\infty$, $1 \leqslant s < r \leqslant +\infty$. Тогда

1. $L^r(X,\mu) \subset L^s(x,\mu)$;
2. $\|f\|_s \leqslant (\mu X)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} \|f\|_r$

38.1 Доказательство

1. следует из 2;
2. $r = \infty$ — очевидно

   r — конечно, тогда:

   $\|f\|_s = \left(\int\limits_X |f|^s\right)^{\frac{1}{s}} \leqslant \left(\int\limits_X \|f\|_\infty^s\right)^{\frac{1}{s}}$

   $|f| \leqslant \operatorname{ess\,sup} f = \|f\|_\infty = \|f\|_\infty \mu X^{1/s}$

   $\|f\|_s^s = \int\limits_X |f|^s 1 d\mu$ по Гёльдеру получаем неравенство

   $\left(\int\limits_X (|f|^s)^{r/s}\right)^{s/r} \left(\int\limits_X 1\right)^{\frac{r-s}{r}} = \left(\int\limits_x |f|^r\right)^{s/r} (\mu X)^{1-\frac{s}{r}}.$

38.2 Следствие

$\mu E < +\infty$, $1 \geqslant s < r \geqslant +\infty$.

f_n, $f \in L^s$, $f_n \to f$ на L^r. Тогда $f_n \to f$ на L^s.

38.2.1 Доказательство

очевидно, потому что $\|f\|_s \leqslant \mu E^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} \|f\|_r$.

Часть VII

Поверхностный интеграл

39 Измеримое множество на простом гладком двумерном многообразии в $\mathbb{R}^3$

M — просто гладкое двумерное многообразие в $\mathbb{R}^3$, $\varphi : \underset{\text{откр.}}{O} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ — параметризация.

$E \subset M$ — измеримое (по Лебегу), если его $\varphi^{-1}(E)$ — измерим в $\mathbb{R}^2$.

40 Мера Лебега на простом гладком двумерном многообразии в $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{A}_M = \{E \subset M, E$ — изм.$\}$ — σ-алгебра.

Мера Лебега на $\mathcal{A}_M$: $S(E) = \iint\limits_{\varphi^{-1}(E)} |\varphi'_u \times \varphi'_v| \, dudv$.

41 Поверхностный интеграл первого рода

M — простое двумерное гладкое многообразие, φ — гладкая параметризация, $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, измеримая.

Тогда

$\iint\limits_{M} f ds$ — Поверхностный интеграл I рода и вычисляется следующим образом:

$\iint\limits_{M} f ds = \iint\limits_{\varphi^{-1}M} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))|\varphi'_u \times \varphi'_v| dv du.$

42 Кусочно-гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$

$M \subset \mathbb{R}^3$ — кусочно-гладкое многообразие в $\mathbb{R}^3$

M — объекты конечного числа элементов:

- Простые двумерные гладкие многообразия;
- Гладкие кривые — простые k-мерные многообразия в $\mathbb{R}^3$;
- Точки.

$M = \bigsqcup M_i \bigsqcup l_i \bigsqcup p_i$.

$S(E) = \sum S(E \bigcap M_i)$.

Часть VIII

Преобразование Фурье

43 Теорема о сходимости в пространствах L^p и по мере

$1 \leqslant p < +\infty$, f_n, $f \in L^p(X, \mu)$. Тогда верны следующие утверждения:

1. $f_n \to f$ в L^p, тогда $f_n \rightrightarrows f$ по мере μ.

2. $f_n \rightrightarrows f$ по мере μ (либо $f_n \to f$ почти везде).

   Если $\exists g \in L^p : |f_n| \leqslant g$. Тогда $f_n \to f$ в L^p.

43.1 Доказательство

1. $X_n(\varepsilon) := X\left(|f_n - f| \geqslant \varepsilon\right)$.

   $\mu X_n(\varepsilon) = \int\limits_{X_n(\varepsilon)} 1 \leqslant \frac{1}{\varepsilon^p} \int\limits_{X_n(\varepsilon)} |f_n - f|^p d\mu \leqslant \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|_p^p \to 0.$

2. $f_n \rightrightarrows f$, тогда $f_{n_k} \to f$ п.в.. Тогда $|f| \leqslant g$ п.в. $|f_n - f|^p \leqslant (2g)^p$, $\|f_n - f\|_p^p = \int\limits_X |f_n - f|^p d\mu \to 0$ по теореме Лебега.

44 Полнота L^p

$L^P(X, \mu)$, $1 \leqslant p < +\infty$ — полное.

44.0.1 Доказательство

f_n — фундаментальная.

Для $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ $\exists N_1$ при $n = n_1 > N_1$, $\forall k > n_1$ $\|f_{n_1} - f_k\| < \dfrac{1}{2}$.

Для $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$ $\exists N_2 > n1$ при $n = n_2 > N_2$, $\forall k > n_2$ $\|f_{n_2} - f_k\| < \dfrac{1}{4}$.

$\varepsilon = \dfrac{1}{2^m}$ $\exists N_m > n_m$ при $n = n_m > N_m$, $\forall k > n_m$ $\|f_{n_m} - f_k\| < \dfrac{1}{2^m}$.

Таким образом, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 1$.

Рассмотрим $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \in [0, +\infty]$.

S_n, $\|S_n\|_p \leqslant \sum \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|$

S_n, $\|S_n\|_p \leqslant \sum\limits_{k=1}^{N} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 1$.

$\int\limits_X S_n^p \leqslant 1$, по т. Фату $\int S^p \leqslant 1$, тогда S^p — сходится, значит S конечно почти везде, тогда

$\sum (f_{n_{k+1}} f_{n_k})$ — сходится почти везде.

$f(x) := f_{n_1} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ — сходится с потрам

$f_{n_1} + \sum\limits_{k=1}^{m-1} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) = f_{n_m}$.

$f_{n_m} \to f$ почти везде.

Проверим, что $\|f_n - f\|_p \to 0$.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall m, n > N$ $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$

$\|f_n - f_{n_k}\|_p^p = \int\limits_X |f_n - f_{n_k}|^p d\mu < \varepsilon^p$ верно при всех больших k.

Тогда по теореме Фату: $\int\limits_X |f_n - f|^p d\mu < \varepsilon^P$, т.е. $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$, т.е. $f_n \to f$ в L^p.

45 Плотность в L^p множества ступенчатых функций

45.1 Определение

Y — множество, $\mathcal{A} \subset Y$ — (всюду) плотное множество, если $\forall y \in Y : \forall U(y)$ верно $U(y) \bigcap \mathcal{A} \neq \varnothing$.

Пример: $\mathcal{A} = \mathbb{Q} \subset Y = \mathbb{R}$.

45.2 Лемма

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$

Тогда

$\{f \in L^p : f$ — ступ.$\}$ — плотно L^p.

45.2.1 Замечание

$p < +\infty$, $\varphi \in L^p$ — ступенчатая, тогда $\mu X(\varphi \neq 0) < +\infty$.

45.2.2 Доказательство

1. $p = +\infty$, $f \in L^\infty$, подменим f на множество меры $0 : |f| \leqslant \|f\|_\infty$ всюду.

   $\exists$ ступ. $\varphi_n \rightrightarrows f_+$, $\psi_m \rightrightarrows f_-$, т.е. $\|\varphi_n - f_+\|_\infty \to 0$, $\varphi_n \to f_+$ в C^∞, $\psi_m \to f_-$.

2. $p < +\infty$, $f \geqslant 0$, $\exists \varphi_n$ — ступенчатая, $\varphi_n \to f$ всюду.

   $\|\varphi_n - f\|_p^p = \int\limits_X |\varphi_n - f|^p d\mu \to 0$, $|\varphi - f|^p \leqslant |f|^p$.

45.3 Определение

X — *топологическое* пространство, если $\forall F_1,\ F_2$ — замкнутых подмножеств, $F_1 \bigcap F_2 = \varnothing$.

Если $\exists$ открытые $U(F_1), U(F_2)$, которые не пересекаются, то это свойство X называются *нормальностью.* (дополнительно требуется, чтобы $\forall y \in X\ \{y\}$ — замкнутое).

45.4 Лемма Урысона

Будет дописано позже.

X — норм, $F_0,\ F_1$ — замкнуты, $F_0 \bigcap F_1 = \varnothing$.

Тогда $\exists f : X \to \mathbb{R},\ 0 \leqslant f \leqslant 1$, непрерывное.

$f\big|_{F_0} = 0,\ f\big|_{F_1} = 1$.

45.5 Доказательство

Переформулируем нормальность:

$\forall F_1$ — замкнутого, $\subset G$ — открытого, $\exists U(F_1)$ — открытое, что выполняется $F_1 \subset U(F_1) \subset \overline{U(F_1)} \subset G$.

1. $F_0 \subset U(F_0) \subset \overline{U(F_1)} \subset F_1^C$
2. $\overline{G_0} \subset U(\overline{G_0}) \subset G_1$
3. $\overline{G_0} \subset U'(\overline{G}_0) \subset \overline{U'(\overline{G_0})} \subset G_{1/2}$

   $G_{1/2} \subset U(\overline{G}_{1/2}) \subset \overline{U} \subset G_1$, где $U(\overline{G}_{1/2}) = G_{3/4}$.

f — непрерывна, значит $f^{-1}(a,b)$ — открыто. Достаточно проверить, что:

1. $f^{-1}(-\infty, s)$ — открыто;
2. $f^{-1}(-\infty, s)$ — замкнуто.

$f^{-1}(a,b) = f^{-1}(-\infty, b) \setminus f^{-1}(-\infty, a)$.

1. $\forall s : f^{-1}(-\infty, s) = \bigcup\limits_{q \in s, q\text{-дв. рац.}} G_q$ — открыто.

   $\subset f(y) < S$, где $f(y) = \inf\{q : x \in G_q\}$.

   $\supset x \in$ ЛЧ, $f(x) = S_0 < q_1 < S$, $x \in G_{q_1}$.

Часть IX

Поверхностный интеграл II рода

46 Финитная функция

Финитная функция — функция, равная $\mathbf{0}$ вне некоторого шара, и непрерывная в $C_0(\mathbb{R}^m)$.

Очевидно, что $\forall p \in [1, +\infty) : C_0(\mathbb{R}^m) \subset L^p(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$.

47 Сторона поверхности

Поверхность — простое гладкое двумерное многообразие.

Сторона поверхности (гладкой) — непрерывное векторное поле единичных нормалей.

Если не существует непрерывного поля единичных нормалей, то такая поверхность — односторонняя.

48 Задание стороны поверхности с помощью касательных реперов

Репер — Пара ЛНЗ касательных векторов.

Способ задания стороны — задать поле касательных реперов.

49 Интеграл II рода

Ω — двусторонняя поверхность в $\mathbb{R}^3$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$.

n_0 — сторона поверхности.

Тогда интегралом II рода (поля F на Ω) называют:

$\int\limits_{\Omega} \langle F, n_0 \rangle ds.$

49.0.1 Замечания

1. поменяем сторону — поменяем знак;

2. Не зависит от параметризации;

3. Обозначения: $F = (P, Q, R)$

   $\int\limits_{\Omega} = \int\limits_{\Omega} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$

   $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$, тогда

   $(x'_u, y'_u, z'_u) \times (x'_v, y'_v, z'_v) = \vec{n}$

   $dydz = (y'_u du + y'_v dv) \wedge (z'_u du + z'_v dv) = du \wedge dv (y'_u z'_v - y'_v z'_u)$

   $\wedge$ — косо-коммутативная операция

   $da \wedge db = -db \wedge da$

   $da \wedge da = -da \wedge da = 0.$

50 Плотность в L^p множества финитных непрерывных функций

$(\mathbb{R}^m, \mathcal{M}^m, \lambda_m)$, $E \subset \mathbb{R}^m$ — измеримая.

Тогда множество финитных функций (непрерывных) плотно в $L^p(E, \lambda_m)$

50.1 Доказательство

$g \in L^p(E, \mu)$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists f \in C_0(\mathbb{R}^m),\ \|g - f\big|_E\|_p < \varepsilon$. Пусть $g = 0$ вне E, то $\|g - f\big|E\|_{2^p(E,\mu)} \leqslant \|g - f\| < \varepsilon$ в $L^p(\mathbb{R}^m)$.

$g = g^+ - g^-$, g^+ — приблизим ступенчатыми, $\exists$ ступ. $h : \|g^+ - h\| < \varepsilon$.

$h = \sum c_k \chi_{a_k}$. Каждую χ_{A_k} приблизим финитной непрерывной функцией:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists$ замкнутая $F_k \subset A_k \subset G_k$(откр.), $\lambda_m(G_k \setminus F_k) < \left(\dfrac{\varepsilon}{|c_k| \cdot q}^p\right)$.

По лемме Урысона $\exists f_k : 0 \leqslant f_k \leqslant 1,\ f = 1$ на $F_k,\ f = 0$ на $\mathbb{R}^m \setminus G_k$.

$\|g^+ - \sum c_k f_k\|_p \leqslant \|g^+ - h\|_p + \|h - \sum c_k f_k\| \leqslant \varepsilon + \sum |c_k| \cdot \|\chi_{A_k} - f_k\| \leqslant \int |\chi_{A_k} - f_k|^p \leqslant \varepsilon + \sum \dfrac{\varepsilon}{q} = 2\varepsilon$

$$\int\limits_{G_k \setminus F_k} 1^p < \left(\frac{\varepsilon}{|c_k| q}\right)^p.$$

$1 \leqslant p < +\infty$.

50.2 Замечание

1. В $L^\infty(\mathbb{R}^m)$ этот факт не работает.

   $L^\infty([0,2])$ функцию $\chi_{[0,1]}$ не приблизить непрерывной.

2. В $L^p(E, \lambda_m)$ плотны:

   - Линейная комбинация характеристических функций ячеек;
   - Гладкие финитные функции;
   - Рациональные линейные комбинации рациональных ячеек;
   - Просто непрерывные функции.

51 Теорема о непрерывности сдвига

51.1 Необходимое определение

$L^p[0,T]$, $T \in \mathbb{R}$, можем понимать как пространство T-периодических функций ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$), $\int\limits_0^T f = \int\limits_a^{a+T} f$.

$C[0,T]$ — пространство непрерывных функций, $\|f\| = \max\limits_{x \in [0,T]} |f(x)|$.

$\widetilde{C}[0,T]$ — пространство непрерывных T-пер. функций.

$f \in \widetilde{C}[0,T] \Rightarrow f$ — равномерно непрерывные.

$\widetilde{C}[0,T]$ плотно в $L^P[0,T]$, $p < +\infty$.

51.2 Формулировка теоремы

$f_h(x) \coloneqq f(x+h)$.

1. f — равномерно непрерывная на $\mathbb{R}^m \Rightarrow \|f_h - f\| \to 0$ при $n \Rightarrow 0$;
2. $1 \leqslant p < +\infty$, $f \in L^p\left(\mathbb{R}^m\right) \Rightarrow \|f_n - f\|_p \to 0$ при $n \to 0$;
3. $f \in \widetilde{C}[0,T] \Rightarrow \|f_n \ f\|_{+\infty} \to 0$;
4. $1 \leqslant p < +\infty$ $f \in L^p[0,T] \Rightarrow \|f_n - f\|_p \to 0$.

51.3 Доказательство

1 и 3 очевидные утверждения по определению равномерной непрерывности.

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall x, x' : |x - x'| < \delta \ |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

$\forall |h| < \delta : \|f_h - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

g — финитно непрерывная: $\|f - g\|_p < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

$\|f_h - f\|_p \leqslant \|f_h - g_h\|_p + \|g_h - g\|_p + \|g - f\|_p \leqslant \dfrac{2\varepsilon}{3} + \|g_h - g\|_p$

$g = 0$ вне $B(0,r)$, пусть $|h| < 1$, тогда $\|g_h - g\|_p = \|g_h - g\|_{L^p(B(0,r+1))} \leqslant \|g_h - g\|_{+\infty} \cdot \lambda B^{1/p}$

и 4) $\|g_h - g\|_p \leqslant \|g_h - g\|_\infty T^{1/p}$

52 Формула Грина

D — компактное, связное, односвязное, множество в $\mathbb{R}^2$, ограниченное кусочно-гладкой кривой.

На ∂D направление "против часовой стрелки".

52.1 Теорема

$D \subset \mathbb{R}^2$ — см выше.

P, Q — векторные поля, гладкие в $U(D)$. Тогда

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_{\partial D} Pdx + Qdy.$$

52.2 Доказательство

D — кривая 4-угольника относительно OX, а также относительно OY.

Рассмотрим поле $(P, \mathbf{0})$ (для $(\mathbf{0}, Q)$ аналогично).

ПЧ: $-\iint\limits_{D_b} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_{\partial D} Pdx + \mathbf{0}dy$

ЛЧ: $-\int\limits_a^b d \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = -\int\limits_a^b P(x,y)\Big|_{y=f_1}^{y=f_2} dx = \int\limits_a^b P(x, f_1(x))dx - \int\limits_a^b P(x, f_2(x))dx.$

ПЧ: $\int\limits_{\gamma_1} + \int\limits_{\gamma_2} + \int\limits_{\gamma_3} + \int\limits_{\gamma_4}$, $\int\limits_{\gamma_1} = \int\limits_a^b P(x, f(x)) \cdot 1 + 0 \cdot f'(x)dx$, $\int\limits_{\gamma_2} = \int\limits_{\gamma_4} = 0$, $\int\limits_{\gamma_3} = \int\limits_b^a P(x, f(x))dx.$

53 Формула Стокса

Ω — двусторонняя, гладкая поверхность, $\overline{n_0}$ — сторона.

$\partial\Omega$ — кусочно-гладкая кривая с согласованной ориентацией.

(P, Q, R) — гладкое векторное поле в $U(\Omega)$. Тогда

$\int\limits_{\partial\Omega} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{\Omega} (R'_y - Q'_z)dydz + (P'_z - R'_x)dzdx + (Q'_x - P'_y)dxdy.$

53.1 Доказательство

Считаем, что поверхность C^r-гладкая.

Достаточно проверить для $(P, 0, 0)$.

$\int\limits_{\partial\Omega} Pdx = \iint P'_z dzdx - P'_y dxdy.$

$\int\limits_{\partial\Omega} Pdx = \int P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right)$ и по формуле Грина получаем

$\int\limits_{L} Px'_u du + Px'_v dv = \iint\limits_{G} \frac{\partial}{\partial u}(Px'_v) - \frac{\partial}{\partial v}(Px'_u) dudv = \iint \left(P'_x x'_u + P'_y y'_u + P'_z z'_u \right) x'_v + Px''_v v - \left(P'_x x'_v + P'_y y'_v + P'_y z'_v \right) x'_u - Px''_u v dudv = \iint P'_x \mathbf{0} + P'_y(x'_v y'_u - x'_u y'_v) + P'_z(x'_v z'_u - x'_u z'_v) = \iint\limits_{G} P'_z dzdx - P'_y dxdy$

Получили что хотели.

54 Формула Гаусса-Остроградского

$V = \{(x,y,z) : (x,y) \in \Omega$ и $f(x,y) \leqslant z \leqslant F(x,y)\}$

$\Omega \underset{\text{замкн.}}{\subset} \mathbb{R}^2$, $\partial\Omega$ — кусочно-гладкая кривая, f, $F \in C^1(\Omega)$.

$R : U(V) \to \mathbb{R}$, $R \in C^1$. Тогда

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{\partial V^+} Rdxdy.$$

54.1 Доказательство

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_\Omega dxdy \int\limits_{f(x,y)}^{F(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint\limits_\Omega R(x,y,F(x,y)) - \iint\limits_\Omega R(x,yf(x,y))dxdy = \iint\limits_{\text{график F (верх)}} Rdxdy + \iint\limits_{\text{график f (низ)}} Rdxdy.$$

$$0 = \iint\limits_{\text{цил. } \partial V} Rdxdy.$$

54.2 Следствие

$$\iint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint\limits_{\partial V^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

55 Соленоидальность бездивергентного векторного поля

55.1 Дивергенция

$\text{div}A$ — это функция $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$.

$\text{div}A(a) = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{1}{\lambda_3 B} \iiint\limits_{B(a,r)} \text{div}A dxdydz = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{1}{\lambda_3 B} \iint\limits_{S(a,r)} \langle (P,Q,R), n_0\rangle dS.$

55.2 Ротор

$(P,Q,R) \in C^1$ — ротор (вихрь).

$\text{rot}A = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y)$.

$\text{rot}V = 0$, $\gamma = 0$. Тогда $\int\limits_\gamma Pdx + Qdy + Rdz = 0$.

γ — путь от A до B. Тогда $\int\limits_\gamma$ — зависит от A и B, но не от самого пути.

Если $O \subset \mathbb{R}^3$ — не односвязная, $\text{rot}V = 0$. $I(v,\gamma)$ не зависит от γ

$\int\limits_\Omega \text{rot}V = \int\limits_{\gamma_2} V + \int\limits_{\gamma_1} V$.

$\text{div}(P,Q,R) = 0$.

$\forall V : \iint\limits_{\partial V} \langle (P,Q,R), n_0\rangle dS = 0$.

55.3 Вспомогательная теорема

V — поле. Если $\text{rot}V = 0$ и область односвязная, то поле гладкое.

$\text{rot} = 0$ — дифференциальный критерий потенциальности $\Leftrightarrow$ поле локально-потенциальное $\Leftrightarrow$ V — потенциальное.

55.4 Соленоидальное поле

Поле V — *соленоидальное* в Ω если существует векторный потенциал, т.е. существует такое векторное поле B, что $\text{rot}B = V$.

55.5 Теорема

Ω — параллелепипед, $(A_1, A_2, A_3) = A$ — соленоид в $\Omega \Leftrightarrow \mathrm{div} A = 0$ в Ω.

55.5.1 Доказательство

$\Rightarrow$ Тривиально $\mathrm{divrot} B = 0$ — упражнение.

$\Leftarrow$.

$\mathrm{div} A = 0$. Ищем векторный потенциал $B : \mathrm{rot} B = A$.

$B = (P, Q, R)$, $R'_y - Q'_z = A_1$, $P'_z - R'_x = A_2$, $Q'_z - P'_y = A_3$.

Забавный факт: можем подменить B на B_1, что $\mathrm{B} - \mathrm{B}_1 = 0$ и $B - b_1$ — потенциал f.

Пусть $R = 0$, тогда $-Q'_z = A_1$, $P'_z = A_2$ и $Q'_x - P'_y = A_3$. $P(x, y, z) = \int\limits_{z_0}^{z} A_2(x, y, z) dt$

$Q(x, y, z) = -\int\limits_{z_0}^{z} A_1 dz + \varphi(x, y)$.

$I(y) = \int\limits_{a}^{b} f(x, y) dx$, $I'_(y) = \int\limits_{a}^{b} f'_y(x, y) dx$.

$\varphi'_x - \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\partial A_1}{\partial x} - \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\partial A_2}{\partial y} = A_3$.

$\mathrm{div} = 0$ по условию, тогда $\varphi'_x + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\partial A_3}{\partial z} dz = A_3$.

$\varphi'_x(x, y) + A_3(x, y, z) - A_3(x, y, z_0) = A_3$.

$\varphi'_x(x, y) = A_3(x, y, z_0)$.

$\varphi = \int\limits_{x_0}^{x} A_3(x, y, z_0) dx + g(y)$.

Часть X

Гильбертовы пространства

56 Гильбертово пространство

Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ — линейное пространство со скалярным произведением (и соответствующей нормой), полное (как линейное нормированное пространство).

57 Теорема о свойствах сходимости в Гильбертовом пространстве

Пусть x, y лежат в Гильбертовом пространстве. Тогда верны следующие свойства:

1. $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$. Тогда $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x_0, y_0 \rangle$.
2. $\sum x_k$ — сходится. Тогда $\forall y \in \mathcal{H} : \langle \sum\limits_{k=1}^{+\infty} x_k, y \rangle = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \langle x_k, y \rangle$.
3. $\sum x_k$ — ортогональный ряд. Тогда $\sum x_k$ — сходится $\iff \sum \|x_k\|^2 < +\infty$ и при этом $\|\sum x_k\|^2 = \sum \|x_k\|^2$.

57.1 Доказательство

1. $|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| = |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y_0 \rangle + \langle x_n, y_0 \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| \leqslant |\langle x_n, y_n - y_0 \rangle| + |\langle x_n - x_0, y_0 \rangle| \leqslant \|x_0\| \|y_n - y_0\| + \|x_n - x_0\| \|y_0\| \to 0$ при $n \to +\infty$.
2. $S_N = \sum\limits_{k=1}^{N} x_k$, тогда $\langle \sum\limits_{k=1}^{N} x_k, y \rangle = \sum\limits_{k=1}^{N} \langle x_n, y \rangle$. При устремлении к бесконечности получаем необходимое равенство.
3. $S_N = \sum\limits_{k=1}^{N} x_k$, $\|S_N\|^2 = \langle \sum\limits_{k=1}^{N} x_k, \sum\limits_{k=1}^{N} x_k \rangle = \sum \langle x_k, x_l \rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x_k, x_k \rangle = \sum\limits_{k=1}^{N} \|x_k\|^2 = \sum\limits_N$.

   Аналогично $\|S_N - S_M\|^2 = \left| \sum\limits_N - \sum\limits_M \right|$

   S_n и $\sum\limits_N$ — фундаментальны одновременно.

58 Ортогональная система (семейство) векторов

$\{e_k\}$ — *ортогональная система (семейство) векторов*, если $e_k \in \mathcal{H}$, что $\forall i, j : i \neq j : e_i \perp e_j$, $e_k \neq 0$.

59 Ортонормированная система

Если ортогональная система $\{e_k\}$, для которой $\forall k : \|e_k\| = 1$ — ортонормированная система векторов.

59.1 Замечание

Если $\{e_k\}$ — ортогональная система, то $\left\{\dfrac{e_k}{\|e_k\|}\right\}$ — ортонормированная система.

60 Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе

$\{e_k\}$ — ортонормированная система в $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k e_k = x$. Тогда

1. ортонормированная система — ЛНЗ;
2. $c_k = \dfrac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$;
3. $c_k e_k$ — ортогональная проекция x на прямую $\{te_k | t \in \mathbb{R}\}$, т.е. $x = c_k e_k + z$, где $z \perp e_k$.

60.1 Доказательство

1. $\sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k e_k = 0$.

   Умножим e_j $1 \leqslant j \leqslant N$, $\langle \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k e_k, e_j \rangle = \sum \alpha_k \langle p_k, p_j \rangle \Rightarrow \alpha_j = 0$.
2. $\langle x, e_m \rangle = \langle \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k e_k, e_m \rangle = \sum c_k \langle e_k, e_m \rangle = c_m \langle e_m, e_m \rangle$.
3. $\langle x - c_k e_k, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - c_k \|e_k\|^2 = 0$.

Часть XI

Ряды Фурье

61 Коэффициенты Фурье

$\{e_k\}$ — ортогональная система векторов в $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$.

$c_k(x) \coloneqq \dfrac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$ — *коэффициенты Фурье* вектора x по системе $\{e_k\}$.

$\sum c_k(x) e_k$ — ряд Фурье в выражениях x. При перенормировке $\{e_k\}$ ряд Фурье не меняется.

62 Ряд Фурье в Гильбертовом пространстве

$\sum c_k(x) \cdot e_k$ называется рядом Фурье вектора x по ортогональной системе $\{e_k\}$.

63 Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя

$\{e_k\}$ — ортогональная система $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$. $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(x) e_k$, $\mathcal{L} := \text{Lin }(e_1, \ldots, e_n)$.

Тогда верны следующие свойства:

1. S_n — проекция x на S. $x = S_n + z$, где $z \perp \mathcal{L}$.
2. S_n — элемент наилучшего приближения для x в $\mathcal{L}$.

   $\|x - S_n\| = \min\limits_{y \in \mathcal{L}} \|x - y\|$.
3. $\|S_n\| \leqslant \|x\|$.

63.1 Доказательство

$z := x - S_n$, $\langle x, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle S_n, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(x) e_i, a_k \rangle = \langle x_i, e_k \rangle - \sum c_i(x) \langle e_i, e_k \rangle = 0$

$x = S_n + z$, $z \perp \mathcal{L}$.

$y \in \mathcal{L}$, $\|x - y\|^2 = \|S_n - y + z\|^2 = \|S_n - y\|^2 + \|z\|^2 \geqslant \|z\|^2 = \|S_n - x\|^2$

$\|x\|^2 = \|S_n\|^2 + \|z\|^2 \geqslant \|S_n\|^2$.

63.2 Неравенство Бесселя

В условиях теоремы выполняется следующее равенство:

$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |C_k(x)|^2 \|e_k\|^2 \leqslant \|x\|^2$.

из 3 свойства следует $\|x\|^2 \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2$ для любого n.

64 Теорема Рисса — Фишера о сумме ряда Фурье. Равенство Парсеваля

$\{e_k\}$ — ортогональная система в $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$. Тогда выполняеются следующие утверждения:

1. Ряд Фурье x сходится в $\mathcal{H}$.
2. $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k(x)e_k + z$, где $\forall k : z \perp e_k$.
3. $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k(x)e_k \iff \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$ (равенство Парсеваля).

64.1 Доказательство

$\sum x_k$ — ортогональный — сх $\iff \sum \|x_k\|$ — сходится.

Р.Ф. — сходится $\iff \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2$ — сходится — это всё верно по неравенству Бесселя.

$z : x - \sum c_k e_k$, $\langle z, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle - \sum = \langle x, e_n \rangle - c_n \langle e_n, e_n \rangle$.

$\Rightarrow$ — очевидно из предыдущей теоремы пункта 3.

$\Leftarrow \|x\|^2 = \| \sum c_k(x) p_k \|^2 + \|z\|^2 = \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 + \|z\|^2 \Rightarrow z = 0$

65 Базис, полная, замкнутая ОС

1. ортогональная система векторов — *базис*, если $\forall x \in \mathcal{H} : x = \sum c_k(x) e_k$.

2. ортогональная система векторов *полная*, если не $\exists z : z \perp \{e_k\}$.

3. ортогональная система векторов *замкнутая* если $\forall x \in \mathcal{H}$ выполняется уравнение замкнутости, т.е. $\sum |c_k(x)|^2 \, \|e_k\|^2 = \|x\|^2$.

66 Теорема о характеристике базиса

$\{e_k\}$ — ортогональная система векторов, тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\{e_k\}$ — базис.
2. $\forall x, y \in \mathcal{H}$ выполняется обобщающее уравнение замкнутости:
   $\langle x, y \rangle = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k(x)\overline{c_k(y)}\|e_k\|^2$.
3. $\{e_k\}$ — замкнутая ортогональная система.
4. $\{e_k\}$ — полная ортогональная система.
5. $\mathrm{Lin}\ (e_1, e_2, e_3, \ldots)$ — плотное в пространстве $\mathcal{H}$.

66.1 Доказательство

- $1 \Rightarrow 2)$ $x = \sum c_k(x)P_k$, $\dfrac{\langle y, e_k \rangle}{\|e_k\|^2} = c_k(y)$. $\langle x, y \rangle = \sum c_k(x)\langle e_k, y \rangle = \sum c_k(x)\overline{c_k(y)}\|e_k\|^2$
- $2 \Rightarrow 3)$ $y \coloneqq x$.
- $3 \Rightarrow 4)$ $z \perp e_k : \forall k,\ c_k(z) = 0$.

  Уравнение замкнутой системы: $\|z\|^2 = \sum |c_k(z)|^2 \|e_k\|^2 = 0$.
- $4 \Rightarrow 1)$ По теореме Рисса-Фишера $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k(x)e_k + z$, $z \perp e_k \forall k$, то по условию $z = 0$, значит это и есть базис.
- $4 \Rightarrow 5)$ $\mathcal{L} = Cl(\mathrm{Lin}\ (e_1, e_2, \ldots))? = \mathcal{H}$.

  Если $\neq$, то $\exists x \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{L}$, тогда $x = \sum c_k(x)e_k + z$, $z \perp e_k \forall k \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x \in \mathcal{L}$.
- $5 \Rightarrow 4)$ $y \perp e_k \forall k$, $y \perp \mathcal{L} = \mathcal{H}$, $y \perp y$, что значит $\langle y, y \rangle = 0$.

Часть XII

Интегралы, зависящие от параметра

66.2 Несобственный интеграл в $\mathbb{R}$

$\int\limits_a^b f(x)dx = \int -[a,b] f d\lambda_1.$

$\int\limits_a^{\to b} f dx = \lim\limits_{B\to b-0} \int\limits_a^B f dx$ — *несобственный интеграл.*

Здесь f — локально суммируемая, т.е. $\forall B \in [a,b) : f$ — суммируемая на $[a,B]$. (возможно, что $b = +\infty$.

66.3 Теорема

$\int\limits_a^{\to b} f dx$ — абсолютно сходится $\Longleftrightarrow f$ — суммируемая на $[a,b)$.

66.3.1 Доказательство

- $\Leftarrow$)

  f — суммируемая $\Rightarrow \int\limits_{[a,b)} |f| d\lambda$ — конечный, тогда $\int\limits_a^{\to b}$ существует.

  $\int\limits_a^B |f| \leqslant \int\limits_{[a,b)} |f|.$

- $\Rightarrow$)

  $\lim\limits_{B\to b-0} \int\limits_a^B |f| d\lambda = \int\limits_{[a,b)} |f| d\lambda$ — в силу непрерывности меры снизу $g \geqslant 0$.

  Измеримость $E \mapsto \int\limits_E g dx$.

$f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$

X — пространство с мерой, $y \subset Y_0$ — метрическое пространство (или даже метризуемое).

Считаем, что $\forall y : f(\cdot, y)$ — суммируемая на X.

67 Предельный переход под знаком интеграла при наличии равномерной сходимостичвп

$\mu X < +\infty$, $\varphi : X \to \mathbb{R}$, $f(x,y) \rightrightarrows \varphi$ при $y \to y_0$ ($y_0 \in Y_0$ или y_0 — предельная точка Y). Тогда

φ — суммируемая на X, $\lim\limits_{y \to y_0} \int\limits_X f(x,y) d\mu = \int\limits_X \varphi d\mu$.

67.1 Доказательство

По Гейне выбираем $y_n \to y_0$ при больших $n : \forall x : |f(x,y) - \varphi(x)| < 1 \Rightarrow \varphi$ — суммируемая.

$$\left| \int\limits_X F(x,y) d\mu - \int\limits_X \varphi d\mu \right| \leqslant \int\limits_X |f - \varphi| d\mu \leqslant \sup_{x \in X} |f(x,y_0) - \varphi(x)| \, \mu X \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

67.2 определение

$f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ (как выше).

$y_0 \in Y$, f — *удовлетворяет условию* $L_{\text{loc}}(y_0)$, если $\exists g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируемая, а также существует $U(y_0)$, что для почти всех $x \in X$ и $\forall y \in Y(y_0) : |f(x,y)| \leqslant g(x)$.

67.3 Теорема Лебега о мажорирующей сходимости

$f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$, что $\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x)$ при почти всех x, f — удовлетворяет $L_{\text{loc}}(y_0)$. Тогда φ — суммируемая, $\lim\limits_{y \to y_0} \int\limits_X f(x, y) d\mu = \int\limits_X \varphi d\mu$.

67.3.1 Доказательство

Из теоремы Лебега по Гейне $y_n \to y_0$, при почти всех x, при $y \in U(y_0)$ верное $|f(x, y)| \leqslant g(x)$, для больших n получаем $|f(x, y_n)| \leqslant g(x)$, при $n \to +\infty$ $|\varphi(x)| \leqslant g(x) \Rightarrow \varphi$ — суммируемая.

$\int\limits_X f(x, y_n) d\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int\limits_X \varphi d\mu$.

67.3.2 Следствие

f — при почти всех x — непрерывно по y в точке y_0, f — удовлетворяет $L_{\text{loc}}(y_0)$. Тогда

$J(y) := \int\limits_X f(x, y) d\mu(x)$ — непрерывна в y_0.

$\varphi \leftarrow -f(x, y_0)$.

67.4 Правило Лейбница

$Y \subset \mathbb{R}$ — промежуток.

$f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $\forall y : f(\cdot, y)$ – суммируемая на X.

Пусть:

1. для почти всех x и $\forall y \in Y : \exists f'_y(x, y)$.
2. f'_y — удовлетворяет $L_{\text{loc}}(y_0)$.

$J(y) = \int\limits_X f(x, y) d\mu(x)$. Тогда

$J(y)$ — дифференцируемая в y_0 и $J'(y) = \int\limits_X f'_y(x, y) d\mu(x)$.

67.4.1 Доказательство

$F(x,h) \coloneqq \dfrac{f(x,y_0+h)-f(x,y_0)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'_y(x,y_0)$.

$\dfrac{J(y_0+h)-J(y_0)}{h} = \int\limits_X F(x,h)d\mu \xrightarrow[h\to 0]{} \int\limits_X f'_y(x_0,y_0)d\mu$.

$L_{\text{loc}}(h=0)$, $|F(x,h)| = \left|f'_y(x,y_0\to\theta h)\right|$ по теорема Лагранжа, и $\left|f'_y(x,y_0\to\partial h)\right| \leqslant g(x)$ по условию $L_{\text{loc}}(y_0)$ для f'_y из 2 пункта.

Часть XIII

Тригонометрические ряды Фурье

67.5 Тригонометрический полином порядка n

$T_n(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ — *тригонометрический полином не выше* n.

$\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ — *тригонометрический ряд.*

$\cos kx = \dfrac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$, $\sin kx = \dfrac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$.

$S_n = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ — тригонометрический полином в экспоненциальной форме.

$\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = \lim S_n(x)$ — тригонометрический ряд в экспоненциальной форме.

$e^{ikx} = \cos nx + i \sin nx$.

68 Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда

Дан тригонометрический ряд (вещественный или комлексный), S_n, также известно, что $S_n \to f$ в $L^1[-\pi, \pi]$. Тогда

$a_k = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt$ (работает и при $k = 0$).

$b_k = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt.$

$c_k = \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$

69 Доказательство

Докажем только формулу 1, остальные доказываются аналогично.

Возьмём $n > k$, тогда $\int\limits_{-\pi}^{\pi} S_n(t) \cos kt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\dfrac{a_0}{2} + \sum a_l \cos lt + b_l \sin lt \right) \cdot \cos ktdt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} a_l \cos^2 kt = \pi a_k.$

$\left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} S_n(t) \cos kt - \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \right| \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} |S_n(t) - f(t)| |\cos kt| \, dt \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} |S_n(t) - f(t)| \, dt = \|S_n - f\|_1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$

69.1 Определение

$f \in L^1[-\pi,\pi]$, $a_k(f)$, $b_k(f)$, $c_k(f)$, полученные по формуле из леммы — *это назначенные коэффициенты Фурье функции* f.

Ряд $\frac{a_0(f)}{2} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx$ — *ряд Фурье функции* f.

Также можно рассматривать $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)c^{ikx}$ — тоже ряд Фурье.

69.1.1 Замечание

$f \in L_1 = L^1[-\pi,\pi]$ — чётна.

$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kttdt = 0.$

$a_k(f) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(t)\cos kttdt.$

если f — нечётная, то меняем местами a и b ($a_k = 0$, $b_k(f) = \frac{2}{\pi}\ldots$).

69.1.2 Еще шаманство

Для $f \in L^1[0,\pi]$ можно считать ряд Фурье по синусам или по косинусам.

$f \backsim \frac{a_0}{2} + \sum a_k\cos kx,\ f \backsim \sum b_k(f)\sin kx.$

70 Теорема Римана-Лебега

$E \subset \mathbb{R}$, $f \in L^1(E, \lambda_1)$. Тогда

$\int\limits_E f(t)e^{i\lambda t}dt \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0.$

$\int\limits_E f(t)\cos t \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$ (аналогично для sin).

70.1 Следствие

$a_k(f)$, $b_k(f)$, $c_k(f) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$

70.2 Доказательство

Пусть $f = 0$ вне E, $f \in L^1(\mathbb{R})$.

$\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\lambda t}dt$ при $t = \tau + \dfrac{\pi}{\lambda}$ равно $\int\limits_{\mathbb{R}} f\left(\tau + \dfrac{\pi}{\lambda}\right)e^{i\lambda\tau + i\pi}d\tau = -\int\limits_{\mathbb{R}} f\left(t + \dfrac{\pi}{\lambda}\right)e^{i\lambda t}dt.$

$2\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\lambda t} = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(f(t) - f(t + \dfrac{\pi}{\lambda})\right)e^{i\lambda t}dt$

$\left|\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\lambda t}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} \left|f(t) - f(t + \dfrac{\pi}{\lambda}\right| \cdot \left|e^{i\lambda t}\right|dt = \dfrac{1}{2}\|f - f_{\pi/\lambda}\| \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$

70.3 Модуль непрерывности

$w(f,h) = \sum\limits_{x,y\in E,|x-y|<h} |f(x)-f(y)|$ — *модуль непрерывности.*

Пусть f — дифференцируема на $[a,b]$, тогда $|w(f,h)| \leqslant \max|f'|h$.

70.4 Теорема

1. $f \in \widetilde{C}[-\pi,\pi]$. Тогда $|a_k(f)|$, $|b_k(f)|$, $2|c_k(f)| \leqslant w(f, \dfrac{\pi}{k})$.

70.4.1 Доказательство

Как в теореме Римана-Лебега делаем рассуждение $[-\pi,\pi]$.

$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ktdt = -\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\tau + \dfrac{\pi}{k})\cos kt$ (сделали замену), тогда $\pi w(f, \dfrac{\pi}{k}$.

Часть XIV

05.05.2020

70.5 Равномерно сходящийся интеграл

$J(y) = \int\limits_a^{\to b} f(x,y) d\mu(x),\ f : \langle a, b \rangle \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, локально суммируемая.

Интеграл $J(y)$ равномерно сходится на $Y \iff \int\limits_a^t f(x,y)dx \rightrightarrows J(y)$ при $t \to b-0$.

$\left| \int\limits_a^t f(x,y)dx - J(y) \right| \xrightarrow[t \to b-0]{} 0.$

$\sup\limits_y \left| \int\limits_a^{\to b} f(x,y)dx \right| \xrightarrow[t \to b-0]{} 0.$

70.6 Что-то похожее на признак Вейерштрасса

$|f(x,y)| \leqslant g(x)$ и $\int\limits_a^b g(x)$ конечен, тогда интеграл $\int\limits_a^{\to b} g(x)dx$ — равномерно сходится.

70.7 Ложное воспоминание Констранина Петровича

$f : T \times Y \to \mathbb{R}$, $T \subset \widetilde{T}$, $Y \subset \widetilde{Y}$ — метрические пространства (метризуемые)

t_0 — предельная точка T, y_0 — предельная точка Y. Пусть

1. $\forall t \in T : \exists$ кон. $L(t) = \lim\limits_{y \to y_0} f(t,y)$.
2. $\forall y \in Y : \exists$ кон. $J(y) = \lim\limits_{t \to t_0} f(t,y)$.
3. Хотя бы один из пределов — равномерный.

Тогда существует конечный $\lim\limits_{t \to t_0} L(t) = \lim\limits_{y \to y_0} J(y)$.

$f_n(x),\ \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = a_n,\ f_n(x) \rightrightarrows S(x)$, тогда $\exists$ кон. $\lim\limits_{x \to x_0} S(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

70.8 Теорема

$f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой.

$Y \subset \widetilde{Y}$ — метрическое пространство (или Y — м.п., или $\widetilde{Y}$ — метризуемое)

$Y_0 \in \widetilde{Y}$ — п. т. Y.

1. при почти всех $x : \exists f_0(x) = \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y)$.
2. f — локально суммируемая, т.е. суммируемая на каждом $(a,t) : t < b$. $\int\limits_a^t f(x,y) \to \int\limits_a^t f_0(x)$.
3. $|forally : \exists J(y) = \int\limits_a^{\to b} f(x,y) d\mu(x)$ — равномерно сходится на Y.

Тогда $\int\limits_a^{\to b} f(x,y) d\mu(x) \xrightarrow[y \to y_0]{} \int\limits_a^{\to b} f_0(x) d\mu(x)$.

70.8.1 Доказательство

Это ложное вспоминание с точностью до обозначений.

$T = (a,b)$, $T_0 = \overline{\mathbb{R}}$, $t_0 = b$.

$f(t,y) = \int\limits_a^t f(x,y) d\mu(x)$, $L(t) = \int\limits_a^t f_0(x) d\mu(x)$.

Переход конечный $\leftrightarrow$ интеграл равномерно сходится.

70.8.2 Следствие

$1 \leftrightarrow 1'$ при почти всех x $y \mapsto f(x,y)$, непрерывна в точке y_0.

Тогда заключение: $J(y)$ непрерывен в точке y_0.

70.9 Определение

$E = \langle a,b \rangle$, $M \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0,1)$.

$\mathrm{Lip}_M(\alpha) = \{ f : E \to \mathbb{R} : \forall x, y \in E : |f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y| \}$ — класс Липшеца.

70.9.1 Пример

f — дифференцируема, $\forall x : |f'(x)| \leqslant M,\ f \in \mathrm{Lip}_M(1)$.

$|f(x) - f(y)| = |f'(X)||x - y| \leqslant M|x - y|$.

70.10 Следствие

$0\alpha \leqslant 1,\ f \in \mathrm{Lip}_M(\alpha)$. Тогда при $k \neq 0$

$|a_k(f)|,\ |b_k(f)|,\ 2\,|c_k(f)| \leqslant \dfrac{M\pi^\alpha}{k^\alpha}$.

70.11 Утверждение

$f \in \widetilde{C}^1[a,b]$. Тогда

$a_k(f') = kb_k(f),\ b_k(f') - ka_k(f),\ c_k(f') = ikc_k(f)$.

$$2\pi C_k(f') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-ikx} = f(x)e^{-ikx}\Big|_{-\pi}^{\pi} + ik\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}$$

70.12 Следствие

1. $f \in \widetilde{C}^{(r)}[-\pi,\pi]$. Тогда $|a_k(f)|,\ |b_k(f)|,\ |c_k(f)| \leqslant \dfrac{\mathrm{const}}{|k|^2}$.
2. $f \in \widetilde{C}^{(r)},\ f^{(r)} \in \mathrm{Lip}_M(\alpha)$. Тогда $\ldots \leqslant \dfrac{\mathrm{const}}{|k|^{r+\alpha}}$.

$a_k(f) = \dfrac{1}{k^r}a_k\left(f^{(r)}\right)$

70.13 Ядро Дирихле

$D_n(t) = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\cos kt\right)$ — *ядро Дирихле*, $n = 0, 1, \ldots$.

70.14 Ядро Фейера

$\Phi_n(t) = \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} D_k(t)$.

70.15 Свойства

1. $D_n(t) = dfrac \sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t\right) 2\pi \sin t/2.$

2. $\Phi_n(t) = \dfrac{1}{2\pi(n+1)} \cdot \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{n+1}{2}t\right)}{\sin^2 t/2}.$

3. D_n, Φ_n — чётные, $\Phi_n \geqslant 0$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n = 1$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n = 1$.

4. $f \in L^1[-\pi,\pi]$, тогда $S_n(f,x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt$.

70.15.1 Доказательство

$2\sin\dfrac{\pi}{2}\cos kt = \sin\left(k+\dfrac{1}{2}\right)t - \sin\left(K-\dfrac{1}{2}\right)t.$

$2\sin\dfrac{t}{2}D_n = \dfrac{1}{\pi}\left(\sin\dfrac{\pi}{2} + \sum\sin\left(k+\dfrac{1}{2}\right)t - \sin\left(k-\dfrac{1}{2}\right)t\right)$

$2\pi(n+1)\Phi_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\sin\left(k+\dfrac{1}{2}\right)t}{\sin t/2} = \dfrac{sin^2\dfrac{n+1}{2}t}{\sin^2\dfrac{t}{2}}.$

$2\sum\limits_{k=0}^{n}\sin\dfrac{t}{2}\sin\left(k+\dfrac{1}{2}\right)t = 2\sum\cos kt - \cos\left(k+1\right)t = (1-\cos(n+1)t) = 2\sin^2\left(\dfrac{n+1}{2}t\right)$

$A_k(f,x)\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos ktdt$

70.16 Интеграл Дирихле

$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)Dn(t)dt$ — *интеграл Дирихле.*

71 Принцип локализации Римана

$f,\ g \in L_1,\ x_0 \in \mathbb{R},\ \delta > 0.\ f(x) = g(x)$ на $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Тогда

ряды Фурье f и g ведут себя одинаково, т.е. $S_n(f, x_0) - S_n(g, x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

71.1 Доказательство

$h := f - g,\ h = 0$ в $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $S_n(h, x_0)$, проверим, что $S_n(h, x_0) \to 0$.

$$S_n(h, x_0) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(x_0 + t) D_n(t).$$

$$\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\sin t + \cos nt.$$

$$S_n(h, x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(x_0+t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\sin nt + h(x_0+t)\cos nt dt = b_n(h_1) + a_n(h_2) \xrightarrow[h\to+\infty]{} 0.$$ по теореме Римана-Лебега.

Равенство выполняется в случае $h_1,\ h_2 \in L_1,\ h_2 \in L_1$ — очевидно.

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |h_2| = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |h(x_0 + t)| dt.$$

$h(x_0 + t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$ при $|t| < \delta : h_1 = 0.$

$|t| > \delta : |h_1| \leqslant |h(x_0 + t)| \cdot \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}.$

71.2 Замечания

1. В условиях теоремы пусть $[a, b] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Тогда

   $S_n(h, x) \rightrightarrows 0$ при $n \to +\infty$ на $[a, b]$.

2. $x_0,\ \delta$. Для определения ряда Фурье нужен весь $[-\pi, \pi]$. А для "поведения" ряда Фурье существенна лишь окрестность x_0.

3. $f \in L^1[0, \pi]$,

   $f \backsim \sum b_k(f)\sin kx.$

   $\backsim \sum a_k(f)\cos kx.$

Эти различия ведут себя одинаково на $[0, \pi]$.

72 До свидания, теория меры

(a, b)

Сумм. (a, t)

$\lim\limits_{t\to b-0}\int\limits_a^t f(x)d\mu(x)$.

$\int\limits_a^{\to b} f(x,y)d\mu(x)$ — равномерно сходится, если $\int\limits_a^t \rightrightarrows \int\limits_a^{\to b}$, если $\sup\limits_{y\in Y}\left|\int\limits_t^{\to b} f(x,y)d\mu(x)\right| \xrightarrow[t\to b-0]{} 0$.

72.1 Теорема об интегрировании по параметру

$f : (a,b)\times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируемая по мере $\lambda_1\times\mu$ на каждом множестве вида $(a,t)\times Y$, где $a < t < b$. $\mu Y < +\infty$.

Пусть $J(y) = \int\limits_a^{\to b} f(x,y)dx$ — равномерно сходится на Y. Тогда

1. $J(y)$ — суммируемая на Y.
2. $\int\limits_a^{\to b}\left(\int\limits_Y f(x,y)d\mu(y)\right)dx$ — сходится.
3. $\int\limits_Y \int\limits_a^{\to b} f(x,y)d\mu(x) = \int\limits_a^{\to b}\left(\int\limits_Y f(x,y)dy\right)$.

72.1.1 Доказательство

Проверим свойство 1.

$J_t(y) = \int\limits_a^t f(x,y)dx$, $a < t < b$, $y \in Y$ — суммируемая на Y по теореме Фубини.

$|J(y) - J_t(y)| = \int\limits_t = \left|\int\limits_t^{\to b} f(x,y)dx\right| \leqslant 1\ \forall y$ при t близких к b (следует из равномерной сходимости), значит $J(y)$ — суммируемая (поскольку $\mu Y < +\infty$).

Остальные свойства сами собой получаются.

$x \mapsto \int\limits_Y f(x,y)d\mu(y)$ — суммируемая по x на промежутке (a,t) (по теореме Фубини).

По теореме Фубини $\int\limits_a^t\left(\int\limits_Y f(x,y)d\mu(y)\right)dx = \int\limits_Y\int\limits_u^t f = \int\limits_Y\int\left(\int\limits_a^{\to b} fdx\right)d\mu(y) - \int\limits_Y\left(\int\limits_t^{\to b} fdx\right)d\mu(Y)$.

$$\left|\int\limits_a^t\left(\int\limits_Y f\right)-\int\limits_Y\left(\int\limits_a^{\to b} f\right)\right|\leqslant\left|\int\limits_Y\left(\int\limits_t^{\to b} f dx\right)dy\right|\leqslant\int\limits_Y\left|\int\limits_t^{\to b} f dx\right|dy\leqslant\mu Y\sup_{y\in Y}\left|\int\limits_t^{\to b} f(x,y)dx\right|\xrightarrow[t\to b-0]{}0.$$

72.2 Правило Лейбница для несобственный интегралов

$f:[a,b)\times\langle c,d\rangle\to\mathbb{R}$ — непрерывная.

$\forall y: J(y)=\int\limits_a^{\to b} f(x,y)dx$ — сходится.

Пусть $\forall x:\forall y:\exists f'_y(x,y)$ — непрерывная функция, $[a,b)\times\langle c,d\rangle$.

Пусть $I(y)=\int\limits_a^{\to b} f'_y(x,y)dx$ — равномерно сходится на $\langle c,d\rangle$. Тогда

1. $J(y)\in C^1\langle c,d\rangle$.
2. $J'(y)=I(y)$, т.е. $\dfrac{d}{dy}\left(\int\limits_a^{\to b} f(x,y)dx\right)=\int\limits_a^{b} f'_y(x,y)dx$

72.2.1 Доказательство

I — непрерывно зависит от y (по теореме о непрерывности несобственного интеграла).

$s_0,\ s\in\langle c,d\rangle,\ \int\limits_{s_0}^{s} I(y)dy=\int\limits_{s_0}^{s}\left(\int\limits_a^{\to b} f'_y dx\right)dy.$

$[x,y)\in[a,t]\times[s_0,s],\ f'_y$

По предыдущей теореме меняем порядок и получаем

$\int\limits_a^{\to b}\left(\int\limits_{s_0}^{s} f'_y(x,y)dy\right)dx=\int\limits_a^{\to b} f(x,s)-f(x,s_0)dx=J(s)-J(s_0)\Rightarrow J(s)$ — дифференцируема, по теореме Барроу $J'(S)=I(S)$.

Часть XV

11.05.2020

$D_n := \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx\right)$

$S_n(f,x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt.$

72.3 Признак Дины

$f \in L_1$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $S \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

$\int\limits_0^{\pi} \frac{|f(x_0+t) - 2S + f(x_0-t)|}{t} dt < +\infty$. Тогда

ряд Фурье в x_0 сходится к S, или $S_n(f,x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$.

72.3.1 Доказательство

Обозначим $\varphi(t) = f(x_0+t) - 2S + f(x_0-t)$.

Если D_n — четный, то $\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n = 1$.

$S_n(f,x_0) - S = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t) D_n(t) - \int\limits_{-\pi}^{\pi} S D_n(t) dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(f(x+t) - S\right) D_n(t) dt = \int\limits_{-\pi}^{0} + \int\limits_{0}^{\pi} = \int\limits_{0}^{\pi} \varphi(t) D_n(t) dt$, для $t \in s - t$. Тогда как в предположении теоремы получаем

$\int\limits_0^{\pi} \varphi(t) D_n(t) dt = \frac{1}{n} \int\limits_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2} \sin nt + \cos nt\right) = b_n(h_1) + a_n\left(\frac{\varphi(t)}{2}\right)$ (в кавычках).

$h_1(t) = \frac{\varphi(t)}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$

$h_1(t) =, \frac{\varphi(t)}{2} \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$ для $t \in (0,\pi)$ или 0, если $t \in (-\pi, 0)$.

в кавычках $\frac{\varphi(t)}{2} = \frac{\varphi(t)}{2}$ для $t \in (0,\pi)$ и 0 в противном случае.

Теперь проблема с $h_1 \in L_1$.

h_1, $\frac{\varphi}{2} \in L_1$ (в кавычках).

в кавычках $\frac{\varphi}{2} \in L_1$ — очевидно.

$\left|\frac{\varphi(t)}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2}\right| \leqslant \frac{|\varphi(t)|}{2 \cdot t/2} = \frac{|\varphi(t)|}{t}$

$|\operatorname{tg} x| > |x|$ при $x \in (0, \pi/2)$, а $\operatorname{ctg} x < x$.

72.4 Замечания

1. $* \Leftrightarrow \forall \delta > 0: \int\limits_0^\delta \frac{|\varphi(t)|}{t} dt < +\infty \leqslant \int\limits_\delta^\pi \frac{|f(x_0+t)| + |f(x_0-t)| + 2S}{t} \leqslant \frac{1}{\delta} \left(\|f\| + \|f\| + 2S\pi\right).$

2. $f(x) = \frac{1}{\ln|x|}$ — непрерывна в 0.

   $x_0 = 0,\ S \coloneqq 0$, то $\int \frac{|f(t) + f(-t) - 2S|}{t} dt$,тогда $-\int\limits_0^\pi \frac{2}{t \ln t} dt$ — расходится.

72.5 Следствие

$f \in L_1$, $x_0 \in [-\pi, \pi]$. Пусть существуют 4 предела: $f(x_0 \pm 0)$, $\alpha_\pm \coloneqq \lim\limits_{t \to \pm 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 \pm 0)}{t}$. (односторонняя производная). Тогда

$S_n(f, x_0) \to \frac{1}{2}\left(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)\right).$

Берём $S = \frac{1}{2}\left(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)\right).$

$(*): \int\limits_0^\pi \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - f(x_0+0) - f(x_0-0)}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} \alpha_+ + \alpha_-.$

т.е. интеграл (*) не является несобственном в нуле.

72.6 Следствие 2

$f \in L_1$, f — непрерывна в x_0, а также $\exists f'_\pm(x_0)$. Тогда

$S_n(f, x_0) \to f(x_0).$

72.6.1 Доказательство

$f(x_0 \pm 0) = f(x_0,\ \alpha_\pm = f'_\pm(x_0).$

72.7 Пример

$f(x) = x$ на $[-\pi, \pi]$, она нечётная, тогда $a_k(f) = 0$.

$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin kx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} = x\frac{-\cos kx}{k}\Big|_0^\pi + \frac{2}{\pi k}\int\limits_0^\pi \cos kx dx = \frac{2}{k}(-1)^{k-1}$.

Ряд Фурье: $S(f,x) = \sum \frac{2}{k}(-1)^k \sin kx$.

$x = \frac{\pi}{2}$, $\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right) = \frac{\pi}{4}$.

$x = \pi$, $\sum = 0$ (полусумма π и $-\pi$ равна 0 по признаку Дини).

$\sum \|\frac{2}{k}(-1)^k \sin kx\|_2^2 = \|x\|_2^2$.

$\frac{4}{k^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx$.

$\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3}$.

$\sum \frac{4\pi}{k^2} = \frac{2\pi^3}{3}$, $\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

72.8 Конфетка

Пусть $f \in L_1$, тогда:

1. Четная.
2. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f = 0$.
3. $\forall q \in \mathbb{Q} : f = 0$ в окрестности точки πq.
4. $0 < \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx < +\infty \Rightarrow f \in L_2, f \neq 0 \Rightarrow$ ряд Фурье f нетривиальный.

$a_k = a_k(f)$. Тогда

$\forall m \in \mathbb{N} : s\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_{km} = 0$.

72.8.1 Доказательство

$\sum a_k \cos kx \leftrightarrow f$.

$x_0 \coloneqq \dfrac{2\pi}{n} i$; в окрестности x_0 $f = 0$ удовлетворяет признаку Дини.

$\sum a_k \cos \dfrac{2\pi}{n} ik = 0,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$

Сложим по i : $\sum a_k \left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} \cos\left(\dfrac{2\pi}{n} kj\right)\right) = 0.$

$\cos 2\pi \dfrac{0k}{n} + \cos 2\pi \dfrac{k}{n} + \cos 2\pi \dfrac{2k}{n} + \cos 2\pi \dfrac{3k}{n} + \ldots + \cos 2\pi \dfrac{(n-1)k}{n}.$

Это сумма x координат и векторов, и она не меняется при повороте на $\dfrac{2\pi k}{n}$ $\Rightarrow$ сумма векторов равна 0, значит и сумма x координат равна 0. (рассуждение содержательно только при k не делящемся на n).

При k делящемся на n сумма равна n.

Часть XVI

Свёртки и аппроксимативные единицы

72.9 Определение

Свёртка двух функций из $L^1[-\pi,\pi]$, f, $K \in L_1$,

$$(f * K)(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)K(x-t)dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt.$$

72.10 Корректность определения

$g(x,t) = f(x-t)K(t)$. Проверим, что функция — измеримая $\mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$.

Давайте рассмотрим функции попроще, т.е. $\varphi(x,t) = f(x-t)$ — измеримая ли она? $\mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$.

$\mathbb{R}^2(\varphi < a)$, $E_a \coloneqq \mathbb{R}\left(f(x) < a\right)$ — измеримая по Лебегу в $\mathbb{R}$.

$f(x-t) < a$.

$(x,t) \mapsto (x-t,t)$.

$\mathbb{R}^2(\varphi < a) \mapsto E_a \times \mathbb{R}$.

φ — измеримая, $K(t) : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримо, $(t,x) \mapsto K(t)$.

$$\iint\limits_{[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]} |g(x,t)|dxdt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} dt \left(|K(t)| \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|dx \right) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt.$$

Таким образом, свёртка определена при почти всех x, и результат свёртки также лежит в L^1 (всё это следует из теоремы Фубини).

72.11 Коэффициент Фурье свёртки

$c_k(f * K) = 2\pi c_k(f)c_k(K)$.

$2\pi c_k(f * k) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt \right) e^{-ikx}dx$, $f(x-t)K(t)e^{-ikx}$ — суммируемая на $[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$, тогда

$$\iint\limits_{[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]} f(x-t)K(t)e^{-ik(x-t)}e^{-ikt}dxdt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} dt \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t)e^{-ikt} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)e^{-ik(x-t)}dx \right) = (2\pi)^2 c_k(K)c_k(f).$$

$\widetilde{c_k}(f * K) = \widetilde{c_k}(f)\widetilde{c_k}(K)$.

$L^1[-\pi,\pi] \xrightarrow{\widetilde{c}}$.

$f \mapsto (\ldots, \widetilde{c_{-2}(f)}, \widetilde{c_{-1}(f)}, \widetilde{c_0}(f), \widetilde{c_1(f)}, \ldots)$.

$f * g \mapsto (\ldots, \widetilde{c_{-1}(f)}, \widetilde{c_{-1}(g)}, \widetilde{c_0(f)}\widetilde{c_0(g)}, \widetilde{c_1}, \ldots)$.

72.12 Ещё одно свойство

$f \in L^p[-\pi,\pi]$, $K \in L^q[-\pi,\pi]$. $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Тогда

$f * K$ непрерывна, $\|f * K\|_\infty \leqslant \|f\|_p \cdot \|K\|_q$ (*).

72.12.1 Доказательство

Неравенство (*) — неравенство Гёльдера.

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt \leqslant \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f|^p\right)^{1/p} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |K|^q\right)^{1/q}.$$

$p = 1, +\infty$,

$q = +\infty, 1$.

$|(f * K)(x+h) - (f * K)(x)| = \left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x+h-t) - f(x-t))\right| \leqslant \|k\|_q \cdot \|f_h - f\|_p \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ (по теореме о непрерывности сдвига, но с оговоркой, что теореме о непрерывности сдвига не работает для случая $p = +\infty$, если $p = +\infty$, то поменяем p и q местами, работает из-за симметричности свёртки).

Часть XVII

18.05.2020

$(f * K)(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt.$

72.13 Теорема

$f \in L^p[-\pi,\pi](1 \leqslant p \leqslant +\infty), K \in L_1$. Тогда $f * K \in L^p$.

$\|f * K\|_P \leqslant \|K\|_1 \|f\|_p$.

При $p = +\infty$ тоже очевидно.

Докажем при $1 < p < +\infty$. Возьмём $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

$\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)k(t)dt\right|^p \leqslant \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)| |K(t)|^{1/p} |K(t)|^{1/q}\right)$. и это не превосходит по Гёльдеру

$\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p |K(t)| dt\right) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |K(t)| dt\right)^{p/q} = \|K\|_1^{p/q}.$

$\|f * K\|_p^p = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt\right|^p dx \leqslant \|K_1\|^{p/q} \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p |K(t)| dtdx = \|K\|_1^{p/q+1} \|f\|_p^p = \|K\|_1^p \|f\|_p^p.$

72.14 Определение

$E_\delta \coloneqq [-\pi,\pi] \setminus (-\delta,\delta)$, $0 \leqslant \delta < \pi$.

$D \in \mathbb{R}$, $h_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ — предельная точка D.

Семейство функций $\{K_h\}_{h \in D}$ — аппроксимативная единица, если выполнены следующие аксиомы:

1. $\forall h \in D : K_h \in L^1([-\pi,\pi])$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} K_h = 1$.
2. $\exists M > 0 : \forall h \in D : \|K_h\|_1 \leqslant m$.
3. $\forall \delta in (0,\pi) : \int\limits_{E_\delta} |K_h| dt \to 0$, $h \to h_0$.

72.14.1 Замечание

Если $K_n \geqslant 0$, то из аксиомы 1 следует аксиома 2 ($M = 1$).

72.14.2 Суррогатная аксиома 3

$K_h \in L^\infty[-\pi,\pi]$ и $\forall\delta \in (0,\pi) : \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in E_\delta} |K_h(t)| \xrightarrow[h\to h_0]{} 0$.

Очевидно, из суррогатной аксиомы 3 следует обычная аксиома 3.

72.14.3 Вывод

Сочетание аксиом 1, 2 и суррогатной 3 — усиленная аппроксимативная единица.

72.14.4 Замечание

K_h — аппроксимативная единица, $\left\{\dfrac{|K_h|}{\|K_h\|_1}\right\}_{h\in D}$ — тоже аппроксимативная единица (из аксиомы 1 $K_h \Rightarrow \|K_h\|_1 \geqslant 1$).

72.15 Свойства аппроксимативной единицы

K_h — аппроксимативная единица. Тогда

1. $f \in \overline{C}[-\pi,\pi] \Rightarrow f * K_h \rightrightarrows f$, $h \to h_0$.
2. $f \in L_1 \Rightarrow f * K_h \xrightarrow[\text{в } L_1]{} f$, т.е. $\|f * K_h - f\|_1 \xrightarrow[h\to h_0]{} 0$.
3. K_h — усиленная аппроксимативная единица, $f \in L_1$ — непрерывно в точке x. Тогда $f * K_h$ непрерывна в точке x, $(f * K_h)(x) \xrightarrow[h\to h_0]{} f(x)$.

72.15.1 Доказательство

$f * K_h^{(n)} - f(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))\, K_h(t)dt$ (аксиома 1).

- 1 пункт

f — равномерно-непрерывная: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall t : |t| < \delta : \forall x : |f(x-t) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$ (аксиома 2).

Фиксируем ε:

$$f * K_h(x) - f(x) = \int\limits_{-\delta}^{\delta} + \int\limits_{E_\delta} = I_1 + I_2.$$

$$|I_1| \leqslant \int\limits_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)|\,|K_h(t)|\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2m} \cdot \int\limits_{-\delta}^{\delta} |K_h(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \|K_h\|_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

$|I_2| \leqslant \int\limits_{E_\delta} |\ldots| \leqslant 2\|f\|_\infty \cdot \int\limits_{E_\delta} |k_h| dt \to 0$ (по аксиоме 3), т.е. $\exists U(h_0) : \forall L \in U(h_0) : |I_p| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

$|f * K_h - f| \leqslant |I_1| + |I_2| < \varepsilon$.

- 3 пункт

  $f * K_h$ — непрерывен по свойству свёртки.

  f — равномерно-непрерывная: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall t : |t| < \delta : |f(x-t) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$ (аксиома 2).

  $$|I_1| \leqslant \int\limits_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)|\,|K_h(t)|\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2m} \cdot \int\limits_{-\delta}^{\delta} |K_h(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \|K_h\|_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

  $$|I_2| \leqslant \int\limits_{E_\delta} |\ldots| \leqslant \text{essup}|K_h| \int\limits_{E_\delta} |f(x-t)| * |f(x)| dt \leqslant \text{essup}|K_h| \left(\|f\|_1 + 2\pi|f(x)|\right)$$

  $|f * K_h - f| \leqslant |I_1| + |I_2| < \varepsilon$.

- 2 пункт

  $$\|f * K_h(x) - f(x)\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(f(x-t) - f(x)\right) K_h(t) dt \right| dx \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| \cdot |K_h| dt dx.$$

  $$g(t) := \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |K_h(t)| g(-t) dt = \|K_h\|_1 \cdot \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(-t) \frac{|K_h(t)|}{\|K_h\|_1} dt$$

  $g(t)$ — непрерывная по теореме о непрерывности сдвига, $\|K_h\|_1 \leqslant M$ по аксиоме 2.

  $$\left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x_0 + t) - f(x)| - |f(x_0 + t_0) - f(x)| \right| \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x_0 + t) - f(x + t_0)|\,dt.$$

72.15.2 Следствие

$f \in L_p \Rightarrow f * K_h \xrightarrow[L_p]{} f$, т.е. $\|f * K_h - f\|_p \to 0$.

$$\|f * K_h(x) - f(x)\|_p^p = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(f(x-t) - f(x)\right) K_h(t) dt \right| dx \leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| |K_h(t)|^{1/p} |K_h(t)|^{1/q} dt \right)^p dx \leqslant$$
$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|^p \cdot |K_h(t)| \right) \cdot \|K_h\|_1^{p/q} dx = \|K_h\|_1^{p/q} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(-t) \frac{|K_h(t)|}{\|K_h\|_1} dt, \text{ где } g(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|^p.$$

$f \in L_1$, $S_n(f,x)$, $\sigma_n(f)(x) = \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} S_k(f,x)$ — сумма Фейера.

$\sigma_n(f,x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\Phi_n(t)dt$ — через ядро Фейера.

Φ_n — четная, поэтому $\sigma_n(f,x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\Phi_n(t)dt$ (оказывается, это свёртка).

72.16 Теорема Фейера

1. $f \in \overline{C}[-\pi,\pi]$. Тогда $\sigma_n(f) \rightrightarrows f$, $n \to +\infty$ на $[-\pi,\pi]$.

2. $f \in L^p[-\pi,\pi]$, $q \leqslant p < +\infty$. Тогда $\|\sigma_n(f) - f\|_p \to 0$, $n \to +\infty$.

3. $f \in L^1[-\pi,\pi]$, непрерывно в x_0, $\sigma_n(f)(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.

72.16.1 Доказательство

$\{\Phi_n\}$ — усиленная аппроксимативная единица. Проверим все свойства аппроксимативной единицы.

1. Φ_n — непрерывна $\Rightarrow \Phi_n \in L^1$, L^∞, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n = 1$.
2. $\Phi_n \geqslant 0$, следует из аксиомы 1.
3. $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in E_\delta} |\Phi_n(x)| = \sup\limits_{x\in E_\delta} \dfrac{1}{2\pi(n+1)} \cdot \dfrac{\sin^2 \frac{n+1}{2}x}{\sin^2 \frac{x}{2}} \leqslant \dfrac{\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}}{n+1}$

Часть XVIII

Преобразование Фурье

72.17 Определение

$f \in L^1(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$

$\overline{f}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)e^{-2\pi i\langle y,x\rangle}dx$, $y \in \mathbb{R}^m$.

72.18 Свойства

1. $\overline{f}$ — непрерывна на $\mathbb{R}^m$ по теореме Лебега при $y \in U(y_0) \left|f(x)e^{-2\pi i\langle y,x\rangle}\right| \leqslant |f(x)|$ — суммируемая, и очевидно $\left|\overline{f}(y)\right| \leqslant \|f\|_1$.

2. $f_h(x) = f(x-h)$, $\overline{f}_h(y) = e^{-2\pi i\langle y,h\rangle}\overline{f}(y)$ $(h \in \mathbb{R}^m)$.

   $f(x)$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

   $g(x) = f(ax)$.

   $\overline{g}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(ax)e^{-2\pi\langle x,y\rangle}dx = \dfrac{1}{|a|^m}\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(\overline{x})e^{-2\pi i\langle y,\dfrac{\overline{x}}{a}\rangle}dx$, где $\overline{x} = ax$ или $x = \dfrac{\overline{x}}{a}$.

   $= \dfrac{1}{|a|^m}\overline{f}\left(\dfrac{y}{a}\right)$.

3. $f(y) \to 0$ при $|y| \to +\infty$ по теореме Римана-Лебега $E \subset \mathbb{R}^m$, $f \in L^1(E)$. Тогда

   $I(y) = \int\limits_E f(x)e^{-\pi i\langle y,x\rangle}dx \xrightarrow[|y|\to+\infty]{} 0.$

   $h := \dfrac{y}{2|y|^2}$, $\overline{f}_n(y) = -\overline{f}(y)$.

4. $f, g \in L^1(\mathbb{R}^m)$, $(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x-u)g(u)du$.

   Корректность свёртки как в теме ряды Фурье.

72.19 Теорема

$f, g \in L^1(\mathbb{R}^m)$. Тогда

1. $\overline{f * g}(y) = (f * g)hy) = \overline{f}(x)\overline{f}(y) \cdot \overline{g}(y)$

2. $\int\limits_{\mathbb{R}^m} \overline{f}(y)g(y)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(y)\overline{g}(y)dy$.

   $(f * g)`(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x-u)g(u)du\right)e^{-2\pi i\langle y,x\rangle}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^m} du g(u)e^{-\pi i\langle y,u\rangle}\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x,u)e^{-2\pi i\langle y,x-u\rangle}dx.$

   $\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)e^{-2\pi i\langle x,y\rangle}dx\right)g(y)dy.$

   $(x,y) \mapsto f(x)g(y)e^{-2\pi i\langle x,y\rangle}$ — суммируемая на $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$.

   $\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)e^{-2\pi i\langle x,y\rangle}dx\right)g(y)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)\int\limits_{\mathbb{R}^m} g(y)e^{-2\pi i\langle x,y\rangle}dydx = \int f(x)\overline{g}(x)dx$

72.20 Пример

1. $m = 1,\ f = \chi_{[-1,1]}$.

   $\overline{f}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} f e^{-2piixy} dx = \dfrac{1}{2\pi iy} e^{-2\pi ixy}\Big|_{x=-1}^{x=1} = \dfrac{e^{2\pi iy} - e^{-2\pi iy}}{2i\pi y} = \dfrac{\sin 2\pi y}{\pi y}$

   Кстати, $\overline{f}(y)$ — не суммируемая!.

2. $f_a(x) = e^{-\pi a^2 x^2}$, $(a \in \mathbb{R}, a > 0)$, $m = 1$.

   $\overline{f}_m = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a^2 x^2} e^{-2\pi i\langle x,y\rangle} dx = \int\limits_{0}^{+\infty} + \int\limits_{-\infty}^{0} = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\pi a^2 x^2}(e^{-2\pi ixy} + e^{2\pi ixy}) dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\pi a^2 x^2} \cos(2\pi xy) dx = \ldots =$
   $\dfrac{1}{a} f_{1/a}(y)$.

72.21 Теорема

$m = 1,\ f \in C^1$, дифференцируема, пусть она будет хорошая (оптимизм).

$\overline{f'}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-2\pi ixy} dx =$ интегрируем по частям и получаем

$= f(x)e^{-2\pi ixy}\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) 2\pi iy e^{-2\pi ixy} dx = 2\pi iy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi ixy} dx = 2\pi iy\overline{f}$.

$f' = \underset{n}{\rightarrow} 2\pi iy\overline{f} = \overline{f}$.

$f' = f + e^{-\pi x^2},\ \overline{f} = \dfrac{e^{-\pi y^2}}{1 + 2\pi iy} \to f =$

Часть XIX

25.05.2020

72.22 Теорема Фейера

1. $f \in \widetilde{C}$, $\sigma_n(f) \rightrightarrows f$.

2. $f \in L^p[-\pi, \pi]$, $\|\sigma_n(f) - f\|_p \to 0$.

3. $f \in L^1[-\pi, \pi]$ — непрерывна в x, $\sigma_n(f, x) \to f(x)$.

72.22.1 Следствие

$f \in L^1[-\pi, \pi]$, f — непрерывна в x. Если ряд Фейера сходится в точке x, то $S_n(f, x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$.

$\sigma_n(f)$ — вычисляет сумму ряда Фейера методом среднего арифметического.

72.23 Следствие 2

1. Тригонометрическая система полна в $L^2[-\pi, \pi]$.

2. $f \in L_1 : \forall k : a_k(f) = 0$, $b_k(f) = 0$. Тогда $f = 0$ почти везде (или если $c_k(f) \equiv 0$).

72.23.1 Доказательство

1 следует из 2.

$a_k(f) = 0$, $b_k(f) = 0 \Rightarrow \forall n : S_n(f, x) = 0 \Rightarrow \sigma_n(f, x) \equiv= 0$, но $\sigma_n(f) \to f$ в $L_1 \Rightarrow f \to 0$ почти везде

72.23.2 Следствие следствия 1

Коэффициенты Фуре $f \in L^1[0, \pi]$ и по косинусам или по синусам равна 0, значит и $f = 0$ почти везде.

72.23.3 Следствие следствия 2

$f \in L^2[-\pi, \pi]$. Тогда $S_n(f, x) \to f$ в L^2.

72.23.4 Следствие следствия 3

Равенство Парсеваля: f, $g \in L^p[-\pi, \pi]$.

1. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g}(x)dx = 2\pi \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\overline{c_k(g)}$.
2. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx = 2\pi \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2$.
3. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \pi \left(\dfrac{a_0(f)a_0(g)}{2} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k(f)a_k(g) + b_k(f)b_k(g) \right)$.
4. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2 dx = \pi \left(\dfrac{a_0^2(f)}{2} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k(f)^2 + b_k(f)^2 \right)$.

72.24 Следствие 3 (теорема Вейерштрасса)

Тригонометрические полиномы плотны в $\widetilde{C}[-\pi, \pi]$ и в $L^p[-\pi, \pi]$ $(1 \leqslant p < +\infty)$.

72.24.1 Доказательство

$f \in \widetilde{C}$, $\sigma_n(f)$ — тригонометрический полином. $\sigma_n(f) \rightrightarrows f$, $\rho(\sigma_n(f), f) \to 0$.

72.25 Замечание

В $C[a, b]$ обычные полиномы плотны в $L^p[a, b]$.

Часть XX

Интегрирование рядов Фурье

72.26 Лемма

1. $D_n(t) = \dfrac{\sin nt}{\pi t} + \dfrac{1}{2\pi}\left(\cos nt + \sin nt \cdot h(t)\right)$, где $h(t)$ не зависит от n, а также $|h(t)| \leqslant 1$, $t \in [-\pi, \pi]$.
2. $\forall x : |x| < 2\pi$, $\left|\int\limits_0^x D_n(t)dt\right| < 2$.

72.26.1 Доказательство

$D_n(t) = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} = \dfrac{\sin nt}{2\pi \operatorname{tg} t/2} + \dfrac{1}{2\pi}\cos nt = \dfrac{\sin nt}{\pi t} + \dfrac{1}{2\pi}\left(\cos nt + \sin nt\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg} t/2} - \dfrac{1}{t/2}\right)\right)$, давайте возьмём в качетсве $h(t) = \dfrac{1}{\operatorname{tg} t/2} - \dfrac{1}{t/2}$, $h(t)$ убывает на $[-\pi, \pi]$ и $h(t) < |h(\pi)| = \dfrac{2}{\pi} < 1$.

$\forall x : |x| < 2\pi$, $\left|\int\limits_0^x D_n(t)dt\right| < 2$, D_n — чётная, можно считать, что $x > 0$. $x \in (0, \pi)$. $\left|\int\limits_0^x D_n(t)dt - \int\limits_0^x \dfrac{\sin nt}{\pi t}\right| = \left|\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^x \cos nt + \sin nt \cdot h(t)dt\right| \leqslant \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^x 2dx \leqslant 1$.

$\int\limits_0^x \dfrac{\sin nt}{\pi t}dt = \int\limits_0^{nx} \dfrac{\sin v}{\pi v}dv \in (0, 1)$, если это так, то $\int\limits_0^x D_n \in [-1, 2]$. $\max \int\limits_0^{nx} \dfrac{\sin v}{\pi v}dv$ — достигается при $nx = \pi$, тогда $0 < \int\limits_0^{\pi} \dfrac{\sin v}{\pi v} < \dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} 1 = 1$.

$x \in [\pi, 2\pi]$, $\int\limits_0^x D_n = \int\limits_0^{2\pi} - \int\limits_x^{2\pi} = 1 - \int\limits_0^{2\pi - x} D_n(t)c_n(t) \in [-1, 2]$.

72.27 Интегрирование рядов Фурье

$f \in L_1$. Тогда $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\int\limits_a^b f dx = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\int\limits_a^b e^{ikx}dx$.

72.27.1 Замечание

Не предполагается сходимость ряда Фурье.

72.27.2 Доказательство

Достаточно рассмотреть $-\pi \leqslant a < b \leqslant \pi$, $\Xi \coloneqq \Xi_{[a,b]}$.

$\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k \int\limits_a^b e^{ikx} = \sum\limits_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dxC_{-k}(\Xi) - 2\pi = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sum\limits_{k=-n}^{n} C_k(\Xi)e^{-ikx}dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)S_n(\Xi,x)dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)S_n(\Xi,x)dx \xrightarrow[n\to]{}$ $\int\limits_a^b f(x)dx$.

$$S_n(\Xi,x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Xi(t)D_n(x-t)dt = \int\limits_a^b D_n(x-t)dt = \left| -\int\limits_{x-a}^{x-b} D_n(\tau)d\tau \right| = \left| \int\limits_0^{x-a} D_n(t) - \int\limits_0^{x-b} D_n(t) \right| \leqslant 4.$$

72.27.3 Замечание

Проверим, что суммы Фурье функции Ξ — равномерно ограниченны. Пусть $f \in \widetilde{C}^1[-\pi,\pi] \Rightarrow$ суммы ряда фурье равномерно ограничены, т.е. $\exists C : \forall n : \forall x : |S_n(f,x)| \leqslant C$.

$$S_n(f,x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt = f(x-t)H_n(t)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x-t)H_n(t)dt \leqslant C.$$

72.28 Лемма

$f \in L^1(\mathbb{R}^m)$ — всюду дифференцируема. $\frac{\partial f}{\partial x_m}$ — непрерывна и суммируемая на $\mathbb{R}^m$. Тогда для почти всех $(x_1,\ldots,x_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$ существует $\lim\limits_{t\to+\infty}$ или $\lim\limits_{t\to-\infty}$ от функции $f(x_1,\ldots,x_{m-1},t) = 0$.

72.28.1 Доказательство

$(x_1,\ldots,x_m) = u \in \mathbb{R}^{m-1}$, $f(u,t)$. $f(u,t) - f(u,0) = \int\limits_0^t \frac{\partial f}{\partial x_m}(u,\tau)d\tau$. по теореме Фубини при почти всех u это суммируемая функция по t на $\mathbb{R}$.

72.29 Теорема

$f \in L^1(\mathbb{R}^m)$.

1. $\exists k \in \{1,\ldots,m\}$, $g = \frac{\partial f}{\partial x_k}$ — непрерывная, суммируемая в $\mathbb{R}^m$. Тогда

   $\widetilde{g}(y) = 2\pi i y_k \widetilde{f}(y)$.

2. Пусть $|x|\cdot f(x)$ — суммируемая. Тогда

$\widetilde{f}\in C^1(\mathbb{R})$ и $\forall y\in\mathbb{R}^m$ и $\forall k\in\{1,\dots,m\}$ и $\dfrac{\partial\widetilde{f}}{\partial y_k}(y)=2\pi i\,(x_k f(x))$‘.

72.29.1 Доказательство

1. считаем, что $k=m$, $(x_1,\dots,x_{m-1})=u\subset\mathbb{R}^m$. $f(x)\leftrightarrow f(u,t)$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(u,t)e^{-2\pi i y_m t}dt = f(u,t)e^{-2\pi i y t}\Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty}+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u,t)2\pi i y_m e^{-2\pi y_m t}dt$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} g(x)e^{-2\pi i\langle y,x\rangle}dx=\int\limits_{\mathbb{R}^{m-1}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} g(u,t)e^{-2\pi i y_m t}dt\right)e^{-2\pi i y_m}dt.$$

2. $\widetilde{f}(y)=\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)e^{-2\pi i\langle y,x\rangle}dx.$

$$\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial y_k}=-\int\limits_{\mathbb{R}^m}2\pi i x_k f(x)e^{-2\pi\langle y,x\rangle}dx.$$

$$L_{loc}(y)\left|2\pi i x_k f(x)e^{-2\pi i\langle y,x\rangle}\right|\leqslant 2\pi|x||f(x)|.$$

72.29.2 Следствие

1. $f\in L^1(\mathbb{R}^m)$, финитная (равна 0 вне какого-то шара). Тогда

$\widetilde{F}\in C^\infty(\mathbb{R}^m)$.

2. $f\in C_0^{=\infty}$, финитная, бесконечно гладкая. Тогда

$\forall p>0: |y|^p\widetilde{f}(y)$ — суммируемая в $\mathbb{R}^m$.

72.30 Формула обращения

$m=1$, $f(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{f}(y)\cdot e^{2\pi i y x}dy$. Хотим такую формулу.

72.31 Интеграл Фурье

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{f}(y)\cdot e^{2\pi i y x}dy$ — в смысле главного значения.

$\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A}$ получаем $I_A(f,x)=\int\limits_{-A}^{A}\widetilde{f}(y)e^{2\pi i y x}dy.$

72.32 Лемма о ядре Дирихле

$finL^1(\mathbb{R}) < x \in \mathbb{R}$. Тогда

$\forall A > 0$ верно $I_A(f,x) = \int\limits_{-A}^{A} \widetilde(f)(y)e^{2\pi iyx}dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\dfrac{\sin 2\pi At}{\pi t}dt.$

72.32.1 Доказательство

Пусть $\Xi_a = \Xi[-A,A]$, $I_A(f,x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{f}(y)\left(\Xi_a e^{2\pi ixy}\right)dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)\left(\Xi_a e^{2\pi ixy}\right)dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)\widetilde{\Xi_A}(y-x)dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)\dfrac{\sin 2\pi A(y-x)}{\pi(y-x)}dy$

72.32.2 Следствие

$\forall \delta > 0 : I_a(f,x) = \int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x-t)\dfrac{\sin 2\pi At}{\pi t}dt + Q(1),\ A \to +\infty.$

$\int\limits_{|t|\geqslant\delta} f(x-t)\dfrac{\sin 2\pi At}{\pi t}dt \to 0$ по теореме Римана-Лебега.

$D_n = \dfrac{\sin nt}{\pi t} + \dfrac{1}{2\pi}(\cos nt + \sin nt + h(t)).$

$S_n(f,x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x,t)D_n(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\dfrac{\sin nt}{\pi t} + o(1)$ при $n \to +\infty$.

$= \int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x-t)\dfrac{\sin nt}{\pi t} + o(1).$

72.32.3 Замечание

Для интеграла Фурье верен принцип локализации.

72.33 Теорема о равносходимости ряда Фурье и интеграла Фурье

$f \in L^1(\mathbb{R}),\ f_0 \in L^1[-\pi,\pi].\ x \in \mathbb{R},\ f = f_0$ в $U(a)$. Тогда

сходимость в точке x интеграла Фурье $I_A(f,x)$ равносильна сходимости в точке x сумм Фурье, т.е. $S_n(f_0,x)$, и в случае сходимости они равны.

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{f}(y)e^{2\pi iyx}dy = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f_0)e^{inx}.$