

Содержание

I	Интеграл по мере	4
1	Интеграл ступенчатой функции	5
1.1	Свойства	5
2	Интеграл неотрицательной измеримой функции	6
2.1	Свойства	6
3	Суммируемая функция	7
3.1	Свойство	7
4	Интеграл суммируемой функции	8
4.1	Свойства	8
5	Простейшие свойства интеграла Лебега	9
5.1	Доказательство	9
5.2	Доказательство	9
5.3	Доказательство	9
5.4	Доказательство	10
5.5	Доказательство	10
5.6	Доказательство	10
6	Счетная аддитивность интеграла (по множеству)	11
6.1	Лемма	11
6.1.1	Доказательство	11

6.2	Теорема	11
6.2.1	Доказательство	11
6.3	Следствие	12
6.4	Следствие 2	12
II	Предельный переход под знаком интеграла	13
7	Теорема Леви	14
7.1	Доказательство	14
8	Линейность интеграла Лебега	15
8.1	Доказательство	15
8.2	Следствие	15
8.2.1	Доказательство	15
9	Теорема об интегрировании положительных рядов	16
9.1	Доказательство	16
9.2	Следствие	16
9.2.1	Доказательство	16
9.3	Теорема	17
9.3.1	Доказательство	17
10	Абсолютная непрерывность интеграла	17
10.0.1	Доказательство	17
10.0.2	Следствие	17

III Произведение мер 18

11 Произведение мер 18

11.1 Лемма	19
11.2 Теорема	19
11.2.1 Доказательство	19
11.3 Замечание	20
11.4 Теорема	20
11.5 Принцип Кавальери	20
11.5.1 Замечание	20
11.5.2 Доказательство	20
11.5.3 Следствие	22
11.5.4 Замечание	22
11.5.5 Следствие	22
11.5.6 Замечание	22
11.6 Теорема Тонелли	23
11.6.1 Доказательство	23
11.7 Теорема Фубини	24
11.7.1 Следствие	24

Часть I

Интеграл по мере

1 Интеграл ступенчатой функции

$f = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \chi_{E_k}$, $f \geq 0$, где $E_k \in \mathcal{A}$ — допустимое разбиение, тогда интеграл ступенчатой функции f на множестве X есть

$$\int_X f d\mu = \int_X f(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mu E_k$$

Дополнительно будем считать, что $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

1.1 Свойства

- Интеграл не зависит от допустимого разбиения:

$$f = \sum \alpha_j \chi_{F_j} = \sum_{k,j} \lambda_k \chi_{E_k \cap F_j}, \text{ тогда } \int F = \sum \lambda_k \mu E_k = \sum_k \lambda_k \sum_j \mu(E_k \cap F_j) = \sum \alpha_j \mu F_j = \int F;$$

- $f \leq g$, то $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

2 Интеграл неотрицательной измеримой функции

$f \geq 0$, измерима, тогда интеграл неотрицательной измеримой функции f есть

$$\int_X f d\mu = \sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \left(\int_X g d\mu \right).$$

2.1 Свойства

- Для ступенчатой функции f (при $f \geq 0$) это определение даёт тот же интеграл, что и для ступенчатой функции;
- $0 \leq \int_X f \leq +\infty$;
- $0 \leq g \leq f$, g — ступенчатая, f — измеримая, тогда $\int_X g \leq \int_X f$.

3 Суммируемая функция

f — измеримая, f_+ и f_- — срезки, тогда если $\int_X f_+$ или $\int_X f_-$ — конечен, тогда интеграл суммируемой функции есть

$$\int_X f d\mu = \int_X f_+ - \int_X f_-.$$

Если $\int_X f \neq \pm\infty$, то говорят, что f — *суммируемая*, а также $\int |f|$ — конечен ($|f| = f_+ + f_-$).

3.1 Свойство

Если $f \geq 0$ — измерима, то это определение даёт тот же интеграл, что и интеграл измеримой неотрицательной функции.

4 Интеграл суммируемой функции

$E \subset X$ — измеримое множество, f — измеримо на X , тогда интеграл f по множеству E есть

$$\int_E f d\mu := \int_X f \chi_E d\mu.$$

f — суммируемая на E если $\int_E f_+ -$ и $\int_E f_-$ — конечны одновременно.

4.1 Свойства

- $f = \sum \lambda_k \chi_{E_k}$, то $\int_E f = \sum \lambda_k \mu(E_k \cap E)$;
- $f \geq 0$ — измерима, тогда $\int_E f d\mu = \sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \left(\int_X g d\mu \right).$

(X, \mathcal{A}, μ) — произвольное пространство с мерой.

$\mathcal{L}^0(X)$ — множество измеримых почти везде конечных функций.

5 Простейшие свойства интеграла Лебега

1. *Монотонность:*

$$f \leq g \Rightarrow \int_E f \leq \int_E g.$$

5.1 Доказательство

- $\sup_{\substack{\tilde{f} \text{ - ступ.} \\ 0 \leq \tilde{f} \leq f}} \left(\int_X \tilde{f} d\mu \right) \leq \sup_{\substack{\tilde{g} \text{ - ступ.} \\ 0 \leq \tilde{g} \leq g}} \left(\int_X \tilde{g} d\mu \right);$
- f и g — произвольные, то работаем со срезками, и $f_+ \leq g_+$, а $f_- \geq g_-$, тогда очевидно и для интегралов.

$$2. \int_E 1 \cdot d\mu = \mu E, \int_E 0 \cdot d\mu = 0.$$

5.2 Доказательство

По определению.

$$3. \mu E = 0, f \text{ — измерима, тогда } \int_E f = 0.$$

5.3 Доказательство

- f — ступенчатая, то по определению интеграла для ступенчатых функций получаем 0;
 - $f \geq 0$ — измеримая, то по определению интеграла для измеримых неотрицательных функций также получаем 0;
 - f — любая, то разбиваем на срезки f_+ и f_- и снова получаем 0.
4. (a) $\int -f = - \int f;$
 (b) $\forall c > 0 : \int cf = c \int f.$

5.4 Доказательство

- $(-f)_+ = f_-$ и $(-f)_- = f_+$ и $\int -f = f_- - f_+ = -\int f$.
- $f \geq 0$ — очевидно, $\sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq cf}} \left(\int g \right) = c \sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \left(\int g \right)$.

5. Пусть существует $\int_E f d\mu$, тогда $\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|$.

5.5 Доказательство

$$-|f| \leq f \leq |f|,$$

$$-\int_E |f| \leq \int_E f \leq \int_E |f|.$$

6. f — измерима на E , $\mu E < +\infty$, $\forall x \in E : a \leq f(x) \leq b$. Тогда

$$a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E.$$

5.6 Доказательство

$$\int_E a \leq \int_E f \leq \int_E b,$$

$$a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E.$$

6 Счетная аддитивность интеграла (по множеству)

6.1 Лемма

$A = \bigsqcup A_i$, где A, A_i — измеримы, $g \geq 0$ — ступенчатые. Тогда

$$\int_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} g d\mu.$$

6.1.1 Доказательство

$$g = \sum \lambda_k \chi_{E_k}.$$

$$\int_A g d\mu = \sum \lambda_k \mu(A \cap E_k) = \sum_k \lambda_k \sum_i \mu(A_i \cap E_k) = \sum_i \left(\sum_k \lambda_k \mu(A_i \cap E_k) \right) = \sum_i \int_{A_i} g d\mu.$$

6.2 Теорема

$f : C \rightarrow \bar{R}$, $f \geq 0$ — измеримая на A , A — измерима, $A = \bigsqcup A_i$, все A_i — измеримы. Тогда

$$\int_A f d\mu = \sum_i \int_{A_i} f d\mu$$

6.2.1 Доказательство

• \leq

g — ступенчатая, $0 \leq g \leq f$, тогда $\int_A g = \sum \int_{A_i} g \leq \sum \int_{A_i} f$. Осталось перейти к \sup .

• \geq

$$A = A_1 \sqcup A_2, \sum \lambda_k \chi_{E_k} = g_1 \leq f \chi_{A_1}, g_2 \leq f \chi_{A_2} = \sum \lambda_k \chi_{E_k}, g_1 + g_2 \leq f \chi_A$$

$$\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 = \int_A g_1 + g_2.$$

переходим к $\sup g_1$ и g_2

$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \leq \int_A f$$

по индукции разобьём для $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n$, $A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ и $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n \sqcup B_n$, где

$$B_n = \bigsqcup_{i \geq n+1} A_i, \text{ тогда}$$

$$\int_A \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_B f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f \Rightarrow \int_A f \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f$$

6.3 Следствие

$f \geq 0$ — измеримая, $\nu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, $\nu E = \int_E f d\mu$. Тогда ν — мера.

6.4 Следствие 2

$A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$, f — суммируемая на A , тогда

$$\int_A f = \sum_i \int_{A_i} f.$$

Часть II

Предельный переход под знаком интеграла

7 Теорема Леви

(X, \mathcal{A}, μ) , f_n — измерима, $\forall n : 0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ при почти всех x .

$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ при почти всех x . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f d\mu.$$

7.1 Доказательство

f — измерима как предел измеримых функций.

• \leq

$f_n(x) \leq f(x)$ почти везде, тогда $\forall n : \int_X f_n(x) d\mu \leq \int_X f d\mu$, откуда следует, что и предел интегралов не превосходит интеграл предела.

• \geq

Достаточно доказать, что для любой ступенчатой функции $g : 0 \leq g \leq f$ верно $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \geq \int_X g$.

Достаточно доказать, что $\forall c \in (0, 1)$ верно $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \geq c \int_X g$.

$$E_n := X (f_n \geq cg), E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$$

$\bigcup E_n = X$, т.к. $c < 1$, то $cg(x) < f(x)$, $f_n(x) \rightarrow f(x) \Rightarrow f_n$ попадёт в "зазор" $cg(x) < f(x)$.

$$\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq \int_{E_n} cg = c \int_{E_n} g,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} c \int_{E_n} g = c \int_X g, \text{ потому что это непрерывность снизу меры } A \mapsto \int_A g.$$

8 Линейность интеграла Лебега

Пусть f, g — измеримы на E , $f \geq 0, g \geq 0$. Тогда $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$.

8.1 Доказательство

Если f, g — ступенчатые, то очевидно.

Разберём общий случай. Существуют ступенчатые функции $f_n : 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \leq f$, и $g_n : 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots \leq g$, и $f_n(x) \rightarrow f(x)$ и $g_n(x) \rightarrow g(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_E f_n + g_n &= \int_E f_n + \int_E g_n, \text{ сделаем предельный переход, значит при } n \rightarrow +\infty \\ \int_E f + g &= \int_E f + \int_E g \end{aligned}$$

8.2 Следствие

Пусть f, g — суммируемые на множестве E , тогда $f + g$ тоже суммируема и $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$.

8.2.1 Доказательство

$$(f + g)_\pm \leq |f + g| \leq |f| + |g|.$$

$$h := f + g,$$

$$h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-,$$

$$h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+,$$

$$\int h_+ + \int f_- + \int g_- = \int h_- + \int f_+ + \int g_+,$$

$$\int h_+ - \int h_- = \int f_+ - \int f_- + \int g_+ - \int g_-, \text{ тогда}$$

$$\int h = \int f + \int g.$$

9 Теорема об интегрировании положительных рядов

$u_n \geq 0$ почти везде, измеримы на E . Тогда

$$\int_E \left(\sum_{i=1}^{+\infty} u_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu.$$

9.1 Доказательство

Очевидно по теореме Леви.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \text{ и } p \leq S_N \leq S_{N+1} \leq \dots \text{ и } S_N \rightarrow S(X).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E S_N = \int_E S,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_E u_k(x) = \int_E S(x) d\mu.$$

9.2 Следствие

u_n — измеримая функция, $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| < +\infty$. Тогда

$\sum u_n$ — абсолютно сходится почти везде на E .

9.2.1 Доказательство

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(x)|$$

$$\int_E S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n(x)| < +\infty, \text{ значит } S(x) \text{ конечна почти всюду.}$$

10 Абсолютная непрерывность интеграла

f — суммируемая функция, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall E \in \mathcal{A} : \mu E < \delta : \left| \int_E f \right| < \varepsilon.$$

10.0.1 Доказательство

$$X_n = X(f \geq n), X_n \supset X_{n+1} \supset \dots, \mu \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} X_n \right) = 0.$$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon : \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \frac{\varepsilon}{2}$ ($A \mapsto \int_A |f|$ — мера, тогда $\int_{\bigcap X_n} |f| = 0$ и по непрерывности меры сверху).

$\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$, берём $E : \mu E < \delta$.

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f| = \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \setminus X_{n_\varepsilon}} |f| \leq \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| + n_\varepsilon \mu E < \frac{\varepsilon}{2} + n_\varepsilon \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon} = \varepsilon.$$

10.0.2 Следствие

e_n — измеримое множество, $\mu e_n \rightarrow 0$, f — суммируемая. Тогда $\int_{e_n} f \rightarrow 0$.

Часть III

Произведение мер

11 Произведение мер

(X, \mathcal{A}, μ) и (Y, \mathcal{B}, ν) — пространства с мерой.

$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ — семейство подмножеств в $X \times Y$.

Тогда введём меру на $A \times B$ — $\mu_0(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$.

Обозначим $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ как произведение пространств с мерой.

11.1 Лемма

\mathcal{A}, \mathcal{B} — полукольцо, значит и $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ — полукольцо.

$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ — полукольцо *измеримых прямоугольников* (на самом деле это не всегда так).

$$\mu_0(A \times B) = \mu A \cdot \mu B.$$

11.2 Теорема

1. μ_0 — мера на полукольце $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$;
2. μ, ν — σ -конечное, значит μ_0 — σ -конечное.

11.2.1 Доказательство

Проверим счётную аддитивность μ_0 . $\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$, $(x, y) \in X \times Y$.

$P = \bigsqcup_{\text{сч.}} P_k$ — измеримые прямоугольники. $P = A \times B$ и $P_k = A_k \times B_k$, $\chi_P = \sum \chi_{P_k}$.

$\chi_A(x) \chi_B(y) = \sum_k \chi_{A_k}(x) \chi_{B_k}(y)$. Интегрируем по ν (по пространству Y).

$\chi_A(x) \cdot \nu(B) = \sum \chi_{A_k}(x) \nu(B_k)$. Интегрируем по μ .

$$\mu A \nu B = \sum \mu A_k \cdot \nu B_k.$$

$X = \bigcup X_k$, $Y = \bigcup Y_j$, где μX_k и νY_j — конечные, $X \times Y = \bigcup_{k,j} X_k \times Y_j$.

$(\mathbb{R}^m, \mathcal{M}^m, \lambda_m)$ и $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}^n, \lambda_n)$.

$(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu_0)$, где $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ — полукольцо.

Запускаем теорему о продолжении меры

$\rightsquigarrow (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu)$ (крестик в кружочке), где $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ — σ -алгебра.

μ, ν — σ -конечная, следовательно продолжение определено однозначно.

11.3 Замечание

произведение мер ассоциативно.

11.4 Теорема

λ_{m+n} если произведение мер λ_m и λ_n .

без доказательства.

$X, Y, C \subset X \times Y, C_x = \{y \in Y : (x, y) \in C\} \subset Y$ — сечение множества $C, C^y = \{x \in X : (x, y) \in C\}$.

Допустимы и объединения, пересечения и т.п.

11.5 Принцип Кавальери

(X, \mathcal{A}, μ) и (Y, \mathcal{B}, ν) , μ, ν — σ -конечные, полные.

$m = \mu \times \nu, C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Тогда

1. при почти всех $x \in X$ сечение $C_x \in \mathcal{B}$;
2. $x \mapsto \nu(C_x)$ — измерима* на X ;
3. $mC = \int_X \nu(C_x) d\mu(x)$.

*Рассматривается почти везде.

11.5.1 Замечание

1. C — измеримая, не следует, что $\forall x : C_x$ — измеримое.
2. $\forall x, \forall y, C_x, C^y$ — измеримы, но не следует, что C — измеримо (из Серпинского).

11.5.2 Доказательство

D — класс множеств $X \times Y$, для которых принцип Кавальери верен.

1. $D \times \mathcal{B} \subset D$, $C = A \times B$, $C_x = B$, $x \in A$, $\emptyset, x \notin A$ (сделать красиво).

$$x \mapsto X_x : \nu B \cdot \chi_A(x).$$

$$\int_X \nu B \chi_A(x) d\mu(x) = \mu A \nu B = mC.$$

2. E_i — дизъюнктные, $E_i \in D$. Тогда $\bigsqcup E_i \in D$.

$(E_i)_x$ — измерное при почти всех x .

При почти всех x все сечения $(F_i)_x$, $i = 1, 2, \dots$ — измеримое.

$E_x = \bigsqcup (E_i)_x$ — измеримое при почти всех x .

$\nu E_x = \sum \nu(E_i)_x$, значит $x \mapsto \nu E_x$ измеримая функция.

$$\int_X \nu E_x d\mu = \int_X \sum \nu(E_i)_x d\mu = \sum \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \sum mE_i = mE$$

3. $E_i \in D$, $\dots \supset E_i \supset E_{i+1} \supset \dots$, $E = \bigcap_{i=1}^{+\infty} E_i$, $mE_i < +\infty$. Тогда $E \in D$.

$$\int_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty \Rightarrow \nu(E_i)_x \text{ — почти везде конечны.}$$

$$(E_i)_x \supset (E_{i+1})_x \supset \dots, E_x = \bigcap_{i=1}^{+\infty} (E_i)_x \Rightarrow E_x \text{ — измеримое при почти всех } x.$$

при почти всех x (для тех x , для которых $\nu(E_i)_x$ — конечные сразу все i или при $i = 1$), поэтому

можно утверждать, что $\nu E_x = \lim_{i \rightarrow +\infty} \nu(E_i)_x \Rightarrow x \mapsto \nu E_x$ — измерима.

$$\int_X \nu E_x d\mu = \int_X \lim(\nu E_i)_x = \lim_{i \rightarrow +\infty} \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \lim mE_i = mE \text{ (по непрерывности сверху меры } m).$$

Перестановка пределов доказывается из теоремы Лебега, которую ещё не доказывали $|\nu(E_i)_x| \leq \nu(E_1)_x$ — суммируемая функция.

Кажется, что мы доказали, что если $A_{ij} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, то $\bigcap_j \left(\bigcup_i A_{ij} \right) \in D$.

$$mE = \inf \left(\sum mP_k, E \subset \bigcup P_k \right).$$

4. $mE = 0 \Rightarrow E \in D$. $H = \bigcap_j \bigcup_i P_{ij}$, $mH = 0$ ($P_{ij} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$), тогда $E \subset H$ ($H \in D$).

$$0 = mH = \int_X \nu H_x d\mu \Rightarrow \nu H_x = 0 \text{ при почти всех } x, \text{ но } E_x \subset H_x \Rightarrow \text{при почти всех } x \nu E_x = 0, \text{ значит}$$

$$\text{и } \int \nu E_x = 0 = mE.$$

5. $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $mC < +\infty \Rightarrow C \in D$.

Для множества C существует множество e , что $me = 0$ и $H = \bigcap \bigcup P_{ij}$ и $C = H \setminus e$, $C_x = H_x \setminus e_x$ и $mC = mH$.

$\nu e_x = 0$ при почти всех x , значит $\nu C_x = \nu H_x - \nu e_x$ при почти всех x .

$$\int_X \nu C_x d\mu = \int_X \nu H_x - \nu e_x = \int_X \nu H_x - \int_X \nu e_x = mH = mC.$$

6. C — произведение, m измеримое множество, $X = \bigsqcup X_k$ и $Y = \bigsqcup Y_j$, тогда $C = \bigsqcup_{i,j} (C \cap (X_i \times Y_j)) \in D$ по пункту 2. ($\mu X_k, \mu Y_j$ — конечные).

11.5.3 Следствие

$C \in Q \otimes B$, $P_1(C) := \{x : C_x \neq \emptyset\}$, тогда если $P_1(C)$ — измеримое в X , тогда $mC = \int_{P_1(C)} \nu C_x d\mu x$.

11.5.4 Замечание

Из того, что C измеримое, не следует, что его проекция измерима.

11.5.5 Следствие

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывное. Тогда $\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\lambda_1$.

Доказательство

Достаточно для $f \geq 0$.

f — непрерывно $\Rightarrow C = \Pi \Gamma(f, [a, b])$ измеримо в \mathbb{R}^2 (почти очевидно).

$C_x = [0, f(x)]$ (или \emptyset) \Rightarrow измеримость $\lambda_1 C_x = f(x)$.

$$\int_a^b f(x) dx = \lambda_2(\Pi \Gamma(f, [a, b])) = \int_{[a,b]} f(x) d\lambda_1(x).$$

11.5.6 Замечание

$f \geq 0$ измеримое, значит $\lambda_2 \Pi \Gamma(f, [a, b]) = \int_{[a,b]} f(x) d\lambda_2(x)$.

$f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $C \in X \times Y$, C_x , $f_x : C_x \rightarrow \mathbb{R}$, т.е. $y \mapsto f(x, y)$, аналогично $f^y : C^y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

11.6 Теорема Тонелли

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu), \mu, \nu$ — σ -конечные, полные. $m = \mu \times \nu$.

$f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f \geq 0$, измеримое. Тогда

1. при почти всех x функция f_x — измерима почти везде на Y [аналогично при почти всех y функция f^y также измерима на X].
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x(y) d\nu(y) = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ — измерима* на X [аналогично $y \mapsto \psi(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$ — измерима* на Y].
3.
$$\int_{X \times Y} f(x, y) d\mu = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

*Почти везде

11.6.1 Доказательство

1. $f = \chi_C, C \subset X \times Y$, измеримая. $f_x = \chi_{C_x}(y)$. C_x — измеримое при почти всех $x \Rightarrow f_x$ — измеримая при почти всех x .

$$\varphi(x) = \int_Y \chi_{C_x}(y) d\nu(y) = \nu(C_x) \quad (x \mapsto \nu C_x \text{ — измерима по принципу Кавальери}).$$

$$\int_X \varphi(x) d\mu = \int_X \nu C_x d\mu = mC = \int_{X \times Y} \chi_C dm.$$

2. $f = \sum_{\text{кон.}} a_k \chi_{C_k}, f \geq 0$.

$$f_x = \sum a_k \chi_{(C_k)_x}(y).$$

$x \mapsto \int_Y f_x(y) d\nu(y) = \sum a_k \nu(C_k)_x$ — измеримая (отдельные слагаемые — измеримые, значит и вся сумма измеримая).

$$\int_X \left(\int_Y f_x(y) d\nu \right) d\mu = \sum a_k \int_X \nu(C_k)_x d\mu = \sum a_k mC_k = \int_{X \times Y} f dm$$

3. $f \geq 0, g_n$ — ступенчатые, что $\dots \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots, \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = f$.

$f_x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (g_n)_x$ — измерима как предел измеримых функций.

$\varphi(x) = \int_Y f_x(y) d\nu(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_Y g_n d\nu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x)$, значит $\varphi(x)$ измерима из-за измеримости φ_n (Теорема Леви).

$$g_n \leq g_{n+1} \leq \dots \Rightarrow \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \leq \dots$$

$$\int_X \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} g_n dm = \int_{X \times Y} f dm \text{ (по теореме Леви)}$$

Везде должна быть приговорка "при почти всех x ".

11.7 Теорема Фубини

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu), \mu, \nu$ — σ -конечные, полные.

$f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, суммируемая. Тогда

1. при почти всех x функция f_x — суммируемая почти везде на Y [аналогично при почти всех y функция f^y также измерима на X].
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x(y) d\nu(y) = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ — суммируемая* на X [аналогично $y \mapsto \psi(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$ — суммируемая* на Y].
3.
$$\int_{X \times Y} f(x, y) d\mu = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

*почти везде

без доказательства

11.7.1 Следствие

$$\int_C f = \int_{X \times Y} f \chi_C = \int_X \left(\int_Y f \cdot \chi_C \right) d\mu = \int_{P_1(C)} \left(\int_{C_x} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

$P_1(C)$ — проекция, измеримая, $\{x : C_x \neq \emptyset\}$.

$B(0, 1) \subset \mathbb{R}^m$, Хотим найти $\lambda_m B(0, 1) = \alpha_m$.

$$\lambda_m B(0, R) = \alpha_m \cdot R^M.$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 \leq 1.$$

интеграл обычного кружочка:
$$\int \chi_B d\lambda_2 = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 dy dx = \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2} dx = \pi$$

$$\alpha_m = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_B = \int_{-1}^1 \left(\int_{B(0, \sqrt{1-x_1^2}) \subset \mathbb{R}^{m-1}} 1 d\nu \right) dx_1 = \int_{-1}^1 (1-x_1^2)^{\frac{m-1}{2}} \alpha_{m-1} dx_1.$$

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \Gamma(n) = (n-1)!, \Gamma(x+1) = \Gamma(x) \cdot x.$$

Тогда объём шара в \mathbb{R}^m равен $\alpha_{m-1} 2 \int_0^1 (1-t)^{\frac{m-1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt = B(\frac{1}{2}, \frac{m+1}{2}) \alpha_{m-1}$. Тогда объём шара можно

переписать как $\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)\alpha_{m-1}}$.