

Содержание

I	Интеграл по мере	2
0.1	Определения интеграла функции	2
0.2	Свойства интегралов	3
0.3	Лемма	4
0.3.1	Доказательство	4
0.4	Теорема	4
0.4.1	Доказательство	4
0.5	Следствие	5
0.6	Следствие 2	5
II	Предельный переход под знаком интеграла	5
0.7	Теорема	6
0.7.1	Доказательство	6
0.8	Теорема	6
0.8.1	Доказательство	7
0.8.2	Следствие	7
0.9	Определение	7
0.10	Теорема об интегрировании положительных рядов	8
0.10.1	Доказательство	8
0.10.2	Следствие	8

Часть I

Интеграл по мере

(X, \mathcal{A}, μ) — произвольное пространство с мерой.

$\mathcal{L}^0(X)$ — множество измеримых почти везде конечных функций.

0.1 Определения интеграла функции

1. $f = \sum_{\text{кон.}} \lambda_k \cdot \chi_{E_k}, f \geq 0.$

$(E_k \in \mathcal{A})$ — допустимое разбиение, тогда

$$\int_X f d\mu = \int_X f(x) d\mu(x) := \sum \lambda_k \mu E_k \text{ (считаем, что } 0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0).$$

Свойства:

- Интеграл не зависит от допустимого разбиения;

$$f = \sum \alpha_j \chi_{F_j} = \sum_{i,j} \lambda_k \chi_{E_k \cap F_j}, \text{ тогда } \int F = \int = \sum \lambda_k \mu E_k = \sum_k \lambda_k \sum_j \mu(E_k \cap F_j) = \sum \alpha_j \mu F_j = \int F;$$

- $f \leq g$, то $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu.$

2. $f \geq 0$, измерима, тогда $\int_X f d\mu = \sup_{g \text{ - ступенчатая, } 0 \leq g \leq f} \left(\int g \right).$

Свойства:

- Для ступенчатых функций $f \geq 0$ — это определение даёт тот же интеграл;

- $0 \leq \int f \leq +\infty;$

- $0 \leq g \leq f$, g — ступенчатая, f — измеримая, тогда $\int_X g \leq \int_X f.$

3. f — измеримая, f_+ и f_- — срезки, тогда если $\int_X f_+$ или $\int_X f_-$ — конечен, тогда

$$\int_X f d\mu := \int_X f_+ - \int_X f_-.$$

Замечание: Если $\int_X f \neq \pm\infty$, то говорят, что f — суммируемая и $\int |f|$ — конечен ($|f| = f_+ + f_-$).

Свойства:

- Если $f \geq 0$ — измерима, то это определение даёт тот же интеграл, что и предыдущее.

4. $E \subset X$ — измеримое множество, f — измеримо на X , тогда $\int_E f d\mu := \int_X f \chi_E d\mu$. f — суммируема на E если $\int_E f_+ d\mu$ и $\int_E f_- d\mu$ — оба конечны.

Замечание

(a) $f = \sum \lambda_k \chi_{E_k}$ и $\int f = \sum \lambda_k \mu(E_k \cap E)$;

(b) $f \geq 0$ — измерима, тогда $\int_E f d\mu = \sup_{g \text{ - ступ., } 0 \leq g \leq f} \left(\int G \right)$.

0.2 Свойства интегралов

1. Монотонность: $f \leq g \Rightarrow \int_E f \leq \int_E g$.

Доказательство

- $0 \leq f \leq g$, $\sum_{\tilde{f} \text{ ступ., } 0 \leq \tilde{f} \leq f} \int \tilde{f} \leq \sum_{\tilde{g} \text{ ступ., } 0 \leq \tilde{g} \leq g} \int \tilde{g}$;

- f и g — произвольные, то работает со срезками и $f_+ \leq g_+$, а $f_- \geq g_-$, тогда очевидно и для интегралов.

2. $\int_E 1 d\mu = \mu E$, $\int_E 0 d\mu = 0$;

3. $\mu E = 0$, f — измерима, тогда $\int_E f = 0$.

Доказательство

- f — ступенчатая, то очевидно;
- $f \geq 0$ — измеримая, то очевидно;
- f — любая, то аналогично.

4. $\int -f = - \int f$, $\forall c > 0 : \int cf = c \int f$.

Доказательство

- $(-f)_+ = f_-$ и $(-f)_- = f_+$.
- $f \geq 0$ — очевидно, $\sum_{gstup, 0 \leq g \leq cf} \left(\int G \right) = c \sup_{\tilde{g}stup, 0 \leq \tilde{g} \leq f} \left(\int g \right)$.

5. Пусть существует $\int_E f d\mu$, тогда $\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|$.

Доказательство

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

$$-\int |f| \leq \int f \leq \int |f|$$

6. f — измерима на E , $\mu E < +\infty$, $\forall x \in E$ $a \leq f(x) \leq b$. Тогда

$$a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E.$$

0.3 Лемма

$A = \bigsqcup A_i$, A, A_i — измеримы, $g \leq 0$ — ступенчатые. Тогда

$$\int_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} g d\mu.$$

0.3.1 Доказательство

$$g = \sum \lambda_k \chi_{E_k}.$$

$$\int_A g d\mu = \sum \lambda_k \mu(A \cap E_k) = \sum_k \lambda_k \sum_i \mu(A_i \cap E_k) = \sum_i \left(\sum_k \lambda_k \mu(A_i \cap E_k) \right) = \sum_i \int_{A_i} g.$$

0.4 Теорема

$f : C \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$ — измеримая на A , A — измерима, $A = \bigsqcup A_i$, все A_i — измеримы. Тогда

$$\int_A f d\mu = \sum_i \int_{A_i} f d\mu$$

0.4.1 Доказательство

$$\bullet \leq$$

g — ступенчатая, $0 \leq g \leq f$, тогда $\int_A g = \sum \int_{A_i} g \leq \sum \int_{A_i} f$. Осталось перейти к \sup .

• \geq

$$A = A_1 \sqcup A_2, \sum \lambda_k \chi_{E_k} = g_1 \leq f \chi_{A_1}, g_2 \leq f \cdot \chi_{A_2} = \sum \lambda_k \chi_{E_k}, g_1 + g_2 \leq f \cdot \chi_A$$

$$\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 = \int_A g_1 + g_2.$$

переходим к $\sup g_1$ и g_2

$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \leq \int_A f$$

по индукции разобьём для $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n$, $A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ и $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n \sqcup B_n$, где

$$B_n = \bigsqcup_{i \geq n+1} A_i, \text{ тогда}$$

$$\int_A \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_{B_n} f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f \Rightarrow \int_A f \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f$$

0.5 Следствие

$f \geq 0$ — измеримая, $\nu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, $\nu E = \int_E f d\mu$. Тогда

ν — мера.

0.6 Следствие 2

$A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$, f — суммируема на A , тогда

$$\int_A f = \sum_i \int_{A_i} f.$$

Часть II

Предельный переход под знаком интеграла

0.7 Теорема

(X, \mathcal{A}, μ) , f_n — измерима, $\forall n : 0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ при почти всех x .

$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ при почти всех x . Тогда

$$\lim \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f d\mu.$$

0.7.1 Доказательство

f — измерима как предел, измерима.

• \leq

$f_n(x) \leq f(x)$ почти везде, тогда $\forall n : \int_X f_n(x) d\mu \leq \int_X f d\mu$, откуда следует, что и предел не превосходит.

• \geq

Достаточно доказать, что для любой ступенчатой функции $g : 0 \leq g \leq f$ верно $\lim \int_X f_n \geq \int_X g$.

Достаточно доказать, что $\forall c \in (0, 1)$ верно $\lim \int_X f_n \geq c \int_X g$.

$$E_n := X(f_n \geq cg), E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$$

$\bigcup E_n = X$, т.е. $c < 1$, то $cg(x) < f(x)$, $f_n(x) \rightarrow f(x) \Rightarrow f_n$ попадёт в c зазор $cg(x) < f(x)$.

$$\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq \int_{E_n} cg = c \int_{E_n} g,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} c \int_{E_n} g = c \int_X g, \text{ потому что это непрерывность снизу меры } A \mapsto \int_A g.$$

0.8 Теорема

Пусть f, g — измеримы на E , $f \geq 0, g \geq 0$. Тогда $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$.

0.8.1 Доказательство

Если f, g — ступенчатые, то очевидно.

Разберём общий случай. Существуют ступенчатые функции $f_n : 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \leq f$, и $g_n : 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots \leq g$, и $f_n(x) \rightarrow f(x)$ и $g_n(x) \rightarrow g(x)$. Тогда

$$\int_E f_n + g_n = \int_E f_n + \int_E g_n, \text{ сделаем предельный переход, значит при } n \rightarrow +\infty$$
$$\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$$

0.8.2 Следствие

Пусть f, g — суммируемые на множестве E , тогда $f + g$ тоже суммируема и $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$.

Доказательство

$$(f + g)_\pm \leq |f + g| \leq |f| + |g|.$$

$$h := f + g,$$

$$h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-,$$

$$h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+,$$

$$\int h_+ + \int f_- + \int g_- = \int h_- + \int f_+ + \int g_+,$$

$$\int h_+ - \int h_- = \int f_+ - \int f_- + \int g_+ - \int g_-, \text{ тогда}$$

$$\int h = \int f + \int g.$$

0.9 Определение

$\mathcal{L}(X)$ — множество суммируемых функций. Это линейное пространство.

Интеграл: $\mathcal{L}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ — это линейная функция, но красивее говорить линейный функционал.

$f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}(X)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, тогда $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n \in \mathcal{L}(X)$.

$$\int_X f = I(f), \int_X \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n = \alpha_1 \int_X f_1 + \dots + \alpha_n \int_X f_n$$

$$I(\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n) = I(\alpha_1 f_1) + \dots + I(\alpha_n f_n).$$

0.10 Теорема об интегрировании положительных рядов

$u_n \geq 0$ почти везде, измеримы на E . Тогда

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu.$$

0.10.1 Доказательство

Очевидно по теореме Леви.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \text{ и } p \leq S_N \leq S_{N+1} \leq \dots \text{ и } S_N \rightarrow S(x).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E S_N = \int_E S$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_E u_k(x) = \int_E S(x) d\mu.$$

0.10.2 Следствие

u_n — измеримая функция, $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| < +\infty$. Тогда

$\sum u_n$ — абсолютно сходится почти везде на E .

Доказательство

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(x)|$$

$$\int_E S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n(x)| < +\infty, \text{ значит } S(x) \text{ конечна почти всюду.}$$

$$S(x) = +\infty \text{ при } x \in B, \mu B > 0, S(x) \geq n \cdot \chi_B \int_E S(x) \geq n \cdot \mu B.$$