

# Содержание

<b>I</b>	<b>Интеграл по мере</b>	<b>7</b>
<b>1</b>	<b>Интеграл ступенчатой функции</b>	<b>8</b>
1.1	Свойства . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Интеграл неотрицательной измеримой функции</b>	<b>9</b>
2.1	Свойства . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Суммируемая функция</b>	<b>10</b>
3.1	Свойство . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Интеграл суммируемой функции</b>	<b>11</b>
4.1	Свойства . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Простейшие свойства интеграла Лебега</b>	<b>12</b>
5.1	Доказательство . . . . .	12
5.2	Доказательство . . . . .	12
5.3	Доказательство . . . . .	12
5.4	Доказательство . . . . .	13
5.5	Доказательство . . . . .	13
5.6	Доказательство . . . . .	13
<b>6</b>	<b>Счетная аддитивность интеграла (по множеству)</b>	<b>14</b>
6.1	Лемма . . . . .	14
6.1.1	Доказательство . . . . .	14

6.2	Теорема . . . . .	14
6.2.1	Доказательство . . . . .	14
6.3	Следствие . . . . .	15
6.4	Следствие 2 . . . . .	15
<b>II</b>	<b>Предельный переход под знаком интеграла</b>	<b>16</b>
<b>7</b>	<b>Теорема Леви</b>	<b>17</b>
7.1	Доказательство . . . . .	17
<b>8</b>	<b>Линейность интеграла Лебега</b>	<b>18</b>
8.1	Доказательство . . . . .	18
8.2	Следствие . . . . .	18
8.2.1	Доказательство . . . . .	18
<b>9</b>	<b>Теорема об интегрировании положительных рядов</b>	<b>19</b>
9.1	Доказательство . . . . .	19
9.2	Следствие . . . . .	19
9.2.1	Доказательство . . . . .	19
<b>10</b>	<b>Абсолютная непрерывность интеграла</b>	<b>20</b>
10.1	Доказательство . . . . .	20
10.2	Следствие . . . . .	20
<b>11</b>	<b>02.03.2020</b>	<b>21</b>
11.1	Теорема Лебега о мажорированной сходимости . . . . .	21

11.1.1 Доказательство . . . . .	21
11.2 Теорема Лебега о мажорированной сходимости почти везде . . . . .	22
11.2.1 Доказательство . . . . .	22
11.3 Теорема Фату . . . . .	22
11.3.1 Замечание . . . . .	22
11.3.2 Доказательство . . . . .	22
11.3.3 Следствие . . . . .	23
11.3.4 Следствие 2 . . . . .	23
<b>III Произведение мер</b>	<b>24</b>
<b>12 Произведение мер</b>	<b>25</b>
<b>13 Теорема о произведении мер</b>	<b>26</b>
13.1 Доказательство . . . . .	26
13.2 Замечание . . . . .	26
13.3 Дополнительная теорема (без доказательства) . . . . .	26
<b>14 Сечения множества</b>	<b>27</b>
<b>15 Принцип Кавальери</b>	<b>28</b>
15.1 Замечание . . . . .	28
15.2 Доказательство . . . . .	28
15.3 Следствие . . . . .	29
15.4 Замечание . . . . .	29

<b>16 Совпадение определенного интеграла и интеграла Лебега</b>	<b>30</b>
16.1 Доказательство . . . . .	30
16.2 Замечание . . . . .	30
<b>17 Теорема Тонелли</b>	<b>31</b>
17.1 Доказательство . . . . .	31
<b>18 Теорема Фубини</b>	<b>33</b>
18.0.1 Следствие . . . . .	33
<b>19 Какая-то нужная штука для лекции 02.03.2020, потом удалю</b>	<b>34</b>
<b>IV Замена переменных в интеграле</b>	<b>35</b>
<b>20 Образ меры при отображении</b>	<b>36</b>
20.1 Замечание 1 . . . . .	36
20.2 Замечание 2 . . . . .	36
<b>21 Взвешенный образ меры</b>	<b>37</b>
<b>22 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры</b>	<b>38</b>
22.1 Замечание . . . . .	38
22.2 Доказательство . . . . .	38
22.3 Следствие . . . . .	38
<b>23 Плотность одной меры по отношению к другой</b>	<b>39</b>
23.1 Замечание . . . . .	39

<b>24 Критерий плотности</b>	<b>40</b>
24.0.1 Доказательство . . . . .	40
<b>25 Единственность плотности</b>	<b>41</b>
25.0.1 Доказательство . . . . .	41
25.1 Следствие . . . . .	41
<b>26 Лемма об образе малых кубических ячеек</b>	<b>42</b>
26.0.1 Доказательство . . . . .	42
<b>27 Теорема об образе меры Лебега при диффеоморфизме</b>	<b>43</b>
27.1 Лемма . . . . .	43
27.2 Теорема . . . . .	43
27.2.1 Доказательство . . . . .	43
<b>28 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега</b>	<b>46</b>
28.1 Доказательство . . . . .	46
<b>29 Сферические координаты в <math>\mathbb{R}^m</math></b>	<b>47</b>
<b>30 Формула для Бета-функции</b>	<b>48</b>
30.0.1 Доказательство . . . . .	48
<b>31 Объем шара в <math>\mathbb{R}^m</math></b>	<b>49</b>
<b>V Функция распределения</b>	<b>50</b>
<b>32 Теорема о вычислении интеграла по мере Бореля—Стилтьеса (с леммой)</b>	<b>51</b>

32.1	Определение . . . . .	51
32.2	Лемма . . . . .	51
32.2.1	Доказательство . . . . .	51
32.3	Теорема . . . . .	51
32.3.1	Доказательство . . . . .	52
32.3.2	Следствие . . . . .	52
<b>VI</b>	<b>Ряды Фурье</b>	<b>53</b>
<b>33</b>	<b>Интегральные неравенства Гельдера и Минковского</b>	<b>54</b>
<b>34</b>	<b>Интеграл комплекснозначной функции</b>	<b>55</b>
34.1	Вывод . . . . .	55
<b>35</b>	<b>Пространство <math>L^p(E, \mu)</math></b>	<b>56</b>
35.1	Свойства . . . . .	57
35.1.1	Доказательство . . . . .	57
35.1.2	Замечание . . . . .	57
35.2	Теорема . . . . .	58
35.2.1	Доказательство . . . . .	58

Часть I

# Интеграл по мере

# 1 Интеграл ступенчатой функции

$f = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \chi_{E_k}$ ,  $f \geq 0$ , где  $E_k \in \mathcal{A}$  — допустимое разбиение, тогда интеграл ступенчатой функции  $f$  на множестве  $X$  есть

$$\int_X f d\mu = \int_X f(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mu E_k$$

Дополнительно будем считать, что  $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ .

## 1.1 Свойства

- Интеграл не зависит от допустимого разбиения:

$$f = \sum \alpha_j \chi_{F_j} = \sum_{k,j} \lambda_k \chi_{E_k \cap F_j}, \text{ тогда } \int F = \sum \lambda_k \mu E_k = \sum_k \lambda_k \sum_j \mu(E_k \cap F_j) = \sum \alpha_j \mu F_j = \int F;$$

- $f \leq g$ , то  $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$ .



## 2 Интеграл неотрицательной измеримой функции

$f \geq 0$ , измерима, тогда интеграл неотрицательной измеримой функции  $f$  есть

$$\int_X f d\mu = \sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \left( \int_X g d\mu \right).$$

### 2.1 Свойства

- Для ступенчатой функции  $f$  (при  $f \geq 0$ ) это определение даёт тот же интеграл, что и для ступенчатой функции;
- $0 \leq \int_X f \leq +\infty$ ;
- $0 \leq g \leq f$ ,  $g$  — ступенчатая,  $f$  — измеримая, тогда  $\int_X g \leq \int_X f$ .

### 3 Суммируемая функция

$f$  — измеримая,  $f_+$  и  $f_-$  — срезки, тогда если  $\int_X f_+$  или  $\int_X f_-$  — конечен, тогда интеграл суммируемой функции есть

$$\int_X f d\mu = \int_X f_+ - \int_X f_-.$$

Если  $\int_X f \neq \pm\infty$ , то говорят, что  $f$  — *суммируемая*, а также  $\int |f|$  — конечен ( $|f| = f_+ + f_-$ ).

#### 3.1 Свойство

Если  $f \geq 0$  — измерима, то это определение даёт тот же интеграл, что и интеграл измеримой неотрицательной функции.

## 4 Интеграл суммируемой функции

$E \subset X$  — измеримое множество,  $f$  — измеримо на  $X$ , тогда интеграл  $f$  по множеству  $E$  есть

$$\int_E f d\mu := \int_X f \chi_E d\mu.$$

$f$  — суммируемая на  $E$  если  $\int_E f_+ -$  и  $\int_E f_-$  — конечны одновременно.

### 4.1 Свойства

- $f = \sum \lambda_k \chi_{E_k}$ , то  $\int_E f = \sum \lambda_k \mu(E_k \cap E)$ ;
- $f \geq 0$  — измерима, тогда  $\int_E f d\mu = \sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \left( \int_X g d\mu \right).$

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  — произвольное пространство с мерой.

$\mathcal{L}^0(X)$  — множество измеримых почти везде конечных функций.

## 5 Простейшие свойства интеграла Лебега

1. *Монотонность:*

$$f \leq g \Rightarrow \int_E f \leq \int_E g.$$

### 5.1 Доказательство

- $\sup_{\substack{\tilde{f} \text{ - ступ.} \\ 0 \leq \tilde{f} \leq f}} \left( \int_X \tilde{f} d\mu \right) \leq \sup_{\substack{\tilde{g} \text{ - ступ.} \\ 0 \leq \tilde{g} \leq g}} \left( \int_X \tilde{g} d\mu \right);$
- $f$  и  $g$  — произвольные, то работаем со срезками, и  $f_+ \leq g_+$ , а  $f_- \geq g_-$ , тогда очевидно и для интегралов.

$$2. \int_E 1 \cdot d\mu = \mu E, \int_E 0 \cdot d\mu = 0.$$

### 5.2 Доказательство

По определению.

$$3. \mu E = 0, f \text{ — измерима, тогда } \int_E f = 0.$$

### 5.3 Доказательство

- $f$  — ступенчатая, то по определению интеграла для ступенчатых функций получаем 0;
  - $f \geq 0$  — измеримая, то по определению интеграла для измеримых неотрицательных функций также получаем 0;
  - $f$  — любая, то разбиваем на срезки  $f_+$  и  $f_-$  и снова получаем 0.
4. (a)  $\int -f = - \int f;$   
 (b)  $\forall c > 0: \int cf = c \int f.$

## 5.4 Доказательство

- $(-f)_+ = f_-$  и  $(-f)_- = f_+$  и  $\int -f = f_- - f_+ = - \int f$ .
- $f \geq 0$  — очевидно,  $\sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq cf}} \left( \int g \right) = c \sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \left( \int g \right)$ .

5. Пусть существует  $\int_E f d\mu$ , тогда  $\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|$ .

## 5.5 Доказательство

$$-|f| \leq f \leq |f|,$$

$$- \int_E |f| \leq \int_E f \leq \int_E |f|.$$

6.  $f$  — измерима на  $E$ ,  $\mu E < +\infty$ ,  $\forall x \in E : a \leq f(x) \leq b$ . Тогда

$$a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E.$$

## 5.6 Доказательство

$$\int_E a \leq \int_E f \leq \int_E b,$$

$$a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E.$$

## 6 Счетная аддитивность интеграла (по множеству)

### 6.1 Лемма

$A = \bigsqcup A_i$ , где  $A, A_i$  — измеримы,  $g \geq 0$  — ступенчатые. Тогда

$$\int_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} g d\mu.$$

#### 6.1.1 Доказательство

$$g = \sum \lambda_k \chi_{E_k}.$$

$$\int_A g d\mu = \sum \lambda_k \mu(A \cap E_k) = \sum_k \lambda_k \sum_i \mu(A_i \cap E_k) = \sum_i \left( \sum_k \lambda_k \mu(A_i \cap E_k) \right) = \sum_i \int_{A_i} g d\mu.$$

### 6.2 Теорема

$f : C \rightarrow \overline{R}$ ,  $f \geq 0$  — измеримая на  $A$ ,  $A$  — измерима,  $A = \bigsqcup A_i$ , все  $A_i$  — измеримы. Тогда

$$\int_A f d\mu = \sum_i \int_{A_i} f d\mu$$

#### 6.2.1 Доказательство

•  $\leq$

$g$  — ступенчатая,  $0 \leq g \leq f$ , тогда  $\int_A g = \sum \int_{A_i} g \leq \sum \int_{A_i} f$ . Осталось перейти к  $\sup$ .

•  $\geq$

$$A = A_1 \sqcup A_2, \sum \lambda_k \chi_{E_k} = g_1 \leq f \chi_{A_1}, g_2 \leq f \cdot \chi_{A_2} = \sum \lambda_k \chi_{E_k}, g_1 + g_2 \leq f \cdot \chi_A$$

$$\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 = \int_A g_1 + g_2.$$

переходим к  $\sup g_1$  и  $g_2$

$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \leq \int_A f$$

по индукции разобьём для  $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n$ ,  $A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$  и  $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n \sqcup B_n$ , где  $B_n = \bigsqcup_{i \geq n+1} A_i$ ,

тогда

$$\int_A \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_{B_n} f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f \Rightarrow \int_A f \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f$$

### 6.3 Следствие

$f \geq 0$  — измеримая,  $\nu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ ,  $\nu E = \int_E f d\mu$ . Тогда  $\nu$  — мера.

### 6.4 Следствие 2

$A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ ,  $f$  — суммируемая на  $A$ , тогда

$$\int_A f = \sum_i \int_{A_i} f.$$

## Часть II

# Предельный переход под знаком интеграла



## 7 Теорема Леви

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $f_n$  — измерима,  $\forall n : 0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$  при почти всех  $x$ .

$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  при почти всех  $x$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f d\mu.$$

### 7.1 Доказательство

$f$  — измерима как предел измеримых функций.

•  $\leq$

$f_n(x) \leq f(x)$  почти везде, тогда  $\forall n : \int_X f_n(x) d\mu \leq \int_X f d\mu$ , откуда следует, что и предел интегралов не превосходит интеграл предела.

•  $\geq$

Достаточно доказать, что для любой ступенчатой функции  $g : 0 \leq g \leq f$  верно  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \geq \int_X g$ .

Достаточно доказать, что  $\forall c \in (0, 1)$  верно  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \geq c \int_X g$ .

$$E_n := X(f_n \geq cg), E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$$

$\bigcup E_n = X$ , т.к.  $c < 1$ , то  $cg(x) < f(x)$ ,  $f_n(x) \rightarrow f(x) \Rightarrow f_n$  попадёт в "зазор"  $cg(x) < f(x)$ .

$$\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq \int_{E_n} cg = c \int_{E_n} g,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} c \int_{E_n} g = c \int_X g, \text{ потому что это непрерывность снизу меры } A \mapsto \int_A g.$$

## 8 Линейность интеграла Лебега

Пусть  $f, g$  — измеримы на  $E$ ,  $f \geq 0, g \geq 0$ . Тогда  $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$ .

### 8.1 Доказательство

Если  $f, g$  — ступенчатые, то очевидно.

Разберём общий случай. Существуют ступенчатые функции  $f_n : 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \leq f$ , и  $g_n : 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots \leq g$ , и  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  и  $g_n(x) \rightarrow g(x)$ . Тогда

$$\int_E f_n + g_n = \int_E f_n + \int_E g_n, \text{ сделаем предельный переход, значит при } n \rightarrow +\infty$$

$$\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$$

### 8.2 Следствие

Пусть  $f, g$  — суммируемые на множестве  $E$ , тогда  $f + g$  тоже суммируема и  $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$ .

#### 8.2.1 Доказательство

$$(f + g)_\pm \leq |f + g| \leq |f| + |g|.$$

$$h := f + g,$$

$$h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-,$$

$$h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+,$$

$$\int h_+ + \int f_- + \int g_- = \int h_- + \int f_+ + \int g_+,$$

$$\int h_+ - \int h_- = \int f_+ - \int f_- + \int g_+ - \int g_-, \text{ тогда}$$

$$\int h = \int f + \int g.$$

## 9 Теорема об интегрировании положительных рядов

$u_n \geq 0$  почти везде, измеримы на  $E$ . Тогда

$$\int_E \left( \sum_{i=1}^{+\infty} u_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu.$$

### 9.1 Доказательство

Очевидно по теореме Леви.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \text{ и } p \leq S_N \leq S_{N+1} \leq \dots \text{ и } S_N \rightarrow S(X).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E S_N = \int_E S,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_E u_k(x) = \int_E S(x) d\mu.$$

### 9.2 Следствие

$u_n$  — измеримая функция,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| < +\infty$ . Тогда

$\sum u_n$  — абсолютно сходится почти везде на  $E$ .

#### 9.2.1 Доказательство

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(x)|$$

$$\int_E S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n(x)| < +\infty, \text{ значит } S(x) \text{ конечна почти всюду.}$$

## 10 Абсолютная непрерывность интеграла

$f$  — суммируемая функция, тогда верно:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall E \in \mathcal{A} : \mu E < \delta : \left| \int_E f \right| < \varepsilon$$

.

### 10.1 Доказательство

$X_n = X$  ( $f \geq n$ ),  $X_n \supset X_{n+1} \supset \dots$  и  $\mu \left( \bigcap_{n=1}^{+\infty} X_n \right) = 0$ .

Тогда  $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon : \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \frac{\varepsilon}{2}$  ( $A \mapsto \int_A |f|$  — мера, тогда  $\int_{\bigcap X_n} |f| = 0$  и по непрерывности меры сверху).

$\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$ , берём  $E : \mu E < \delta$ .

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f| = \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \setminus X_{n_\varepsilon}} |f| \leq \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| + n_\varepsilon \mu E < \frac{\varepsilon}{2} + n_\varepsilon \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon} = \varepsilon.$$

### 10.2 Следствие

$e_n$  — измеримое множество,  $\mu e_n \rightarrow 0$ ,  $f$  — суммируемая. Тогда  $\int_{e_n} f \rightarrow 0$ .

## 11 02.03.2020

$f_n \rightrightarrows f$  по мере то же самое, что и  $\mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ . Ещё есть способ  $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ . Можно ли вывести хоть какую-нибудь импликацию.

$\Rightarrow$  нельзя, пример:  $f_n(x) = \frac{1}{nx}$  в  $(\mathbb{R}, \lambda)$ , тогда  $f_n \rightrightarrows 0$  по мере. а  $\int \left| \frac{1}{nx} \right| d\mu = +\infty$ .

$\Leftarrow$  можно:  $\mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) = \int_{x_n} 1 d\mu \leq \int_{x_n} \frac{|f_n - f|}{\varepsilon} d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n - f| \rightarrow 0$ .

Хотим доказать подобие  $f_n \rightarrow f$ , то  $\int f_n \rightarrow \int f$ .

### 11.1 Теорема Лебега о мажорированной сходимости

$f_n, f$  — измеримые, почти везде конечные функции.  $f_n \xRightarrow[\mu]{} f$ . Также существует  $g$ , что:

1.  $\forall n : |f_n| \leq g$  почти везде;
2.  $g$  — суммируема на  $X$  ( $g$  — мажоранта).

Тогда  $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ , и тем более  $\int_X f_n \rightarrow \int_X f$ .

#### 11.1.1 Доказательство

$f_n$  — суммируема в силу первого утверждения про  $g$ ,  $f$  — суммируема по следствию теоремы Рисса. Тем более  $\left| \int_X f_n - \int_X f \right| \leq \left| \int_X f_n - f \right| \leq \int |f_n - f|$ .

1.  $\mu X < +\infty$ . Фиксируем  $\varepsilon > 0$ .  $X_n := X(|f_n - f| \geq \varepsilon)$ ,  $\mu X_n \rightarrow 0$ .

$$\int_X |f_n - f| = \int_{x_n} + \int_{x_n^c} \leq \int_{x_n} 2g + \int_{x_n^c} \varepsilon_0 \leq \int_{x_n} 2g + \int_x \varepsilon < \varepsilon(1 + \mu X). \text{ (при больших } n \text{ выражение } \int_{x_n} 2g \leq \varepsilon).$$

2.  $\mu X = +\infty$ ,  $\varepsilon > 0$ .

Утверждение:  $\exists A$  — измеримое,  $\mu A$  — конечное,  $\int_{X \setminus A} g < \varepsilon$ .

*Доказательство*

$$\int G = \sup \left\{ \int g_n : h - \text{ступенчатая функция } 0 \leq h \leq g \right\}$$

$$\exists h_0 : \int_X g - \int_X h_0 < \varepsilon, A := \text{supp } h_0. \text{ (где supp — носитель (support))}$$

$$\int_{X \setminus A} g + \int_A g - h_0 < \varepsilon.$$

$$\int_X |f_n - f| = \int_A + \int_{X \setminus A} \leq \int_A |f_n - f| + 2\varepsilon < 3\varepsilon \text{ при больших } n.$$

## 11.2 Теорема Лебега о мажорированной сходимости почти везде

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $f_n, f$  — измеримые,  $f_n \rightarrow f$  — почти везде.

Существует такая  $g$ , что:

1.  $|f_n| \leq g$  почти везде;
2.  $g$  — суммируема.

### 11.2.1 Доказательство

$f_n, f$  — суммируемая, тем более — как и раньше.

$h_n := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, \dots)$ ,  $h_n$  убывает.  $0 \leq h_n \leq 2g$ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) = \overline{\lim} |f_n - f| = 0$  почти везде.

$2g - h \geq 0$ , возрастают, тогда по теореме Леви  $\int_X 2g - h \rightarrow \int_X 2g$ , значит  $\int_X h_n \rightarrow 0$ , тогда  $\int_X |f_n - f| \leq \int_X h_n \rightarrow 0$ .

## 11.3 Теорема Фату

$(X, \mathcal{A}, \mu, f_n \geq 0$  — измеримые,  $f_n \rightarrow f$  почти везде. Если  $\exists C > 0$ , что  $\forall n : \int_X f_n \leq C$ , то  $\int_X f \leq C$ .

### 11.3.1 Замечание

Вообще говоря  $\int_X f_n \not\rightarrow \int_X f$ .

### 11.3.2 Доказательство

$g_n = \int (f_n, f_{n+1}, \dots)$ .

$g_n$  возрастает,  $g_n \rightarrow f$  почти везде.  $\lim g_n = \underline{\lim} f_n = f$  почти везде.

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n \leq C, \text{ тогда } \int F \leq C.$$

Примерчик

$$f_n = n \cdot \chi_{[0, \frac{1}{n}]} \rightarrow 0 \text{ почти везде.}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n = 1, \int f = 0.$$

Положительность важна:

$$f_n \geq 0, \text{ тогда } \int -f_n \leq -1, \text{ но } \int f = 0 \geq -1.$$

### 11.3.3 Следствие

$$f_n \xRightarrow[\mu]{} f \text{ (} f_{n_k} \rightarrow f \text{)}.$$

### 11.3.4 Следствие 2

$f_n \geq 0$ , измеримая. Тогда

$$\int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n.$$

Доказательство

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n \leq C.$$

Берём  $n_k$

$$\underline{\lim} \left( \int_X f_n \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \int_X f_{n_k} \right).$$

$$\int_X f_{n_k} \rightarrow \lim \left( \int_X f_n \right), \text{ а } \int_x g_n \rightarrow \int_X \underline{\lim} f_n.$$

## Часть III

# Произведение мер



## 12 Произведение мер

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  и  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  — пространства с мерой.

$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$  — семейство подмножеств в  $X \times Y$ .

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$  — полукольца, значит и  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  — полукольцо.

$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  — полукольцо *измеримых прямоугольников* (на самом деле это не всегда так).

Тогда введём меру на  $A \times B$  —  $\mu_0(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$ .

Обозначим  $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$  как произведение пространств с мерой.

## 13 Теорема о произведении мер

1.  $\mu_0$  — мера на полукольце  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ;
2.  $\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечные, значит  $\mu_0$  —  $\sigma$ -конечное.

### 13.1 Доказательство

1. Проверим счётную аддитивность  $\mu_0$ .  $\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$ ,  $(x, y) \in X \times Y$ .

$P = \bigsqcup_{\text{сч.}} P_k$  — измеримые прямоугольники.  $P = A \times B$  и  $P_k = A_k \times B_k$ ,  $\chi_P = \sum \chi_{P_k}$ .

$\chi_A(x) \chi_B(y) = \sum_k \chi_{A_k}(x) \chi_{B_k}(y)$ . Интегрируем по  $\nu$  (по пространству  $Y$ ).

$\chi_A(x) \cdot \nu(B) = \sum \chi_{A_k}(x) \nu(B_k)$ . Интегрируем по  $\mu$ .

$$\mu A \cdot \nu B = \sum \mu A_k \cdot \nu B_k.$$

2.  $X = \bigcup X_k$ ,  $Y = \bigcup Y_j$ , где  $\mu X_k$  и  $\nu Y_j$  — конечные,  $X \times Y = \bigcup_{k,j} X_k \times Y_j$ .

$(\mathbb{R}^m, \mathcal{M}^m, \lambda_m)$  и  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}^n, \lambda_n)$ .

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu_0)$ , где  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  — полукольцо.

Запускаем теорему о продолжении меры.

$\rightsquigarrow (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu)$ , где  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  —  $\sigma$ -алгебра.

$\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечная, следовательно продолжение определено однозначно.

### 13.2 Замечание

Произведение мер ассоциативно.

### 13.3 Дополнительная теорема (без доказательства)

$\lambda_{m+n}$  есть произведение мер  $\lambda_m$  и  $\lambda_n$ .

## 14 Сечения множества

$X$ ,  $Y$  и  $C \subset X \times Y$ ,  $C_x = \{y \in Y : (x, y) \in C\} \subset Y$  — сечение множества  $C$ , аналогично определим  $C^y = \{x \in X : (x, y) \in C\}$ .

Допустимы объединения, пересечения и т.п.

## 15 Принцип Кавальери

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  и  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ , а также  $\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечные и полные.

$m = \mu \times \nu$ ,  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ . Тогда:

1. при почти всех  $x \in X$  сечение  $C_x \in \mathcal{B}$ ;
2.  $x \mapsto \nu(C_x)$  — измерима (почти везде) на  $X$ ;
3.  $mC = \int_X \nu(C_x) d\mu(x)$ .

### 15.1 Замечание

1.  $C$  — измеримая  $\nRightarrow$  что  $\forall x: C_x$  — измеримое.
2.  $\forall x, \forall y, C_x, C_y$  — измеримы  $\nRightarrow$  что  $C$  — измеримо (пример можно взять из Серпинского).

### 15.2 Доказательство

$D$  — класс множеств  $X \times Y$ , для которых принцип Кавальери верен.

1.  $D \times \mathcal{B} \subset D$ ,  $C = A \times B$ ,  $C_x = \begin{cases} B & x \in A \\ \emptyset & x \notin A \end{cases}$ .

$$x \mapsto C_x : \nu B \cdot \chi_A(x).$$

$$\int_X \nu B \chi_A(x) d\mu(x) = \mu A \cdot \nu B = mC.$$

2.  $E_i$  — дизъюнктные,  $E_i \in D$ . Тогда  $\bigsqcup E_i \in D$ .

$(E_i)_x$  — измеримые при почти всех  $x$ .

При почти всех  $x$  все сечения  $(E_i)_x, i = 1, 2, \dots$  — измеримые.

$E_x = \bigsqcup (E_i)_x$  — измеримые при почти всех  $x$ .

$\nu E_x = \sum \nu(E_i)_x$ , значит  $x \mapsto \nu E_x$  измеримая функция.

$$\int_X \nu E_x d\mu = \int_X \sum \nu(E_i)_x d\mu = \sum \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \sum mE_i = mE$$

3.  $E_i \in D, \dots \supset E_i \supset E_{i+1} \supset \dots, E = \bigcap_{i=1}^{+\infty} E_i, mE_i < +\infty$ . Тогда  $E \in D$ .

$$\int_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty \Rightarrow \nu(E_i)_x \text{ — почти везде конечны.}$$

$$(E_i)_x \supset (E_{i+1})_x \supset \dots, E_x = \bigcap_{i=1}^{+\infty} (E_i)_x \Rightarrow E_x \text{ — измеримо при почти всех } x.$$

При почти всех  $x$  (для тех  $x$ , для которых  $\nu(E_i)_x$  — конечные сразу все  $i$  или при  $i = 1$ ), поэтому можно утверждать, что  $\nu E_x = \lim_{i \rightarrow +\infty} \nu(E_i)_x \Rightarrow x \mapsto \nu E_x$  — измерима.

$$\int_X \nu E_x d\mu = \int_X \lim_{i \rightarrow +\infty} (\nu E_i)_x = \lim_{i \rightarrow +\infty} \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \lim mE_i = mE \text{ (по непрерывности сверху меры } m).$$

Перестановка пределов доказывается из теоремы Лебега, которую ещё не доказывали  $|\nu(E_i)_x| \leq \nu(E_1)_x$  — суммируемая функция.

Мы доказали, что если  $A_{ij} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ , то  $\bigcap_j \left( \bigcup_i A_{ij} \right) \in D$ .

$$mE = \inf \left( \sum mP_k, E \subset \bigcup P_k \right).$$

4.  $mE = 0 \Rightarrow E \in D$ .  $H = \bigcap_j \bigcup_i P_{ij}, mH = 0$  ( $P_{ij} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ), тогда  $E \subset H$  ( $H \in D$ ).

$$0 = mH = \int_X \nu H_x d\mu \Rightarrow \nu H_x = 0 \text{ при почти всех } x, \text{ но } E_x \subset H_x \Rightarrow \text{при почти всех } x \nu E_x = 0, \text{ значит и}$$

$$\int \nu E_x = 0 = mE.$$

5.  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, mC < +\infty \Rightarrow C \in D$ .

Для множества  $C$  существует множество  $e$ , что  $me = 0$  и  $H = \bigcap_j \bigcup_i P_{ij}$  и  $C = H \setminus e, C_x = H_x \setminus e_x$  и  $mC = mH$ .

$\nu e_x = 0$  при почти всех  $x$ , значит  $\nu C_x = \nu H_x - \nu e_x$  при почти всех  $x$ .

$$\int_X \nu C_x d\mu = \int_X \nu H_x - \nu e_x = \int_X \nu H_x - \int_X \nu e_x = mH = mC.$$

6.  $C$  — произвольное,  $m$ -измеримое множество,  $X = \bigsqcup X_k$  и  $Y = \bigsqcup Y_j$ , тогда  $C = \bigsqcup_{i,j} (C \cap (X_i \times Y_j)) \in D$  по пункту 2. ( $\mu X_k, \mu Y_j$  — конечные).

### 15.3 Следствие

$C \in \mathcal{Q} \otimes \mathcal{B}, P_1(C) := \{x : C_x \neq \emptyset\}$ , тогда если  $P_1(C)$  — измеримо в  $X$ , тогда  $mC = \int_{P_1(C)} \nu C_x d\mu x$ .

### 15.4 Замечание

Из того, что  $C$  измеримо  $\nrightarrow$  что его проекция измерима.

## 16 Совпадение определенного интеграла и интеграла Лебега

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , непрерывное. Тогда  $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda_1$ .

### 16.1 Доказательство

Достаточно доказать для  $f \geq 0$ .

$f$  — непрерывно  $\Rightarrow C = \Pi\Gamma(f, [a, b])$  измеримо в  $\mathbb{R}^2$  (почти очевидно).

$C_x = [0, f(x)]$  (или  $\emptyset$ )  $\Rightarrow$  измеримость  $\lambda_1 C_x = f(x)$ .

$$\int_a^b f(x)dx = \lambda_2(\Pi\Gamma(f, [a, b])) = \int_{[a,b]} f(x)d\lambda_1(x).$$

### 16.2 Замечание

$f \geq 0$  измеримое, значит  $\lambda_2 \Pi\Gamma(f, [a, b]) = \int_{[a,b]} f(x)d\lambda_2(x)$ .

$f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $C \in X \times Y$ ,  $C_x$ ,  $f_x : C_x \rightarrow \mathbb{R}$ , т.е.  $y \mapsto f(x, y)$ , аналогично  $f^y : C^y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ .

## 17 Теорема Тонелли

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  и  $\mu$ ,  $\nu$  —  $\sigma$ -конечные и полные, а также  $m = \mu \times \nu$ .

$f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $f \geq 0$ , измеримая. Тогда

1. при почти всех  $x$  функция  $f_x$  — измерима почти везде на  $Y$  (аналогично при почти всех  $y$  функция  $f^y$  также измерима на  $X$ );
2.  $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x(y) d\nu(y) = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$  — измерима почти везде на  $X$  (аналогично  $y \mapsto \psi(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$  — измерима почти везде на  $Y$ );
3.  $\int_{X \times Y} f(x, y) d\mu = \int_Y \left( \int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x).$

### 17.1 Доказательство

1.  $f = \chi_C$ ,  $C \subset X \times Y$ , измеримая.  $f_x = \chi_{C_x}(y)$ .  $C_x$  — измеримое при почти всех  $x \Rightarrow f_x$  — измеримая при почти всех  $x$ .

$$\varphi(x) = \int_Y \chi_{C_x}(y) d\nu(y) = \nu(C_x) \quad (x \mapsto \nu C_x \text{ — измерима по принципу Кавальери}).$$

$$\int_X \varphi(x) d\mu = \int_X \nu C_x d\mu = mC = \int_{X \times Y} \chi_C dm.$$

2.  $f = \sum_{\text{кон.}} a_k \chi_{C_k}$ ,  $f \geq 0$ .

$$f_x = \sum a_k \chi_{(C_k)_x}(y).$$

$x \mapsto \int f_x(y) d\nu(y) = \sum a_k \nu(C_k)_x$  — измеримая (отдельные слагаемые — измеримые, значит и вся сумма измеримая).

$$\int_X \left( \int_Y f_x(y) d\nu \right) d\mu = \sum a_k \int_X \nu(C_k)_x d\mu = \sum a_k mC_k = \int_{X \times Y} f dm$$

3.  $f \geq 0$ ,  $g_n$  — ступенчатые, что  $\dots \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = f$ .

$f_x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (g_n)_x$  — измерима как предел измеримых функций.

$\varphi(x) = \int_Y f_x(y) d\nu(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_Y g_n d\nu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x)$ , значит  $\varphi(x)$  измерима из-за измеримости  $\varphi_n$  (Теорема Леви).

$$g_n \leq g_{n+1} \leq \dots \Rightarrow \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \leq \dots$$

$$\int_X \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow} \int_{X \times Y} g_n dm = \int_{X \times Y} f dm \text{ (по теореме Леви)}$$

*Везде должна быть приговорка „при почти всех  $x$ “.*



## 18 Теорема Фубини

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  и  $\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечные и полные.

$f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , суммируемая. Тогда

1. при почти всех  $x$  функция  $f_x$  — суммируемая почти везде на  $Y$  (аналогично при почти всех  $y$  функция  $f^y$  также измерима на  $X$ ).
2.  $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x(y) d\nu(y) = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$  — суммируемая почти везде на  $X$  (аналогично  $y \mapsto \psi(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$  — суммируемая почти везде на  $Y$ ).
3. 
$$\int_{X \times Y} f(x, y) d\mu = \int_Y \left( \int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

*без доказательства*

### 18.0.1 Следствие

$$\int_C f = \int_{X \times Y} f \chi_C = \int_X \left( \int_Y f \cdot \chi_C \right) d\mu = \int_{P_1(C)} \left( \int_{C_x} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

$P_1(C)$  — проекция, измеримая,  $\{x : C_x \neq \emptyset\}$ .

## 19 Какая-то нужная штука для лекции 02.03.2020, потом удалю

$B(0, 1) \subset \mathbb{R}^m$ , Хотим найти  $\lambda_m B(0, 1) = \alpha_m$ .

$$\lambda_m B(0, R) = \alpha_m \cdot R^M.$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 \leq 1.$$

интеграл обычного кружочка: 
$$\int \chi_B d\lambda_2 = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 dy dx = \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2} dx = \pi$$

$$\alpha_m = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_B = \int_{-1}^1 \left( \int_{B(0, \sqrt{1-x_1^2}) \subset \mathbb{R}^{m-1}} 1 d\nu \right) dx_1 = \int_{-1}^1 (1-x_1^2)^{\frac{m-1}{2}} \alpha_{m-1} dx_1.$$

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \Gamma(n) = (n-1)!, \Gamma(x+1) = \Gamma(x) \cdot x.$$

Тогда объём шара в  $\mathbb{R}^m$  равен  $\alpha_{m-1} 2 \int_0^1 (1-t)^{\frac{m-1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt = B(\frac{1}{2}, \frac{m+1}{2}) \alpha_{m-1}$ . Тогда объём шара можно

переписать как 
$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)\alpha_{m-1}}.$$

## Часть IV

# Замена переменных в интеграле

## 20 Образ меры при отображении

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  и  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  (пространство и алгебру изобразили, а меру нет).

$\Phi : X \rightarrow Y, \forall B \in \mathcal{B} \Phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  — измеримо.

$\nu : \mathcal{B} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, E \in \mathcal{B}, \nu E := \mu(\Phi^{-1}(E))$  — это мера на  $\mathcal{B}$ , а также образ меры  $\mu$  при отображении  $\Phi$ .

### 20.1 Замечание 1

$$\nu E = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 d\mu.$$

$$\nu \left( \bigcup B_i \right) = \mu \left( \Phi^{-1} \left( \bigcup B_i \right) \right) = \mu \left( \bigcup \Phi^{-1}(B_i) \right) = \sum \mu \Phi^{-1}(B_i) = \sum \nu B_i.$$

### 20.2 Замечание 2

$f$  — измерима относительно  $\mathcal{B}$ , тогда  $f \circ \Phi$  — измерима относительно  $\mathcal{A}$ .

$$X \left( f \left( \Phi(x) \right) < a \right) = \Phi^{-1} \left( Y(f < a) \right).$$

## 21 Взвешенный образ меры

$\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\omega \geq 0$ , измеримая.

Тогда  $\nu(B) := \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$  — мера, которая назначает *взвешенный образ меры*  $\mu$ , где  $\omega$  — её вес.

## 22 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры

$\Phi : X \rightarrow Y$  — измеримое отображение,  $\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\omega \geq 0$  — измеримая на  $X$ .  $\nu$  — взвешенный образ меры  $\mu$  ( $\omega$  — её вес). Тогда

$\forall f \geq 0$  — измеримой на  $Y$  верно, что  $f \circ \Phi$  — измерима на  $X$  и выполняется следующее свойство:

$$\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_X f(\Phi(x)) \omega(x) d\mu(x).$$

### 22.1 Замечание

То же верно для случая  $f$  — суммируемая.

### 22.2 Доказательство

$$1. f = \chi_B, B \in \mathcal{B}. \text{ Тогда } (f \circ \Phi)(x) = \begin{cases} 1 & \Phi(x) \in B \\ 0 & \Phi(x) \notin B \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(B)}.$$

$$\text{Доказывать нечего } \ominus : \nu B = \int_{\Phi(B)} \omega d\mu;$$

2.  $f$  — ступенчатая, для каждой ступеньки — правда, и по линейности интеграла получаем результат;
3.  $f \geq 0$  — измеримая. Теорема об аппроксимизации измеримых функций ступенчатыми плюс предельный переход по теореме Леви;
4.  $f$  — измеримая, значит  $|f|$  — всё верно.

### 22.3 Следствие

$$f \text{ — суммируема на } Y, B \in \mathcal{B}, \int_B f d\nu(y) = \int_{\Phi^{-1}(B)} (f \circ \Phi) \omega d\mu.$$

Частный случай:  $X = Y$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ ,  $\Phi = \text{id}$ ,  $\omega \geq 0$  — измерима.

## 23 Плотность одной меры по отношению к другой

$\nu B = \int_B \omega(x) d\mu(x)$ , тогда  $\omega$  — плотность меры  $\nu$  относительно меры  $\mu$ .

### 23.1 Замечание

$$\int_X f(x) d\nu(x) = \int_X f(x) \omega(x) d\mu(x).$$

## 24 Критерий плотности

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $\nu$  — ещё одна мера на  $\mathcal{A}$ ,  $\omega \geq 0$  — измеримая. Тогда

$\omega$  — плотность  $\nu$  относительно  $\mu \iff \forall A \in \mathcal{A}$  верно:  $\inf_A \omega \cdot \mu A \leq \nu A \leq \sup_A \omega \cdot \mu A$  ( $0 \cdot \infty = 0$ ).

### 24.0.1 Доказательство

- $\Rightarrow$  Очевидно (интеграл  $\mu A$  обладает этими свойствами из-за плотностей);
- $\Leftarrow$  Считаем, что  $\omega > 0$ . Для  $\omega = 0$  получаем:  $e := X(\omega = 0)$ ,  $\nu e = 0 = \int_e \omega d\mu$ , тогда  $\nu(A) = \int_A \omega d\mu = 0$ .

Теперь пусть  $\omega > 0$ , то  $q \in (0, 1)$ .  $A_j := A(q^j \leq \omega \leq q^{j-1})$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A_j$ .

$$q^j \mu A_j \leq \nu A_j \leq q^{j-1} \mu A_j.$$

$$q^j \mu A_j \leq \int_{A_j} \omega d\mu \leq q^{j-1} \mu A_j.$$

$$q \int_A \omega d\mu = q \sum \int_{A_j} \omega d\mu \leq \sum q^j \mu A_j \leq \nu A \leq \frac{1}{q} \sum q^j \mu A_j \leq \frac{1}{q} \int_A \omega.$$

Устремим  $q \rightarrow 1$  и получим доказательство равенства.



## 25 Единственность плотности

$f, g$  — суммируемые на  $X$ ,  $\forall A$  — измеримых верно:  $\int_A f = \int_A g$ . Тогда  $f = g$  почти везде.

### 25.0.1 Доказательство

$$h = f - g, \forall A \text{ — измеримых, } \int_A h = 0.$$

$$A_+ = X(h \geq 0), A_- = X(h < 0), A_+ \cap A_- = \emptyset.$$

$$\int_{A_+} |h| = \int_{A_+} h = 0.$$

$$\int_{A_-} |h| = - \int_{A_-} h = 0.$$

$$X = A_+ \sqcup A_-, \int_X |h| = 0, \text{ тогда } h = 0.$$

### 25.1 Следствие

Плотность  $\nu$  относительно  $\nu$  определена однозначно с точностью до  $\mu$  почти везде.

## 26 Лемма об образе малых кубических ячеек

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $a \in O$ .  $\Phi$  — дифференцируема  $G$  в окрестности точки  $a$ ,  $\det \Phi'(a) \neq 0$ . Пусть  $c > |\det \Phi'(a)|$ .

Тогда существует такое  $\delta > 0$ , что для любого куба  $Q \subset B(a, \delta)$ ,  $a \in Q$  верно, что  $c \cdot \lambda Q > \lambda \Phi(Q)$ .

### 26.0.1 Доказательство

$L := \Phi'(a)$  — обратимое линейное отображение.

$$\Phi(x) = \Phi(a) + L(x - a) + o(x - a).$$

$a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a)) = x + o(x - a)$  (увеличили в константу, поэтому *о маленькое* остаётся *о маленьким*).

$\forall \varepsilon > 0$  можно записать шар  $B_\varepsilon(a)$ , что при  $x \in B_\varepsilon(a)$   $|\psi(x) - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}|x - a|$ .

$Q \subset B_\varepsilon$ ,  $a \in Q$  — куб со стороной  $h$ , при  $x \in Q$  :  $|\psi(x) - x| < \varepsilon h$ .  $|x_i - a_i| \leq h$ .

$x, y \in Q$ , тогда  $|\psi(x)_i - \psi(y)_i| = |\psi(x)_i - x_i| + |\psi(y)_i - y_i| + |x_i - y_i| \leq |\psi(x) - x| + |\psi(y) - y| + h < (1 + 2\varepsilon)h$ .

$\psi(Q)$  — содержится в кубе со стороной  $(1 + 2\varepsilon)h$ , тогда  $\lambda \psi(Q) \leq (1 + 2\varepsilon)^m \lambda Q$ .

$$\lambda \Phi(Q) \leq (1 + 2\varepsilon)^m |\det L| \lambda Q < C \lambda Q.$$

Берём  $\varepsilon : (1 + 2\varepsilon)|\det L| < C$ , где  $\delta$  — радиус  $B_\varepsilon(a)$ .

$$\lambda A = \inf_{G - \text{открытое}, A \subset G} \lambda G$$

## 27 Теорема об образе меры Лебега при диффеоморфизме

### 27.1 Лемма

$f: O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $O$  — непрерывное.  $A$  — измеримое,  $A \subset Q \subset \overline{Q} \subset O$ .

Тогда 
$$\int_{A \subset G \text{ открытое}} \left( \lambda(G) \sup_G f \right) = \lambda A \sup_A f.$$

Без доказательства.

### 27.2 Теорема

$\Phi: O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  — диффеоморфизм.  $A \in \mathcal{M}^m$ ,  $A \subset O$ . Тогда

$$\lambda \Phi(A) = \int_A |\det \Phi'(a)| d\lambda.$$

#### 27.2.1 Доказательство

$\nu A := \lambda \Phi(A)$ . Верно ли, что  $J_\Phi(x) := |\det \Phi'(x)|$  — это плотность  $\nu$  по отношению к  $\mu$ .

Достаточно проверить, что  $\forall A$  верно:  $\inf_A J_\Phi \cdot \lambda A \leq \nu A \leq \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A$ .

Достаточно проверить правое неравенство. Левое — правое для  $\Phi^{-1}$  и  $\tilde{A} = \Phi(A)$ .

$$\lambda \Phi^{-1}(\tilde{A}) \leq \sup J_{\Phi^{-1}} \cdot \lambda \tilde{A}.$$

$$\lambda A \leq \sup |\det(\Phi^{-1})'| \lambda \Phi(A).$$

$$\sup \frac{1}{|\det \Phi'|}$$

$$\frac{1}{\inf |\det \Phi'|}$$

1.  $A$  — кубическая ячейка,  $\overline{A} \subset O$ . От противного: пусть оказалось, что  $\lambda Q \sup J_\Phi < \nu Q$ . Возьмём  $c > \sup_Q J_\Phi$ , так, что  $\lambda Q \cdot c < \nu Q$ . Значит существует такая часть  $Q_i$ , что  $\lambda Q_i \cdot c < \nu Q_i$ .  $\lambda Q_n \cdot c < \nu Q_n$ ,  $a = \bigcap \overline{Q_n}$ , накроем точку  $a$  этим кубиком.  $c > |\det \Phi'(a)|$ , тогда  $\nu Q_n = \lambda \Phi(Q_n)$ . Получили, что  $\lambda \Phi(Q_n) > c \lambda Q_n$ , а по лемме нужно наоборот.

2. Оценка  $\nu A \leq \sup J_\Phi \lambda A$ , верна для случая, когда  $A$  — открытое множество.

$$\nu Q \leq \sup_A J_\Phi \lambda Q.$$

$$\text{Суммируя по } Q: \nu A \leq \sup_A J_\Phi \lambda A.$$

Что было в лемме (и что мы потеряли):

$$\inf_{A \subset G} \left( \lambda G \cdot \sup_G f \right) = \lambda A \cdot \sup_A f.$$

$G$  — открытое, тогда

$$\nu G \leq \sup_G J_\Phi \cdot \lambda G.$$

$$\nu A \leq \nu G \leq \lambda \lambda A \sup_A f.$$

$$\forall A \in \mathcal{M}^m, \Phi(A) \text{ — измерима}$$

$$\lambda\Phi(A) = \int_A |\det \Phi'(x)| \, d\lambda(x).$$

$$\Phi:X\rightarrow Y$$

$$\nu(E)=\int-\Phi^{-1}(E)\omega d\mu.$$

$$E=\Phi(A).$$

## 28 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  — диффеоморфизм,  $f$  — измеримое,  $f \geq 0$ ,  $O = \Phi(O)$ . Тогда

$$\int_O f(y) dy = \int_O f(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)| dx.$$

То же верно для суммируемой функции  $f$ .

### 28.1 Доказательство

Следует из теоремы об образе меры Лебега.

## 29 Сферические координаты в $\mathbb{R}^m$

$r$  — расстояние от центра до точки

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m-1}$  — соответствующие углы, определяются по индукции на меньшие подпространства.

$$x_1 = r \cos \varphi_1;$$

$$x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2;$$

$\vdots$

$$x_m = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-1}.$$

$x_1, \dots, x_m$ . Выразим последние две переменные через угол  $\varphi_{m-1}$  и какое-то расстояние  $\rho_{m-1}$ .

$x_1, \dots, x_{m-2}, \rho_{m-1}, \varphi_{m-1}$ , тогда

$$x_{m-1} = \rho_{m-1} \cos \varphi_{m-1}, \text{ а } x_m = \rho_{m-1} \sin \varphi_{m-1}.$$

$$x_{m-2} = \rho_{m-2} \cos \varphi_{m-2}.$$

$\vdots$

Пусть осталось только  $x_1$ , тогда  $x_1 = r \cos \varphi_1$  и  $\rho_2 = r \sin \varphi_1$ , т.е.  $\rho_1 = r$ .

$$\begin{aligned} \int dx_1 \dots dx_m &= \int \rho_{m-1} dx_1 \dots dx_{m-2} d\rho_{m-1} d\varphi_{m-1} = \int \rho_{m-2}^2 \sin \varphi_{m-2} dx_1 \dots dx_{m-3} d\rho_{m-2} d\varphi_{m-2} d\varphi_{m-1} = \\ &= \int \rho_{m-3}^3 \sin^2 \varphi_{m-3} \sin \varphi_{m-2} dx_1 \dots = \int r^{m-1} \sin^{m-2} \varphi_1 \sin^{m-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2} \dots \end{aligned}$$

$r^{m-1} \sin^{m-2} \varphi_1 \sin^{m-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2}$  — это Якобиан.

## 30 Формула для Бета-функции

$$B(s, t) = \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{t-1} dx = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}.$$

### 30.0.1 Доказательство

По определению гамма-функции:

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \left( \int_0^{+\infty} y^{t-1} e^{-y} dy \right) dx = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \int_X (u-x)^{t-1} e^{-u+x} du dx, \text{ где } y = u-x,$$

$$\int_0^{+\infty} du \int_0^u dx x^{s-1} (u-x)^{t-1} e^{-u}, \text{ заменим } x = uv \text{ и получим}$$

$$\int_0^{+\infty} du \int_0^1 dv u^{s-1} v^{s-1} u^{t-1} (1-v)^{t-1} u e^{-u} = \int_0^{+\infty} du u^{s+t-1} e^{-u} \int_0^1 v^{s-1} (1-v)^{t-1} dv = \Gamma(s+t) B(s, t).$$



## 31 Объем шара в $\mathbb{R}^m$

$$\lambda_m B(0, R) = \int_{x_1^2 + \dots + x_m^2 = R^2} 1 dx, \text{ введём сферические координаты.}$$

$$\int_0^R dr \int_0^\pi d\varphi_1 \dots \int_0^\pi d\varphi_{m-2} \int_0^{2\pi} d\varphi_{m-1} r^{m-1} \sin^{m-2} \varphi_1 \sin^{m-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2}, \text{ а дальше воспользуемся бета-функцией.}$$

Пример как вычислять  $\sin$  в какой-то степени:

$$\int_0^\pi (\sin \varphi_k)^{m-1-k} = 2 \int_0^{\pi/2} t^{\frac{m-1-k}{2} - \frac{1}{2}} (1-t)^{-0.5} dt = B\left(\frac{m-k}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{m-k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-k}{2} + \frac{1}{2}\right)}.$$

## Часть V

# Функция распределения

## 32 Теорема о вычислении интеграла по мере Бореля—Стилтьеса (с леммой)

### 32.1 Определение

$(X, \mathcal{O}, \mu)$ ,  $h : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — измеримая, пространство конечное.

Пусть  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $\mu X(h < t) < +\infty$ .

$H(t) := \mu X(h < t)$  — функция распределения функции  $h$  по  $\mu$  ( $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ).

Очевидно, что  $H$  возрастает,  $h : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\nu := h(\mu)$ ,  $\nu(A) = \mu(h^{-1}(A))$ .

Пусть  $h$  — измеримая, тогда  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $h^{-1}(B)$  — измеримая.

$\mu_H[a, b) = H(b - 0) - H(a - 0)$  — мера Бореля-Стилтьеса.

### 32.2 Лемма

$h : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — измеримая, почти везде конечная.

$H$  — функция распределения (корректно заданная),  $\forall t \mu X(h < t) < +\infty$ .

Тогда на  $\mathcal{B}$ ,  $\mu_H$  совпадает с  $h(\mu)$ .

#### 32.2.1 Доказательство

$\mu_h[a, b) = H(b - 0) - H(a - 0) = H(b) - H(a)$  — непрерывность меры снизу.

$H(b) - H(a) = \mu X(a \leq h < b) = \mu(h^{-1}[a, b)) = \nu[a, b]$ , где  $\nu = h(\mu)$

Значит  $\mu_H = \nu$  на  $\mathcal{B}$ .

### 32.3 Теорема

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\geq 0$ , измеримое по Борелю.

$h : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , измеримая, почти везде конечная, с функцией распределения  $H$ .

$\mu_H$  — мера Бореля-Стилтьеса. Тогда

$$\int_X f(h(x)) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) d\mu_H(t).$$

### 32.3.1 Доказательство

По теореме о взвешенном образе меры:

$$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y = \mathbb{R}, \mathcal{B}, h(\mu)),$$

$$\Phi = h : X \rightarrow Y, \omega = 1.$$

$$\int_Y f(y) d\nu = \int_X f(\Phi(x)) 1 d\mu(x).$$

Пусть  $f \geq 0$ , измеримая,  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(|x|) d\lambda_m = \int_0^{+\infty} f(t) d\mu_H \text{ при } h(x) = |x|, \text{ где } H(r) = \mu\mathbb{R}^m(|x| < r) = \alpha_m r^m.$$

$$\mu_H[a, b) = H(b) - H(a) = \int_a^b H'(t) dt = \int_a^b m\alpha_m t^{m-1} dt.$$

$$\mu_H \text{ и мера } \nu : \nu(A) = \int_A m\alpha_m t^{m-1} dt, \text{ значит } \mu_h = \nu \text{ на } \mathcal{B}.$$

$$\int_0^{+\infty} f(t) m\alpha_m t^{m-1} dt.$$

### 32.3.2 Следствие

Мы проверили, что  $g$  возрастает,  $g \in C^1(\mathbb{R})$  и  $M_g(A) = \int_A g'(x) dx$ .

## Часть VI

# Ряды Фурье

### 33 Интегральные неравенства Гельдера и Минковского

1. Неравенство Гёльдера:

$p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , заданы почти везде, измеримы.

$(X, \mathcal{A}, \mu), f, g : X \rightarrow \mathbb{C} (\mathbb{R})$ . Тогда

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left( \int_X |f|^p \right)^{1/p} \left( \int_X |g|^q \right)^{1/q}$$

2. Неравенство Минковского

$(X, \mathcal{A}, \mu), f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$  — измерима почти везде, конечна,  $1 \leq p < +\infty$ . Тогда

$$\left( \int_X |f + g|^p \right)^{1/p} \leq \left( \int_X |f|^p \right)^{1/p} + \left( \int_X |g|^p \right)^{1/p}$$

## 34 Интеграл комплекснозначной функции

$$(X, \mathcal{A}, \mu), f : X \rightarrow \mathbb{C}, f(x) = g(x) + ih(x).$$

$$f \text{ — измерима} \iff g = \operatorname{Re} f \text{ и } h = \operatorname{Im} f \text{ — измеримые.}$$

$$f \text{ — суммируемая} \iff g = \operatorname{Re} f \text{ и } h = \operatorname{Im} f \text{ — суммируемые.}$$

$$\int_X f = \int_X g + i \int_X h.$$

### 34.1 Вывод

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

## 35 Пространство $L^p(E, \mu)$

$$L^p(X, \mu), 1 \leq p < \infty$$

$$\mathcal{L}^p(X, \mu) = \left\{ f : X \xrightarrow[\text{п.в.}]{} \overline{\mathbb{R}}(\overline{\mathbb{C}}), f \text{ — измерима, } \int_X |f|^p d\mu < +\infty \right\}$$

- $\mathcal{L}^p(X, \mu)$  — линейное пространство — по н. Минковского;
- Введём норму  $\|f\| = \left( \int_X |f|^p \right)^{1/p}$  ;
- $f$  эквивалентно  $g$  если  $f(x) = g(x)$  при почти всех  $x$



## 36 Существенный супремум

$f$  почти всюду  $X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\text{ess sup } f = \inf \{A \in \overline{\mathbb{R}} : f(x) \in A \text{ п.в.}\}.$

(почти супремум)

### 36.1 Свойства

1.  $\text{ess sup } f \leq \sup f$ ;
2.  $f(x) \leq \text{ess sup } f$  при почти всех  $x$ ;
3.  $\left| \int_{\mathbb{R}} fg \right| \leq \text{ess sup } |f| \cdot \int_X |g|.$

#### 36.1.1 Доказательство

1. Очевидно
2.  $M = \text{ess sup } f$

$\forall n \in \mathbb{N}$  верно  $f(x) \leq M + \frac{1}{n}$  почти везде.

3. Очевидно  $\left| \int_X fg \right| \leq \int_x |fg|,$   
 $|fg| \leq M|g|$  почти везде.

Тогда определим  $\mathcal{L}^\infty(X, \mu) = \{f : \text{п.в. } X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}) : \text{изм.}, \text{ess sup } |f| < +\infty\}$

$f, g \in \mathcal{L}^\infty \Rightarrow f + g \in \mathcal{L}^\infty.$

т.е.  $\mathcal{L}^\infty$  — линейное пространство, норма  $\|f\| = \text{ess sup}_x |f|.$

$\text{ess sup } |f + g| \leq \text{ess sup } |f| + \text{ess sup } |g|.$

#### 36.1.2 Замечание

$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$  — неравенство Гёльдера.

☺, можно брать  $p = 1$  и  $q = +\infty.$

$$f \in \mathcal{L}^p(X, \mu), 1 \leq p \leq +\infty$$

$\Rightarrow f$  — почти всюду конечно  $\Rightarrow$  можно считать, что  $f$  задана почти всюду на  $X$  и всюду конечна.

$$l^1([0, 1], \lambda), f(x) = \text{квадратная скобка } \frac{1}{\sqrt{x}}, x \neq 0 \text{ и } +\infty, x = 0.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} < +\infty, \frac{1}{\sqrt{x}} \in L^1.$$

## 36.2 Теорема

$$X, \mu X < +\infty, 1 \leq s < r \leq +\infty$$

Тогда

1.  $L^r(X, \mu) \subset L^s(X, \mu)$ ;
2.  $\|f\|_s \leq (\mu X)^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}}$

### 36.2.1 Доказательство

1. следует из 2;

2.  $r = \infty$  — очевидно

$$\|f\|_s = \left( \int_X |f|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq \left( \int_X \|f\|_\infty^s \right)^{\frac{1}{s}}$$

$$|f| \leq \text{ess sup } f = \|f\|_\infty = \|f\|_\infty \mu X^{1/s}$$

$$\|f\|_s^s = \int_X |f|^s d\mu \text{ по Гёльдеру получаем неравенство}$$

$$\left( \int_X (|f|^s)^{r/s} \right)^{s/r} \left( \int_X 1 \right)^{\frac{r-s}{r}} = \left( \int_X |f|^r \right)^{s/r} (\mu X)^{1 - \frac{s}{r}}.$$