

Содержание

I	Интеграл по мере	3
1	Интеграл ступенчатой функции	4
1.1	Свойства	4
2	Интеграл неотрицательной измеримой функции	5
2.1	Свойства	5
3	Суммируемая функция	6
3.1	Свойство	6
4	Интеграл суммируемой функции	7
4.1	Свойства	7
5	Простейшие свойства интеграла Лебега	8
5.1	Доказательство	8
5.2	Доказательство	8
5.3	Доказательство	8
5.4	Доказательство	9
5.5	Доказательство	9
5.6	Лемма	9
5.6.1	Доказательство	9
5.7	Теорема	9
5.7.1	Доказательство	10

5.8	Следствие	10
5.9	Следствие 2	10
II	Предельный переход под знаком интеграла	10
5.10	Теорема	11
5.10.1	Доказательство	11
5.11	Теорема	11
5.11.1	Доказательство	12
5.11.2	Следствие	12
5.12	Определение	12
5.13	Теорема об интегрировании положительных рядов	13
5.13.1	Доказательство	13
5.13.2	Следствие	13

Часть I

Интеграл по мере

1 Интеграл ступенчатой функции

$f = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \chi_{E_k}$, $f \geq 0$, где $E_k \in \mathcal{A}$ — допустимое разбиение, тогда интеграл ступенчатой функции f на множестве X есть

$$\int_X f d\mu = \int_X f(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mu E_k$$

Дополнительно будем считать, что $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

1.1 Свойства

- Интеграл не зависит от допустимого разбиения:

$$f = \sum \alpha_j \chi_{F_j} = \sum_{k,j} \lambda_k \chi_{E_k \cap F_j}, \text{ тогда } \int F = \sum \lambda_k \mu E_k = \sum_k \lambda_k \sum_j \mu(E_k \cap F_j) = \sum \alpha_j \mu F_j = \int F;$$

- $f \leq g$, то $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

2 Интеграл неотрицательной измеримой функции

$f \geq 0$, измерима, тогда интеграл неотрицательной измеримой функции f есть

$$\int_X f d\mu = \sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \left(\int_X g d\mu \right).$$

2.1 Свойства

- Для ступенчатой функции f (при $f \geq 0$) это определение даёт тот же интеграл, что и для ступенчатой функции;
- $0 \leq \int_X f \leq +\infty$;
- $0 \leq g \leq f$, g — ступенчатая, f — измеримая, тогда $\int_X g \leq \int_X f$.

3 Суммируемая функция

f — измеримая, f_+ и f_- — срезки, тогда если $\int_X f_+$ или $\int_X f_-$ — конечен, тогда интеграл суммируемой функции есть

$$\int_X f d\mu = \int_X f_+ - \int_X f_-.$$

Если $\int_X f \neq \pm\infty$, то говорят, что f — *суммируемая*, а также $\int |f|$ — конечен ($|f| = f_+ + f_-$).

3.1 Свойство

Если $f \geq 0$ — измерима, то это определение даёт тот же интеграл, что и интеграл измеримой неотрицательной функции.

4 Интеграл суммируемой функции

$E \subset X$ — измеримое множество, f — измеримо на X , тогда интеграл f по множеству E есть

$$\int_E f d\mu := \int_X f \chi_E d\mu.$$

f — суммируемая на E если $\int_E f_+ -$ и $\int_E f_-$ — конечны одновременно.

4.1 Свойства

- $f = \sum \lambda_k \chi_{E_k}$, то $\int_E f = \sum \lambda_k \mu(E_k \cap E)$;
- $f \geq 0$ — измерима, тогда $\int_E f d\mu = \sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \left(\int_X g d\mu \right).$

(X, \mathcal{A}, μ) — произвольное пространство с мерой.

$\mathcal{L}^0(X)$ — множество измеримых почти везде конечных функций.

5 Простейшие свойства интеграла Лебега

1. *Монотонность:*

$$f \leq g \Rightarrow \int_E f \leq \int_E g.$$

5.1 Доказательство

$$\bullet \sup_{\substack{\tilde{f} \text{ - ступ.} \\ 0 \leq \tilde{f} \leq f}} \left(\int_X \tilde{f} d\mu \right) \leq \sup_{\substack{\tilde{g} \text{ - ступ.} \\ 0 \leq \tilde{g} \leq g}} \left(\int_X \tilde{g} d\mu \right);$$

- f и g — произвольные, то работаем со срезками, и $f_+ \leq g_+$, а $f_- \geq g_-$, тогда очевидно и для интегралов.

$$2. \int_E 1 \cdot d\mu = \mu E, \int_E 0 \cdot d\mu = 0.$$

5.2 Доказательство

По определению.

$$3. \mu E = 0, f \text{ — измерима, тогда } \int_E f = 0.$$

5.3 Доказательство

- f — ступенчатая, то по определению интеграла для ступенчатых функций получаем 0;
 - $f \geq 0$ — измеримая, то по определению интеграла для измеримых неотрицательных функций также получаем 0;
 - f — любая, то разбиваем на срезки f_+ и f_- и снова получаем 0.
4. (a) $\int -f = - \int f;$
 (b) $\forall c > 0 : \int cf = c \int f.$

5.4 Доказательство

- $(-f)_+ = f_-$ и $(-f)_- = f_+$ и $\int -f = f_- - f_+ = -\int f$.
- $f \geq 0$ — очевидно, $\sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq cf}} \left(\int g \right) = c \sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \left(\int g \right)$.

5. Пусть существует $\int_E f d\mu$, тогда $\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|$.

5.5 Доказательство

$$-|f| \leq f \leq |f|,$$

$$-\int_E |f| \leq \int_E f \leq \int_E |f|.$$

6. f — измерима на E , $\mu E < +\infty$, $\forall x \in E : a \leq f(x) \leq b$. Тогда

$$a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E.$$

5.6 Доказательство

$$\int_E a \leq \int_E f \leq \int_E b,$$

$$a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E.$$

5.7 Лемма

$A = \bigsqcup A_i$, A, A_i — измеримы, $g \leq 0$ — ступенчатые. Тогда

$$\int_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} g d\mu.$$

5.7.1 Доказательство

$$g = \sum \lambda_k \chi_{E_k}.$$

$$\int_A g d\mu = \sum \lambda_k \mu(A \cap E_k) = \sum_k \lambda_k \sum_i \mu(A_i \cap E_k) = \sum_i \left(\sum_k \lambda_k \mu(A_i \cap E_k) \right) = \sum_i \int_{A_i} g.$$

5.8 Теорема

$f : C \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f \geq 0$ — измеримая на A , A — измерима, $A = \bigsqcup A_i$, все A_i — измеримы. Тогда

$$\int_A f d\mu = \sum_i \int_{A_i} f d\mu$$

5.8.1 Доказательство

• \leq

g — ступенчатая, $0 \leq g \leq f$, тогда $\int_A g = \sum \int_{A_i} g \leq \sum \int_{A_i} f$. Осталось перейти к \sup .

• \geq

$$A = A_1 \sqcup A_2, \sum \lambda_k \chi_{E_k} = g_1 \leq f \chi_{A_1}, g_2 \leq f \cdot \chi_{A_2} = \sum \lambda_k \chi_{E_k}, g_1 + g_2 \leq f \cdot \chi_A$$

$$\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 = \int_A g_1 + g_2.$$

переходим к $\sup g_1$ и g_2

$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \leq \int_A f$$

по индукции разобьём для $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n$, $A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ и $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n \sqcup B_n$, где

$$B_n = \bigsqcup_{i \geq n+1} A_i, \text{ тогда}$$

$$\int_A f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_{B_n} f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f \Rightarrow \int_A f \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f$$

5.9 Следствие

$f \geq 0$ — измеримая, $\nu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, $\nu E = \int_E f d\mu$. Тогда

ν — мера.

5.10 Следствие 2

$A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$, f — суммируема на A , тогда

$$\int_A f = \sum_i \int_{A_i} f.$$

Часть II

Предельный переход под знаком интеграла

5.11 Теорема

(X, \mathcal{A}, μ) , f_n — измерима, $\forall n : 0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ при почти всех x .

$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ при почти всех x . Тогда

$$\lim \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f d\mu.$$

5.11.1 Доказательство

f — измерима как предел, измерима.

• \leq

$f_n(x) \leq f(x)$ почти везде, тогда $\forall n : \int_X f_n(x) d\mu \leq \int_X f d\mu$, откуда следует, что и предел не превосходит.

• \geq

Достаточно доказать, что для любой ступенчатой функции $g : 0 \leq g \leq f$ верно $\lim \int_X f_n \geq \int_X g$.

Достаточно доказать, что $\forall c \in (0, 1)$ верно $\lim \int_X f_n \geq c \int_X g$.

$$E_n := X(f_n \geq cg), E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$$

$\bigcup E_n = X$, т.е. $c < 1$, то $cg(x) < f(x)$, $f_n(x) \rightarrow f(x) \Rightarrow f_n$ попадёт в c зазор $cg(x) < f(x)$.

$$\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq \int_{E_n} cg = c \int_{E_n} g,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} c \int_{E_n} g = c \int_X g, \text{ потому что это непрерывность снизу меры } A \mapsto \int_A g.$$

5.12 Теорема

Пусть f, g — измеримы на E , $f \geq 0, g \geq 0$. Тогда $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$.

5.12.1 Доказательство

Если f, g — ступенчатые, то очевидно.

Разберём общий случай. Существуют ступенчатые функции $f_n : 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \leq f$, и $g_n : 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots \leq g$, и $f_n(x) \rightarrow f(x)$ и $g_n(x) \rightarrow g(x)$. Тогда

$$\int_E f_n + g_n = \int_E f_n + \int_E g_n, \text{ сделаем предельный переход, значит при } n \rightarrow +\infty$$

$$\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$$

5.12.2 Следствие

Пусть f, g — суммируемые на множестве E , тогда $f + g$ тоже суммируема и $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$.

Доказательство

$$(f + g)_\pm \leq |f + g| \leq |f| + |g|.$$

$$h := f + g,$$

$$h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-,$$

$$h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+,$$

$$\int h_+ + \int f_- + \int g_- = \int h_- + \int f_+ + \int g_+,$$

$$\int h_+ - \int h_- = \int f_+ - \int f_- + \int g_+ - \int g_-, \text{ тогда}$$

$$\int h = \int f + \int g.$$

5.13 Определение

$\mathcal{L}(X)$ — множество суммируемых функций. Это линейное пространство.

Интеграл: $\mathcal{L}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ — это линейная функция, но красивее говорить линейный функционал.

$f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}(X)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, тогда $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n \in \mathcal{L}(X)$.

$$\int_X f = I(f), \int_X \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n = \alpha_1 \int_X f_1 + \dots + \alpha_n \int_X f_n$$

$$I(\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n) = I(\alpha_1 f_1) + \dots + I(\alpha_n f_n).$$

5.14 Теорема об интегрировании положительных рядов

$u_n \geq 0$ почти везде, измеримы на E . Тогда

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu.$$

5.14.1 Доказательство

Очевидно по теореме Леви.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \text{ и } p \leq S_N \leq S_{N+1} \leq \dots \text{ и } S_N \rightarrow S(x).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E S_N = \int_E S$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_E u_k(x) = \int_E S(x) d\mu.$$

5.14.2 Следствие

u_n — измеримая функция, $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| < +\infty$. Тогда

$\sum u_n$ — абсолютно сходится почти везде на E .

Доказательство

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(x)|$$

$$\int_E S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n(x)| < +\infty, \text{ значит } S(x) \text{ конечна почти всюду.}$$

$$S(x) = +\infty \text{ при } x \in B, \mu B > 0, S(x) \geq n \cdot \chi_B \int_E S(x) \geq n \cdot \mu B.$$