

# Содержание

<b>I</b>	<b>Интеграл по мере</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Интеграл ступенчатой функции</b>	<b>4</b>
1.1	Свойства . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Интеграл неотрицательной измеримой функции</b>	<b>5</b>
2.1	Свойства . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Суммируемая функция</b>	<b>6</b>
3.1	Свойство . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Интеграл суммируемой функции</b>	<b>7</b>
4.1	Свойства . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Простейшие свойства интеграла Лебега</b>	<b>8</b>
5.1	Доказательство . . . . .	8
5.2	Доказательство . . . . .	8
5.3	Доказательство . . . . .	8
5.4	Доказательство . . . . .	9
5.5	Доказательство . . . . .	9
5.6	Доказательство . . . . .	9
<b>6</b>	<b>Счетная аддитивность интеграла (по множеству)</b>	<b>10</b>
6.1	Лемма . . . . .	10
6.1.1	Доказательство . . . . .	10

6.2	Теорема . . . . .	10
6.2.1	Доказательство . . . . .	10
6.3	Следствие . . . . .	11
6.4	Следствие 2 . . . . .	11
<b>II Предельный переход под знаком интеграла</b>		<b>12</b>
6.5	Теорема . . . . .	13
6.5.1	Доказательство . . . . .	13
6.6	Теорема . . . . .	13
6.6.1	Доказательство . . . . .	13
6.6.2	Следствие . . . . .	14
6.7	Определение . . . . .	14
6.8	Теорема об интегрировании положительных рядов . . . . .	15
6.8.1	Доказательство . . . . .	15
6.8.2	Следствие . . . . .	15

Часть I

# Интеграл по мере

# 1 Интеграл ступенчатой функции

$f = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \chi_{E_k}$ ,  $f \geq 0$ , где  $E_k \in \mathcal{A}$  — допустимое разбиение, тогда интеграл ступенчатой функции  $f$  на множестве  $X$  есть

$$\int_X f d\mu = \int_X f(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mu E_k$$

Дополнительно будем считать, что  $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ .

## 1.1 Свойства

- Интеграл не зависит от допустимого разбиения:

$$f = \sum \alpha_j \chi_{F_j} = \sum_{k,j} \lambda_k \chi_{E_k \cap F_j}, \text{ тогда } \int F = \sum \lambda_k \mu E_k = \sum_k \lambda_k \sum_j \mu(E_k \cap F_j) = \sum \alpha_j \mu F_j = \int F;$$

- $f \leq g$ , то  $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$ .

## 2 Интеграл неотрицательной измеримой функции

$f \geq 0$ , измерима, тогда интеграл неотрицательной измеримой функции  $f$  есть

$$\int_X f d\mu = \sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \left( \int_X g d\mu \right).$$

### 2.1 Свойства

- Для ступенчатой функции  $f$  (при  $f \geq 0$ ) это определение даёт тот же интеграл, что и для ступенчатой функции;
- $0 \leq \int_X f \leq +\infty$ ;
- $0 \leq g \leq f$ ,  $g$  — ступенчатая,  $f$  — измеримая, тогда  $\int_X g \leq \int_X f$ .

### 3 Суммируемая функция

$f$  — измеримая,  $f_+$  и  $f_-$  — срезки, тогда если  $\int_X f_+$  или  $\int_X f_-$  — конечен, тогда интеграл суммируемой функции есть

$$\int_X f d\mu = \int_X f_+ - \int_X f_-.$$

Если  $\int_X f \neq \pm\infty$ , то говорят, что  $f$  — *суммируемая*, а также  $\int |f|$  — конечен ( $|f| = f_+ + f_-$ ).

#### 3.1 Свойство

Если  $f \geq 0$  — измерима, то это определение даёт тот же интеграл, что и интеграл измеримой неотрицательной функции.

## 4 Интеграл суммируемой функции

$E \subset X$  — измеримое множество,  $f$  — измеримо на  $X$ , тогда интеграл  $f$  по множеству  $E$  есть

$$\int_E f d\mu := \int_X f \chi_E d\mu.$$

$f$  — суммируемая на  $E$  если  $\int_E f_+ -$  и  $\int_E f_-$  — конечны одновременно.

### 4.1 Свойства

- $f = \sum \lambda_k \chi_{E_k}$ , то  $\int_E f = \sum \lambda_k \mu(E_k \cap E)$ ;
- $f \geq 0$  — измерима, тогда  $\int_E f d\mu = \sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \left( \int_X g d\mu \right).$

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  — произвольное пространство с мерой.

$\mathcal{L}^0(X)$  — множество измеримых почти везде конечных функций.

## 5 Простейшие свойства интеграла Лебега

1. *Монотонность:*

$$f \leq g \Rightarrow \int_E f \leq \int_E g.$$

### 5.1 Доказательство

$$\bullet \sup_{\substack{\tilde{f} \text{ - ступ.} \\ 0 \leq \tilde{f} \leq f}} \left( \int_X \tilde{f} d\mu \right) \leq \sup_{\substack{\tilde{g} \text{ - ступ.} \\ 0 \leq \tilde{g} \leq g}} \left( \int_X \tilde{g} d\mu \right);$$

- $f$  и  $g$  — произвольные, то работаем со срезками, и  $f_+ \leq g_+$ , а  $f_- \geq g_-$ , тогда очевидно и для интегралов.

$$2. \int_E 1 \cdot d\mu = \mu E, \int_E 0 \cdot d\mu = 0.$$

### 5.2 Доказательство

По определению.

$$3. \mu E = 0, f \text{ — измерима, тогда } \int_E f = 0.$$

### 5.3 Доказательство

- $f$  — ступенчатая, то по определению интеграла для ступенчатых функций получаем 0;
  - $f \geq 0$  — измеримая, то по определению интеграла для измеримых неотрицательных функций также получаем 0;
  - $f$  — любая, то разбиваем на срезки  $f_+$  и  $f_-$  и снова получаем 0.
4. (a)  $\int -f = - \int f;$   
 (b)  $\forall c > 0 : \int cf = c \int f.$



## 5.4 Доказательство

- $(-f)_+ = f_-$  и  $(-f)_- = f_+$  и  $\int -f = f_- - f_+ = -\int f$ .
- $f \geq 0$  — очевидно,  $\sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq cf}} \left( \int g \right) = c \sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \left( \int g \right)$ .

5. Пусть существует  $\int_E f d\mu$ , тогда  $\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|$ .

## 5.5 Доказательство

$$-|f| \leq f \leq |f|,$$

$$-\int_E |f| \leq \int_E f \leq \int_E |f|.$$

6.  $f$  — измерима на  $E$ ,  $\mu E < +\infty$ ,  $\forall x \in E : a \leq f(x) \leq b$ . Тогда

$$a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E.$$

## 5.6 Доказательство

$$\int_E a \leq \int_E f \leq \int_E b,$$

$$a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E.$$

## 6 Счетная аддитивность интеграла (по множеству)

### 6.1 Лемма

$A = \bigsqcup A_i$ , где  $A, A_i$  — измеримы,  $g \geq 0$  — ступенчатые. Тогда

$$\int_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} g d\mu.$$

#### 6.1.1 Доказательство

$$g = \sum \lambda_k \chi_{E_k}.$$

$$\int_A g d\mu = \sum \lambda_k \mu(A \cap E_k) = \sum_k \lambda_k \sum_i \mu(A_i \cap E_k) = \sum_i \left( \sum_k \lambda_k \mu(A_i \cap E_k) \right) = \sum_i \int_{A_i} g d\mu.$$

### 6.2 Теорема

$f : C \rightarrow \bar{R}$ ,  $f \geq 0$  — измеримая на  $A$ ,  $A$  — измерима,  $A = \bigsqcup A_i$ , все  $A_i$  — измеримы. Тогда

$$\int_A f d\mu = \sum_i \int_{A_i} f d\mu$$

#### 6.2.1 Доказательство

•  $\leq$

$g$  — ступенчатая,  $0 \leq g \leq f$ , тогда  $\int_A g = \sum \int_{A_i} g \leq \sum \int_{A_i} f$ . Осталось перейти к  $\sup$ .

•  $\geq$

$$A = A_1 \sqcup A_2, \sum \lambda_k \chi_{E_k} = g_1 \leq f \chi_{A_1}, g_2 \leq f \chi_{A_2} = \sum \lambda_k \chi_{E_k}, g_1 + g_2 \leq f \chi_A$$

$$\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 = \int_A g_1 + g_2.$$

переходим к  $\sup g_1$  и  $g_2$

$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \leq \int_A f$$

по индукции разобьём для  $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n$ ,  $A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$  и  $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n \sqcup B_n$ , где

$$B_n = \bigsqcup_{i \geq n+1} A_i, \text{ тогда}$$

$$\int_A \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_B f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f \Rightarrow \int_A f \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f$$

### 6.3 Следствие

$f \geq 0$  — измеримая,  $\nu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ ,  $\nu E = \int_E f d\mu$ . Тогда  $\nu$  — мера.

### 6.4 Следствие 2

$A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ ,  $f$  — суммируемая на  $A$ , тогда

$$\int_A f = \sum_i \int_{A_i} f.$$

## Часть II

# Предельный переход под знаком интеграла

## 6.5 Теорема

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $f_n$  — измерима,  $\forall n : 0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$  при почти всех  $x$ .

$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  при почти всех  $x$ . Тогда

$$\lim \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f d\mu.$$

### 6.5.1 Доказательство

$f$  — измерима как предел, измерима.

•  $\leq$

$f_n(x) \leq f(x)$  почти везде, тогда  $\forall n : \int_X f_n(x) d\mu \leq \int_X f d\mu$ , откуда следует, что и предел не превосходит.

•  $\geq$

Достаточно доказать, что для любой ступенчатой функции  $g : 0 \leq g \leq f$  верно  $\lim \int_X f_n \geq \int_X g$ .

Достаточно доказать, что  $\forall c \in (0, 1)$  верно  $\lim \int_X f_n \geq c \int_X g$ .

$$E_n := X(f_n \geq cg), E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$$

$\bigcup E_n = X$ , т.е.  $c < 1$ , то  $cg(x) < f(x)$ ,  $f_n(x) \rightarrow f(x) \Rightarrow f_n$  попадёт в  $c$  зазор  $cg(x) < f(x)$ .

$$\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq \int_{E_n} cg = c \int_{E_n} g,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} c \int_{E_n} g = c \int_X g, \text{ потому что это непрерывность снизу меры } A \mapsto \int_A g.$$

## 6.6 Теорема

Пусть  $f, g$  — измеримы на  $E$ ,  $f \geq 0, g \geq 0$ . Тогда  $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$ .

### 6.6.1 Доказательство

Если  $f, g$  — ступенчатые, то очевидно.

Разберём общий случай. Существуют ступенчатые функции  $f_n : 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \leq f$ , и  $g_n : 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots \leq g$ , и  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  и  $g_n(x) \rightarrow g(x)$ . Тогда

$$\int_E f_n + g_n = \int_E f_n + \int_E g_n, \text{ сделаем предельный переход, значит при } n \rightarrow +\infty$$

$$\int_E f + g = \int_f + \int_E g$$

### 6.6.2 Следствие

Пусть  $f, g$  — суммируемые на множестве  $E$ , тогда  $f + g$  тоже суммируема и  $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$ .

*Доказательство*

$$(f + g)_\pm \leq |f + g| \leq |f| + |g|.$$

$$h := f + g,$$

$$h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-,$$

$$h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+,$$

$$\int h_+ + \int f_- + \int g_- = \int h_- + \int f_+ + \int g_+,$$

$$\int h_+ - \int h_- = \int f_+ - \int f_- + \int g_+ - \int g_-, \text{ тогда}$$

$$\int h = \int f + \int g.$$

## 6.7 Определение

$\mathcal{L}(X)$  — множество суммируемых функций. Это линейное пространство.

Интеграл:  $\mathcal{L}(X) \rightarrow \mathbb{R}$  — это линейная функция, но красивее говорить линейный функционал.

$f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}(X)$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ , тогда  $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n \in \mathcal{L}(x)$ .

$$\int_X f = I(f), \int_X \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n = \alpha_1 \int_X f_1 + \dots + \alpha_n \int_X f_n$$

$$I(\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n) = I(\alpha_1 f_1) + \dots + I(\alpha_n f_n).$$

## 6.8 Теорема об интегрировании положительных рядов

$u_n \geq 0$  почти везде, измеримы на  $E$ . Тогда

$$\int_E \left( \sum_{i=1}^{+\infty} u_n \right) d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu.$$

### 6.8.1 Доказательство

Очевидно по теореме Леви.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \text{ и } p \leq S_N \leq S_{N+1} \leq \dots \text{ и } S_N \rightarrow S(X).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E S_N = \int_E S$$

$$\lim \sum_{k=1}^n \int_E u_k(x) = \int_E S(x) d\mu.$$

### 6.8.2 Следствие

$u_n$  — измеримая функция,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| < +\infty$ . Тогда

$\sum u_n$  — абсолютно сходится почти везде на  $E$ .

*Доказательство*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(x)|$$

$$\int_E S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n(x)| < +\infty, \text{ значит } S(x) \text{ конечна почти всюду.}$$

$$S(x) = +\infty \text{ при } x \in B, \mu B > 0, S(x) \geq n \cdot \chi_B \int_E S(x) \geq n \cdot \mu B.$$