

Содержание

I	Интеграл по мере	16
1	Интеграл ступенчатой функции	17
1.1	Свойства	17
2	Интеграл неотрицательной измеримой функции	18
2.1	Свойства	18
3	Суммируемая функция	19
3.1	Свойство	19
4	Интеграл суммируемой функции	20
4.1	Свойства	20
5	Простейшие свойства интеграла Лебега	21
5.1	Доказательство	21
5.2	Доказательство	21
5.3	Доказательство	21
5.4	Доказательство	22
5.5	Доказательство	22
5.6	Доказательство	22
6	Счетная аддитивность интеграла (по множеству)	23
6.1	Лемма	23
6.1.1	Доказательство	23

6.2	Теорема	23
6.2.1	Доказательство	23
6.3	Следствие	24
6.4	Следствие 2	24
II	Предельный переход под знаком интеграла	25
7	Теорема Леви	26
7.1	Доказательство	26
8	Линейность интеграла Лебега	27
8.1	Доказательство	27
8.2	Следствие	27
8.2.1	Доказательство	27
9	Теорема об интегрировании положительных рядов	28
9.1	Доказательство	28
9.2	Следствие	28
9.2.1	Доказательство	28
10	Абсолютная непрерывность интеграла	29
10.1	Доказательство	29
10.2	Следствие	29
11	02.03.2020	30
11.1	Теорема Лебега о мажорированной сходимости	30

11.1.1 Доказательство	30
11.2 Теорема Лебега о мажорированной сходимости почти везде	31
11.2.1 Доказательство	31
11.3 Теорема Фату	31
11.3.1 Замечание	31
11.3.2 Доказательство	31
11.3.3 Следствие	32
11.3.4 Следствие 2	32
III Произведение мер	33
12 Произведение мер	34
13 Теорема о произведении мер	35
13.1 Доказательство	35
13.2 Замечание	35
13.3 Дополнительная теорема (без доказательства)	35
14 Сечения множества	36
15 Принцип Кавальери	37
15.1 Замечание	37
15.2 Доказательство	37
15.3 Следствие	38
15.4 Замечание	38

16 Совпадение определенного интеграла и интеграла Лебега	39
16.1 Доказательство	39
16.2 Замечание	39
17 Теорема Тонелли	40
17.1 Доказательство	40
18 Теорема Фубини	42
18.0.1 Следствие	42
19 Какая-то нужная штука для лекции 02.03.2020, потом удалю	43
IV Замена переменных в интеграле	44
20 Образ меры при отображении	45
20.1 Замечание 1	45
20.2 Замечание 2	45
21 Взвешенный образ меры	46
22 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры	47
22.1 Замечание	47
22.2 Доказательство	47
22.3 Следствие	47
23 Плотность одной меры по отношению к другой	48
23.1 Замечание	48

24 Критерий плотности	49
24.0.1 Доказательство	49
25 Единственность плотности	50
25.0.1 Доказательство	50
25.1 Следствие	50
26 Лемма об образе малых кубических ячеек	51
26.0.1 Доказательство	51
27 Теорема об образе меры Лебега при диффеоморфизме	52
27.1 Лемма	52
27.2 Теорема	52
27.2.1 Доказательство	52
28 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега	55
28.1 Доказательство	55
29 Сферические координаты в \mathbb{R}^m	56
30 Формула для Бета-функции	57
30.0.1 Доказательство	57
31 Объем шара в \mathbb{R}^m	58
V Функция распределения	59
32 Теорема о вычислении интеграла по мере Бореля—Стилтьеса (с леммой)	60

32.1	Определение	60
32.2	Лемма	60
32.2.1	Доказательство	60
32.3	Теорема	60
32.3.1	Доказательство	61
32.3.2	Следствие	61
VI	Ряды Фурье	62
33	Интегральные неравенства Гельдера и Минковского	63
34	Интеграл комплекснозначной функции	64
34.1	Вывод	64
35	Пространство $L^p(E, \mu)$	65
36	Существенный супремум	66
36.1	Свойства	66
36.1.1	Доказательство	66
37	Пространство $L^\infty(E, \mu)$	67
37.1	Замечание	67
38	Теорема о вложении пространств L^p	68
38.1	Доказательство	68
38.2	Следствие	68
38.2.1	Доказательство	68

VII Поверхностный интеграл	69
39 Измеримое множество на простом гладком двумерном многообразии в \mathbb{R}^3	69
40 Мера Лебега на простом гладком двумерном многообразии в \mathbb{R}^3	70
41 Поверхностный интеграл первого рода	71
42 Кусочно-гладкая поверхность в \mathbb{R}^3	72
VIII Преобразование Фурье	73
43 Теорема о сходимости в пространствах L^p и по мере	73
43.1 Доказательство	73
44 Полнота L^p	74
44.0.1 Доказательство	74
45 Плотность в L^p множества ступенчатых функций	75
45.1 Определение	75
45.2 Лемма	75
45.2.1 Замечание	75
45.2.2 Доказательство	75
45.3 Определение	76
45.4 Лемма Урысона	76
45.5 Доказательство	76
IX Поверхностный интеграл II рода	78

46 Финитная функция	79
47 Сторона поверхности	80
48 Задание стороны поверхности с помощью касательных реперов	81
49 Интеграл II рода	82
49.0.1 Замечания	82
50 Плотность в L^p множества финитных непрерывных функций	83
50.1 Доказательство	83
50.2 Замечание	83
51 Теорема о непрерывности сдвига	84
51.1 Необходимое определение	84
51.2 Формулировка теоремы	84
51.3 Доказательство	84
52 Формула Грина	85
52.1 Теорема	85
52.2 Доказательство	85
53 Формула Стокса	86
53.1 Доказательство	86
54 Формула Гаусса-Остроградского	87
54.1 Доказательство	87
54.2 Следствие	87

55 Соленоидальность бездивергентного векторного поля	88
55.1 Дивергенция	88
55.2 Ротор	88
55.3 Вспомогательная теорема	88
55.4 Соленоидальное поле	88
55.5 Теорема	89
55.5.1 Доказательство	89
 X Гильбертовы пространства	 90
56 Гильбертово пространство	91
57 Теорема о свойствах сходимости в Гильбертовом пространстве	92
57.1 Доказательство	92
58 Ортогональная система (семейство) векторов	93
59 Ортонормированная система	94
59.1 Замечание	94
60 Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе	95
60.1 Доказательство	95
 XI Ряды Фурье	 96
61 Коэффициенты Фурье	97
62 Ряд Фурье в Гильбертовом пространстве	98

63 Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя	99
63.1 Доказательство	99
63.2 Неравенство Бесселя	99
64 Теорема Рисса — Фишера о сумме ряда Фурье. Равенство Парсеваля	100
64.1 Доказательство	100
65 Базис, полная, замкнутая ОС	101
66 Теорема о характеристике базиса	102
66.1 Доказательство	102
XII Интегралы, зависящие от параметра	103
66.2 Несобственный интеграл в \mathbb{R}	104
66.3 Теорема	104
66.3.1 Доказательство	104
67 Предельный переход под знаком интеграла при наличии равномерной сходимости	105
67.1 Доказательство	105
67.2 определение	106
67.3 Теорема Лебега о мажорирующей сходимости	107
67.3.1 Доказательство	107
67.3.2 Следствие	107
67.4 Правило Лейбница	107
67.4.1 Доказательство	108

XIII	Тригонометрические ряды Фурье	109
67.5	Тригонометрический полином порядка n	109
68	Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда	110
69	Доказательство	110
69.1	Определение	111
69.1.1	Замечание	111
69.1.2	Еще шаманство	111
70	Теорема Римана-Лебега	112
70.1	Следствие	112
70.2	Доказательство	112
70.3	Модуль непрерывности	113
70.4	Теорема	113
70.4.1	Доказательство	113
XIV	05.05.2020	114
70.5	Равномерно сходящийся интеграл	114
70.6	Что-то похожее на признак Вейерштрасса	114
70.7	Ложное воспоминание Констриана Петровича	114
70.8	Теорема	115
70.8.1	Доказательство	115
70.8.2	Следствие	115
70.9	Определение	115

70.9.1	Пример	116
70.10	Следствие	116
70.11	Утверждение	116
70.12	Следствие	116
70.13	Ядро Дирихле	116
70.14	Ядро Фейера	116
70.15	Свойства	117
70.15.1	Доказательство	117
70.16	Интеграл Дирихле	117
71	Принцип локализации Римана	118
71.1	Доказательство	118
71.2	Замечания	118
72	До свидания, теория меры	120
72.1	Теорема об интегрировании по параметру	120
72.1.1	Доказательство	120
72.2	Правило Лейбница для несобственных интегралов	121
72.2.1	Доказательство	121
XV	11.05.2020	122
72.3	Признак Дины	122
72.3.1	Доказательство	122
72.4	Замечания	123
72.5	Следствие	123

72.6	Следствие 2	123
72.6.1	Доказательство	123
72.7	Пример	124
72.8	Конфетка	124
72.8.1	Доказательство	124
XVI	Свёртки и аппроксимативные единицы	126
72.9	Определение	126
72.10	Корректность определения	126
72.11	Коэффициент Фурье свёртки	126
72.12	Ещё одно свойство	127
72.12.1	Доказательство	127
XVII	18.05.2020	128
72.13	Теорема	128
72.14	Определение	128
72.14.1	Замечание	129
72.14.2	Суррогатная аксиома 3	129
72.14.3	Вывод	129
72.14.4	Замечание	129
72.15	Свойства аппроксимативной единицы	129
72.15.1	Доказательство	129
72.15.2	Следствие	130

72.16	Теорема Фейера	131
72.16.1	Доказательство	131
XVIII	Преобразование Фурье	131
72.17	Определение	131
72.18	Свойства	132
72.19	Теорема	132
72.20	Пример	133
72.21	Теорема	133
XIX	25.05.2020	134
72.22	Теорема Фейера	134
72.22.1	Следствие	134
72.23	Следствие 2	134
72.23.1	Доказательство	134
72.23.2	Следствие следствия 1	134
72.23.3	Следствие следствия 2	135
72.23.4	Следствие следствия 3	135
72.24	Следствие 3 (теорема Вейерштрасса)	135
72.24.1	Доказательство	135
72.25	Замечание	135
XX	Интегрирование рядов Фурье	136
72.26	Лемма	136

72.26.1 Доказательство	136
72.27 Интегрирование рядов Фурье	136
72.27.1 Замечание	136
72.27.2 Доказательство	137
72.27.3 Замечание	137

Часть I

Интеграл по мере

1 Интеграл ступенчатой функции

$f = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \chi_{E_k}$, $f \geq 0$, где $E_k \in \mathcal{A}$ — допустимое разбиение, тогда интеграл ступенчатой функции f на множестве X есть

$$\int_X f d\mu = \int_X f(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mu E_k$$

Дополнительно будем считать, что $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

1.1 Свойства

- Интеграл не зависит от допустимого разбиения:

$$f = \sum \alpha_j \chi_{F_j} = \sum_{k,j} \lambda_k \chi_{E_k \cap F_j}, \text{ тогда } \int F = \sum \lambda_k \mu E_k = \sum_k \lambda_k \sum_j \mu(E_k \cap F_j) = \sum \alpha_j \mu F_j = \int F;$$

- $f \leq g$, то $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

2 Интеграл неотрицательной измеримой функции

$f \geq 0$, измерима, тогда интеграл неотрицательной измеримой функции f есть

$$\int_X f d\mu = \sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \left(\int_X g d\mu \right).$$

2.1 Свойства

- Для ступенчатой функции f (при $f \geq 0$) это определение даёт тот же интеграл, что и для ступенчатой функции;
- $0 \leq \int_X f \leq +\infty$;
- $0 \leq g \leq f$, g — ступенчатая, f — измеримая, тогда $\int_X g \leq \int_X f$.

3 Суммируемая функция

f — измеримая, f_+ и f_- — срезки, тогда если $\int_X f_+$ или $\int_X f_-$ — конечен, тогда интеграл суммируемой функции есть

$$\int_X f d\mu = \int_X f_+ - \int_X f_-.$$

Если $\int_X f \neq \pm\infty$, то говорят, что f — *суммируемая*, а также $\int |f|$ — конечен ($|f| = f_+ + f_-$).

3.1 Свойство

Если $f \geq 0$ — измерима, то это определение даёт тот же интеграл, что и интеграл измеримой неотрицательной функции.

4 Интеграл суммируемой функции

$E \subset X$ — измеримое множество, f — измеримо на X , тогда интеграл f по множеству E есть

$$\int_E f d\mu := \int_X f \chi_E d\mu.$$

f — суммируемая на E если $\int_E f_+ -$ и $\int_E f_-$ — конечны одновременно.

4.1 Свойства

- $f = \sum \lambda_k \chi_{E_k}$, то $\int_E f = \sum \lambda_k \mu(E_k \cap E)$;
- $f \geq 0$ — измерима, тогда $\int_E f d\mu = \sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \left(\int_X g d\mu \right).$

(X, \mathcal{A}, μ) — произвольное пространство с мерой.

$\mathcal{L}^0(X)$ — множество измеримых почти везде конечных функций.

5 Простейшие свойства интеграла Лебега

1. *Монотонность:*

$$f \leq g \Rightarrow \int_E f \leq \int_E g.$$

5.1 Доказательство

- $\sup_{\substack{\tilde{f} \text{ - ступ.} \\ 0 \leq \tilde{f} \leq f}} \left(\int_X \tilde{f} d\mu \right) \leq \sup_{\substack{\tilde{g} \text{ - ступ.} \\ 0 \leq \tilde{g} \leq g}} \left(\int_X \tilde{g} d\mu \right);$
- f и g — произвольные, то работаем со срезками, и $f_+ \leq g_+$, а $f_- \geq g_-$, тогда очевидно и для интегралов.

$$2. \int_E 1 \cdot d\mu = \mu E, \int_E 0 \cdot d\mu = 0.$$

5.2 Доказательство

По определению.

$$3. \mu E = 0, f \text{ — измерима, тогда } \int_E f = 0.$$

5.3 Доказательство

- f — ступенчатая, то по определению интеграла для ступенчатых функций получаем 0;
 - $f \geq 0$ — измеримая, то по определению интеграла для измеримых неотрицательных функций также получаем 0;
 - f — любая, то разбиваем на срезки f_+ и f_- и снова получаем 0.
4. (a) $\int -f = - \int f;$
 (b) $\forall c > 0: \int cf = c \int f.$

5.4 Доказательство

- $(-f)_+ = f_-$ и $(-f)_- = f_+$ и $\int -f = f_- - f_+ = - \int f$.
- $f \geq 0$ — очевидно, $\sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq cf}} \left(\int g \right) = c \sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \left(\int g \right)$.

5. Пусть существует $\int_E f d\mu$, тогда $\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|$.

5.5 Доказательство

$$-|f| \leq f \leq |f|,$$

$$- \int_E |f| \leq \int_E f \leq \int_E |f|.$$

6. f — измерима на E , $\mu E < +\infty$, $\forall x \in E : a \leq f(x) \leq b$. Тогда

$$a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E.$$

5.6 Доказательство

$$\int_E a \leq \int_E f \leq \int_E b,$$

$$a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E.$$

6 Счетная аддитивность интеграла (по множеству)

6.1 Лемма

$A = \bigsqcup A_i$, где A, A_i — измеримы, $g \geq 0$ — ступенчатые. Тогда

$$\int_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} g d\mu.$$

6.1.1 Доказательство

$$g = \sum \lambda_k \chi_{E_k}.$$

$$\int_A g d\mu = \sum \lambda_k \mu(A \cap E_k) = \sum_k \lambda_k \sum_i \mu(A_i \cap E_k) = \sum_i \left(\sum_k \lambda_k \mu(A_i \cap E_k) \right) = \sum_i \int_{A_i} g d\mu.$$

6.2 Теорема

$f : C \rightarrow \overline{R}$, $f \geq 0$ — измеримая на A , A — измерима, $A = \bigsqcup A_i$, все A_i — измеримы. Тогда

$$\int_A f d\mu = \sum_i \int_{A_i} f d\mu$$

6.2.1 Доказательство

• \leq

g — ступенчатая, $0 \leq g \leq f$, тогда $\int_A g = \sum \int_{A_i} g \leq \sum \int_{A_i} f$. Осталось перейти к \sup .

• \geq

$$A = A_1 \sqcup A_2, \sum \lambda_k \chi_{E_k} = g_1 \leq f \chi_{A_1}, g_2 \leq f \cdot \chi_{A_2} = \sum \lambda_k \chi_{E_k}, g_1 + g_2 \leq f \cdot \chi_A$$

$$\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 = \int_A g_1 + g_2.$$

переходим к $\sup g_1$ и g_2

$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \leq \int_A f$$

по индукции разобьём для $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n$, $A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ и $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n \sqcup B_n$, где $B_n = \bigsqcup_{i \geq n+1} A_i$,

тогда

$$\int_A \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_{B_n} f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f \Rightarrow \int_A f \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f$$

6.3 Следствие

$f \geq 0$ — измеримая, $\nu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, $\nu E = \int_E f d\mu$. Тогда ν — мера.

6.4 Следствие 2

$A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$, f — суммируемая на A , тогда

$$\int_A f = \sum_i \int_{A_i} f.$$

Часть II

Предельный переход под знаком интеграла

7 Теорема Леви

(X, \mathcal{A}, μ) , f_n — измерима, $\forall n : 0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ при почти всех x .

$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ при почти всех x . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f d\mu.$$

7.1 Доказательство

f — измерима как предел измеримых функций.

• \leq

$f_n(x) \leq f(x)$ почти везде, тогда $\forall n : \int_X f_n(x) d\mu \leq \int_X f d\mu$, откуда следует, что и предел интегралов не превосходит интеграл предела.

• \geq

Достаточно доказать, что для любой ступенчатой функции $g : 0 \leq g \leq f$ верно $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \geq \int_X g$.

Достаточно доказать, что $\forall c \in (0, 1)$ верно $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \geq c \int_X g$.

$$E_n := X(f_n \geq cg), \quad E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$$

$\bigcup E_n = X$, т.к. $c < 1$, то $cg(x) < f(x)$, $f_n(x) \rightarrow f(x) \Rightarrow f_n$ попадёт в "зазор" $cg(x) < f(x)$.

$$\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq \int_{E_n} cg = c \int_{E_n} g,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} c \int_{E_n} g = c \int_X g, \text{ потому что это непрерывность снизу меры } A \mapsto \int_A g.$$

8 Линейность интеграла Лебега

Пусть f, g — измеримы на E , $f \geq 0, g \geq 0$. Тогда $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$.

8.1 Доказательство

Если f, g — ступенчатые, то очевидно.

Разберём общий случай. Существуют ступенчатые функции $f_n : 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \leq f$, и $g_n : 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots \leq g$, и $f_n(x) \rightarrow f(x)$ и $g_n(x) \rightarrow g(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_E f_n + g_n &= \int_E f_n + \int_E g_n, \text{ сделаем предельный переход, значит при } n \rightarrow +\infty \\ \int_E f + g &= \int_E f + \int_E g \end{aligned}$$

8.2 Следствие

Пусть f, g — суммируемые на множестве E , тогда $f + g$ тоже суммируема и $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$.

8.2.1 Доказательство

$$(f + g)_\pm \leq |f + g| \leq |f| + |g|.$$

$$h := f + g,$$

$$h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-,$$

$$h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+,$$

$$\int h_+ + \int f_- + \int g_- = \int h_- + \int f_+ + \int g_+,$$

$$\int h_+ - \int h_- = \int f_+ - \int f_- + \int g_+ - \int g_-, \text{ тогда}$$

$$\int h = \int f + \int g.$$

9 Теорема об интегрировании положительных рядов

$u_n \geq 0$ почти везде, измеримы на E . Тогда

$$\int_E \left(\sum_{i=1}^{+\infty} u_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu.$$

9.1 Доказательство

Очевидно по теореме Леви.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \text{ и } p \leq S_N \leq S_{N+1} \leq \dots \text{ и } S_N \rightarrow S(X).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E S_N = \int_E S,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_E u_k(x) = \int_E S(x) d\mu.$$

9.2 Следствие

u_n — измеримая функция, $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| < +\infty$. Тогда

$\sum u_n$ — абсолютно сходится почти везде на E .

9.2.1 Доказательство

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(x)|$$

$$\int_E S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n(x)| < +\infty, \text{ значит } S(x) \text{ конечна почти всюду.}$$

10 Абсолютная непрерывность интеграла

f — суммируемая функция, тогда верно:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall E \in \mathcal{A} : \mu E < \delta : \left| \int_E f \right| < \varepsilon$$

.

10.1 Доказательство

$X_n = X (f \geq n)$, $X_n \supset X_{n+1} \supset \dots$ и $\mu \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} X_n \right) = 0$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon : \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \frac{\varepsilon}{2}$ ($A \mapsto \int_A |f|$ — мера, тогда $\int_{\bigcap X_n} |f| = 0$ и по непрерывности меры сверху).

$\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$, берём $E : \mu E < \delta$.

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f| = \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \setminus X_{n_\varepsilon}} |f| \leq \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| + n_\varepsilon \mu E < \frac{\varepsilon}{2} + n_\varepsilon \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon} = \varepsilon.$$

10.2 Следствие

e_n — измеримое множество, $\mu e_n \rightarrow 0$, f — суммируемая. Тогда $\int_{e_n} f \rightarrow 0$.

11 02.03.2020

$f_n \rightrightarrows f$ по мере то же самое, что и $\mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$. Ещё есть способ $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$. Можно ли вывести хоть какую-нибудь импликацию.

\Rightarrow нельзя, пример: $f_n(x) = \frac{1}{nx}$ в (\mathbb{R}, λ) , тогда $f_n \rightrightarrows 0$ по мере. а $\int \left| \frac{1}{nx} \right| d\mu = +\infty$.

\Leftarrow можно: $\mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) = \int_{x_n} 1 d\mu \leq \int_{x_n} \frac{|f_n - f|}{\varepsilon} d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n - f| \rightarrow 0$.

Хотим доказать подобие $f_n \rightarrow f$, то $\int f_n \rightarrow \int f$.

11.1 Теорема Лебега о мажорированной сходимости

f_n, f — измеримые, почти везде конечные функции. $f_n \xRightarrow[\mu]{} f$. Также существует g , что:

1. $\forall n : |f_n| \leq g$ почти везде;
2. g — суммируема на X (g — мажоранта).

Тогда $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$, и тем более $\int_X f_n \rightarrow \int_X f$.

11.1.1 Доказательство

f_n — суммируема в силу первого утверждения про g , f — суммируема по следствию теоремы Рисса. Тем более $\left| \int_X f_n - \int_X f \right| \leq \left| \int_X f_n - f \right| \leq \int |f_n - f|$.

1. $\mu X < +\infty$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. $X_n := X(|f_n - f| \geq \varepsilon)$, $\mu X_n \rightarrow 0$.

$$\int_X |f_n - f| = \int_{x_n} + \int_{x_n^c} \leq \int_{x_n} 2g + \int_{x_n^c} \varepsilon_0 \leq \int_{x_n} 2g + \int_x \varepsilon < \varepsilon(1 + \mu X). \text{ (при больших } n \text{ выражение } \int_{x_n} 2g \leq \varepsilon).$$

2. $\mu X = +\infty$, $\varepsilon > 0$.

Утверждение: $\exists A$ — измеримое, μA — конечное, $\int_{X \setminus A} g < \varepsilon$.

Доказательство

$$\int G = \sup \left\{ \int g_n : h \text{ — ступенчатая функция } 0 \leq h \leq g \right\}$$

$$\exists h_0 : \int_X g - \int_X h_0 < \varepsilon, A := \text{supp } h_0. \text{ (где supp — носитель (support))}$$

$$\int_{X \setminus A} g + \int_A g - h_0 < \varepsilon.$$

$$\int_X |f_n - f| = \int_A + \int_{X \setminus A} \leq \int_A |f_n - f| + 2\varepsilon < 3\varepsilon \text{ при больших } n.$$

11.2 Теорема Лебега о мажорированной сходимости почти везде

(X, \mathcal{A}, μ) , f_n, f — измеримые, $f_n \rightarrow f$ — почти везде.

Существует такая g , что:

1. $|f_n| \leq g$ почти везде;
2. g — суммируема.

11.2.1 Доказательство

f_n, f — суммируемая, тем более — как и раньше.

$h_n := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, \dots)$, h_n убывает. $0 \leq h_n \leq 2g$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) = \overline{\lim} |f_n - f| = 0$ почти везде.

$2g - h \geq 0$, возрастают, тогда по теореме Леви $\int_X 2g - h \rightarrow \int_X 2g$, значит $\int_X h_n \rightarrow 0$, тогда $\int_X |f_n - f| \leq \int_X h_n \rightarrow 0$.

11.3 Теорема Фату

$(X, \mathcal{A}, \mu, f_n \geq 0$ — измеримые, $f_n \rightarrow f$ почти везде. Если $\exists C > 0$, что $\forall n: \int_X f_n \leq C$, то $\int_X f \leq C$.

11.3.1 Замечание

Вообще говоря $\int_X f_n \not\rightarrow \int_X f$.

11.3.2 Доказательство

$g_n = \int (f_n, f_{n+1}, \dots)$.

g_n возрастает, $g_n \rightarrow f$ почти везде. $\lim g_n = \underline{\lim} f_n = f$ почти везде.

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n \leq C, \text{ тогда } \int F \leq C.$$

Примерчик

$$f_n = n \cdot \chi_{[0, \frac{1}{n}]} \rightarrow 0 \text{ почти везде.}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n = 1, \int f = 0.$$

Положительность важна:

$$f_n \geq 0, \text{ тогда } \int -f_n \leq -1, \text{ но } \int f = 0 \geq -1.$$

11.3.3 Следствие

$$f_n \xRightarrow[\mu]{} f \text{ (} f_{n_k} \rightarrow f \text{)}.$$

11.3.4 Следствие 2

$f_n \geq 0$, измеримая. Тогда

$$\int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n.$$

Доказательство

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n \leq C.$$

Берём n_k

$$\underline{\lim} \left(\int_X f_n \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\int_X f_{n_k} \right).$$

$$\int_X f_{n_k} \rightarrow \lim \left(\int_X f_n \right), \text{ а } \int_x g_n \rightarrow \int_X \underline{\lim} f_n.$$

Часть III

Произведение мер

12 Произведение мер

(X, \mathcal{A}, μ) и (Y, \mathcal{B}, ν) — пространства с мерой.

$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ — семейство подмножеств в $X \times Y$.

\mathcal{A}, \mathcal{B} — полукольца, значит и $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ — полукольцо.

$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ — полукольцо *измеримых прямоугольников* (на самом деле это не всегда так).

Тогда введём меру на $A \times B$ — $\mu_0(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$.

Обозначим $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ как произведение пространств с мерой.

13 Теорема о произведении мер

1. μ_0 — мера на полукольце $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$;
2. μ, ν — σ -конечные, значит μ_0 — σ -конечное.

13.1 Доказательство

1. Проверим счётную аддитивность μ_0 . $\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$, $(x, y) \in X \times Y$.

$P = \bigsqcup_{\text{сч.}} P_k$ — измеримые прямоугольники. $P = A \times B$ и $P_k = A_k \times B_k$, $\chi_P = \sum \chi_{P_k}$.

$\chi_A(x) \chi_B(y) = \sum_k \chi_{A_k}(x) \chi_{B_k}(y)$. Интегрируем по ν (по пространству Y).

$\chi_A(x) \cdot \nu(B) = \sum \chi_{A_k}(x) \nu(B_k)$. Интегрируем по μ .

$$\mu A \cdot \nu B = \sum \mu A_k \cdot \nu B_k.$$

2. $X = \bigcup X_k$, $Y = \bigcup Y_j$, где μX_k и νY_j — конечные, $X \times Y = \bigcup_{k,j} X_k \times Y_j$.

$(\mathbb{R}^m, \mathcal{M}^m, \lambda_m)$ и $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}^n, \lambda_n)$.

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu_0)$, где $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ — полукольцо.

Запускаем теорему о продолжении меры.

$\rightsquigarrow (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu)$, где $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ — σ -алгебра.

μ, ν — σ -конечная, следовательно продолжение определено однозначно.

13.2 Замечание

Произведение мер ассоциативно.

13.3 Дополнительная теорема (без доказательства)

λ_{m+n} есть произведение мер λ_m и λ_n .

14 Сечения множества

X , Y и $C \subset X \times Y$, $C_x = \{y \in Y : (x, y) \in C\} \subset Y$ — сечение множества C , аналогично определим $C^y = \{x \in X : (x, y) \in C\}$.

Допустимы объединения, пересечения и т.п.

15 Принцип Кавальери

(X, \mathcal{A}, μ) и (Y, \mathcal{B}, ν) , а также μ, ν — σ -конечные и полные.

$m = \mu \times \nu$, $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Тогда:

1. при почти всех $x \in X$ сечение $C_x \in \mathcal{B}$;
2. $x \mapsto \nu(C_x)$ — измерима (почти везде) на X ;
3. $mC = \int_X \nu(C_x) d\mu(x)$.

15.1 Замечание

1. C — измеримая \nRightarrow что $\forall x: C_x$ — измеримое.
2. $\forall x, \forall y, C_x, C_y$ — измеримы \nRightarrow что C — измеримо (пример можно взять из Серпинского).

15.2 Доказательство

D — класс множеств $X \times Y$, для которых принцип Кавальери верен.

1. $D \times \mathcal{B} \subset D$, $C = A \times B$, $C_x = \begin{cases} B & x \in A \\ \emptyset & x \notin A \end{cases}$.

$$x \mapsto C_x : \nu B \cdot \chi_A(x).$$

$$\int_X \nu B \chi_A(x) d\mu(x) = \mu A \cdot \nu B = mC.$$

2. E_i — дизъюнктные, $E_i \in D$. Тогда $\bigsqcup E_i \in D$.

$(E_i)_x$ — измеримые при почти всех x .

При почти всех x все сечения $(E_i)_x$, $i = 1, 2, \dots$ — измеримые.

$E_x = \bigsqcup (E_i)_x$ — измеримые при почти всех x .

$\nu E_x = \sum \nu(E_i)_x$, значит $x \mapsto \nu E_x$ измеримая функция.

$$\int_X \nu E_x d\mu = \int_X \sum \nu(E_i)_x d\mu = \sum \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \sum mE_i = mE$$

3. $E_i \in D, \dots \supset E_i \supset E_{i+1} \supset \dots, E = \bigcap_{i=1}^{+\infty} E_i, mE_i < +\infty$. Тогда $E \in D$.

$$\int_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty \Rightarrow \nu(E_i)_x \text{ — почти везде конечны.}$$

$$(E_i)_x \supset (E_{i+1})_x \supset \dots, E_x = \bigcap_{i=1}^{+\infty} (E_i)_x \Rightarrow E_x \text{ — измеримо при почти всех } x.$$

При почти всех x (для тех x , для которых $\nu(E_i)_x$ — конечные сразу все i или при $i = 1$), поэтому можно утверждать, что $\nu E_x = \lim_{i \rightarrow +\infty} \nu(E_i)_x \Rightarrow x \mapsto \nu E_x$ — измерима.

$$\int_X \nu E_x d\mu = \int_X \lim_{i \rightarrow +\infty} (\nu E_i)_x = \lim_{i \rightarrow +\infty} \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \lim mE_i = mE \text{ (по непрерывности сверху меры } m).$$

Перестановка пределов доказывается из теоремы Лебега, которую ещё не доказывали $|\nu(E_i)_x| \leq \nu(E_1)_x$ — суммируемая функция.

Мы доказали, что если $A_{ij} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, то $\bigcap_j \left(\bigcup_i A_{ij} \right) \in D$.

$$mE = \inf \left(\sum mP_k, E \subset \bigcup P_k \right).$$

4. $mE = 0 \Rightarrow E \in D$. $H = \bigcap_j \bigcup_i P_{ij}, mH = 0$ ($P_{ij} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$), тогда $E \subset H$ ($H \in D$).

$$0 = mH = \int_X \nu H_x d\mu \Rightarrow \nu H_x = 0 \text{ при почти всех } x, \text{ но } E_x \subset H_x \Rightarrow \text{при почти всех } x \nu E_x = 0, \text{ значит и}$$

$$\int \nu E_x = 0 = mE.$$

5. $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, mC < +\infty \Rightarrow C \in D$.

Для множества C существует множество e , что $me = 0$ и $H = \bigcap_j \bigcup_i P_{ij}$ и $C = H \setminus e, C_x = H_x \setminus e_x$ и $mC = mH$.

$\nu e_x = 0$ при почти всех x , значит $\nu C_x = \nu H_x - \nu e_x$ при почти всех x .

$$\int_X \nu C_x d\mu = \int_X \nu H_x - \nu e_x = \int_X \nu H_x - \int_X \nu e_x = mH = mC.$$

6. C — произвольное, m -измеримое множество, $X = \bigsqcup X_k$ и $Y = \bigsqcup Y_j$, тогда $C = \bigsqcup_{i,j} (C \cap (X_i \times Y_j)) \in D$ по пункту 2. ($\mu X_k, \mu Y_j$ — конечные).

15.3 Следствие

$C \in \mathcal{Q} \otimes \mathcal{B}, P_1(C) := \{x : C_x \neq \emptyset\}$, тогда если $P_1(C)$ — измеримо в X , тогда $mC = \int_{P_1(C)} \nu C_x d\mu x$.

15.4 Замечание

Из того, что C измеримо \nrightarrow что его проекция измерима.

16 Совпадение определенного интеграла и интеграла Лебега

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывное. Тогда $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda_1$.

16.1 Доказательство

Достаточно доказать для $f \geq 0$.

f — непрерывно $\Rightarrow C = \Pi\Gamma(f, [a, b])$ измеримо в \mathbb{R}^2 (почти очевидно).

$C_x = [0, f(x)]$ (или \emptyset) \Rightarrow измеримость $\lambda_1 C_x = f(x)$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lambda_2(\Pi\Gamma(f, [a, b])) = \int_{[a,b]} f(x)d\lambda_1(x).$$

16.2 Замечание

$f \geq 0$ измеримое, значит $\lambda_2 \Pi\Gamma(f, [a, b]) = \int_{[a,b]} f(x)d\lambda_2(x)$.

$f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $C \in X \times Y$, C_x , $f_x : C_x \rightarrow \mathbb{R}$, т.е. $y \mapsto f(x, y)$, аналогично $f^y : C^y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

17 Теорема Тонелли

(X, \mathcal{A}, μ) , (Y, \mathcal{B}, ν) и μ, ν — σ -конечные и полные, а также $m = \mu \times \nu$.

$f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$, измеримая. Тогда

1. при почти всех x функция f_x — измерима почти везде на Y (аналогично при почти всех y функция f^y также измерима на X);
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x(y) d\nu(y) = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ — измерима почти везде на X (аналогично $y \mapsto \psi(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$ — измерима почти везде на Y);
3. $\int_{X \times Y} f(x, y) d\mu = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x).$

17.1 Доказательство

1. $f = \chi_C$, $C \subset X \times Y$, измеримая. $f_x = \chi_{C_x}(y)$. C_x — измеримое при почти всех $x \Rightarrow f_x$ — измеримая при почти всех x .

$$\varphi(x) = \int_Y \chi_{C_x}(y) d\nu(y) = \nu(C_x) \quad (x \mapsto \nu C_x \text{ — измерима по принципу Кавальери}).$$

$$\int_X \varphi(x) d\mu = \int_X \nu C_x d\mu = mC = \int_{X \times Y} \chi_C dm.$$

2. $f = \sum_{\text{кон.}} a_k \chi_{C_k}$, $f \geq 0$.

$$f_x = \sum a_k \chi_{(C_k)_x}(y).$$

$x \mapsto \int f_x(y) d\nu(y) = \sum a_k \nu(C_k)_x$ — измеримая (отдельные слагаемые — измеримые, значит и вся сумма измеримая).

$$\int_X \left(\int_Y f_x(y) d\nu \right) d\mu = \sum a_k \int_X \nu(C_k)_x d\mu = \sum a_k mC_k = \int_{X \times Y} f dm$$

3. $f \geq 0$, g_n — ступенчатые, что $\dots \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = f$.

$f_x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (g_n)_x$ — измерима как предел измеримых функций.

$\varphi(x) = \int_Y f_x(y) d\nu(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_Y g_n d\nu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x)$, значит $\varphi(x)$ измерима из-за измеримости φ_n (Теорема Леви).

$$g_n \leq g_{n+1} \leq \dots \Rightarrow \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \leq \dots$$

$$\int_X \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow} \int_{X \times Y} g_n dm = \int_{X \times Y} f dm \text{ (по теореме Леви)}$$

Везде должна быть приговорка „при почти всех x “.

18 Теорема Фубини

(X, \mathcal{A}, μ) , (Y, \mathcal{B}, ν) и μ, ν — σ -конечные и полные.

$f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, суммируемая. Тогда

1. при почти всех x функция f_x — суммируемая почти везде на Y (аналогично при почти всех y функция f^y также измерима на X).
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x(y) d\nu(y) = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ — суммируемая почти везде на X (аналогично $y \mapsto \psi(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$ — суммируемая почти везде на Y).
3.
$$\int_{X \times Y} f(x, y) d\mu = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

без доказательства

18.0.1 Следствие

$$\int_C f = \int_{X \times Y} f \chi_C = \int_X \left(\int_Y f \cdot \chi_C \right) d\mu = \int_{P_1(C)} \left(\int_{C_x} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

$P_1(C)$ — проекция, измеримая, $\{x : C_x \neq \emptyset\}$.

19 Какая-то нужная штука для лекции 02.03.2020, потом удалю

$B(0, 1) \subset \mathbb{R}^m$, Хотим найти $\lambda_m B(0, 1) = \alpha_m$.

$$\lambda_m B(0, R) = \alpha_m \cdot R^M.$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 \leq 1.$$

интеграл обычного кружочка:
$$\int \chi_B d\lambda_2 = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 dy dx = \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2} dx = \pi$$

$$\alpha_m = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_B = \int_{-1}^1 \left(\int_{B(0, \sqrt{1-x_1^2}) \subset \mathbb{R}^{m-1}} 1 d\nu \right) dx_1 = \int_{-1}^1 (1-x_1^2)^{\frac{m-1}{2}} \alpha_{m-1} dx_1.$$

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \Gamma(n) = (n-1)!, \Gamma(x+1) = \Gamma(x) \cdot x.$$

Тогда объём шара в \mathbb{R}^m равен $\alpha_{m-1} 2 \int_0^1 (1-t)^{\frac{m-1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt = B(\frac{1}{2}, \frac{m+1}{2}) \alpha_{m-1}$. Тогда объём шара можно

переписать как
$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)\alpha_{m-1}}.$$

Часть IV

Замена переменных в интеграле

20 Образ меры при отображении

(X, \mathcal{A}, μ) и (Y, \mathcal{B}, ν) (пространство и алгебру измерили, а меру нет).

$\Phi : X \rightarrow Y, \forall B \in \mathcal{B} \Phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ — измеримо.

$\nu : \mathcal{B} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, E \in \mathcal{B}, \nu E := \mu(\Phi^{-1}(E))$ — это мера на \mathcal{B} , а также образ меры μ при отображении Φ .

20.1 Замечание 1

$$\nu E = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 d\mu.$$

$$\nu \left(\bigcup B_i \right) = \mu \left(\Phi^{-1} \left(\bigcup B_i \right) \right) = \mu \left(\bigcup \Phi^{-1}(B_i) \right) = \sum \mu \Phi^{-1}(B_i) = \sum \nu B_i.$$

20.2 Замечание 2

f — измерима относительно \mathcal{B} , тогда $f \circ \Phi$ — измерима относительно \mathcal{A} .

$$X \left(f \left(\Phi(x) \right) < a \right) = \Phi^{-1} \left(Y(f < a) \right).$$

21 Взвешенный образ меры

$\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \omega \geq 0$, измеримая.

Тогда $\nu(B) := \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$ — мера, которая назначает *взвешенный образ меры* μ , где ω — её вес.

22 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры

$\Phi : X \rightarrow Y$ — измеримое отображение, $\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая на X . ν — взвешенный образ меры μ (ω — её вес). Тогда

$\forall f \geq 0$ — измеримой на Y верно, что $f \circ \Phi$ — измерима на X и выполняется следующее свойство:

$$\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_X f(\Phi(x)) \omega(x) d\mu(x).$$

22.1 Замечание

То же верно для случая f — суммируемая.

22.2 Доказательство

$$1. f = \chi_B, B \in \mathcal{B}. \text{ Тогда } (f \circ \Phi)(x) = \begin{cases} 1 & \Phi(x) \in B \\ 0 & \Phi(x) \notin B \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(B)}.$$

$$\text{Доказывать нечего } \ominus : \nu B = \int_{\Phi(B)} \omega d\mu;$$

2. f — ступенчатая, для каждой ступеньки — правда, и по линейности интеграла получаем результат;
3. $f \geq 0$ — измеримая. Теорема об аппроксимизации измеримых функций ступенчатыми плюс предельный переход по теореме Леви;
4. f — измеримая, значит $|f|$ — всё верно.

22.3 Следствие

$$f \text{ — суммируема на } Y, B \in \mathcal{B}, \int_B f d\nu(y) = \int_{\Phi^{-1}(B)} (f \circ \Phi) \omega d\mu.$$

Частный случай: $X = Y$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\Phi = \text{id}$, $\omega \geq 0$ — измерима.

23 Плотность одной меры по отношению к другой

$\nu B = \int_B \omega(x) d\mu(x)$, тогда ω — плотность меры ν относительно меры μ .

23.1 Замечание

$$\int_X f(x) d\nu(x) = \int_X f(x) \omega(x) d\mu(x).$$

24 Критерий плотности

(X, \mathcal{A}, μ) , ν — ещё одна мера на \mathcal{A} , $\omega \geq 0$ — измеримая. Тогда

ω — плотность ν относительно $\mu \iff \forall A \in \mathcal{A}$ верно: $\inf_A \omega \cdot \mu A \leq \nu A \leq \sup_A \omega \cdot \mu A$ ($0 \cdot \infty = 0$).

24.0.1 Доказательство

- \Rightarrow Очевидно (интеграл μA обладает этими свойствами из-за плотностей);
- \Leftarrow Считаем, что $\omega > 0$. Для $\omega = 0$ получаем: $e := X(\omega = 0)$, $\nu e = 0 = \int_e \omega d\mu$, тогда $\nu(A) = \int_A \omega d\mu = 0$.

Теперь пусть $\omega > 0$, то $q \in (0, 1)$. $A_j := A(q^j \leq \omega \leq q^{j-1})$, $j \in \mathbb{Z}$, $A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A_j$.

$$q^j \mu A_j \leq \nu A_j \leq q^{j-1} \mu A_j.$$

$$q^j \mu A_j \leq \int_{A_j} \omega d\mu \leq q^{j-1} \mu A_j.$$

$$q \int_A \omega d\mu = q \sum \int_{A_j} \omega d\mu \leq \sum q^j \mu A_j \leq \nu A \leq \frac{1}{q} \sum q^j \mu A_j \leq \frac{1}{q} \int_A \omega.$$

Устремим $q \rightarrow 1$ и получим доказательство равенства.

25 Единственность плотности

f, g — суммируемые на X , $\forall A$ — измеримых верно: $\int_A f = \int_A g$. Тогда $f = g$ почти везде.

25.0.1 Доказательство

$$h = f - g, \forall A \text{ — измеримых, } \int_A h = 0.$$

$$A_+ = X(h \geq 0), A_- = X(h < 0), A_+ \cap A_- = \emptyset.$$

$$\int_{A_+} |h| = \int_{A_+} h = 0.$$

$$\int_{A_-} |h| = - \int_{A_-} h = 0.$$

$$X = A_+ \sqcup A_-, \int_X |h| = 0, \text{ тогда } h = 0.$$

25.1 Следствие

Плотность ν относительно ν определена однозначно с точностью до μ почти везде.

26 Лемма об образе малых кубических ячеек

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in O$. Φ — дифференцируема G в окрестности точки a , $\det \Phi'(a) \neq 0$. Пусть $c > |\det \Phi'(a)|$.

Тогда существует такое $\delta > 0$, что для любого куба $Q \subset B(a, \delta)$, $a \in Q$ верно, что $c \cdot \lambda Q > \lambda \Phi(Q)$.

26.0.1 Доказательство

$L := \Phi'(a)$ — обратимое линейное отображение.

$$\Phi(x) = \Phi(a) + L(x - a) + o(x - a).$$

$a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a)) = x + o(x - a)$ (увеличили в константу, поэтому o маленькое остаётся o маленьким).

$\forall \varepsilon > 0$ можно записать шар $B_\varepsilon(a)$, что при $x \in B_\varepsilon(a)$ $|\psi(x) - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}|x - a|$.

$Q \subset B_\varepsilon$, $a \in Q$ — куб со стороной h , при $x \in Q$: $|\psi(x) - x| < \varepsilon h$. $|x_i - a_i| \leq h$.

$x, y \in Q$, тогда $|\psi(x)_i - \psi(y)_i| = |\psi(x)_i - x_i| + |\psi(y)_i - y_i| + |x_i - y_i| \leq |\psi(x) - x| + |\psi(y) - y| + h < (1 + 2\varepsilon)h$.

$\psi(Q)$ — содержится в кубе со стороной $(1 + 2\varepsilon)h$, тогда $\lambda \psi(Q) \leq (1 + 2\varepsilon)^m \lambda Q$.

$$\lambda \Phi(Q) \leq (1 + 2\varepsilon)^m |\det L| \lambda Q < C \lambda Q.$$

Берём $\varepsilon : (1 + 2\varepsilon)|\det L| < C$, где δ — радиус $B_\varepsilon(a)$.

$$\lambda A = \inf_{G - \text{открытое}, A \subset G} \lambda G$$

27 Теорема об образе меры Лебега при диффеоморфизме

27.1 Лемма

$f: O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, O — непрерывное. A — измеримое, $A \subset Q \subset \overline{Q} \subset O$.

Тогда
$$\int_{A \subset G \text{ открытое}} \left(\lambda(G) \sup_G f \right) = \lambda A \sup_A f.$$

Без доказательства.

27.2 Теорема

$\Phi: O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм. $A \in \mathcal{M}^m$, $A \subset O$. Тогда

$$\lambda \Phi(A) = \int_A |\det \Phi'(a)| d\lambda.$$

27.2.1 Доказательство

$\nu A := \lambda \Phi(A)$. Верно ли, что $J_\Phi(x) := |\det \Phi'(x)|$ — это плотность ν по отношению к μ .

Достаточно проверить, что $\forall A$ верно: $\inf_A J_\Phi \cdot \lambda A \leq \nu A \leq \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A$.

Достаточно проверить правое неравенство. Левое — правое для Φ^{-1} и $\tilde{A} = \Phi(A)$.

$$\lambda \Phi^{-1}(\tilde{A}) \leq \sup J_{\Phi^{-1}} \cdot \lambda \tilde{A}.$$

$$\lambda A \leq \sup |\det(\Phi^{-1})'| \lambda \Phi(A).$$

$$\sup \frac{1}{|\det \Phi'|}$$

$$\frac{1}{\inf |\det \Phi'|}$$

1. A — кубическая ячейка, $\overline{A} \subset O$. От противного: пусть оказалось, что $\lambda Q \sup J_\Phi < \nu Q$. Возьмём $c > \sup_Q J_\Phi$, так, что $\lambda Q \cdot c < \nu Q$. Значит существует такая часть Q_i , что $\lambda Q_i \cdot c < \nu Q_i$. $\lambda Q_n \cdot c < \nu Q_n$, $a = \bigcap \overline{Q_n}$, накроем точку a этим кубиком. $c > |\det \Phi'(a)|$, тогда $\nu Q_n = \lambda \Phi(Q_n)$. Получили, что $\lambda \Phi(Q_n) > c \lambda Q_n$, а по лемме нужно наоборот.

2. Оценка $\nu A \leq \sup J_\Phi \lambda A$, верна для случая, когда A — открытое множество.

$$\nu Q \leq \sup_A J_\Phi \lambda Q.$$

$$\text{Суммируя по } Q: \nu A \leq \sup_A J_\Phi \lambda A.$$

Что было в лемме (и что мы потеряли):

$$\inf_{A \subset G} \left(\lambda G \cdot \sup_G f \right) = \lambda A \cdot \sup_A f.$$

G — открытое, тогда

$$\nu G \leq \sup_G J_\Phi \cdot \lambda G.$$

$$\nu A \leq \nu G \leq \lambda \lambda A \sup_A f.$$

$$\forall A \in \mathcal{M}^m, \Phi(A) \text{ — измерима}$$

$$\lambda\Phi(A) = \int_A |\det \Phi'(x)| \, d\lambda(x).$$

$$\Phi:X\rightarrow Y$$

$$\nu(E)=\int-\Phi^{-1}(E)\omega d\mu.$$

$$E=\Phi(A).$$

28 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм, f — измеримое, $f \geq 0$, $O = \Phi(O)$. Тогда

$$\int_O f(y) dy = \int_O f(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)| dx.$$

То же верно для суммируемой функции f .

28.1 Доказательство

Следует из теоремы об образе меры Лебега.

29 Сферические координаты в \mathbb{R}^m

r — расстояние от центра до точки

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m-1}$ — соответствующие углы, определяются по индукции на меньшие подпространства.

$$x_1 = r \cos \varphi_1;$$

$$x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2;$$

\vdots

$$x_m = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-1}.$$

x_1, \dots, x_m . Выразим последние две переменные через угол φ_{m-1} и какое-то расстояние ρ_{m-1} .

$x_1, \dots, x_{m-2}, \rho_{m-1}, \varphi_{m-1}$, тогда

$$x_{m-1} = \rho_{m-1} \cos \varphi_{m-1}, \text{ а } x_m = \rho_{m-1} \sin \varphi_{m-1}.$$

$$x_{m-2} = \rho_{m-2} \cos \varphi_{m-2}.$$

\vdots

Пусть осталось только x_1 , тогда $x_1 = r \cos \varphi_1$ и $\rho_2 = r \sin \varphi_1$, т.е. $\rho_1 = r$.

$$\begin{aligned} \int dx_1 \dots dx_m &= \int \rho_{m-1} dx_1 \dots dx_{m-2} d\rho_{m-1} d\varphi_{m-1} = \int \rho_{m-2}^2 \sin \varphi_{m-2} dx_1 \dots dx_{m-3} d\rho_{m-2} d\varphi_{m-2} d\varphi_{m-1} = \\ &= \int \rho_{m-3}^3 \sin^2 \varphi_{m-3} \sin \varphi_{m-2} dx_1 \dots = \int r^{m-1} \sin^{m-2} \varphi_1 \sin^{m-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2} \dots \end{aligned}$$

$r^{m-1} \sin^{m-2} \varphi_1 \sin^{m-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2}$ — это Якобиан.

30 Формула для Бета-функции

$$B(s, t) = \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{t-1} dx = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}.$$

30.0.1 Доказательство

По определению гамма-функции:

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \left(\int_0^{+\infty} y^{t-1} e^{-y} dy \right) dx = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \int_X (u-x)^{t-1} e^{-u+x} du dx, \text{ где } y = u-x,$$

$$\int_0^{+\infty} du \int_0^u dx x^{s-1} (u-x)^{t-1} e^{-u}, \text{ заменим } x = uv \text{ и получим}$$

$$\int_0^{+\infty} du \int_0^1 dv u^{s-1} v^{s-1} u^{t-1} (1-v)^{t-1} u e^{-u} = \int_0^{+\infty} du u^{s+t-1} e^{-u} \int_0^1 v^{s-1} (1-v)^{t-1} dv = \Gamma(s+t) B(s, t).$$

31 Объем шара в \mathbb{R}^m

$$\lambda_m B(0, R) = \int_{x_1^2 + \dots + x_m^2 = R^2} 1 dx, \text{ введём сферические координаты.}$$

$$\int_0^R dr \int_0^\pi d\varphi_1 \dots \int_0^\pi d\varphi_{m-2} \int_0^{2\pi} d\varphi_{m-1} r^{m-1} \sin^{m-2} \varphi_1 \sin^{m-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2}, \text{ а дальше воспользуемся бета-функцией.}$$

Пример как вычислять \sin в какой-то степени:

$$\int_0^\pi (\sin \varphi_k)^{m-1-k} = 2 \int_0^{\pi/2} t^{\frac{m-1-k}{2} - \frac{1}{2}} (1-t)^{-0.5} dt = B\left(\frac{m-k}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{m-k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-k}{2} + \frac{1}{2}\right)}.$$

Часть V

Функция распределения

32 Теорема о вычислении интеграла по мере Бореля—Стилтьеса (с леммой)

32.1 Определение

(X, \mathcal{O}, μ) , $h : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая, пространство конечное.

Пусть $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mu X(h < t) < +\infty$.

$H(t) := \mu X(h < t)$ — функция распределения функции h по μ ($H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$).

Очевидно, что H возрастает, $h : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\nu := h(\mu)$, $\nu(A) = \mu(h^{-1}(A))$.

Пусть h — измеримая, тогда $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $h^{-1}(B)$ — измеримая.

$\mu_H[a, b) = H(b) - H(a)$ — мера Бореля-Стилтьеса.

32.2 Лемма

$h : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая, почти везде конечная.

H — функция распределения (корректно заданная), $\forall t \mu X(h < t) < +\infty$.

Тогда на \mathcal{B} , μ_H совпадает с $h(\mu)$.

32.2.1 Доказательство

$\mu_h[a, b) = H(b) - H(a) = H(b) - H(a)$ — непрерывность меры снизу.

$H(b) - H(a) = \mu X(a \leq h < b) = \mu(h^{-1}[a, b)) = \nu[a, b]$, где $\nu = h(\mu)$

Значит $\mu_H = \nu$ на \mathcal{B} .

32.3 Теорема

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ≥ 0 , измеримое по Борелю.

$h : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, измеримая, почти везде конечная, с функцией распределения H .

μ_H — мера Бореля-Стилтьеса. Тогда

$$\int_X f(h(x)) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) d\mu_H(t).$$

32.3.1 Доказательство

По теореме о взвешенном образе меры:

$$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y = \mathbb{R}, \mathcal{B}, h(\mu)),$$

$$\Phi = h : X \rightarrow Y, \omega = 1.$$

$$\int_Y f(y) d\nu = \int_X f(\Phi(x)) 1 d\mu(x).$$

Пусть $f \geq 0$, измеримая, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(|x|) d\lambda_m = \int_0^{+\infty} f(t) d\mu_H \text{ при } h(x) = |x|, \text{ где } H(r) = \mu\mathbb{R}^m(|x| < r) = \alpha_m r^m.$$

$$\mu_H[a, b) = H(b) - H(a) = \int_a^b H'(t) dt = \int_a^b m\alpha_m t^{m-1} dt.$$

$$\mu_H \text{ и мера } \nu : \nu(A) = \int_A m\alpha_m t^{m-1} dt, \text{ значит } \mu_h = \nu \text{ на } \mathcal{B}.$$

$$\int_0^{+\infty} f(t) m\alpha_m t^{m-1} dt.$$

32.3.2 Следствие

Мы проверили, что g возрастает, $g \in C^1(\mathbb{R})$ и $M_g(A) = \int_A g'(x) dx$.

Часть VI

Ряды Фурье

33 Интегральные неравенства Гельдера и Минковского

1. Неравенство Гёльдера:

$p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, заданы почти везде, измеримы.

$(X, \mathcal{A}, \mu), f, g : X \rightarrow \mathbb{C} (\mathbb{R})$. Тогда

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q \right)^{1/q}$$

2. Неравенство Минковского

$(X, \mathcal{A}, \mu), f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ — измерима почти везде, конечна, $1 \leq p < +\infty$. Тогда

$$\left(\int_X |f + g|^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_X |f|^p \right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p \right)^{1/p}$$

34 Интеграл комплекснозначной функции

$$(X, \mathcal{A}, \mu), f: X \rightarrow \mathbb{C}, f(x) = g(x) + ih(x).$$

$$f \text{ — измерима} \iff g = \operatorname{Re} f \text{ и } h = \operatorname{Im} f \text{ — измеримые.}$$

$$f \text{ — суммируемая} \iff g = \operatorname{Re} f \text{ и } h = \operatorname{Im} f \text{ — суммируемые.}$$

$$\int_X f = \int_X g + i \int_X h.$$

34.1 Вывод

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

35 Пространство $L^p(E, \mu)$

$$L^p(X, \mu), 1 \leq p < \infty$$

$$\mathcal{L}^p(X, \mu) = \left\{ f : X \xrightarrow[\text{п.в.}]{} \overline{\mathbb{R}}(\overline{\mathbb{C}}), f \text{ — измерима, } \int_X |f|^p d\mu < +\infty \right\}$$

- $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ — линейное пространство — по н. Минковского;
- Введём норму $\|f\| = \left(\int_X |f|^p \right)^{1/p}$;
- f эквивалентно g если $f(x) = g(x)$ при почти всех x

L^p — уберём из \mathcal{L} все одинаковые функции, оставив только одного представителя из каждого класса эквивалентности.

36 Существенный супремум

$$f : X \xrightarrow{\text{п.в.}} \overline{\mathbb{R}}, \operatorname{ess\,sup} f = \inf \left\{ A \in \overline{\mathbb{R}} : f(x) \leq A \text{ п.в.} \right\}.$$

36.1 Свойства

1. $\operatorname{ess\,sup} f \leq \sup f$;
2. $f(x) \leq \operatorname{ess\,sup} f$ при почти всех x ;
3. $\left| \int_{\mathbb{R}} fg \right| \leq \operatorname{ess\,sup} |f| \cdot \int_X |g|$.

36.1.1 Доказательство

1. Очевидно

2. $M = \operatorname{ess\,sup} f$

$\forall n \in \mathbb{N}$ верно $f(x) \leq M + \frac{1}{n}$ почти везде.

3. Очевидно $\left| \int_X fg \right| \leq \int_X |fg|$,
 $|fg| \leq M|g|$ почти везде.

37 Пространство $L^\infty(E, \mu)$

$$\mathcal{L}^\infty(X, \mu) = \left\{ f : X \xrightarrow[\text{п.в.}]{} \mathbb{R}(\mathbb{C}), f \text{ — измерима, } \operatorname{ess\,sup} |f| < +\infty \right\}$$

$$f, g \in \mathcal{L}^\infty \Rightarrow f + g \in \mathcal{L}^\infty.$$

т.е. \mathcal{L}^∞ — линейное пространство, норма $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_x |f|$.

$$\operatorname{ess\,sup} |f + g| \leq \operatorname{ess\,sup} |f| + \operatorname{ess\,sup} |g|.$$

37.1 Замечание

$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ — неравенство Гёльдера (можно брать $p = 1$ и $q = +\infty$).

$f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$, $1 \leq p \leq +\infty$, $\Rightarrow f$ — почти всюду конечно \Rightarrow можно считать, что f задана почти всюду на X и всюду конечна.

38 Теорема о вложении пространств L^p

X , $\mu X < +\infty$, $1 \leq s < r \leq +\infty$. Тогда

1. $L^r(X, \mu) \subset L^s(X, \mu)$;
2. $\|f\|_s \leq (\mu X)^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}} \|f\|_r$

38.1 Доказательство

1. следует из 2;
2. $r = \infty$ — очевидно

r — конечно, тогда:

$$\|f\|_s = \left(\int_X |f|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\int_X \|f\|_\infty^s \right)^{\frac{1}{s}}$$

$$|f| \leq \text{ess sup } f = \|f\|_\infty = \|f\|_\infty \mu X^{1/s}$$

$$\|f\|_s^s = \int_X |f|^s d\mu \text{ по Гёльдеру получаем неравенство}$$

$$\left(\int_X (|f|^s)^{r/s} \right)^{s/r} \left(\int_X 1 \right)^{\frac{r-s}{r}} = \left(\int_X |f|^r \right)^{s/r} (\mu X)^{1 - \frac{s}{r}}.$$

38.2 Следствие

$\mu E < +\infty$, $1 \leq s < r \leq +\infty$.

$f_n, f \in L^s$, $f_n \rightarrow f$ на L^r . Тогда $f_n \rightarrow f$ на L^s .

38.2.1 Доказательство

очевидно, потому что $\|f\|_s \leq \mu E^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}} \|f\|_r$.

Часть VII

Поверхностный интеграл

39 Измеримое множество на простом гладком двумерном многообразии в \mathbb{R}^3

M — просто гладкое двумерное многообразие в \mathbb{R}^3 , $\varphi: O_{\text{откр.}} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — параметризация.

$E \subset M$ — измеримое (по Лебегу), если его $\varphi^{-1}(E)$ — измерим в \mathbb{R}^2 .

40 Мера Лебега на простом гладком двумерном многообразии в \mathbb{R}^3

$\mathcal{A}_M = \{E \subset M, E \text{ — изм.}\}$ — σ -алгебра.

Мера Лебега на \mathcal{A}_M : $S(E) = \iint_{\varphi^{-1}(E)} |\varphi'_u \times \varphi'_v| \, dudv$.

41 Поверхностный интеграл первого рода

M — простое двумерное гладкое многообразие, φ — гладкая параметризация, $f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$, измеримая.

Тогда

$\iint_M f ds$ — Поверхностный интеграл I рода и вычисляется следующим образом:

$$\iint_M f ds = \iint_{\varphi^{-1}M} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\varphi'_u \times \varphi'_v| dv du.$$

42 Кусочно-гладкая поверхность в \mathbb{R}^3

$M \subset \mathbb{R}^3$ — кусочно-гладкое многообразие в \mathbb{R}^3

M — объекты конечного числа элементов:

- Простые двумерные гладкие многообразия;
- Гладкие кривые — простые k -мерные многообразия в \mathbb{R}^3 ;
- Точки.

$$M = \bigsqcup M_i \bigsqcup l_i \bigsqcup p_i.$$

$$S(E) = \sum S(E \cap M_i).$$

Часть VIII

Преобразование Фурье

43 Теорема о сходимости в пространствах L^p и по мере

$1 \leq p < +\infty$, $f_n, f \in L^p(X, \mu)$. Тогда верны следующие утверждения:

1. $f_n \rightarrow f$ в L^p , тогда $f_n \rightrightarrows f$ по мере μ .
2. $f_n \rightrightarrows f$ по мере μ (либо $f_n \rightarrow f$ почти везде).

Если $\exists g \in L^p : |f_n| \leq g$. Тогда $f_n \rightarrow f$ в L^p .

43.1 Доказательство

1. $X_n(\varepsilon) := X(|f_n - f| \geq \varepsilon)$.

$$\mu X_n(\varepsilon) = \int_{X_n(\varepsilon)} 1 \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{X_n(\varepsilon)} |f_n - f|^p d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|_p^p \rightarrow 0.$$

2. $f_n \rightrightarrows f$, тогда $f_{n_k} \rightarrow f$ п.в.. Тогда $|f| \leq g$ п.в. $|f_n - f|^p \leq (2g)^p$, $\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n - f|^p d\mu \rightarrow 0$ по теореме Лебега.

44 Полнота L^p

$L^p(X, \mu)$, $1 \leq p < +\infty$ — полное.

44.0.1 Доказательство

f_n — фундаментальная.

Для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\exists N_1$ при $n = n_1 > N_1$, $\forall k > n_1$ $\|f_{n_1} - f_k\| < \frac{1}{2}$.

Для $\varepsilon = \frac{1}{4}$ $\exists N_2 > n_1$ при $n = n_2 > N_2$, $\forall k > n_2$ $\|f_{n_2} - f_k\| < \frac{1}{4}$.

$\varepsilon = \frac{1}{2^m}$ $\exists N_m > n_m$ при $n = n_m > N_m$, $\forall k > n_m$ $\|f_{n_m} - f_k\| < \frac{1}{2^m}$.

Таким образом, $\sum_{k=1}^{+\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 1$.

Рассмотрим $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \in [0, +\infty]$.

$$S_n, \|S_n\|_p \leq \sum \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|$$

$$S_n, \|S_n\|_p \leq \sum_{k=1}^N \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 1.$$

$\int_X S_n^p \leq 1$, по т. Фату $\int S^p \leq 1$, тогда S^p — сходится, значит S конечно почти везде, тогда

$\sum (f_{n_{k+1}} f_{n_k})$ — сходится почти везде.

$f(x) := f_{n_1} + \sum_{k=1}^{+\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ — сходится с потрам

$$f_{n_1} + \sum_{k=1}^{m-1} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) = f_{n_m}.$$

$f_{n_m} \rightarrow f$ почти везде.

Проверим, что $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

$$\|f_n - f_{n_k}\|_p^p = \int_X |f_n - f_{n_k}|^p d\mu < \varepsilon^p \text{ верно при всех больших } k.$$

Тогда по теореме Фату: $\int_X |f_n - f|^p d\mu < \varepsilon^p$, т.е. $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$, т.е. $f_n \rightarrow f$ в L^p .

45 Плотность в L^p множества ступенчатых функций

45.1 Определение

Y — множество, $\mathcal{A} \subset Y$ — (всяду) плотное множество, если $\forall y \in Y : \forall U(y)$ верно $U(y) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

Пример: $\mathcal{A} = \mathbb{Q} \subset Y = \mathbb{R}$.

45.2 Лемма

$(X, \mathcal{A}, \mu), 1 \leq p \leq +\infty$

Тогда

$\{f \in L^p : f \text{ — ступ.}\} \text{ — плотно } L^p$.

45.2.1 Замечание

$p < +\infty, \varphi \in L^p$ — ступенчатая, тогда $\mu X(\varphi \neq 0) < +\infty$.

45.2.2 Доказательство

1. $p = +\infty, f \in L^\infty$, подменим f на множество меры $0 : |f| \leq \|f\|_\infty$ всюду.

\exists ступ. $\varphi_n \rightrightarrows f_+, \psi_m \rightrightarrows f_-$, т.е. $\|\varphi_n - f_+\|_\infty \rightarrow 0, \varphi_n \rightarrow f_+$ в $C^\infty, \psi_m \rightarrow f_-$.

2. $p < +\infty, f \geq 0, \exists \varphi_n$ — ступенчатая, $\varphi_n \rightarrow f$ всюду.

$$\|\varphi_n - f\|_p^p = \int_X |\varphi_n - f|^p d\mu \rightarrow 0, |\varphi - f|^p \leq |f|^p.$$

45.3 Определение

X — топологическое пространство, если $\forall F_1, F_2$ — замкнутых подмножеств, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

Если \exists открытые $U(F_1), U(F_2)$, которые не пересекаются, то это свойство X называется *нормальностью*.
(дополнительно требуется, чтобы $\forall y \in X \{y\}$ — замкнутое).

45.4 Лемма Урысона

Будет дописано позже.

X — норм, F_0, F_1 — замкнуты, $F_0 \cap F_1 = \emptyset$.

Тогда $\exists f : X \rightarrow \mathbb{R}, 0 \leq f \leq 1$, непрерывное.

$$f|_{F_0} = 0, f|_{F_1} = 1.$$

45.5 Доказательство

Переформулируем нормальность:

$\forall F_1$ — замкнутого, $\subset G$ — открытого, $\exists U(F_1)$ — открытое, что выполняется $F_1 \subset U(F_1) \subset \overline{U(F_1)} \subset G$.

1. $F_0 \subset U(F_0) \subset \overline{U(F_0)} \subset F_1^C$
2. $\overline{G_0} \subset U(\overline{G_0}) \subset G_1$
3. $\overline{G_0} \subset U'(\overline{G_0}) \subset \overline{U'(\overline{G_0})} \subset G_{1/2}$
 $G_{1/2} \subset U(\overline{G_{1/2}}) \subset \overline{U} \subset G_1$, где $U(\overline{G_{1/2}}) = G_{3/4}$.

f — непрерывна, значит $f^{-1}(a, b)$ — открыто. Достаточно проверить, что:

1. $f^{-1}(-\infty, s)$ — открыто;
2. $f^{-1}(-\infty, s)$ — замкнуто.

$$f^{-1}(a, b) = f^{-1}(-\infty, b) \setminus f^{-1}(-\infty, a).$$

$$1. \quad \forall s : f^{-1}(-\infty, s) = \bigcup_{q \in s, q\text{-дв. рац.}} G_q \text{ — открыто.}$$

$$\subset f(y) < S, \text{ где } f(y) = \inf \{q : x \in G_q\}.$$

$$\supset x \in \Pi\mathcal{C}, f(x) = S_0 < q_1 < S, x \in G_{q_1}.$$

Часть IX

Поверхностный интеграл II рода

46 Финитная функция

Финитная функция — функция, равная $\mathbf{0}$ вне некоторого шара, и непрерывная в $C_0(\mathbb{R}^m)$.

Очевидно, что $\forall p \in [1, +\infty) : C_0(\mathbb{R}^m) \subset L^p(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$.

47 Сторона поверхности

Поверхность — простое гладкое двумерное многообразие.

Сторона поверхности (гладкой) — непрерывное векторное поле единичных нормалей.

Если не существует непрерывного поля единичных нормалей, то такая поверхность — односторонняя.

48 Задание стороны поверхности с помощью касательных реперов

Репер — Пара ЛНЗ касательных векторов.

Способ задания стороны — задать поле касательных реперов.

49 Интеграл II рода

Ω — двусторонняя поверхность в \mathbb{R}^3 , $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$.

n_0 — сторона поверхности.

Тогда интегралом II рода (поля F на Ω) называют:

$$\int_{\Omega} \langle F, n_0 \rangle ds.$$

49.0.1 Замечания

1. поменяем сторону — поменяем знак;
2. Не зависит от параметризации;
3. Обозначения: $F = (P, Q, R)$

$$\int_{\Omega} = \int_{\Omega} P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

$x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, тогда

$$(x'_u, y'_u, z'_u) \times (x'_v, y'_v, z'_v) = \vec{n}$$

$$dy dz = (y'_u du + y'_v dv) \wedge (z'_u du + z'_v dv) = du \wedge dv (y'_u z'_v - y'_v z'_u)$$

\wedge — косо-коммутативная операция

$$da \wedge db = -db \wedge da$$

$$da \wedge da = -da \wedge da = 0.$$

50 Плотность в L^p множества финитных непрерывных функций

$(\mathbb{R}^m, \mathcal{M}^m, \lambda_m)$, $E \subset \mathbb{R}^m$ — измеримая.

Тогда множество финитных функций (непрерывных) плотно в $L^p(E, \lambda_m)$

50.1 Доказательство

$g \in L^p(E, \mu)$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists f \in C_0(\mathbb{R}^m)$, $\|g - f\|_p < \varepsilon$. Пусть $g = 0$ вне E , то $\|g - f\|_{2^p(E, \mu)} \leq \|g - f\| < \varepsilon$ в $L^p(\mathbb{R}^m)$.

$g = g^+ - g^-$, g^+ — приблизим ступенчатыми, \exists ступ. $h : \|g^+ - h\| < \varepsilon$.

$h = \sum c_k \chi_{A_k}$. Каждую χ_{A_k} приблизим финитной непрерывной функцией:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists$ замкнутая $F_k \subset A_k \subset G_k$ (откр.), $\lambda_m(G_k \setminus F_k) < \left(\frac{\varepsilon}{|c_k| \cdot q}\right)^p$.

По лемме Урысона $\exists f_k : 0 \leq f_k \leq 1$, $f_k = 1$ на F_k , $f_k = 0$ на $\mathbb{R}^m \setminus G_k$.

$\|g^+ - \sum c_k f_k\|_p \leq \|g^+ - h\|_p + \|h - \sum c_k f_k\| \leq \varepsilon + \sum |c_k| \cdot \|\chi_{A_k} - f_k\| \leq \int |\chi_{A_k} - f_k|^p \leq \varepsilon + \sum \frac{\varepsilon}{q} = 2\varepsilon$

$\int_{G_k \setminus F_k} 1^p < \left(\frac{\varepsilon}{|c_k| \cdot q}\right)^p$.

$1 \leq p < +\infty$.

50.2 Замечание

1. В $L^\infty(\mathbb{R}^m)$ этот факт не работает.

$L^\infty([0, 2])$ функцию $\chi_{[0, 1]}$ не приблизить непрерывной.

2. В $L^p(E, \lambda_m)$ плотны:

- Линейная комбинация характеристических функций ячеек;
- Гладкие финитные функции;
- Рациональные линейные комбинации рациональных ячеек;
- Просто непрерывные функции.

51 Теорема о непрерывности сдвига

51.1 Необходимое определение

$L^p[0, T]$, $T \in \mathbb{R}$, можем понимать как пространство T -периодических функций $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$, $\int_0^T f = \int_a^{a+T} f$.

$C[0, T]$ — пространство непрерывных функций, $\|f\| = \max_{x \in [0, T]} |f(x)|$.

$\tilde{C}[0, T]$ — пространство непрерывных T -пер. функций.

$f \in \tilde{C}[0, T] \Rightarrow f$ — равномерно непрерывные.

$\tilde{C}[0, T]$ плотно в $L^p[0, T]$, $p < +\infty$.

51.2 Формулировка теоремы

$f_h(x) := f(x + h)$.

1. f — равномерно непрерывная на $\mathbb{R}^m \Rightarrow \|f_h - f\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$;
2. $1 \leq p < +\infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^m) \Rightarrow \|f_h - f\|_p \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$;
3. $f \in \tilde{C}[0, T] \Rightarrow \|f_h - f\|_{+\infty} \rightarrow 0$;
4. $1 \leq p < +\infty$, $f \in L^p[0, T] \Rightarrow \|f_h - f\|_p \rightarrow 0$.

51.3 Доказательство

1 и 3 очевидные утверждения по определению равномерной непрерывности.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall x, x' : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

$$\forall |h| < \delta : \|f_h - f\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

$$g \text{ — финитно непрерывная: } \|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$\|f_h - f\|_p \leq \|f_h - g_h\|_p + \|g_h - g\|_p + \|g - f\|_p \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \|g_h - g\|_p$$

$$g = 0 \text{ вне } B(0, r), \text{ пусть } |h| < 1, \text{ тогда } \|g_h - g\|_p = \|g_h - g\|_{L^p(B(0, r+1))} \leq \|g_h - g\|_{+\infty} \cdot \lambda B^{1/p}$$

$$\text{и 4) } \|g_h - g\|_p \leq \|g_h - g\|_{\infty} T^{1/p}$$

52 Формула Грина

D — компактное, связное, односвязное, множество в \mathbb{R}^2 , ограниченное кусочно-гладкой кривой.

На ∂D направление "против часовой стрелки".

52.1 Теорема

$D \subset \mathbb{R}^2$ — см выше.

P, Q — векторные поля, гладкие в $U(D)$. Тогда

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} P dx + Q dy.$$

52.2 Доказательство

D — кривая 4-угольника относительно OX , а также относительно OY .

Рассмотрим поле $(P, \mathbf{0})$ (для $(\mathbf{0}, Q)$ аналогично).

$$\text{ПЧ: } - \iint_{D_b} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{\partial D} P dx + \mathbf{0} dy$$

$$\text{ЛЧ: } - \int_a^b d \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = - \int_a^b P(x, y) \Big|_{y=f_1}^{y=f_2} dx = \int_a^b P(x, f_1(x)) dx - \int_a^b P(x, f_2(x)) dx.$$

$$\text{ПЧ: } \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4}, \int_{\gamma_1} = \int_a^b P(x, f(x)) \cdot 1 + 0 \cdot f'(x) dx, \int_{\gamma_2} = \int_{\gamma_4} = 0, \int_{\gamma_3} = \int_b^a P(x, f(x)) dx.$$

53 Формула Стокса

Ω — двусторонняя, гладкая поверхность, $\overline{n_0}$ — сторона.

$\partial\Omega$ — кусочно-гладкая кривая с согласованной ориентацией.

(P, Q, R) — гладкое векторное поле в $U(\Omega)$. Тогда

$$\int_{\partial\Omega} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Omega} (R'_y - Q'_z)dydz + (P'_z - R'_x)dzdx + (Q'_x - P'_y)dxdy.$$

53.1 Доказательство

Считаем, что поверхность C^r -гладкая.

Достаточно проверить для $(P, 0, 0)$.

$$\int_{\partial\Omega} Pdx = \iint P'_z dzdx - P'_y dxdy.$$

$$\int_{\partial\Omega} Pdx = \int P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \text{ и по формуле Грина получаем}$$

$$\begin{aligned} \int_L Px'_u du + Px'_v dv &= \iint_G \frac{\partial}{\partial u}(Px'_v) - \frac{\partial}{\partial v}(Px'_u) dudv = \iint_G (P'_x x'_u + P'_y y'_u + P'_z z'_u) x'_v + Px''_v v - (P'_x x'_v + P'_y y'_v + P'_z z'_v) x'_u - \\ &Px''_u v dudv = \iint_G P'_x \mathbf{0} + P'_y (x'_v y'_u - x'_u y'_v) + P'_z (x'_v z'_u - x'_u z'_v) = \iint_G P'_z dzdx - P'_y dxdy \end{aligned}$$

Получили что хотели.

54 Формула Гаусса-Остроградского

$$V = \{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega \text{ и } f(x, y) \leq z \leq F(x, y)\}$$

$$\Omega \underset{\text{замкн.}}{\subset} \mathbb{R}^2, \partial\Omega — \text{кусочно-гладкая кривая, } f, F \in C^1(\Omega).$$

$$R : U(V) \rightarrow \mathbb{R}, R \in C^1. \text{ Тогда}$$

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial V^+} R dx dy.$$

54.1 Доказательство

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{\Omega} dx dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_{\Omega} R(x, y, F(x, y)) - \iint_{\Omega} R(x, y, f(x, y)) dx dy = \iint_{\text{график } F \text{ (верх)}} R dx dy + \\ &\quad \iint_{\text{график } f \text{ (низ)}} R dx dy. \end{aligned}$$

$$0 = \iint_{\text{цил. } \partial V} R dx dy.$$

54.2 Следствие

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\partial V^+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

55 Соленоидальность бездивергентного векторного поля

55.1 Дивергенция

$\operatorname{div} A$ — это функция $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

$$\operatorname{div} A(a) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_3 B} \iiint_{B(a,r)} \operatorname{div} A dx dy dz = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_3 B} \iint_{S(a,r)} \langle (P, Q, R), n_0 \rangle dS.$$

55.2 Ротор

$(P, Q, R) \in C^1$ — ротор (вихрь).

$$\operatorname{rot} A = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y).$$

$$\operatorname{rot} V = 0, \gamma = 0. \text{ Тогда } \int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz = 0.$$

γ — путь от A до B . Тогда \int_{γ} — зависит от A и B , но не от самого пути.

Если $O \subset \mathbb{R}^3$ — не односвязная, $\operatorname{rot} V = 0$. $I(v, \gamma)$ не зависит от γ

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} V = \int_{\gamma_2} V + \int_{\gamma_1} V.$$

$$\operatorname{div}(P, Q, R) = 0.$$

$$\forall V : \iint_{\partial V} \langle (P, Q, R), n_0 \rangle dS = 0.$$

55.3 Вспомогательная теорема

V — поле. Если $\operatorname{rot} V = 0$ и область односвязная, то поле гладкое.

$\operatorname{rot} = 0$ — дифференциальный критерий потенциальности \Leftrightarrow поле локально-потенциальное $\Leftrightarrow V$ — потенциальное.

55.4 Соленоидальное поле

Поле V — соленоидальное в Ω если существует векторный потенциал, т.е. существует такое векторное поле B , что $\operatorname{rot} B = V$.

55.5 Теорема

Ω — параллелепипед, $(A_1, A_2, A_3) = A$ — соленоид в $\Omega \Leftrightarrow \operatorname{div} A = 0$ в Ω .

55.5.1 Доказательство

\Rightarrow Тривиально $\operatorname{div} \operatorname{rot} B = 0$ — упражнение.

\Leftarrow .

$\operatorname{div} A = 0$. Ищем векторный потенциал $B : \operatorname{rot} B = A$.

$$B = (P, Q, R), \quad R'_y - Q'_z = A_1, \quad P'_z - R'_x = A_2, \quad Q'_z - P'_y = A_3.$$

Забавный факт: можем подменить B на B_1 , что $B - B_1 = 0$ и $B - b_1$ — потенциал f .

Пусть $R = 0$, тогда $-Q'_z = A_1$, $P'_z = A_2$ и $Q'_x - P'_y = A_3$. $P(x, y, z) = \int_{z_0}^z A_2(x, y, z) dt$

$$Q(x, y, z) = - \int_{z_0}^z A_1 dz + \varphi(x, y).$$

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx.$$

$$\varphi'_x - \int_{z_0}^z \frac{\partial A_1}{\partial x} - \int_{z_0}^z \frac{\partial A_2}{\partial y} = A_3.$$

$$\operatorname{div} = 0 \text{ по условию, тогда } \varphi'_x + \int_{z_0}^z \frac{\partial A_3}{\partial z} dz = A_3.$$

$$\varphi'_x(x, y) + A_3(x, y, z) - A_3(x, y, z_0) = A_3.$$

$$\varphi'_x(x, y) = A_3(x, y, z_0).$$

$$\varphi = \int_{x_0}^x A_3(x, y, z_0) dx + g(y).$$

Часть X

Гильбертовы пространства

56 Гильбертово пространство

Гильбертово пространство \mathcal{H} — линейное пространство со скалярным произведением (и соответствующей нормой), полное (как линейное нормированное пространство).

57 Теорема о свойствах сходимости в Гильбертовом пространстве

Пусть x, y лежат в Гильбертовом пространстве. Тогда верны следующие свойства:

1. $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0$. Тогда $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x_0, y_0 \rangle$.
2. $\sum x_k$ — сходится. Тогда $\forall y \in \mathcal{H} : \langle \sum_{k=1}^{+\infty} x_k, y \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x_k, y \rangle$.
3. $\sum x_k$ — ортогональный ряд. Тогда $\sum x_k$ — сходится $\iff \sum \|x_k\|^2 < +\infty$ и при этом $\|\sum x_k\|^2 = \sum \|x_k\|^2$.

57.1 Доказательство

1. $|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| = |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y_0 \rangle + \langle x_n, y_0 \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| \leq |\langle x_n, y_n - y_0 \rangle| + |\langle x_n - x_0, y_0 \rangle| \leq \|x_n\| \|y_n - y_0\| + \|x_n - x_0\| \|y_0\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$.
2. $S_N = \sum_{k=1}^N x_k$, тогда $\langle \sum_{k=1}^N x_k, y \rangle = \sum_{k=1}^N \langle x_k, y \rangle$. При устремлении к бесконечности получаем необходимое равенство.
3. $S_N = \sum_{k=1}^N x_k, \|S_N\|^2 = \langle \sum_{k=1}^N x_k, \sum_{k=1}^N x_k \rangle = \sum_{k=1}^N \langle x_k, x_k \rangle = \sum_{k=1}^N \|x_k\|^2 = \sum_{k=1}^N \|x_k\|^2$.

$$\text{Аналогично } \|S_N - S_M\|^2 = \left\| \sum_N - \sum_M \right\|^2$$

S_n и \sum_N — фундаментальны одновременно.

58 Ортогональная система (семейство) векторов

$\{e_k\}$ — ортогональная система (семейство) векторов, если $e_k \in \mathcal{H}$, что $\forall i, j : i \neq j : e_i \perp e_j$, $e_k \neq 0$.

59 Ортонормированная система

Если ортогональная система $\{e_k\}$, для которой $\forall k : \|e_k\| = 1$ — ортонормированная система векторов.

59.1 Замечание

Если $\{e_k\}$ — ортогональная система, то $\left\{ \frac{e_k}{\|e_k\|} \right\}$ — ортонормированная система.

60 Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе

$\{e_k\}$ — ортонормированная система в \mathcal{H} , $x \in \mathcal{H}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k = x$. Тогда

1. ортонормированная система — ЛНЗ;
2. $c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$;
3. $c_k e_k$ — ортогональная проекция x на прямую $\{te_k | t \in \mathbb{R}\}$, т.е. $x = c_k e_k + z$, где $z \perp e_k$.

60.1 Доказательство

1. $\sum_{k=1}^N \alpha_k e_k = 0$.

Умножим e_j $1 \leq j \leq N$, $\langle \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k, e_j \rangle = \sum \alpha_k \langle p_k, p_j \rangle \Rightarrow \alpha_j = 0$.

2. $\langle x, e_m \rangle = \langle \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e_k, e_m \rangle = \sum c_k \langle e_k, e_m \rangle = c_m \langle e_m, e_m \rangle$.

3. $\langle x - c_k e_k, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - c_k \|e_k\|^2 = 0$.

Часть XI

Ряды Фурье

61 Коэффициенты Фурье

$\{e_k\}$ — ортогональная система векторов в \mathcal{H} , $x \in \mathcal{H}$.

$c_k(x) := \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$ — *коэффициенты Фурье* вектора x по системе $\{e_k\}$.

$\sum c_k(x)e_k$ — ряд Фурье в выражениях x . При перенормировке $\{e_k\}$ ряд Фурье не меняется.

62 Ряд Фурье в Гильбертовом пространстве

$\sum c_k(x) \cdot e_k$ называется рядом Фурье вектора x по ортогональной системе $\{e_k\}$.

63 Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя

$\{e_k\}$ — ортогональная система \mathcal{H} , $x \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$. $S_n := \sum_{k=1}^n c_k(x) e_k$, $\mathcal{L} := \text{Lin } (e_1, \dots, e_n)$.

Тогда верны следующие свойства:

1. S_n — проекция x на S . $x = S_n + z$, где $z \perp \mathcal{L}$.
2. S_n — элемент наилучшего приближения для x в \mathcal{L} .

$$\|x - S_n\| = \min_{y \in \mathcal{L}} \|x - y\|.$$
3. $\|S_n\| \leq \|x\|$.

63.1 Доказательство

$$z := x - S_n, \langle x, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle S_n, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^n c_i(x) e_i, e_k \right\rangle = \langle x, e_k \rangle - \sum c_i(x) \langle e_i, e_k \rangle = 0$$

$$x = S_n + z, z \perp \mathcal{L}.$$

$$y \in \mathcal{L}, \|x - y\|^2 = \|S_n - y + z\|^2 = \|S_n - y\|^2 + \|z\|^2 \geq \|z\|^2 = \|S_n - x\|^2$$

$$\|x\|^2 = \|S_n\|^2 + \|z\|^2 \geq \|S_n\|^2.$$

63.2 Неравенство Бесселя

В условиях теоремы выполняется следующее равенство:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |C_k(x)|^2 \|e_k\|^2 \leq \|x\|^2.$$

из 3 свойства следует $\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^n |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2$ для любого n .

64 Теорема Рисса — Фишера о сумме ряда Фурье. Равенство Парсеваля

$\{e_k\}$ — ортогональная система в \mathcal{H} , $x \in \mathcal{H}$. Тогда выполняются следующие утверждения:

1. Ряд Фурье x сходится в \mathcal{H} .
2. $x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k + z$, где $\forall k : z \perp e_k$.
3. $x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k \iff \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$ (равенство Парсеваля).

64.1 Доказательство

$\sum x_k$ — ортогональный — сх $\iff \sum \|x_k\|$ — сходится.

Р.Ф. — сходится $\iff \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2$ — сходится — это всё верно по неравенству Бесселя.

$$z : x - \sum c_k e_k, \langle z, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle - \sum = \langle x, e_n \rangle - c_n \langle e_n, e_n \rangle.$$

\Rightarrow — очевидно из предыдущей теоремы пункта 3.

$$\Leftarrow \|x\|^2 = \left\| \sum c_k(x) p_k \right\|^2 + \|z\|^2 = \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 + \|z\|^2 \Rightarrow z = 0$$

65 Базис, полная, замкнутая ОС

1. ортогональная система векторов — *базис*, если $\forall x \in \mathcal{H} : x = \sum c_k(x) e_k$.
2. ортогональная система векторов *полная*, если не $\exists z : z \perp \{e_k\}$.
3. ортогональная система векторов *замкнутая* если $\forall x \in \mathcal{H}$ выполняется уравнение замкнутости, т.е.
$$\sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2.$$

66 Теорема о характеристике базиса

$\{e_k\}$ — ортогональная система векторов, тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\{e_k\}$ — базис.
2. $\forall x, y \in \mathcal{H}$ выполняется обобщающее уравнение замкнутости:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) \overline{c_k(y)} \|e_k\|^2.$$
3. $\{e_k\}$ — замкнутая ортогональная система.
4. $\{e_k\}$ — полная ортогональная система.
5. $\text{Lin}(e_1, e_2, e_3, \dots)$ — плотное в пространстве \mathcal{H} .

66.1 Доказательство

- $1 \Rightarrow 2)$ $x = \sum c_k(x) P_k$, $\frac{\langle y, e_k \rangle}{\|e_k\|^2} = c_k(y)$. $\langle x, y \rangle = \sum c_k(x) \langle e_k, y \rangle = \sum c_k(x) \overline{c_k(y)} \|e_k\|^2$
- $2 \Rightarrow 3)$ $y := x$.
- $3 \Rightarrow 4)$ $z \perp e_k : \forall k, c_k(z) = 0$.

Уравнение замкнутой системы: $\|z\|^2 = \sum |c_k(z)|^2 \|e_k\|^2 = 0$.

- $4 \Rightarrow 1)$ По теореме Рисса-Фишера $x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k + z$, $z \perp e_k \forall k$, то по условию $z = 0$, значит это и есть базис.

- $4 \Rightarrow 5)$ $\mathcal{L} = \text{Cl}(\text{Lin}(e_1, e_2, \dots)) = \mathcal{H}$.

Если \neq , то $\exists x \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{L}$, тогда $x = \sum c_k(x) e_k + z$, $z \perp e_k \forall k \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x \in \mathcal{L}$.

- $5 \Rightarrow 4)$ $y \perp e_k \forall k$, $y \perp \mathcal{L} = \mathcal{H}$, $y \perp y$, что значит $\langle y, y \rangle = 0$.

Часть XII

Интегралы, зависящие от параметра

66.2 Несобственный интеграл в \mathbb{R}

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda_1.$$

$$\int_a^{\rightarrow b} f dx = \lim_{B \rightarrow b-0} \int_a^B f dx \text{ — несобственный интеграл.}$$

Здесь f — локально суммируемая, т.е. $\forall B \in [a, b) : f$ — суммируемая на $[a, B]$. (возможно, что $b = +\infty$).

66.3 Теорема

$$\int_a^{\rightarrow b} f dx \text{ — абсолютно сходится} \iff f \text{ — суммируемая на } [a, b).$$

66.3.1 Доказательство

• \Leftarrow)

f — суммируемая $\Rightarrow \int_{[a,b)} |f| d\lambda$ — конечный, тогда $\int_a^{\rightarrow b}$ существует.

$$\int_a^B |f| \leq \int_{[a,b)} |f|.$$

• \Rightarrow)

$\lim_{B \rightarrow b-0} \int_a^B |f| d\lambda = \int_{[a,b)} |f| d\lambda$ — в силу непрерывности меры снизу $g \geq 0$.

$$\text{Измеримость } E \mapsto \int_E g dx.$$

$$f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

X — пространство с мерой, $y \in Y_0$ — метрическое пространство (или даже метризуемое).

Считаем, что $\forall y : f(\cdot, y)$ — суммируемая на X .

67 Пределный переход под знаком интеграла при наличии равномерной сходимости

$\mu X < +\infty$, $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) \rightarrow \varphi$ при $y \rightarrow y_0$ ($y_0 \in Y_0$ или y_0 — предельная точка Y). Тогда

$$\varphi \text{ — суммируемая на } X, \lim_{y \rightarrow y_0} \int_X f(x, y) d\mu = \int_X \varphi d\mu.$$

67.1 Доказательство

По Гейне выбираем $y_n \rightarrow y_0$ при больших n : $\forall x : |f(x, y_n) - \varphi(x)| < 1 \Rightarrow \varphi$ — суммируемая.

$$\left| \int_X f(x, y_n) d\mu - \int_X \varphi d\mu \right| \leq \int_X |f - \varphi| d\mu \leq \sup_{x \in X} |f(x, y_n) - \varphi(x)| \mu X \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

67.2 определение

$f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (как выше).

$y_0 \in Y$, f — удовлетворяет условию $L_{\text{loc}}(y_0)$, если $\exists g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — суммируемая, а также существует $U(y_0)$, что для почти всех $x \in X$ и $\forall y \in Y(y_0) : |f(x, y)| \leq g(x)$.

67.3 Теорема Лебега о мажорирующей сходимости

$f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\varphi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, что $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$ при почти всех x , f — удовлетворяет $L_{\text{loc}}(y_0)$. Тогда

$$\varphi \text{ — суммируемая, } \lim_{y \rightarrow y_0} \int_X f(x, y) d\mu = \int_X \varphi d\mu.$$

67.3.1 Доказательство

Из теоремы Лебега по Гейне $y_n \rightarrow y_0$, при почти всех x , при $y \in U(y_0)$ верное $|f(x, y)| \leq g(x)$, для больших n получаем $|f(x, y_n)| \leq g(x)$, при $n \rightarrow +\infty$ $|\varphi(x)| \leq g(x) \Rightarrow \varphi$ — суммируемая.

$$\int_X f(x, y_n) d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X \varphi d\mu.$$

67.3.2 Следствие

f — при почти всех x — непрерывно по y в точке y_0 , f — удовлетворяет $L_{\text{loc}}(y_0)$. Тогда

$$J(y) := \int_X f(x, y) d\mu(x) \text{ — непрерывна в } y_0.$$

$$\varphi \leftarrow -f(x, y_0).$$

67.4 Правило Лейбница

$Y \subset \mathbb{R}$ — промежуток.

$f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\forall y : f(\cdot, y)$ — суммируемая на X .

Пусть:

1. для почти всех x и $\forall y \in Y : \exists f'_y(x, y)$.
2. f'_y — удовлетворяет $L_{\text{loc}}(y_0)$.

$$J(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x). \text{ Тогда}$$

$$J(y) \text{ — дифференцируемая в } y_0 \text{ и } J'(y) = \int_X f'_y(x, y) d\mu(x).$$

67.4.1 Доказательство

$$F(x, h) := \frac{f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'_y(x, y_0).$$

$$\frac{J(y_0 + h) - J(y_0)}{h} = \int_X F(x, h) d\mu \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_X f'_y(x_0, y_0) d\mu.$$

$L_{\text{loc}}(h = 0)$, $|F(x, h)| = |f'_y(x, y_0 + \theta h)|$ по теореме Лагранжа, и $|f'_y(x, y_0 + \theta h)| \leq g(x)$ по условию $L_{\text{loc}}(y_0)$ для f'_y из 2 пункта.

Часть XIII

Тригонометрические ряды Фурье

67.5 Тригонометрический полином порядка n

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx — \text{тригонометрический полином не выше } n.$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx — \text{тригонометрический ряд.}$$

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}.$$

$$S_n = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} — \text{тригонометрический полином в экспоненциальной форме.}$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = \lim S_n(x) — \text{тригонометрический ряд в экспоненциальной форме.}$$

$$e^{ikx} = \cos nx + i \sin nx.$$

68 Лемма о вычислении коэффициентов тригонометрического ряда

Дан тригонометрический ряд (вещественный или комплексный), S_n , также известно, что $S_n \rightarrow f$ в $L^1[-\pi, \pi]$.

Тогда

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \quad (\text{работает и при } k = 0).$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt.$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

69 Доказательство

Докажем только формулу 1, остальные доказываются аналогично.

$$\text{Возьмём } n > k, \text{ тогда } \int_{-\pi}^{\pi} S_n(t) \cos kt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum a_l \cos lt + b_l \sin lt \right) \cdot \cos kt dt = \int_{-\pi}^{\pi} a_l \cos^2 kt = \pi a_k.$$

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} S_n(t) \cos kt - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(t) - f(t)| |\cos kt| dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(t) - f(t)| dt = \|S_n - f\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

69.1 Определение

$f \in L^1[-\pi, \pi]$, $a_k(f)$, $b_k(f)$, $c_k(f)$, полученные по формуле из леммы — это назначенные коэффициенты Фурье функции f .

Ряд $\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx$ — ряд Фурье функции f .

Также можно рассматривать $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikx}$ — тоже ряд Фурье.

69.1.1 Замечание

$f \in L_1 = L^1[-\pi, \pi]$ — чётна.

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt = 0.$$

$$a_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos kt dt.$$

если f — нечётная, то меняем местами a и b ($a_k = 0$, $b_k(f) = \frac{2}{\pi} \dots$).

69.1.2 Ещё шаманство

Для $f \in L^1[0, \pi]$ можно считать ряд Фурье по синусам или по косинусам.

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum a_k \cos kx, \quad f \sim \sum b_k(f) \sin kx.$$

70 Теорема Римана-Лебега

$E \subset \mathbb{R}$, $f \in L^1(E, \lambda_1)$. Тогда

$$\int_E f(t) e^{i\lambda t} dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\int_E f(t) \cos t \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0 \text{ (аналогично для } \sin).$$

70.1 Следствие

$$a_k(f), b_k(f), c_k(f) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

70.2 Доказательство

Пусть $f = 0$ вне E , $f \in L^1(\mathbb{R})$.

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} dt \text{ при } t = \tau + \frac{\pi}{\lambda} \text{ равно } \int_{\mathbb{R}} f\left(\tau + \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda\tau + i\pi} d\tau = - \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda t} dt.$$

$$2 \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} = \int_{\mathbb{R}} \left(f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right) e^{i\lambda t} dt$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} \right| \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left| f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| \cdot |e^{i\lambda t}| dt = \frac{1}{2} \|f - f_{\pi/\lambda}\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

70.3 Модуль непрерывности

$$w(f, h) = \sum_{x, y \in E, |x-y| < h} |f(x) - f(y)| - \text{модуль непрерывности.}$$

Пусть f — дифференцируема на $[a, b]$, тогда $|w(f, h)| \leq \max |f'|h$.

70.4 Теорема

1. $f \in \widetilde{C}[-\pi, \pi]$. Тогда $|a_k(f)|, |b_k(f)|, 2|c_k(f)| \leq w(f, \frac{\pi}{k})$.

70.4.1 Доказательство

Как в теореме Римана-Лебега делаем рассуждение $[-\pi, \pi]$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt = - \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau + \frac{\pi}{k}) \cos k\tau d\tau \text{ (сделали замену), тогда } \pi w(f, \frac{\pi}{k}).$$

Часть XIV

05.05.2020

70.5 Равномерно сходящийся интеграл

$$J(y) = \int_a^{\rightarrow b} f(x, y) d\mu(x), \quad f : \langle a, b \rangle \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \text{ локально суммируемая.}$$

Интеграл $J(y)$ равномерно сходится на $Y \iff \int_a^t f(x, y) dx \rightrightarrows J(y)$ при $t \rightarrow b - 0$.

$$\left| \int_a^t f(x, y) dx - J(y) \right| \xrightarrow{t \rightarrow b-0} 0.$$

$$\sup_y \left| \int_a^{\rightarrow b} f(x, y) dx \right| \xrightarrow{t \rightarrow b-0} 0.$$

70.6 Что-то похожее на признак Вейерштрасса

$|f(x, y)| \leq g(x)$ и $\int_a^b g(x)$ конечен, тогда интеграл $\int_a^{\rightarrow b} g(x) dx$ — равномерно сходится.

70.7 Ложное воспоминание Констриана Петровича

$f : T \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, $T \subset \tilde{T}$, $Y \subset \tilde{Y}$ — метрические пространства (метризуемые)

t_0 — предельная точка T , y_0 — предельная точка Y . Пусть

1. $\forall t \in T : \exists \text{ кон. } L(t) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(t, y).$
2. $\forall y \in Y : \exists \text{ кон. } J(y) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t, y).$
3. Хотя бы один из пределов — равномерный.

Тогда существует конечный $\lim_{t \rightarrow t_0} L(t) = \lim_{y \rightarrow y_0} J(y).$

$f_n(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = a_n$, $f_n(x) \rightrightarrows S(x)$, тогда $\exists \text{ кон. } \lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$

70.8 Теорема

$f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, (X, \mathcal{A}, μ) — пространство с мерой.

$Y \subset \widetilde{Y}$ — метрическое пространство (или Y — м.п., или \widetilde{Y} — метризуемое)

$Y_0 \in \widetilde{Y}$ — п. т. Y .

1. при почти всех $x : \exists f_0(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$.
2. f — локально суммируемая, т.е. суммируемая на каждом $(a, t) : t < b$. $\int_a^t f(x, y) \rightarrow \int_a^t f_0(x)$.
3. $|forally : \exists J(y) = \int_a^{\rightarrow b} f(x, y) d\mu(x)$ — равномерно сходится на Y .

Тогда $\int_a^{\rightarrow b} f(x, y) d\mu(x) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \int_a^{\rightarrow b} f_0(x) d\mu(x)$.

70.8.1 Доказательство

Это ложное вспоминание с точностью до обозначений.

$$T = (a, b), T_0 = \overline{\mathbb{R}}, t_0 = b.$$

$$f(t, y) = \int_a^t f(x, y) d\mu(x), L(t) = \int_a^t f_0(x) d\mu(x).$$

Переход конечный \leftrightarrow интеграл равномерно сходится.

70.8.2 Следствие

$1 \leftrightarrow 1'$ при почти всех $x \ y \mapsto f(x, y)$, непрерывна в точке y_0 .

Тогда заключение: $J(y)$ непрерывен в точке y_0 .

70.9 Определение

$$E = \langle a, b \rangle, M \in \mathbb{R}, \alpha \in (0, 1).$$

$\text{Lip}_M(\alpha) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R} : \forall x, y \in E : |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|\}$ — класс Липшеца.

70.9.1 Пример

f — дифференцируема, $\forall x : |f'(x)| \leq M$, $f \in \text{Lip}_M(1)$.

$$|f(x) - f(y)| = |f'(X)| |x - y| \leq M |x - y|.$$

70.10 Следствие

$0 < \alpha \leq 1$, $f \in \text{Lip}_M(\alpha)$. Тогда при $k \neq 0$

$$|a_k(f)|, |b_k(f)|, 2|c_k(f)| \leq \frac{M\pi^\alpha}{|k|^\alpha}.$$

70.11 Утверждение

$f \in \widetilde{C}^1[a, b]$. Тогда

$$a_k(f') = kb_k(f), \quad b_k(f') - ka_k(f), \quad c_k(f') = ikc_k(f).$$

$$2\pi C_k(f') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx = f(x) e^{-ikx} \Big|_{-\pi}^{\pi} + ik \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

70.12 Следствие

1. $f \in \widetilde{C}^{(r)}[-\pi, \pi]$. Тогда $|a_k(f)|, |b_k(f)|, |c_k(f)| \leq \frac{\text{const}}{|k|^2}$.

2. $f \in \widetilde{C}^{(r)}$, $f^{(r)} \in \text{Lip}_M(\alpha)$. Тогда $\dots \leq \frac{\text{const}}{|k|^{r+\alpha}}$.

$$a_k(f) = \frac{1}{k^r} a_k(f^{(r)})$$

70.13 Ядро Дирихле

$$D_n(t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right) — \text{ядро Дирихле}, \quad n = 0, 1, \dots$$

70.14 Ядро Фейера

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t).$$

70.15 Свойства

$$1. D_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin t/2}.$$

$$2. \Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin^2 t/2}.$$

$$3. D_n, \Phi_n — \text{чётные}, \Phi_n \geq 0, \int_{-\pi}^{\pi} D_n = 1, \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n = 1.$$

$$4. f \in L^1[-\pi, \pi], \text{ тогда } S_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt.$$

70.15.1 Доказательство

$$2 \sin \frac{\pi}{2} \cos kt = \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)t.$$

$$2 \sin \frac{t}{2} D_n = \frac{1}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{2} + \sum \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)t \right)$$

$$2\pi(n+1)\Phi_n = \sum_{k=0}^n \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t}{\sin t/2} = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{\sin^2 \frac{t}{2}}.$$

$$2 \sum_{k=0}^n \sin \frac{t}{2} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t = 2 \sum \cos kt - \cos(k+1)t = (1 - \cos(n+1)t) = 2 \sin^2\left(\frac{n+1}{2}t\right)$$

$$A_k(f, x) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cos kt dt$$

70.16 Интеграл Дирихле

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt — \text{интеграл Дирихле.}$$

71 Принцип локализации Римана

$f, g \in L_1$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. $f(x) = g(x)$ на $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Тогда

ряды Фурье f и g ведут себя одинаково, т.е. $S_n(f, x_0) - S_n(g, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

71.1 Доказательство

$h := f - g$, $h = 0$ в $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $S_n(h, x_0)$, проверим, что $S_n(h, x_0) \rightarrow 0$.

$$S_n(h, x_0) = \int_{-\pi}^{\pi} h(x_0 + t) D_n(t) dt.$$

$$\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin t + \cos nt.$$

$$S_n(h, x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x_0 + t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt + h(x_0 + t) \cos ntdt = b_n(h_1) + a_n(h_2) \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} 0 \text{ по теореме Римана-Лебега.}$$

Равенство выполняется в случае $h_1, h_2 \in L_1$, $h_2 \in L_1$ — очевидно.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h_2| = \int_{-\pi}^{\pi} |h(x_0 + t)| dt.$$

$$h(x_0 + t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \text{ при } |t| < \delta : h_1 = 0.$$

$$|t| > \delta : |h_1| \leq |h(x_0 + t)| \cdot \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2}.$$

71.2 Замечания

1. В условиях теоремы пусть $[a, b] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Тогда

$$S_n(h, x) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty \text{ на } [a, b].$$

2. x_0, δ . Для определения ряда Фурье нужен весь $[-\pi, \pi]$. А для "поведения" ряда Фурье существенна лишь окрестность x_0 .

3. $f \in L^1[0, \pi]$,

$$f \sim \sum b_k(f) \sin kx.$$

$$\sim \sum a_k(f) \cos kx.$$

Эти различия ведут себя одинаково на $[0, \pi]$.

72 До свидания, теория меры

(a, b)

Сумм. (a, t)

$$\lim_{t \rightarrow b-0} \int_a^t f(x) d\mu(x).$$

$$\int_a^{\rightarrow b} f(x, y) d\mu(x) - \text{равномерно сходится, если } \int_a^t \Rightarrow \int_a^{\rightarrow b}, \text{ если } \sup_{y \in Y} \left| \int_t^{\rightarrow b} f(x, y) d\mu(x) \right| \xrightarrow{t \rightarrow b-0} 0.$$

72.1 Теорема об интегрировании по параметру

$f : (a, b) \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — суммируемая по мере $\lambda_1 \times \mu$ на каждом множестве вида $(a, t) \times Y$, где $a < t < b$. $\mu Y < +\infty$.

Пусть $J(y) = \int_a^{\rightarrow b} f(x, y) dx$ — равномерно сходится на Y . Тогда

1. $J(y)$ — суммируемая на Y .
2. $\int_a^{\rightarrow b} \left(\int_Y f(x, y) d\mu(y) \right) dx$ — сходится.
3. $\int_Y \int_a^{\rightarrow b} f(x, y) d\mu(x) = \int_a^{\rightarrow b} \left(\int_Y f(x, y) dy \right).$

72.1.1 Доказательство

Проверим свойство 1.

$J_t(y) = \int_a^t f(x, y) dx$, $a < t < b$, $y \in Y$ — суммируемая на Y по теореме Фубини.

$|J(y) - J_t(y)| = \int_t^{\rightarrow b} f(x, y) dx \leq 1 \quad \forall y$ при t близких к b (следует из равномерной сходимости), значит $J(y)$ — суммируемая (поскольку $\mu Y < +\infty$).

Остальные свойства сами собой получаются.

$x \mapsto \int_Y f(x, y) d\mu(y)$ — суммируемая по x на промежутке (a, t) (по теореме Фубини).

По теореме Фубини $\int_a^t \left(\int_Y f(x, y) d\mu(y) \right) dx = \int_Y \int_a^t f = \int_Y \int \left(\int_a^{\rightarrow b} f dx \right) d\mu(y) - \int_Y \left(\int_t^{\rightarrow b} f dx \right) d\mu(y).$

$$\left| \int_a^t \left(\int_Y f \right) - \int_Y \left(\int_a^{\rightarrow b} f \right) \right| \leq \left| \int_Y \left(\int_t^{\rightarrow b} f dx \right) dy \right| \leq \int_Y \left| \int_t^{\rightarrow b} f dx \right| dy \leq \mu Y \sup_{y \in Y} \left| \int_t^{\rightarrow b} f(x, y) dx \right| \xrightarrow{t \rightarrow b-0} 0.$$

72.2 Правило Лейбница для несобственных интегралов

$f : [a, b) \times \langle c, d \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная.

$$\forall y : J(y) = \int_a^{\rightarrow b} f(x, y) dx \text{ — сходится.}$$

Пусть $\forall x : \forall y : \exists f'_y(x, y)$ — непрерывная функция, $[a, b) \times \langle c, d \rangle$.

Пусть $I(y) = \int_a^{\rightarrow b} f'_y(x, y) dx$ — равномерно сходится на $\langle c, d \rangle$. Тогда

$$1. J(y) \in C^1 \langle c, d \rangle.$$

$$2. J'(y) = I(y), \text{ т.е. } \frac{d}{dy} \left(\int_a^{\rightarrow b} f(x, y) dx \right) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$$

72.2.1 Доказательство

I — непрерывно зависит от y (по теореме о непрерывности несобственного интеграла).

$$s_0, s \in \langle c, d \rangle, \int_{s_0}^s I(y) dy = \int_{s_0}^s \left(\int_a^{\rightarrow b} f'_y dx \right) dy.$$

$$[x, y) \in [a, t] \times [s_0, s], f'_y$$

По предыдущей теореме меняем порядок и получаем

$$\int_a^{\rightarrow b} \left(\int_{s_0}^s f'_y(x, y) dy \right) dx = \int_a^{\rightarrow b} f(x, s) - f(x, s_0) dx = J(s) - J(s_0) \Rightarrow J(s) \text{ — дифференцируема, по теореме Барроу}$$

$$J'(S) = I(S).$$

Часть XV

11.05.2020

$$D_n := \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx \right)$$

$$S_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt.$$

72.3 Признак Дины

$$f \in L_1, x_0 \in \mathbb{R}, S \in \mathbb{R}(\mathbb{C}).$$

$$\int_0^{\pi} \frac{|f(x_0+t) - 2S + f(x_0-t)|}{t} dt < +\infty. \text{ Тогда}$$

ряд Фурье в x_0 сходится к S , или $S_n(f, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S$.

72.3.1 Доказательство

$$\text{Обозначим } \varphi(t) = f(x_0+t) - 2S + f(x_0-t).$$

$$\text{Если } D_n \text{ — четный, то } \int_{-\pi}^{\pi} D_n = 1.$$

$$S_n(f, x_0) - S = \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t) D_n(t) dt - \int_{-\pi}^{\pi} S D_n(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0+t) - S) D_n(t) dt = \int_{-\pi}^0 + \int_0^{\pi} = \int_0^{\pi} \varphi(t) D_n(t) dt, \text{ для}$$

$t \in s-t$. Тогда как в предположении теоремы получаем

$$\int_0^{\pi} \varphi(t) D_n(t) dt = \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt + \cos nt \right) dt = b_n(h_1) + a_n \left(\frac{\varphi(t)}{2} \right) \text{ (в кавычках).}$$

$$h_1(t) = \frac{\varphi(t)}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$$

$$h_1(t) =, \frac{\varphi(t)}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \text{ для } t \in (0, \pi) \text{ или } 0, \text{ если } t \in (-\pi, 0).$$

$$\text{в кавычках } \frac{\varphi(t)}{2} = \frac{\varphi(t)}{2} \text{ для } t \in (0, \pi) \text{ и } 0 \text{ в противном случае.}$$

Теперь проблема с $h_1 \in L_1$.

$$h_1, \frac{\varphi}{2} \in L_1 \text{ (в кавычках).}$$

в кавычках $\frac{\varphi}{2} \in L_1$ — очевидно.

$$\left| \frac{\varphi(t)}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right| \leq \frac{|\varphi(t)|}{2 \cdot t/2} = \frac{|\varphi(t)|}{t}$$

$|\operatorname{tg} x| > |x|$ при $x \in (0, \pi/2)$, а $\operatorname{ctg} x < x$.

72.4 Замечания

$$1. * \Leftrightarrow \forall \delta > 0: \int_0^\delta \frac{|\varphi(t)|}{t} dt < +\infty \leq \int_\delta^\pi \frac{|f(x_0+t)| + |f(x_0-t)| + 2S}{t} dt \leq \frac{1}{\delta} (\|f\| + \|f\| + 2S\pi).$$

$$2. f(x) = \frac{1}{\ln|x|} \text{ — непрерывна в } 0.$$

$$x_0 = 0, S := 0, \text{ то } \int \frac{|f(t) + f(-t) - 2S|}{t} dt, \text{ тогда } - \int_0^\pi \frac{2}{t \ln t} dt \text{ — расходится.}$$

72.5 Следствие

$f \in L_1, x_0 \in [-\pi, \pi]$. Пусть существуют 4 предела: $f(x_0 \pm 0), \alpha_\pm := \lim_{t \rightarrow \pm 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0 \pm 0)}{t}$. (односторонняя производная). Тогда

$$S_n(f, x_0) \rightarrow \frac{1}{2} (f(x_0+0) + f(x_0-0)).$$

$$\text{Берём } S = \frac{1}{2} (f(x_0+0) + f(x_0-0)).$$

$$(*) : \int_0^\pi \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - f(x_0+0) - f(x_0-0)}{t} dt \xrightarrow{t \rightarrow 0} \alpha_+ + \alpha_-.$$

т.е. интеграл $(*)$ не является несобственным в нуле.

72.6 Следствие 2

$f \in L_1, f$ — непрерывна в x_0 , а также $\exists f'_\pm(x_0)$. Тогда

$$S_n(f, x_0) \rightarrow f(x_0).$$

72.6.1 Доказательство

$$f(x_0 \pm 0) = f(x_0), \alpha_\pm = f'_\pm(x_0).$$

72.7 Пример

$f(x) = x$ на $[-\pi, \pi]$, она нечётная, тогда $a_k(f) = 0$.

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} = x \frac{-\cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi k} \int_0^{\pi} \cos kx dx = \frac{2}{k} (-1)^{k-1}.$$

Ряд Фурье: $S(f, x) = \sum \frac{2}{k} (-1)^k \sin kx$.

$$x = \frac{\pi}{2}, \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right) = \frac{\pi}{4}.$$

$x = \pi$, $\sum = 0$ (полусумма π и $-\pi$ равна 0 по признаку Дини).

$$\sum \left\| \frac{2}{k} (-1)^k \sin kx \right\|_2^2 = \|x\|_2^2.$$

$$\frac{4}{k^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3}.$$

$$\sum \frac{4\pi}{k^2} = \frac{2\pi^3}{3}, \quad \sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

72.8 Конфетка

Пусть $f \in L_1$, тогда:

1. Чётная.

$$2. \int_{-\pi}^{\pi} f = 0.$$

3. $\forall q \in \mathbb{Q} : f = 0$ в окрестности точки πq .

4. $0 < \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx < +\infty \Rightarrow f \in L_2, f \neq 0 \Rightarrow$ ряд Фурье f нетривиальный.

$a_k = a_k(f)$. Тогда

$$\forall m \in \mathbb{N} : s \sum_{k=0}^{+\infty} a_{km} = 0.$$

72.8.1 Доказательство

$$\sum a_k \cos kx \leftrightarrow f.$$

$x_0 := \frac{2\pi}{n}i$; в окрестности x_0 $f = 0$ удовлетворяет признаку Дини.

$$\sum a_k \cos \frac{2\pi}{n} ik = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Сложим по i : $\sum a_k \left(\sum_{i=0}^{n-1} \cos \left(\frac{2\pi}{n} kj \right) \right) = 0$.

$$\cos 2\pi \frac{0k}{n} + \cos 2\pi \frac{k}{n} + \cos 2\pi \frac{2k}{n} + \cos 2\pi \frac{3k}{n} + \dots + \cos 2\pi \frac{(n-1)k}{n}.$$

Это сумма x координат и векторов, и она не меняется при повороте на $\frac{2\pi k}{n} \Rightarrow$ сумма векторов равна 0, значит и сумма x координат равна 0. (рассуждение содержательно только при k не делящемся на n).

При k делящемся на n сумма равна n .

Часть XVI

Свёртки и аппроксимативные единицы

72.9 Определение

Свёртка двух функций из $L^1[-\pi, \pi]$, $f, K \in L_1$,

$$(f * K)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)K(x-t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt.$$

72.10 Корректность определения

$g(x, t) = f(x-t)K(t)$. Проверим, что функция — измеримая $\mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Давайте рассмотрим функции попроще, т.е. $\varphi(x, t) = f(x-t)$ — измеримая ли она? $\mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

$\mathbb{R}^2(\varphi < a)$, $E_a := \mathbb{R}(f(x) < a)$ — измеримая по Лебегу в \mathbb{R} .

$$f(x-t) < a.$$

$$(x, t) \mapsto (x-t, t).$$

$$\mathbb{R}^2(\varphi < a) \mapsto E_a \times \mathbb{R}.$$

φ — измеримая, $K(t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — измеримо, $(t, x) \mapsto K(t)$.

$$\iint_{[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]} |g(x, t)| dx dt = \int_{-\pi}^{\pi} dt \left(|K(t)| \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)| dx \right) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt.$$

Таким образом, свёртка определена при почти всех x , и результат свёртки также лежит в L^1 (всё это следует из теоремы Фубини).

72.11 Коэффициент Фурье свёртки

$$c_k(f * K) = 2\pi c_k(f)c_k(K).$$

$$2\pi c_k(f * k) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt \right) e^{-ikx} dx, \quad f(x-t)K(t)e^{-ikx} \text{ — суммируемая на } [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi], \text{ тогда}$$

$$\iint_{[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]} f(x-t)K(t)e^{-ik(x-t)}e^{-ikt}dxdt = \int_{-\pi}^{\pi} dt \left(\int_{-\pi}^{\pi} K(t)e^{-ikt} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)e^{-ik(x-t)}dx \right) = (2\pi)^2 c_k(K)c_k(f).$$

$$\widetilde{c}_k(f * K) = \widetilde{c}_k(f)\widetilde{c}_k(K).$$

$$L^1[-\pi, \pi] \xrightarrow{\widetilde{c}}.$$

$$f \mapsto (\dots, \widetilde{c_{-2}(f)}, \widetilde{c_{-1}(f)}, \widetilde{c_0(f)}, \widetilde{c_1(f)}, \dots).$$

$$f * g \mapsto (\dots, \widetilde{c_{-1}(f)}, \widetilde{c_{-1}(g)}, \widetilde{c_0(f)c_0(g)}, \widetilde{c_1}, \dots).$$

72.12 Ещё одно свойство

$f \in L^p[-\pi, \pi]$, $K \in L^q[-\pi, \pi]$. $1 \leq p \leq +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда

$f * K$ непрерывна, $\|f * K\|_{\infty} \leq \|f\|_p \cdot \|K\|_q$ (*).

72.12.1 Доказательство

Неравенство (*) — неравенство Гёльдера.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |K|^q \right)^{1/q}.$$

$$p = 1, +\infty,$$

$$q = +\infty, 1.$$

$|(f * K)(x+h) - (f * K)(x)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+h-t) - f(x-t))K(t)dt \right| \leq \|K\|_q \cdot \|f_h - f\|_p \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ (по теореме о непрерывности сдвига, но с оговоркой, что теореме о непрерывности сдвига не работает для случая $p = +\infty$, если $p = +\infty$, то поменяем p и q местами, работает из-за симметричности свёртки).

Часть XVII

18.05.2020

$$(f * K)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt.$$

72.13 Теорема

$f \in L^p[-\pi, \pi] (1 \leq p \leq +\infty), K \in L_1$. Тогда $f * K \in L^p$.

$$\|f * K\|_p \leq \|K\|_1 \|f\|_p.$$

При $p = +\infty$ тоже очевидно.

Докажем при $1 < p < +\infty$. Возьмём $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)k(t)dt \right|^p \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)| |K(t)|^{1/p} |K(t)|^{1/q} dt \right)^p, \text{ и это не превосходит по Гёльдеру}$$

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p |K(t)| dt \right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} |K(t)| dt \right)^{p/q} = \|K\|_1^{p/q}.$$

$$\|f * K\|_p^p = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)dt \right|^p dx \leq \|K\|_1^{p/q} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p |K(t)| dt dx = \|K\|_1^{p/q+1} \|f\|_p^p = \|K\|_1^p \|f\|_p^p.$$

72.14 Определение

$$E_\delta := [-\pi, \pi] \setminus (-\delta, \delta), \quad 0 \leq \delta < \pi.$$

$D \in \mathbb{R}, h_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ — предельная точка D .

Семейство функций $\{K_h\}_{h \in D}$ — аппроксимативная единица, если выполнены следующие аксиомы:

1. $\forall h \in D : K_h \in L^1([-\pi, \pi]), \int_{-\pi}^{\pi} K_h = 1.$
2. $\exists M > 0 : \forall h \in D : \|K_h\|_1 \leq M.$
3. $\forall \delta \in (0, \pi) : \int_{E_\delta} |K_h| dt \rightarrow 0, h \rightarrow h_0.$

72.14.1 Замечание

Если $K_n \geq 0$, то из аксиомы 1 следует аксиома 2 ($M = 1$).

72.14.2 Суррогатная аксиома 3

$$K_h \in L^\infty[-\pi, \pi] \text{ и } \forall \delta \in (0, \pi) : \operatorname{ess\,sup}_{x \in E_\delta} |K_h(t)| \xrightarrow{h \rightarrow h_0} 0.$$

Очевидно, из суррогатной аксиомы 3 следует обычная аксиома 3.

72.14.3 Вывод

Сочетание аксиом 1, 2 и суррогатной 3 — усиленная аппроксимативная единица.

72.14.4 Замечание

K_h — аппроксимативная единица, $\left\{ \frac{|K_h|}{\|K_h\|_1} \right\}_{h \in D}$ — тоже аппроксимативная единица (из аксиомы 1 $K_h \Rightarrow \|K_h\|_1 \geq 1$).

72.15 Свойства аппроксимативной единицы

K_h — аппроксимативная единица. Тогда

1. $f \in \overline{C}[-\pi, \pi] \Rightarrow f * K_h \Rightarrow f, h \rightarrow h_0$.
2. $f \in L_1 \Rightarrow f * K_h \xrightarrow[\text{в } L_1]{} f$, т.е. $\|f * K_h - f\|_1 \xrightarrow{h \rightarrow h_0} 0$.
3. K_h — усиленная аппроксимативная единица, $f \in L_1$ — непрерывно в точке x . Тогда $f * K_h$ непрерывна в точке x , $(f * K_h)(x) \xrightarrow{h \rightarrow h_0} f(x)$.

72.15.1 Доказательство

$$f * K_h^{(n)} - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_h(t) dt \text{ (аксиома 1).}$$

- 1 пункт

f — равномерно-непрерывная: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall t : |t| < \delta : \forall x : |f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$ (аксиома 2).

Фиксируем ε :

$$f * K_h(x) - f(x) = \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{E_\delta} = I_1 + I_2.$$

$$|I_1| \leq \int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)| |K_h(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2m} \cdot \int_{-\delta}^{\delta} |K_h(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \|K_h\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|I_2| \leq \int_{E_\delta} |\dots| \leq 2\|f\|_\infty \cdot \int_{E_\delta} |k_h| dt \rightarrow 0 \text{ (по аксиоме 3), т.е. } \exists U(h_0) : \forall L \in U(h_0) : |I_p| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$|f * K_h - f| \leq |I_1| + |I_2| < \varepsilon.$$

• 3 пункт

$f * K_h$ — непрерывен по свойству свёртки.

f — равномерно-непрерывная: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall t : |t| < \delta : |f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$ (аксиома 2).

$$|I_1| \leq \int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)| |K_h(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2m} \cdot \int_{-\delta}^{\delta} |K_h(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \|K_h\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|I_2| \leq \int_{E_\delta} |\dots| \leq \text{essup} |K_h| \int_{E_\delta} |f(x-t)| * |f(x)| dt \leq \text{essup} |K_h| (\|f\|_1 + 2\pi|f(x)|)$$

$$|f * K_h - f| \leq |I_1| + |I_2| < \varepsilon.$$

• 2 пункт

$$\|f * K_h(x) - f(x)\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_h(t) dt \right| dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| \cdot |K_h(t)| dt dx.$$

$$g(t) := \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| dx = \int_{-\pi}^{\pi} |K_h(t)| g(-t) dt = \|K_h\|_1 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g(-t) \frac{|K_h(t)|}{\|K_h\|_1} dt$$

$g(t)$ — непрерывная по теореме о непрерывности сдвига, $\|K_h\|_1 \leq M$ по аксиоме 2.

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} |f(x_0+t) - f(x)| - |f(x_0+t_0) - f(x)| \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x_0+t) - f(x+t_0)| dt.$$

72.15.2 Следствие

$f \in L_p \Rightarrow f * K_h \xrightarrow{L_p} f$, т.е. $\|f * K_h - f\|_p \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \|f * K_h(x) - f(x)\|_p^p &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_h(t) dt \right|^p dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| |K_h(t)|^{1/p} |K_h(t)|^{1/q} dt \right)^p dx \leq \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|^p \cdot |K_h(t)| \right) \cdot \|K_h\|_1^{p/q} dx = \|K_h\|_1^{p/q} \int_{-\pi}^{\pi} g(-t) \frac{|K_h(t)|}{\|K_h\|_1} dt, \text{ где } g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|^p. \end{aligned}$$

$f \in L_1$, $S_n(f, x)$, $\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f, x)$ — сумма Фейера.

$\sigma_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \Phi_n(t) dt$ — через ядро Фейера.

Φ_n — четная, поэтому $\sigma_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \Phi_n(t) dt$ (оказывается, это свёртка).

72.16 Теорема Фейера

1. $f \in \overline{C}[-\pi, \pi]$. Тогда $\sigma_n(f) \rightrightarrows f$, $n \rightarrow +\infty$ на $[-\pi, \pi]$.
2. $f \in L^p[-\pi, \pi]$, $q \leq p < +\infty$. Тогда $\|\sigma_n(f) - f\|_p \rightarrow 0$, $n \rightarrow +\infty$.
3. $f \in L^1[-\pi, \pi]$, непрерывно в x_0 , $\sigma_n(f)(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$.

72.16.1 Доказательство

$\{\Phi_n\}$ — усиленная аппроксимативная единица. Проверим все свойства аппроксимативной единицы.

1. Φ_n — непрерывна $\Rightarrow \Phi_n \in L^1, L^\infty$, $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n = 1$.
2. $\Phi_n \geq 0$, следует из аксиомы 1.
3. $\text{ess sup}_{x \in E_\delta} |\Phi_n(x)| = \sup_{x \in E_\delta} \frac{1}{2\pi(n+1)} \cdot \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} x}{\sin^2 \frac{x}{2}} \leq \frac{\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}}{n+1}$

Часть XVIII

Преобразование Фурье

72.17 Определение

$f \in L^1(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$

$\bar{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{-2\pi i \langle y, x \rangle} dx$, $y \in \mathbb{R}^m$.

72.18 Свойства

1. \bar{f} — непрерывна на \mathbb{R}^m по теореме Лебега при $y \in U(y_0) \mid f(x)e^{-2\pi i\langle y, x \rangle} \in L^1$ — суммируемая, и очевидно $|\bar{f}(y)| \leq \|f\|_1$.

2. $f_h(x) = f(x - h)$, $\bar{f}_h(y) = e^{-2\pi i\langle y, h \rangle} \bar{f}(y)$ ($h \in \mathbb{R}^m$).

$f(ax)$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

$g(x) = f(ax)$.

$$\begin{aligned} \bar{g}(y) &= \int_{\mathbb{R}^m} f(ax) e^{-2\pi i\langle y, x \rangle} dx = \frac{1}{|a|^m} \int_{\mathbb{R}^m} f(\bar{x}) e^{-2\pi i\langle y, \frac{\bar{x}}{a} \rangle} d\bar{x}, \text{ где } \bar{x} = ax \text{ или } x = \frac{\bar{x}}{a}. \\ &= \frac{1}{|a|^m} \bar{f}\left(\frac{y}{a}\right). \end{aligned}$$

3. $f(y) \rightarrow 0$ при $|y| \rightarrow +\infty$ по теореме Римана-Лебега $E \subset \mathbb{R}^m$, $f \in L^1(E)$. Тогда

$$I(y) = \int_E f(x) e^{-\pi i\langle y, x \rangle} dx \xrightarrow{|y| \rightarrow +\infty} 0.$$

$$h := \frac{y}{2|y|^2}, \quad \bar{f}_h(y) = -\bar{f}(y).$$

4. $f, g \in L^1(\mathbb{R}^m)$, $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x - u)g(u)du$.

Корректность свёртки как в теме ряды Фурье.

72.19 Теорема

$f, g \in L^1(\mathbb{R}^m)$. Тогда

1. $\overline{f * g}(y) = (f * g)(y) = \bar{f}(x)\bar{f}(y) \cdot \bar{g}(y)$

2. $\int_{\mathbb{R}^m} \bar{f}(y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\bar{g}(y)dy$.

$$(f * g)'(y) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x - u)g(u)du \right) e^{-2\pi i\langle y, x \rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^m} du g(u) e^{-\pi i\langle y, u \rangle} \int_{\mathbb{R}^m} f(x, u) e^{-2\pi i\langle y, x - u \rangle} dx.$$

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{-2\pi i\langle x, y \rangle} dx \right) g(y) dy.$$

$(x, y) \mapsto f(x)g(y)e^{-2\pi i\langle x, y \rangle}$ — суммируемая на $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$.

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{-2\pi i\langle x, y \rangle} dx \right) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \int_{\mathbb{R}^m} g(y) e^{-2\pi i\langle x, y \rangle} dy dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \bar{g}(x) dx$$

72.20 Пример

1. $m = 1$, $f = \chi_{[-1,1]}$.

$$\bar{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f e^{-2\pi i x y} dx = \frac{1}{2\pi i y} e^{-2\pi i x y} \Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{e^{2\pi i y} - e^{-2\pi i y}}{2i\pi y} = \frac{\sin 2\pi y}{\pi y}$$

Кстати, $\bar{f}(y)$ — не суммируемая!

2. $f_a(x) = e^{-\pi a^2 x^2}$, $(a \in \mathbb{R}, a > 0)$, $m = 1$.

$$\begin{aligned} \bar{f}_m &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a^2 x^2} e^{-2\pi i \langle x, y \rangle} dx = \int_0^{+\infty} + \int_{-\infty}^0 = \int_0^{+\infty} e^{-\pi a^2 x^2} (e^{-2\pi i x y} + e^{2\pi i x y}) dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\pi a^2 x^2} \cos(2\pi x y) dx = \dots = \\ &= \frac{1}{a} f_{1/a}(y). \end{aligned}$$

72.21 Теорема

$m = 1$, $f \in C^1$, дифференцируема, пусть она будет хорошая (оптимизм).

$$\bar{f}'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-2\pi i x y} dx = \text{интегрируем по частям и получаем}$$

$$= f(x) e^{-2\pi i x y} \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) 2\pi i y e^{-2\pi i x y} dx = 2\pi i y \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x y} dx = 2\pi i y \bar{f}.$$

$$f' = \xrightarrow{n} 2\pi i y \bar{f} = \bar{f}.$$

$$f' = f + e^{-\pi x^2}, \quad \bar{f} = \frac{e^{-\pi y^2}}{1 + 2\pi i y} \rightarrow f =$$

Часть XIX

25.05.2020

72.22 Теорема Фейера

1. $f \in \widetilde{C}$, $\sigma_n(f) \Rightarrow f$.
2. $f \in L^p[-\pi, \pi]$, $\|\sigma_n(f) - f\|_p \rightarrow 0$.
3. $f \in L^1[-\pi, \pi]$ — непрерывна в x , $\sigma_n(f, x) \rightarrow f(x)$.

72.22.1 Следствие

$f \in L^1[-\pi, \pi]$, f — непрерывна в x . Если ряд Фейера сходится в точке x , то $S_n(f, x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$.

$\sigma_n(f)$ — вычисляет сумму ряда Фейера методом среднего арифметического.

72.23 Следствие 2

1. Тригонометрическая система полна в $L^2[-\pi, \pi]$.
2. $f \in L_1 : \forall k : a_k(f) = 0, b_k(f) = 0$. Тогда $f = 0$ почти везде (или если $c_k(f) \equiv 0$).

72.23.1 Доказательство

1 следует из 2.

$a_k(f) = 0, b_k(f) = 0 \Rightarrow \forall n : S_n(f, x) = 0 \Rightarrow \sigma_n(f, x) \equiv 0$, но $\sigma_n(f) \rightarrow f$ в $L_1 \Rightarrow f \rightarrow 0$ почти везде

72.23.2 Следствие следствия 1

Коэффициенты Фурье $f \in L^1[0, \pi]$ и по косинусам или по синусам равна 0, значит и $f = 0$ почти везде.

72.23.3 Следствие следствия 2

$f \in L^2[-\pi, \pi]$. Тогда $S_n(f, x) \rightarrow f$ в L^2 .

72.23.4 Следствие следствия 3

Равенство Парсеваля: $f, g \in L^p[-\pi, \pi]$.

$$1. \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) \overline{c_k(g)}.$$

$$2. \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)|^2.$$

$$3. \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \pi \left(\frac{a_0(f)a_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(f)a_k(g) + b_k(f)b_k(g) \right).$$

$$4. \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx = \pi \left(\frac{a_0^2(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(f)^2 + b_k(f)^2 \right).$$

72.24 Следствие 3 (теорема Вейерштрасса)

Тригонометрические полиномы плотны в $\tilde{C}[-\pi, \pi]$ и в $L^p[-\pi, \pi]$ ($1 \leq p < +\infty$).

72.24.1 Доказательство

$f \in \tilde{C}$, $\sigma_n(f)$ — тригонометрический полином. $\sigma_n(f) \rightrightarrows f$, $\rho(\sigma_n(f), f) \rightarrow 0$.

72.25 Замечание

В $C[a, b]$ обычные полиномы плотны в $L^p[a, b]$.

Часть XX

Интегрирование рядов Фурье

72.26 Лемма

1. $D_n(t) = \frac{\sin nt}{\pi t} + \frac{1}{2\pi} (\cos nt + \sin nt \cdot h(t))$, где $h(t)$ не зависит от n , а также $|h(t)| \leq 1$, $t \in [-\pi, \pi]$.

2. $\forall x : |x| < 2\pi, \left| \int_0^x D_n(t) dt \right| < 2$.

72.26.1 Доказательство

$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} = \frac{\sin nt}{2\pi \operatorname{tg} t/2} + \frac{1}{2\pi} \cos nt = \frac{\sin nt}{\pi t} + \frac{1}{2\pi} \left(\cos nt + \sin nt \left(\frac{1}{\operatorname{tg} t/2} - \frac{1}{t/2} \right) \right)$, давайте возьмём в качестве $h(t) = \frac{1}{\operatorname{tg} t/2} - \frac{1}{t/2}$, $h(t)$ убывает на $[-\pi, \pi]$ и $h(t) < |h(\pi)| = \frac{2}{\pi} < 1$.

$\forall x : |x| < 2\pi, \left| \int_0^x D_n(t) dt \right| < 2$, D_n — чётная, можно считать, что $x > 0$. $x \in (0, \pi)$. $\left| \int_0^x D_n(t) dt - \int_0^x \frac{\sin nt}{\pi t} dt \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^x \cos nt + \sin nt \cdot h(t) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^x 2 dx \leq 1$.

$\int_0^x \frac{\sin nt}{\pi t} dt = \int_0^{nx} \frac{\sin v}{\pi v} dv \in (0, 1)$, если это так, то $\int_0^x D_n \in [-1, 2]$. $\max \int_0^{nx} \frac{\sin v}{\pi v} dv$ — достигается при $nx = \pi$, тогда $0 < \int_0^\pi \frac{\sin v}{\pi v} < \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 1 = 1$.

$x \in [\pi, 2\pi]$, $\int_0^x D_n = \int_0^{2\pi} - \int_x^{2\pi} = 1 - \int_0^{2\pi-x} D_n(t) c_n(t) \in [-1, 2]$.

72.27 Интегрирование рядов Фурье

$f \in L_1$. Тогда $\forall a, b \in \mathbb{R}, \int_a^b f dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) \int_a^b e^{ikx} dx$.

72.27.1 Замечание

Не предполагается сходимость ряда Фурье.

72.27.2 Доказательство

Достаточно рассмотреть $-\pi \leq a < b \leq \pi$, $\Xi := \Xi_{[a,b]}$.

$$\sum_{k=-n}^n c_k \int_a^b e^{ikx} = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx C_{-k}(\Xi) - 2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sum_{k=-n}^n C_k(\Xi) e^{-ikx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_n(\Xi, x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_n(\Xi, x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

$$S_n(\Xi, x) = \int_{-\pi}^{\pi} \Xi(t) D_n(x-t) dt = \int_a^b D_n(x-t) dt = \left| - \int_{x-a}^{x-b} D_n(\tau) d\tau \right| = \left| \int_0^{x-a} D_n(t) - \int_0^{x-b} D_n(t) \right| \leq 4.$$

72.27.3 Замечание

Проверим, что суммы Фурье функции Ξ — равномерно ограничены. Пусть $f \in \widetilde{C}^1[-\pi, \pi] \Rightarrow$ суммы ряда Фурье равномерно ограничены, т.е. $\exists C : \forall n : \forall x : |S_n(f, x)| \leq C$.

$$S_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt = f(x-t) H_n(t) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f'(x-t) H_n(t) dt \leq C.$$