

Содержание

I	Интеграл по мере	6
1	Интеграл ступенчатой функции	7
1.1	Свойства	7
2	Интеграл неотрицательной измеримой функции	8
2.1	Свойства	8
3	Суммируемая функция	9
3.1	Свойство	9
4	Интеграл суммируемой функции	10
4.1	Свойства	10
5	Простейшие свойства интеграла Лебега	11
5.1	Доказательство	11
5.2	Доказательство	11
5.3	Доказательство	11
5.4	Доказательство	12
5.5	Доказательство	12
5.6	Доказательство	12
6	Счетная аддитивность интеграла (по множеству)	13
6.1	Лемма	13
6.1.1	Доказательство	13

6.2	Теорема	13
6.2.1	Доказательство	13
6.3	Следствие	14
6.4	Следствие 2	14
II	Предельный переход под знаком интеграла	15
7	Теорема Леви	16
7.1	Доказательство	16
8	Линейность интеграла Лебега	17
8.1	Доказательство	17
8.2	Следствие	17
8.2.1	Доказательство	17
9	Теорема об интегрировании положительных рядов	18
9.1	Доказательство	18
9.2	Следствие	18
9.2.1	Доказательство	18
10	Абсолютная непрерывность интеграла	19
10.1	Доказательство	19
10.2	Следствие	19
11	02.03.2020	20
11.1	Теорема Лебега о мажорированной сходимости	20

11.1.1 Доказательство	20
11.2 Теорема Лебега о мажорированной сходимости почти везде	21
11.2.1 Доказательство	21
11.3 Теорема Фату	21
11.3.1 Замечание	21
11.3.2 Доказательство	21
11.3.3 Следствие	22
11.3.4 Следствие 2	22
III Произведение мер	23
12 Произведение мер	24
13 Теорема о произведении мер	25
13.1 Доказательство	25
13.2 Замечание	25
13.3 Дополнительная теорема (без доказательства)	25
14 Сечения множества	26
15 Принцип Кавальери	27
15.1 Замечание	27
15.2 Доказательство	27
15.3 Следствие	28
15.4 Замечание	28

16 Совпадение определенного интеграла и интеграла Лебега	29
16.1 Доказательство	29
16.2 Замечание	29
17 Теорема Тонелли	30
17.1 Доказательство	30
18 Теорема Фубини	32
18.0.1 Следствие	32
19 Какая-то нужная штука для лекции 02.03.2020, потом удалю	33
IV Замена переменных в интеграле	34
20 Образ меры при отображении	35
20.1 Замечание 1	35
20.2 Замечание 2	35
21 Взвешенный образ меры	36
22 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры	37
22.1 Замечание	37
22.2 Доказательство	37
22.3 Следствие	37
23 Плотность одной меры по отношению к другой	38
23.1 Замечание	38

24 Критерий плотности	39
24.0.1 Доказательство	39
25 Единственность плотности	40
25.0.1 Доказательство	40
25.1 Следствие	40
26 Лемма об образе малых кубических ячеек	41
26.0.1 Доказательство	41
26.1 Лемма 2	41
26.2 Теорема 2	42
26.2.1 Доказательство	42

Часть I

Интеграл по мере

1 Интеграл ступенчатой функции

$f = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \chi_{E_k}$, $f \geq 0$, где $E_k \in \mathcal{A}$ — допустимое разбиение, тогда интеграл ступенчатой функции f на множестве X есть

$$\int_X f d\mu = \int_X f(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mu E_k$$

Дополнительно будем считать, что $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

1.1 Свойства

- Интеграл не зависит от допустимого разбиения:

$$f = \sum \alpha_j \chi_{F_j} = \sum_{k,j} \lambda_k \chi_{E_k \cap F_j}, \text{ тогда } \int F = \sum \lambda_k \mu E_k = \sum_k \lambda_k \sum_j \mu(E_k \cap F_j) = \sum \alpha_j \mu F_j = \int F;$$

- $f \leq g$, то $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

2 Интеграл неотрицательной измеримой функции

$f \geq 0$, измерима, тогда интеграл неотрицательной измеримой функции f есть

$$\int_X f d\mu = \sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \left(\int_X g d\mu \right).$$

2.1 Свойства

- Для ступенчатой функции f (при $f \geq 0$) это определение даёт тот же интеграл, что и для ступенчатой функции;
- $0 \leq \int_X f \leq +\infty$;
- $0 \leq g \leq f$, g — ступенчатая, f — измеримая, тогда $\int_X g \leq \int_X f$.

3 Суммируемая функция

f — измеримая, f_+ и f_- — срезки, тогда если $\int_X f_+$ или $\int_X f_-$ — конечен, тогда интеграл суммируемой функции есть

$$\int_X f d\mu = \int_X f_+ - \int_X f_-.$$

Если $\int_X f \neq \pm\infty$, то говорят, что f — *суммируемая*, а также $\int |f|$ — конечен ($|f| = f_+ + f_-$).

3.1 Свойство

Если $f \geq 0$ — измерима, то это определение даёт тот же интеграл, что и интеграл измеримой неотрицательной функции.

4 Интеграл суммируемой функции

$E \subset X$ — измеримое множество, f — измеримо на X , тогда интеграл f по множеству E есть

$$\int_E f d\mu := \int_X f \chi_E d\mu.$$

f — суммируемая на E если $\int_E f_+ -$ и $\int_E f_-$ — конечны одновременно.

4.1 Свойства

- $f = \sum \lambda_k \chi_{E_k}$, то $\int_E f = \sum \lambda_k \mu(E_k \cap E)$;
- $f \geq 0$ — измерима, тогда $\int_E f d\mu = \sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \left(\int_X g d\mu \right).$

(X, \mathcal{A}, μ) — произвольное пространство с мерой.

$\mathcal{L}^0(X)$ — множество измеримых почти везде конечных функций.

5 Простейшие свойства интеграла Лебега

1. *Монотонность:*

$$f \leq g \Rightarrow \int_E f \leq \int_E g.$$

5.1 Доказательство

- $\sup_{\substack{\tilde{f} \text{ - ступ.} \\ 0 \leq \tilde{f} \leq f}} \left(\int_X \tilde{f} d\mu \right) \leq \sup_{\substack{\tilde{g} \text{ - ступ.} \\ 0 \leq \tilde{g} \leq g}} \left(\int_X \tilde{g} d\mu \right);$
- f и g — произвольные, то работаем со срезками, и $f_+ \leq g_+$, а $f_- \geq g_-$, тогда очевидно и для интегралов.

$$2. \int_E 1 \cdot d\mu = \mu E, \int_E 0 \cdot d\mu = 0.$$

5.2 Доказательство

По определению.

$$3. \mu E = 0, f \text{ — измерима, тогда } \int_E f = 0.$$

5.3 Доказательство

- f — ступенчатая, то по определению интеграла для ступенчатых функций получаем 0;
 - $f \geq 0$ — измеримая, то по определению интеграла для измеримых неотрицательных функций также получаем 0;
 - f — любая, то разбиваем на срезки f_+ и f_- и снова получаем 0.
4. (a) $\int -f = - \int f;$
 (b) $\forall c > 0: \int cf = c \int f.$

5.4 Доказательство

- $(-f)_+ = f_-$ и $(-f)_- = f_+$ и $\int -f = f_- - f_+ = - \int f$.
- $f \geq 0$ — очевидно, $\sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq cf}} \left(\int g \right) = c \sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \left(\int g \right)$.

5. Пусть существует $\int_E f d\mu$, тогда $\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|$.

5.5 Доказательство

$$-|f| \leq f \leq |f|,$$

$$- \int_E |f| \leq \int_E f \leq \int_E |f|.$$

6. f — измерима на E , $\mu E < +\infty$, $\forall x \in E : a \leq f(x) \leq b$. Тогда

$$a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E.$$

5.6 Доказательство

$$\int_E a \leq \int_E f \leq \int_E b,$$

$$a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E.$$

6 Счетная аддитивность интеграла (по множеству)

6.1 Лемма

$A = \bigsqcup A_i$, где A, A_i — измеримы, $g \geq 0$ — ступенчатые. Тогда

$$\int_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} g d\mu.$$

6.1.1 Доказательство

$$g = \sum \lambda_k \chi_{E_k}.$$

$$\int_A g d\mu = \sum \lambda_k \mu(A \cap E_k) = \sum_k \lambda_k \sum_i \mu(A_i \cap E_k) = \sum_i \left(\sum_k \lambda_k \mu(A_i \cap E_k) \right) = \sum_i \int_{A_i} g d\mu.$$

6.2 Теорема

$f : C \rightarrow \overline{R}$, $f \geq 0$ — измеримая на A , A — измерима, $A = \bigsqcup A_i$, все A_i — измеримы. Тогда

$$\int_A f d\mu = \sum_i \int_{A_i} f d\mu$$

6.2.1 Доказательство

• \leq

g — ступенчатая, $0 \leq g \leq f$, тогда $\int_A g = \sum \int_{A_i} g \leq \sum \int_{A_i} f$. Осталось перейти к \sup .

• \geq

$$A = A_1 \sqcup A_2, \sum \lambda_k \chi_{E_k} = g_1 \leq f \chi_{A_1}, g_2 \leq f \cdot \chi_{A_2} = \sum \lambda_k \chi_{E_k}, g_1 + g_2 \leq f \cdot \chi_A$$

$$\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 = \int_A g_1 + g_2.$$

переходим к $\sup g_1$ и g_2

$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \leq \int_A f$$

по индукции разобьём для $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n$, $A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ и $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n \sqcup B_n$, где $B_n = \bigsqcup_{i \geq n+1} A_i$,

тогда

$$\int_A f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_{B_n} f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f \Rightarrow \int_A f \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f$$

6.3 Следствие

$f \geq 0$ — измеримая, $\nu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, $\nu E = \int_E f d\mu$. Тогда ν — мера.

6.4 Следствие 2

$A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$, f — суммируемая на A , тогда

$$\int_A f = \sum_i \int_{A_i} f.$$

Часть II

Предельный переход под знаком интеграла

7 Теорема Леви

(X, \mathcal{A}, μ) , f_n — измерима, $\forall n : 0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ при почти всех x .

$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ при почти всех x . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f d\mu.$$

7.1 Доказательство

f — измерима как предел измеримых функций.

• \leq

$f_n(x) \leq f(x)$ почти везде, тогда $\forall n : \int_X f_n(x) d\mu \leq \int_X f d\mu$, откуда следует, что и предел интегралов не превосходит интеграл предела.

• \geq

Достаточно доказать, что для любой ступенчатой функции $g : 0 \leq g \leq f$ верно $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \geq \int_X g$.

Достаточно доказать, что $\forall c \in (0, 1)$ верно $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \geq c \int_X g$.

$$E_n := X(f_n \geq cg), E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$$

$\bigcup E_n = X$, т.к. $c < 1$, то $cg(x) < f(x)$, $f_n(x) \rightarrow f(x) \Rightarrow f_n$ попадёт в "зазор" $cg(x) < f(x)$.

$$\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq \int_{E_n} cg = c \int_{E_n} g,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} c \int_{E_n} g = c \int_X g, \text{ потому что это непрерывность снизу меры } A \mapsto \int_A g.$$

8 Линейность интеграла Лебега

Пусть f, g — измеримы на E , $f \geq 0, g \geq 0$. Тогда $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$.

8.1 Доказательство

Если f, g — ступенчатые, то очевидно.

Разберём общий случай. Существуют ступенчатые функции $f_n : 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \leq f$, и $g_n : 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots \leq g$, и $f_n(x) \rightarrow f(x)$ и $g_n(x) \rightarrow g(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_E f_n + g_n &= \int_E f_n + \int_E g_n, \text{ сделаем предельный переход, значит при } n \rightarrow +\infty \\ \int_E f + g &= \int_E f + \int_E g \end{aligned}$$

8.2 Следствие

Пусть f, g — суммируемые на множестве E , тогда $f + g$ тоже суммируема и $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$.

8.2.1 Доказательство

$$(f + g)_\pm \leq |f + g| \leq |f| + |g|.$$

$$h := f + g,$$

$$h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-,$$

$$h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+,$$

$$\int h_+ + \int f_- + \int g_- = \int h_- + \int f_+ + \int g_+,$$

$$\int h_+ - \int h_- = \int f_+ - \int f_- + \int g_+ - \int g_-, \text{ тогда}$$

$$\int h = \int f + \int g.$$

9 Теорема об интегрировании положительных рядов

$u_n \geq 0$ почти везде, измеримы на E . Тогда

$$\int_E \left(\sum_{i=1}^{+\infty} u_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu.$$

9.1 Доказательство

Очевидно по теореме Леви.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \text{ и } p \leq S_N \leq S_{N+1} \leq \dots \text{ и } S_N \rightarrow S(X).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E S_N = \int_E S,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_E u_k(x) = \int_E S(x) d\mu.$$

9.2 Следствие

u_n — измеримая функция, $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| < +\infty$. Тогда

$\sum u_n$ — абсолютно сходится почти везде на E .

9.2.1 Доказательство

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(x)|$$

$$\int_E S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n(x)| < +\infty, \text{ значит } S(x) \text{ конечна почти всюду.}$$

10 Абсолютная непрерывность интеграла

f — суммируемая функция, тогда верно:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall E \in \mathcal{A} : \mu E < \delta : \left| \int_E f \right| < \varepsilon$$

.

10.1 Доказательство

$X_n = X (f \geq n)$, $X_n \supset X_{n+1} \supset \dots$ и $\mu \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} X_n \right) = 0$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon : \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \frac{\varepsilon}{2}$ ($A \mapsto \int_A |f|$ — мера, тогда $\int_{\bigcap X_n} |f| = 0$ и по непрерывности меры сверху).

$\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$, берём $E : \mu E < \delta$.

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f| = \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \setminus X_{n_\varepsilon}} |f| \leq \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| + n_\varepsilon \mu E < \frac{\varepsilon}{2} + n_\varepsilon \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon} = \varepsilon.$$

10.2 Следствие

e_n — измеримое множество, $\mu e_n \rightarrow 0$, f — суммируемая. Тогда $\int_{e_n} f \rightarrow 0$.

11 02.03.2020

$f_n \rightrightarrows f$ по мере то же самое, что и $\mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$. Ещё есть способ $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$. Можно ли вывести хоть какую-нибудь импликацию.

\Rightarrow нельзя, пример: $f_n(x) = \frac{1}{nx}$ в (\mathbb{R}, λ) , тогда $f_n \rightrightarrows 0$ по мере. а $\int \left| \frac{1}{nx} \right| d\mu = +\infty$.

\Leftarrow можно: $\mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) = \int_{x_n} 1 d\mu \leq \int_{x_n} \frac{|f_n - f|}{\varepsilon} d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n - f| \rightarrow 0$.

Хотим доказать подобие $f_n \rightarrow f$, то $\int f_n \rightarrow \int f$.

11.1 Теорема Лебега о мажорированной сходимости

f_n, f — измеримые, почти везде конечные функции. $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$. Также существует g , что:

1. $\forall n : |f_n| \leq g$ почти везде;
2. g — суммируема на X (g — мажоранта).

Тогда $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$, и тем более $\int_X f_n \rightarrow \int_X f$.

11.1.1 Доказательство

f_n — суммируема в силу первого утверждения про g , f — суммируема по следствию теоремы Рисса. Тем более $\left| \int_X f_n - \int_X f \right| \leq \left| \int_X f_n - f \right| \leq \int |f_n - f|$.

1. $\mu X < +\infty$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. $X_n := X(|f_n - f| \geq \varepsilon)$, $\mu X_n \rightarrow 0$.

$$\int_X |f_n - f| = \int_{x_n} + \int_{x_n^c} \leq \int_{x_n} 2g + \int_{x_n^c} \varepsilon_0 \leq \int_{x_n} 2g + \int_x \varepsilon < \varepsilon(1 + \mu X). \text{ (при больших } n \text{ выражение } \int_{x_n} 2g \leq \varepsilon).$$

2. $\mu X = +\infty$, $\varepsilon > 0$.

Утверждение: $\exists A$ — измеримое, μA — конечное, $\int_{X \setminus A} g < \varepsilon$.

Доказательство

$$\int G = \sup \left\{ \int g_n : h \text{ — ступенчатая функция } 0 \leq h \leq g \right\}$$

$$\exists h_0 : \int_X g - \int_X h_0 < \varepsilon, A := \text{supp } h_0. \text{ (где supp — носитель (support))}$$

$$\int_{X \setminus A} g + \int_A g - h_0 < \varepsilon.$$

$$\int_X |f_n - f| = \int_A + \int_{X \setminus A} \leq \int_A |f_n - f| + 2\varepsilon < 3\varepsilon \text{ при больших } n.$$

11.2 Теорема Лебега о мажорированной сходимости почти везде

(X, \mathcal{A}, μ) , f_n, f — измеримые, $f_n \rightarrow f$ — почти везде.

Существует такая g , что:

1. $|f_n| \leq g$ почти везде;
2. g — суммируема.

11.2.1 Доказательство

f_n, f — суммируемая, тем более — как и раньше.

$h_n := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, \dots)$, h_n убывает. $0 \leq h_n \leq 2g$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) = \overline{\lim} |f_n - f| = 0$ почти везде.

$2g - h \geq 0$, возрастают, тогда по теореме Леви $\int_X 2g - h \rightarrow \int_X 2g$, значит $\int_X h_n \rightarrow 0$, тогда $\int_X |f_n - f| \leq \int_X h_n \rightarrow 0$.

11.3 Теорема Фату

(X, \mathcal{A}, μ) , $f_n \geq 0$ — измеримые, $f_n \rightarrow f$ почти везде. Если $\exists C > 0$, что $\forall n: \int_X f_n \leq C$, то $\int_X f \leq C$.

11.3.1 Замечание

Вообще говоря $\int_X f_n \not\rightarrow \int_X f$.

11.3.2 Доказательство

$g_n = \int (f_n, f_{n+1}, \dots)$.

g_n возрастает, $g_n \rightarrow f$ почти везде. $\lim g_n = \underline{\lim} f_n = f$ почти везде.

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n \leq C, \text{ тогда } \int F \leq C.$$

Примерчик

$$f_n = n \cdot \chi_{[0, \frac{1}{n}]} \rightarrow 0 \text{ почти везде.}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n = 1, \int f = 0.$$

Положительность важна:

$$f_n \geq 0, \text{ тогда } \int -f_n \leq -1, \text{ но } \int f = 0 \geq -1.$$

11.3.3 Следствие

$$f_n \xRightarrow[\mu]{} f \text{ (} f_{n_k} \rightarrow f \text{)}.$$

11.3.4 Следствие 2

$f_n \geq 0$, измеримая. Тогда

$$\int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n.$$

Доказательство

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n \leq C.$$

Берём n_k

$$\underline{\lim} \left(\int_X f_n \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\int_X f_{n_k} \right).$$

$$\int_X f_{n_k} \rightarrow \lim \left(\int_X f_n \right), \text{ а } \int_x g_n \rightarrow \int_X \underline{\lim} f_n.$$

Часть III

Произведение мер

12 Произведение мер

(X, \mathcal{A}, μ) и (Y, \mathcal{B}, ν) — пространства с мерой.

$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ — семейство подмножеств в $X \times Y$.

\mathcal{A}, \mathcal{B} — полукольца, значит и $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ — полукольцо.

$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ — полукольцо *измеримых прямоугольников* (на самом деле это не всегда так).

Тогда введём меру на $A \times B$ — $\mu_0(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$.

Обозначим $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ как произведение пространств с мерой.

13 Теорема о произведении мер

1. μ_0 — мера на полукольце $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$;
2. μ, ν — σ -конечные, значит μ_0 — σ -конечное.

13.1 Доказательство

1. Проверим счётную аддитивность μ_0 . $\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$, $(x, y) \in X \times Y$.

$P = \bigsqcup_{\text{сч.}} P_k$ — измеримые прямоугольники. $P = A \times B$ и $P_k = A_k \times B_k$, $\chi_P = \sum \chi_{P_k}$.

$\chi_A(x) \chi_B(y) = \sum_k \chi_{A_k}(x) \chi_{B_k}(y)$. Интегрируем по ν (по пространству Y).

$\chi_A(x) \cdot \nu(B) = \sum \chi_{A_k}(x) \nu(B_k)$. Интегрируем по μ .

$$\mu A \cdot \nu B = \sum \mu A_k \cdot \nu B_k.$$

2. $X = \bigcup X_k$, $Y = \bigcup Y_j$, где μX_k и νY_j — конечные, $X \times Y = \bigcup_{k,j} X_k \times Y_j$.

$(\mathbb{R}^m, \mathcal{M}^m, \lambda_m)$ и $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}^n, \lambda_n)$.

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu_0)$, где $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ — полукольцо.

Запускаем теорему о продолжении меры.

$\rightsquigarrow (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu)$, где $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ — σ -алгебра.

μ, ν — σ -конечная, следовательно продолжение определено однозначно.

13.2 Замечание

Произведение мер ассоциативно.

13.3 Дополнительная теорема (без доказательства)

λ_{m+n} есть произведение мер λ_m и λ_n .

14 Сечения множества

X , Y и $C \subset X \times Y$, $C_x = \{y \in Y : (x, y) \in C\} \subset Y$ — сечение множества C , аналогично определим $C^y = \{x \in X : (x, y) \in C\}$.

Допустимы объединения, пересечения и т.п.

15 Принцип Кавальери

(X, \mathcal{A}, μ) и (Y, \mathcal{B}, ν) , а также μ, ν — σ -конечные и полные.

$m = \mu \times \nu$, $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Тогда:

1. при почти всех $x \in X$ сечение $C_x \in \mathcal{B}$;
2. $x \mapsto \nu(C_x)$ — измерима (почти везде) на X ;
3. $mC = \int_X \nu(C_x) d\mu(x)$.

15.1 Замечание

1. C — измеримая \nRightarrow что $\forall x: C_x$ — измеримое.
2. $\forall x, \forall y, C_x, C_y$ — измеримы \nRightarrow что C — измеримо (пример можно взять из Серпинского).

15.2 Доказательство

D — класс множеств $X \times Y$, для которых принцип Кавальери верен.

1. $D \times \mathcal{B} \subset D$, $C = A \times B$, $C_x = \begin{cases} B & x \in A \\ \emptyset & x \notin A \end{cases}$.

$$x \mapsto C_x : \nu B \cdot \chi_A(x).$$

$$\int_X \nu B \chi_A(x) d\mu(x) = \mu A \cdot \nu B = mC.$$

2. E_i — дизъюнктные, $E_i \in D$. Тогда $\bigsqcup E_i \in D$.

$(E_i)_x$ — измеримые при почти всех x .

При почти всех x все сечения $(E_i)_x, i = 1, 2, \dots$ — измеримые.

$E_x = \bigsqcup (E_i)_x$ — измеримые при почти всех x .

$\nu E_x = \sum \nu(E_i)_x$, значит $x \mapsto \nu E_x$ измеримая функция.

$$\int_X \nu E_x d\mu = \int_X \sum \nu(E_i)_x d\mu = \sum \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \sum mE_i = mE$$

3. $E_i \in D, \dots \supset E_i \supset E_{i+1} \supset \dots, E = \bigcap_{i=1}^{+\infty} E_i, mE_i < +\infty$. Тогда $E \in D$.

$$\int_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty \Rightarrow \nu(E_i)_x \text{ — почти везде конечны.}$$

$$(E_i)_x \supset (E_{i+1})_x \supset \dots, E_x = \bigcap_{i=1}^{+\infty} (E_i)_x \Rightarrow E_x \text{ — измеримо при почти всех } x.$$

При почти всех x (для тех x , для которых $\nu(E_i)_x$ — конечные сразу все i или при $i = 1$), поэтому можно утверждать, что $\nu E_x = \lim_{i \rightarrow +\infty} \nu(E_i)_x \Rightarrow x \mapsto \nu E_x$ — измерима.

$$\int_X \nu E_x d\mu = \int_X \lim_{i \rightarrow +\infty} (\nu E_i)_x = \lim_{i \rightarrow +\infty} \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \lim mE_i = mE \text{ (по непрерывности сверху меры } m).$$

Перестановка пределов доказывается из теоремы Лебега, которую ещё не доказывали $|\nu(E_i)_x| \leq \nu(E_1)_x$ — суммируемая функция.

Мы доказали, что если $A_{ij} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, то $\bigcap_j \left(\bigcup_i A_{ij} \right) \in D$.

$$mE = \inf \left(\sum mP_k, E \subset \bigcup P_k \right).$$

4. $mE = 0 \Rightarrow E \in D$. $H = \bigcap_j \bigcup_i P_{ij}, mH = 0$ ($P_{ij} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$), тогда $E \subset H$ ($H \in D$).

$$0 = mH = \int_X \nu H_x d\mu \Rightarrow \nu H_x = 0 \text{ при почти всех } x, \text{ но } E_x \subset H_x \Rightarrow \text{при почти всех } x \nu E_x = 0, \text{ значит и}$$

$$\int \nu E_x = 0 = mE.$$

5. $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, mC < +\infty \Rightarrow C \in D$.

Для множества C существует множество e , что $me = 0$ и $H = \bigcap_j \bigcup_i P_{ij}$ и $C = H \setminus e, C_x = H_x \setminus e_x$ и $mC = mH$.

$\nu e_x = 0$ при почти всех x , значит $\nu C_x = \nu H_x - \nu e_x$ при почти всех x .

$$\int_X \nu C_x d\mu = \int_X \nu H_x - \nu e_x = \int_X \nu H_x - \int_X \nu e_x = mH = mC.$$

6. C — произвольное, m -измеримое множество, $X = \bigsqcup X_k$ и $Y = \bigsqcup Y_j$, тогда $C = \bigsqcup_{i,j} (C \cap (X_i \times Y_j)) \in D$ по пункту 2. ($\mu X_k, \mu Y_j$ — конечные).

15.3 Следствие

$C \in \mathcal{Q} \otimes \mathcal{B}, P_1(C) := \{x : C_x \neq \emptyset\}$, тогда если $P_1(C)$ — измеримо в X , тогда $mC = \int_{P_1(C)} \nu C_x d\mu x$.

15.4 Замечание

Из того, что C измеримо \nRightarrow что его проекция измерима.

16 Совпадение определенного интеграла и интеграла Лебега

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывное. Тогда $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda_1$.

16.1 Доказательство

Достаточно доказать для $f \geq 0$.

f — непрерывно $\Rightarrow C = \Pi\Gamma(f, [a, b])$ измеримо в \mathbb{R}^2 (почти очевидно).

$C_x = [0, f(x)]$ (или \emptyset) \Rightarrow измеримость $\lambda_1 C_x = f(x)$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lambda_2(\Pi\Gamma(f, [a, b])) = \int_{[a,b]} f(x)d\lambda_1(x).$$

16.2 Замечание

$f \geq 0$ измеримое, значит $\lambda_2 \Pi\Gamma(f, [a, b]) = \int_{[a,b]} f(x)d\lambda_2(x)$.

$f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $C \in X \times Y$, C_x , $f_x : C_x \rightarrow \mathbb{R}$, т.е. $y \mapsto f(x, y)$, аналогично $f^y : C^y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

17 Теорема Тонелли

(X, \mathcal{A}, μ) , (Y, \mathcal{B}, ν) и μ , ν — σ -конечные и полные, а также $m = \mu \times \nu$.

$f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$, измеримая. Тогда

1. при почти всех x функция f_x — измерима почти везде на Y (аналогично при почти всех y функция f^y также измерима на X);
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x(y) d\nu(y) = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ — измерима почти везде на X (аналогично $y \mapsto \psi(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$ — измерима почти везде на Y);
3. $\int_{X \times Y} f(x, y) d\mu = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x).$

17.1 Доказательство

1. $f = \chi_C$, $C \subset X \times Y$, измеримая. $f_x = \chi_{C_x}(y)$. C_x — измеримое при почти всех $x \Rightarrow f_x$ — измеримая при почти всех x .

$$\varphi(x) = \int_Y \chi_{C_x}(y) d\nu(y) = \nu(C_x) \quad (x \mapsto \nu C_x \text{ — измерима по принципу Кавальери}).$$

$$\int_X \varphi(x) d\mu = \int_X \nu C_x d\mu = mC = \int_{X \times Y} \chi_C dm.$$

2. $f = \sum_{\text{кон.}} a_k \chi_{C_k}$, $f \geq 0$.

$$f_x = \sum a_k \chi_{(C_k)_x}(y).$$

$x \mapsto \int f_x(y) d\nu(y) = \sum a_k \nu(C_k)_x$ — измеримая (отдельные слагаемые — измеримые, значит и вся сумма измеримая).

$$\int_X \left(\int_Y f_x(y) d\nu \right) d\mu = \sum a_k \int_X \nu(C_k)_x d\mu = \sum a_k mC_k = \int_{X \times Y} f dm$$

3. $f \geq 0$, g_n — ступенчатые, что $\dots \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = f$.

$f_x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (g_n)_x$ — измерима как предел измеримых функций.

$\varphi(x) = \int_Y f_x(y) d\nu(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_Y g_n d\nu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x)$, значит $\varphi(x)$ измерима из-за измеримости φ_n (Теорема Леви).

$$g_n \leq g_{n+1} \leq \dots \Rightarrow \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \leq \dots$$

$$\int_X \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow} \int_{X \times Y} g_n dm = \int_{X \times Y} f dm \text{ (по теореме Леви)}$$

Везде должна быть приговорка „при почти всех x “.

18 Теорема Фубини

(X, \mathcal{A}, μ) , (Y, \mathcal{B}, ν) и μ, ν — σ -конечные и полные.

$f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, суммируемая. Тогда

1. при почти всех x функция f_x — суммируемая почти везде на Y (аналогично при почти всех y функция f^y также измерима на X).
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x(y) d\nu(y) = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ — суммируемая почти везде на X (аналогично $y \mapsto \psi(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$ — суммируемая почти везде на Y).
3.
$$\int_{X \times Y} f(x, y) d\mu = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

без доказательства

18.0.1 Следствие

$$\int_C f = \int_{X \times Y} f \chi_C = \int_X \left(\int_Y f \cdot \chi_C \right) d\mu = \int_{P_1(C)} \left(\int_{C_x} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

$P_1(C)$ — проекция, измеримая, $\{x : C_x \neq \emptyset\}$.

19 Какая-то нужная штука для лекции 02.03.2020, потом удалю

$B(0, 1) \subset \mathbb{R}^m$, Хотим найти $\lambda_m B(0, 1) = \alpha_m$.

$$\lambda_m B(0, R) = \alpha_m \cdot R^M.$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 \leq 1.$$

интеграл обычного кружочка: $\int \chi_B d\lambda_2 = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 dy dx = \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2} dx = \pi$

$$\alpha_m = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_B = \int_{-1}^1 \left(\int_{B(0, \sqrt{1-x_1^2}) \subset \mathbb{R}^{m-1}} 1 d\nu \right) dx_1 = \int_{-1}^1 (1-x_1^2)^{\frac{m-1}{2}} \alpha_{m-1} dx_1.$$

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \Gamma(n) = (n-1)!, \Gamma(x+1) = \Gamma(x) \cdot x.$$

Тогда объём шара в \mathbb{R}^m равен $\alpha_{m-1} 2 \int_0^1 (1-t)^{\frac{m-1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt = B(\frac{1}{2}, \frac{m+1}{2}) \alpha_{m-1}$. Тогда объём шара можно

переписать как $\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)\alpha_{m-1}}.$

Часть IV

Замена переменных в интеграле

20 Образ меры при отображении

(X, \mathcal{A}, μ) и (Y, \mathcal{B}, ν) (пространство и алгебру измерили, а меру нет).

$\Phi : X \rightarrow Y, \forall B \in \mathcal{B} \Phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ — измеримо.

$\nu : \mathcal{B} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, E \in \mathcal{B}, \nu E := \mu(\Phi^{-1}(E))$ — это мера на \mathcal{B} , а также образ меры μ при отображении Φ .

20.1 Замечание 1

$$\nu E = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 d\mu.$$

$$\nu(\bigsqcup B_i) = \mu(\Phi^{-1}(\bigsqcup B_i)) = \mu(\bigsqcup \Phi^{-1}(B_i)) = \sum \mu \Phi^{-1}(B_i) = \sum \nu B_i.$$

20.2 Замечание 2

f — измерима относительно \mathcal{B} , тогда $f \circ \Phi$ — измерима относительно \mathcal{A} .

$$X(f(\Phi(x)) < a) = \Phi^{-1}(Y(f < a)).$$

21 Взвешенный образ меры

$\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \omega \geq 0$, измеримая.

Тогда $\nu(B) := \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$ — мера, которая назначает *взвешенный образ меры* μ , где ω — её вес.

22 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры

$\Phi : X \rightarrow Y$ — измеримое отображение, $\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geq 0$ — измеримая на X . ν — взвешенный образ меры μ (ω — её вес). Тогда

$\forall f \geq 0$ — измеримой на Y верно, что $f \circ \Phi$ — измерима на X и выполняется следующее свойство:

$$\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_X f(\Phi(x)) \omega(x) d\mu(x).$$

22.1 Замечание

То же верно для случая f — суммируемая.

22.2 Доказательство

$$1. f = \chi_B, B \in \mathcal{B}. \text{ Тогда } (f \circ \Phi)(x) = \begin{cases} 1 & \Phi(x) \in B \\ 0 & \Phi(x) \notin B \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(B)}.$$

$$\text{Доказывать нечего } \ominus : \nu B = \int_{\Phi(B)} \omega d\mu;$$

2. f — ступенчатая, для каждой ступеньки — правда, и по линейности интеграла получаем результат;
3. $f \geq 0$ — измеримая. Теорема об аппроксимизации измеримых функций ступенчатыми плюс предельный переход по теореме Леви;
4. f — измеримая, значит $|f|$ — всё верно.

22.3 Следствие

$$f \text{ — суммируема на } Y, B \in \mathcal{B}, \int_B f d\nu(y) = \int_{\Phi^{-1}(B)} (f \circ \Phi) \omega d\mu.$$

Частный случай: $X = Y$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\Phi = \text{id}$, $\omega \geq 0$ — измерима.

23 Плотность одной меры по отношению к другой

$\nu B = \int_B \omega(x) d\mu(x)$, тогда ω — плотность меры ν относительно меры μ .

23.1 Замечание

$$\int_X f(x) d\nu(x) = \int_X f(x) \omega(x) d\mu(x).$$

24 Критерий плотности

(X, \mathcal{A}, μ) , ν — ещё одна мера на \mathcal{A} , $\omega \geq 0$ — измеримая. Тогда

ω — плотность ν относительно $\mu \iff \forall A \in \mathcal{A}$ верно: $\inf_A \omega \cdot \mu A \leq \nu A \leq \sup_A \omega \cdot \mu A$ ($0 \cdot \infty = 0$).

24.0.1 Доказательство

- \Rightarrow Очевидно (интеграл μA обладает этими свойствами из-за плотностей);
- \Leftarrow Считаем, что $\omega > 0$. Для $\omega = 0$ получаем: $e := X(\omega = 0)$, $\nu e = 0 = \int_e \omega d\mu$, тогда $\nu(A) = \int_A \omega d\mu = 0$.

Теперь пусть $\omega > 0$, то $q \in (0, 1)$. $A_j := A(q^j \leq \omega \leq q^{j-1})$, $j \in \mathbb{Z}$, $A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A_j$.

$$q^j \mu A_j \leq \nu A_j \leq q^{j-1} \mu A_j.$$

$$q^j \mu A_j \leq \int_{A_j} \omega d\mu \leq q^{j-1} \mu A_j.$$

$$q \int_A \omega d\mu = q \sum \int_{A_j} \omega d\mu \leq \sum q^j \mu A_j \leq \nu A \leq \frac{1}{q} \sum q^j \mu A_j \leq \frac{1}{q} \int_A \omega.$$

Устремим $q \rightarrow 1$ и получим доказательство равенства.

25 Единственность плотности

f, g — суммируемые на X , $\forall A$ — измеримых верно: $\int_A f = \int_A g$. Тогда $f = g$ почти везде.

25.0.1 Доказательство

$$h = f - g, \forall A \text{ — измеримых, } \int_A h = 0.$$

$$A_+ = X(h \geq 0), A_- = X(h < 0), A_+ \cap A_- = \emptyset.$$

$$\int_{A_+} |h| = \int_{A_+} h = 0.$$

$$\int_{A_-} |h| = - \int_{A_-} h = 0.$$

$$X = A_+ \sqcup A_-, \int_X |h| = 0, \text{ тогда } h = 0.$$

25.1 Следствие

Плотность ν относительно ν определена однозначно с точностью до μ почти везде.

26 Лемма об образе малых кубических ячеек

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in O$. Φ — дифференцируема G в окрестности точки a , $\det \Phi'(a) \neq 0$. Пусть $c > |\det \Phi'(a)|$.

Тогда существует такое $\delta > 0$, что для любого куба $Q \subset B(a, \delta)$, $a \in Q$ верно, что $c \cdot \lambda Q > \lambda \Phi(Q)$.

26.0.1 Доказательство

$L := \Phi'(a)$ — обратимое линейное отображение.

$$\Phi(x) = \Phi(a) + L(x - a) + o(x - a).$$

$a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a)) = x + o(x - a)$ (увеличили в константу, поэтому o маленькое остаётся o маленьким).

$\forall \varepsilon > 0$ можно записать шар $B_\varepsilon(a)$, что при $x \in B_\varepsilon(a)$ $|\psi(x) - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}|x - a|$.

$Q \subset B_\varepsilon$, $a \in Q$ — куб со стороной h , при $x \in Q$: $|\psi(x) - x| < \varepsilon h$. $|x_i - a_i| \leq h$.

$x, y \in Q$, тогда $|\psi(x)_i - \psi(y)_i| = |\psi(x)_i - x_i| + |\psi(y)_i - y_i| + |x_i - y_i| \leq |\psi(x) - x| + |\psi(y) - y| + h < (1 + 2\varepsilon)h$.

$\psi(Q)$ — содержится в кубе со стороной $(1 + 2\varepsilon)h$, тогда $\lambda \psi(Q) \leq (1 + 2\varepsilon)^m \lambda Q$.

$$\lambda \Phi(Q) \leq (1 + 2\varepsilon)^m |\det L| \lambda Q < C \lambda Q.$$

Берём $\varepsilon : (1 + 2\varepsilon)|\det L| < C$, где δ — радиус $B_\varepsilon(a)$.

$$\lambda A = \inf_{G - \text{открытое}, A \subset G} \lambda G$$

26.1 Лемма 2

$f: \underset{\text{откр.}}{O} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, O — непрерывное. A — измеримое, $A \subset Q \subset \overline{Q} \subset O$.

$$\text{Тогда} \int_{A \subset G \text{ открытое}} \left(\lambda(G) \sup_G f \right) = \lambda A \sup_A f.$$

26.2 Теорема 2

$\Phi: O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм. $A \in \mathcal{M}^m$, $A \subset O$. Тогда

$$\lambda \Phi(A) = \int_A |\det \Phi'(a)| d\lambda.$$

26.2.1 Доказательство

$\nu A := \lambda \Phi(A)$. Верно ли, что $J_\Phi(x) := |\det \Phi'(x)|$ — это плотность ν по отношению к μ .

Достаточно проверить, что $\forall A$ верно: $\inf_A J_\Phi \cdot \lambda A \leq \nu A \leq \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A$.

Достаточно проверить правое неравенство. Левое — правое для Φ^{-1} и $\tilde{A} = \Phi(A)$.

$$\lambda \Phi^{-1}(\tilde{A}) \leq \sum J_{\Phi^{-1}} \cdot \lambda \tilde{A}.$$

$$\lambda A \leq \sup |\det(\Phi^{-1})'| \lambda \Phi(A).$$

$$\sup \frac{1}{|\det \Phi'|}$$

$$\frac{1}{\inf |\det \Phi'|}$$

1. A — кубическая ячейка, $\overline{A} \subset O$. От противного: пусть оказалось, что $\lambda Q \sup J_\Phi < \nu Q$. Возьмём $c > \sup_Q J_\Phi$, так, что $\lambda Q \cdot c < \nu Q$. Значит существует такая часть Q_i , что $\lambda Q_i \cdot c < \nu Q_i$. $\lambda Q_n \cdot c < \nu Q_n$, $a = \bigcap \overline{Q_n}$, накроем точку a этим кубиком. $c > |\det \Phi'(a)|$, тогда $\nu Q_n = \lambda \Phi(Q_n)$. Получили, что $\lambda \Phi(Q_n) > c \lambda Q_n$, а по лемме нужно наоборот.

2. Оценка $\nu A \leq \sup J_\Phi \lambda A$, верна для случая, когда A — открытое множество.

$$\nu Q \leq \sup_A J_\Phi \lambda Q.$$

$$\text{Суммируя по } Q: \nu A \leq \sup_A J_\Phi \lambda A.$$

Что было в лемме (и что мы потеряли):

$$\inf_{A \subset G} \left(\lambda G \cdot \sup_G f \right) = \lambda A \cdot \sup_A f.$$

G — открытое, тогда

$$\nu G \leq \sup_G J_\Phi \cdot \lambda G.$$

$$\nu A \leq \nu G \leq \lambda \lambda A \sup_A f.$$