

Содержание

I	Интеграл по мере	3
1	Интеграл ступенчатой функции	4
1.1	Свойства	4
2	Интеграл неотрицательной измеримой функции	5
2.1	Свойства	5
3	Суммируемая функция	6
3.1	Свойство	6
4	Интеграл суммируемой функции	7
4.1	Свойства	7
5	Простейшие свойства интеграла Лебега	8
5.1	Доказательство	8
5.2	Доказательство	8
5.3	Доказательство	8
5.4	Доказательство	9
5.5	Доказательство	9
5.6	Доказательство	9
6	Счетная аддитивность интеграла (по множеству)	10
6.1	Лемма	10
6.1.1	Доказательство	10

6.2	Теорема	10
6.2.1	Доказательство	10
6.3	Следствие	11
6.4	Следствие 2	11
II	Предельный переход под знаком интеграла	12
7	Теорема Леви	13
7.1	Доказательство	13
8	Линейность интеграла Лебега	14
8.1	Доказательство	14
8.2	Следствие	14
8.2.1	Доказательство	14
9	Теорема об интегрировании положительных рядов	15
9.1	Доказательство	15
9.2	Следствие	15

Часть I

Интеграл по мере

1 Интеграл ступенчатой функции

$f = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \chi_{E_k}$, $f \geq 0$, где $E_k \in \mathcal{A}$ — допустимое разбиение, тогда интеграл ступенчатой функции f на множестве X есть

$$\int_X f d\mu = \int_X f(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mu E_k$$

Дополнительно будем считать, что $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

1.1 Свойства

- Интеграл не зависит от допустимого разбиения:

$$f = \sum \alpha_j \chi_{F_j} = \sum_{k,j} \lambda_k \chi_{E_k \cap F_j}, \text{ тогда } \int F = \sum \lambda_k \mu E_k = \sum_k \lambda_k \sum_j \mu(E_k \cap F_j) = \sum \alpha_j \mu F_j = \int F;$$

- $f \leq g$, то $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

2 Интеграл неотрицательной измеримой функции

$f \geq 0$, измерима, тогда интеграл неотрицательной измеримой функции f есть

$$\int_X f d\mu = \sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \left(\int_X g d\mu \right).$$

2.1 Свойства

- Для ступенчатой функции f (при $f \geq 0$) это определение даёт тот же интеграл, что и для ступенчатой функции;
- $0 \leq \int_X f \leq +\infty$;
- $0 \leq g \leq f$, g — ступенчатая, f — измеримая, тогда $\int_X g \leq \int_X f$.

3 Суммируемая функция

f — измеримая, f_+ и f_- — срезки, тогда если $\int_X f_+$ или $\int_X f_-$ — конечен, тогда интеграл суммируемой функции есть

$$\int_X f d\mu = \int_X f_+ - \int_X f_-.$$

Если $\int_X f \neq \pm\infty$, то говорят, что f — *суммируемая*, а также $\int |f|$ — конечен ($|f| = f_+ + f_-$).

3.1 Свойство

Если $f \geq 0$ — измерима, то это определение даёт тот же интеграл, что и интеграл измеримой неотрицательной функции.

4 Интеграл суммируемой функции

$E \subset X$ — измеримое множество, f — измеримо на X , тогда интеграл f по множеству E есть

$$\int_E f d\mu := \int_X f \chi_E d\mu.$$

f — суммируемая на E если $\int_E f_+ -$ и $\int_E f_-$ — конечны одновременно.

4.1 Свойства

- $f = \sum \lambda_k \chi_{E_k}$, то $\int_E f = \sum \lambda_k \mu(E_k \cap E)$;
- $f \geq 0$ — измерима, тогда $\int_E f d\mu = \sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \left(\int_X g d\mu \right).$

(X, \mathcal{A}, μ) — произвольное пространство с мерой.

$\mathcal{L}^0(X)$ — множество измеримых почти везде конечных функций.

5 Простейшие свойства интеграла Лебега

1. *Монотонность:*

$$f \leq g \Rightarrow \int_E f \leq \int_E g.$$

5.1 Доказательство

$$\bullet \sup_{\substack{\tilde{f} \text{ - ступ.} \\ 0 \leq \tilde{f} \leq f}} \left(\int_X \tilde{f} d\mu \right) \leq \sup_{\substack{\tilde{g} \text{ - ступ.} \\ 0 \leq \tilde{g} \leq g}} \left(\int_X \tilde{g} d\mu \right);$$

- f и g — произвольные, то работаем со срезками, и $f_+ \leq g_+$, а $f_- \geq g_-$, тогда очевидно и для интегралов.

$$2. \int_E 1 \cdot d\mu = \mu E, \int_E 0 \cdot d\mu = 0.$$

5.2 Доказательство

По определению.

$$3. \mu E = 0, f \text{ — измерима, тогда } \int_E f = 0.$$

5.3 Доказательство

- f — ступенчатая, то по определению интеграла для ступенчатых функций получаем 0;
 - $f \geq 0$ — измеримая, то по определению интеграла для измеримых неотрицательных функций также получаем 0;
 - f — любая, то разбиваем на срезки f_+ и f_- и снова получаем 0.
4. (a) $\int -f = - \int f;$
 (b) $\forall c > 0 : \int cf = c \int f.$

5.4 Доказательство

- $(-f)_+ = f_-$ и $(-f)_- = f_+$ и $\int -f = f_- - f_+ = -\int f$.
- $f \geq 0$ — очевидно, $\sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq cf}} \left(\int g \right) = c \sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \left(\int g \right)$.

5. Пусть существует $\int_E f d\mu$, тогда $\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|$.

5.5 Доказательство

$$-|f| \leq f \leq |f|,$$

$$-\int_E |f| \leq \int_E f \leq \int_E |f|.$$

6. f — измерима на E , $\mu E < +\infty$, $\forall x \in E : a \leq f(x) \leq b$. Тогда

$$a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E.$$

5.6 Доказательство

$$\int_E a \leq \int_E f \leq \int_E b,$$

$$a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E.$$

6 Счетная аддитивность интеграла (по множеству)

6.1 Лемма

$A = \bigsqcup A_i$, где A, A_i — измеримы, $g \geq 0$ — ступенчатые. Тогда

$$\int_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} g d\mu.$$

6.1.1 Доказательство

$$g = \sum \lambda_k \chi_{E_k}.$$

$$\int_A g d\mu = \sum \lambda_k \mu(A \cap E_k) = \sum_k \lambda_k \sum_i \mu(A_i \cap E_k) = \sum_i \left(\sum_k \lambda_k \mu(A_i \cap E_k) \right) = \sum_i \int_{A_i} g d\mu.$$

6.2 Теорема

$f : C \rightarrow \bar{R}$, $f \geq 0$ — измеримая на A , A — измерима, $A = \bigsqcup A_i$, все A_i — измеримы. Тогда

$$\int_A f d\mu = \sum_i \int_{A_i} f d\mu$$

6.2.1 Доказательство

• \leq

g — ступенчатая, $0 \leq g \leq f$, тогда $\int_A g = \sum \int_{A_i} g \leq \sum \int_{A_i} f$. Осталось перейти к \sup .

• \geq

$$A = A_1 \sqcup A_2, \sum \lambda_k \chi_{E_k} = g_1 \leq f \chi_{A_1}, g_2 \leq f \chi_{A_2} = \sum \lambda_k \chi_{E_k}, g_1 + g_2 \leq f \chi_A$$

$$\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 = \int_A g_1 + g_2.$$

переходим к $\sup g_1$ и g_2

$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \leq \int_A f$$

по индукции разобьём для $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n$, $A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ и $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n \sqcup B_n$, где

$$B_n = \bigsqcup_{i \geq n+1} A_i, \text{ тогда}$$

$$\int_A \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_B f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f \Rightarrow \int_A f \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f$$

6.3 Следствие

$f \geq 0$ — измеримая, $\nu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, $\nu E = \int_E f d\mu$. Тогда ν — мера.

6.4 Следствие 2

$A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$, f — суммируемая на A , тогда

$$\int_A f = \sum_i \int_{A_i} f.$$

Часть II

Предельный переход под знаком интеграла

7 Теорема Леви

(X, \mathcal{A}, μ) , f_n — измерима, $\forall n : 0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ при почти всех x .

$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ при почти всех x . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f d\mu.$$

7.1 Доказательство

f — измерима как предел измеримых функций.

• \leq

$f_n(x) \leq f(x)$ почти везде, тогда $\forall n : \int_X f_n(x) d\mu \leq \int_X f d\mu$, откуда следует, что и предел интегралов не превосходит интеграл предела.

• \geq

Достаточно доказать, что для любой ступенчатой функции $g : 0 \leq g \leq f$ верно $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \geq \int_X g$.

Достаточно доказать, что $\forall c \in (0, 1)$ верно $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \geq c \int_X g$.

$$E_n := X (f_n \geq cg), E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$$

$\bigcup E_n = X$, т.к. $c < 1$, то $cg(x) < f(x)$, $f_n(x) \rightarrow f(x) \Rightarrow f_n$ попадёт в "зазор" $cg(x) < f(x)$.

$$\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq \int_{E_n} cg = c \int_{E_n} g,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} c \int_{E_n} g = c \int_X g, \text{ потому что это непрерывность снизу меры } A \mapsto \int_A g.$$

8 Линейность интеграла Лебега

Пусть f, g — измеримы на E , $f \geq 0, g \geq 0$. Тогда $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$.

8.1 Доказательство

Если f, g — ступенчатые, то очевидно.

Разберём общий случай. Существуют ступенчатые функции $f_n : 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \leq f$, и $g_n : 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots \leq g$, и $f_n(x) \rightarrow f(x)$ и $g_n(x) \rightarrow g(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_E f_n + g_n &= \int_E f_n + \int_E g_n, \text{ сделаем предельный переход, значит при } n \rightarrow +\infty \\ \int_E f + g &= \int_E f + \int_E g \end{aligned}$$

8.2 Следствие

Пусть f, g — суммируемые на множестве E , тогда $f + g$ тоже суммируема и $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$.

8.2.1 Доказательство

$$(f + g)_\pm \leq |f + g| \leq |f| + |g|.$$

$$h := f + g,$$

$$h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-,$$

$$h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+,$$

$$\int h_+ + \int f_- + \int g_- = \int h_- + \int f_+ + \int g_+,$$

$$\int h_+ - \int h_- = \int f_+ - \int f_- + \int g_+ - \int g_-, \text{ тогда}$$

$$\int h = \int f + \int g.$$

9 Теорема об интегрировании положительных рядов

$u_n \geq 0$ почти везде, измеримы на E . Тогда

$$\int_E \left(\sum_{i=1}^{+\infty} u_n \right) d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu.$$

9.1 Доказательство

Очевидно по теореме Леви.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \text{ и } p \leq S_N \leq S_{N+1} \leq \dots \text{ и } S_N \rightarrow S(X).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E S_N = \int_E S$$

$$\lim \sum_{k=1}^n \int_E u_k(x) = \int_E S(x) d\mu.$$

9.2 Следствие

u_n — измеримая функция, $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| < +\infty$. Тогда

$\sum u_n$ — абсолютно сходится почти везде на E .

Доказательство

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(x)|$$

$$\int_E S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n(x)| < +\infty, \text{ значит } S(x) \text{ конечна почти всюду.}$$

$$S(x) = +\infty \text{ при } x \in B, \mu B > 0, S(x) \geq n \cdot \chi_B \int_E S(x) \geq n \cdot \mu B.$$