Содержание

Часть I

Интеграл по мере

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ — произвольное пространство с мерой.

$\mathcal{L}^0(X)$ — множество измеримых почти везде конечных функций.

0.1 Определения интеграла функции

1. $f = \sum\limits_{\text{кон.}} \lambda_k \cdot \chi_{E_k}$, $f \geqslant 0$.
   $(E_k \in \mathcal{A})$ — допустимое разбиение, тогда
   $\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X f(x) d\mu(x) := \sum \lambda_k \mu E_k$ (считаем, что $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$).
   Свойства:
   - Интеграл не зависит от допустимого разбиения;
     $f = \sum \alpha_j \chi_{F_j} = \sum\limits_{i,j} \lambda_k \chi_{E_k \cap F_j}$, тогда $\int F = \int = \sum \lambda_k \mu E_k = \sum\limits_k \lambda_k \sum\limits_j \mu(E_k \cap F_j) = \sum \alpha_j \mu F_i = \int F$;
   - $f \leqslant g$, то $\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X g d\mu$.
2. $f \geqslant 0$, измерима, тогда $\int\limits_X f d\mu = \sup\limits_{\text{g - ступенчатая}, 0 \leqslant g \leqslant f} \left(\int g \right)$.
   Свойства:
   - Для ступенчатых функций $f \geqslant 0$ — это определение даёт тот же интеграл;
   - $0 \leqslant \int f \leqslant +\infty$;
   - $0 \leqslant g \leqslant f$, g — ступенчатая, f — измеримая, тогда $\int\limits_X g \leqslant \int\limits_X f$.
3. f — измеримая, f_+ и f_- — срезки, тогда если $\int\limits_X f_+$ или $\int\limits_X f_-$ — конечен, тогда
   $\int\limits_X f d\mu := \int\limits_X f_+ - \int\limits_X f_-$.

Замечание: Если $\int\limits_X f \neq \pm\infty$, то говорят, что f — суммируемая и $\int |f|$ — конечен ($|f| = f_+ + f_-$).

Свойства:

- Если $f \geqslant 0$ — измерима, то это определение даёт тот же интеграл, что и предыдущее.

4. $E \subset X$ — измеримое множество, f — измеримо на X, тогда $\int\limits_E f d\mu := \int\limits_X f \chi_E d\mu$. f — суммируема на E если $\int\limits_E f + -$ и $\int\limits_E f_-$ — оба конечны.

   Замечание

   (a) $f = \sum \lambda_k \chi_{E_k}$ и $\int\limits_E f = \sum \lambda_k \mu\left(E_k \cap E\right)$;

   (b) $f \geqslant 0$ — измерима, тогда $\int\limits_E f d\mu = \sup\limits_{\text{g - ступ.}, 0 \leqslant g \leqslant f} \left(\int G\right)$.

0.2 Свойства интегралов

1. Монотонность: $f \leqslant g \Rightarrow \int\limits_E f \leqslant \int\limits_E g$.

   Доказательство

   - $0 \leqslant f \leqslant g$, $\sum\limits_{\widetilde{f} stup, 0 \leqslant \widetilde{f} \leqslant f} \int \widetilde{f} \leqslant \sum\limits_{\widetilde{g} stup, 0 \leqslant \widetilde{g} \leqslant g} \int \widetilde{g}$;
   - f и g — произвольные, то работает со срезками и $f_+ \leqslant g_+$, а $f_- \geqslant g_-$, тогда очевидно и для интегралов.

2. $\int\limits_E 1 d\mu = \mu E$, $\int\limits_E 0 d\mu = 0$;

3. $\mu E = 0$, f — измерима, тогда $\int\limits_E f = 0$.

   Доказательство

   - f — ступенчатая, то очевидно;
   - $f \geqslant 0$ — измеримая, то очевидно;
   - f — любая, то аналогично.

4. $\int -f = -\int f$, $\forall c > 0 : \int cf = c \int f$.

   Доказательство

- $(-f)_+ = f_-$ и $(-f)_= f_+$.
- $f \geqslant 0$ — очевидно, $\sum\limits_{gstup, 0 \leqslant g \leqslant cf} \left(\int G\right) = c \sup\limits_{\widetilde{g}stup, 0 \leqslant \widetilde{g} \leqslant f} \left(\int g\right)$.

5. Пусть существует $\int\limits_E f d\mu$, тогда $\left|\int\limits_E f\right| \leqslant \int\limits_E |f|$.

   Доказательство

   $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$

   $-\int |f| \leqslant \int f \leqslant \int |f|$

6. f — измерима на E, $\mu E < +\infty$, $\forall x \in E$ $a \leqslant f(x) \leqslant b$. Тогда

   $a\mu E \leqslant \int\limits_E f \leqslant b\mu E$.

0.3 Лемма

$A = \bigsqcup A_i$, A, A_i — измеримы, $g \leqslant 0$ — ступенчатые. Тогда

$\int\limits_A g d\mu = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \int\limits_{A_i} g d\mu$.

0.3.1 Доказательство

$g = \sum \lambda_k \chi_{E_k}$.

$\int\limits_A g d\mu = \sum \lambda_k \mu(A \cap E_k) = \sum\limits_k \lambda_k \sum\limits_i \mu(A_i \cap E_k) = \sum\limits_i \left(\sum\limits_k \lambda_k \mu(A_i \cap E_k)\right) = \sum\limits_i \int\limits_{A_i} g$.

0.4 Теорема

$f : C \to \overline{R}$, $f \geqslant 0$ — измеримая на A, A — измерима, $A = \bigsqcup A_i$, все A_i — измеримы. Тогда

$\int\limits_A f d\mu = \sum\limits_i \int\limits_{A_i} f d\mu$

0.4.1 Доказательство

- $\leqslant$

g — ступенчатая, $0 \leqslant g \leqslant f$, тогда $\int_A g = \sum \int\limits_{A_i} g \leqslant \sum \int\limits_{A_i} f$. Осталось перейти к sup.

- $\geqslant$

  $A = A_1 \sqcup A_2$, $\sum \lambda_k \chi_{E_k} = g_1 \leqslant f\chi_{A_1}$, $g_2 \leqslant f \cdot \chi_{A_2} = \sum \lambda_k \chi_{E_k}$, $g_1 + g_2 \leqslant f \cdot \chi_A$

  $\int\limits_{A_1} g_1 + \int\limits_{A_2} g_2 = \int\limits_A g_1 + g_2$.

  переходим к sup g_1 и g_2

  $\int\limits_{A_1} f + \int\limits_{A_2} f \leqslant \int\limits_A f$

  по индукции разобьём для $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_n$, $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$ и $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_n \sqcup B_n$, где $B_n = \bigsqcup\limits_{i \geqslant n+1} A_i$, тогда

  $\int\limits_A \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{A_i} f + \int\limits_B f \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} f \Rightarrow \int\limits_A f \geqslant \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \int\limits_{A_i} f$

0.5 Следствие

$f \geqslant 0$ — измеримая, $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $\nu E = \int\limits_E f d\mu$. Тогда

ν — мера.

0.6 Следствие 2

$A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$, f — суммируема на A, тогда

$\int\limits_A f = \sum\limits_i \int\limits_{A_i} f$.