

# Содержание

<b>I</b>	<b>Интеграл по мере</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Интеграл ступенчатой функции</b>	<b>6</b>
1.1	Свойства . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Интеграл неотрицательной измеримой функции</b>	<b>7</b>
2.1	Свойства . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Суммируемая функция</b>	<b>8</b>
3.1	Свойство . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Интеграл суммируемой функции</b>	<b>9</b>
4.1	Свойства . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Простейшие свойства интеграла Лебега</b>	<b>10</b>
5.1	Доказательство . . . . .	10
5.2	Доказательство . . . . .	10
5.3	Доказательство . . . . .	10
5.4	Доказательство . . . . .	11
5.5	Доказательство . . . . .	11
5.6	Доказательство . . . . .	11
<b>6</b>	<b>Счетная аддитивность интеграла (по множеству)</b>	<b>12</b>
6.1	Лемма . . . . .	12
6.1.1	Доказательство . . . . .	12

6.2	Теорема . . . . .	12
6.2.1	Доказательство . . . . .	12
6.3	Следствие . . . . .	13
6.4	Следствие 2 . . . . .	13
<b>II</b>	<b>Предельный переход под знаком интеграла</b>	<b>14</b>
<b>7</b>	<b>Теорема Леви</b>	<b>15</b>
7.1	Доказательство . . . . .	15
<b>8</b>	<b>Линейность интеграла Лебега</b>	<b>16</b>
8.1	Доказательство . . . . .	16
8.2	Следствие . . . . .	16
8.2.1	Доказательство . . . . .	16
<b>9</b>	<b>Теорема об интегрировании положительных рядов</b>	<b>17</b>
9.1	Доказательство . . . . .	17
9.2	Следствие . . . . .	17
9.2.1	Доказательство . . . . .	17
<b>10</b>	<b>Абсолютная непрерывность интеграла</b>	<b>18</b>
10.1	Доказательство . . . . .	18
10.2	Следствие . . . . .	18
<b>11</b>	<b>02.03.2020</b>	<b>19</b>
11.1	Теорема Лебега о мажорированной сходимости . . . . .	19

11.1.1 Доказательство . . . . .	19
11.2 Теорема Лебега о мажорированной сходимости почти везде . . . . .	20
11.2.1 Доказательство . . . . .	20
11.3 Теорема Фату . . . . .	20
11.3.1 Замечание . . . . .	20
11.3.2 Доказательство . . . . .	21
11.3.3 Следствие . . . . .	21
11.3.4 Следствие 2 . . . . .	21
<b>III Произведение мер</b>	<b>22</b>
<b>12 Произведение мер</b>	<b>23</b>
<b>13 Теорема о произведении мер</b>	<b>24</b>
13.1 Доказательство . . . . .	24
13.2 Замечание . . . . .	24
13.3 Дополнительная теорема (без доказательства) . . . . .	24
<b>14 Сечения множества</b>	<b>25</b>
<b>15 Принцип Кавальери</b>	<b>26</b>
15.1 Замечание . . . . .	26
15.2 Доказательство . . . . .	26
15.3 Следствие . . . . .	27
15.4 Замечание . . . . .	28

<b>16 Совпадение определенного интеграла и интеграла Лебега</b>	<b>29</b>
16.1 Доказательство . . . . .	29
16.2 Замечание . . . . .	29
<b>17 Теорема Тонелли</b>	<b>30</b>
17.1 Доказательство . . . . .	30
<b>18 Теорема Фубини</b>	<b>32</b>
18.0.1 Следствие . . . . .	32
<b>19 Какая-то нужная штука для лекции 02.03.2020, потом удалю</b>	<b>33</b>
 <b>IV Замена переменных в интеграле</b>	 <b>34</b>
19.1 Интегрирование по взвешенному образу меры . . . . .	35
19.1.1 Доказательство . . . . .	35

## Часть I

# Интеграл по мере

# 1 Интеграл ступенчатой функции

$f = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \chi_{E_k}$ ,  $f \geq 0$ , где  $E_k \in \mathcal{A}$  — допустимое разбиение, тогда интеграл ступенчатой функции  $f$  на множестве  $X$  есть

$$\int_X f d\mu = \int_X f(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mu E_k$$

Дополнительно будем считать, что  $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ .

## 1.1 Свойства

- Интеграл не зависит от допустимого разбиения:

$$f = \sum \alpha_j \chi_{F_j} = \sum_{k,j} \lambda_k \chi_{E_k \cap F_j}, \text{ тогда } \int F = \sum \lambda_k \mu E_k = \sum_k \lambda_k \sum_j \mu(E_k \cap F_j) = \sum \alpha_j \mu F_j = \int F;$$

- $f \leq g$ , то  $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$ .

## 2 Интеграл неотрицательной измеримой функции

$f \geq 0$ , измерима, тогда интеграл неотрицательной измеримой функции  $f$  есть

$$\int_X f d\mu = \sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \left( \int_X g d\mu \right).$$

### 2.1 Свойства

- Для ступенчатой функции  $f$  (при  $f \geq 0$ ) это определение даёт тот же интеграл, что и для ступенчатой функции;
- $0 \leq \int_X f \leq +\infty$ ;
- $0 \leq g \leq f$ ,  $g$  — ступенчатая,  $f$  — измеримая, тогда  $\int_X g \leq \int_X f$ .

### 3 Суммируемая функция

$f$  — измеримая,  $f_+$  и  $f_-$  — срезки, тогда если  $\int_X f_+$  или  $\int_X f_-$  — конечен, тогда интеграл суммируемой функции есть

$$\int_X f d\mu = \int_X f_+ - \int_X f_-.$$

Если  $\int_X f \neq \pm\infty$ , то говорят, что  $f$  — *суммируемая*, а также  $\int |f|$  — конечен ( $|f| = f_+ + f_-$ ).

#### 3.1 Свойство

Если  $f \geq 0$  — измерима, то это определение даёт тот же интеграл, что и интеграл измеримой неотрицательной функции.



## 4 Интеграл суммируемой функции

$E \subset X$  — измеримое множество,  $f$  — измеримо на  $X$ , тогда интеграл  $f$  по множеству  $E$  есть

$$\int_E f d\mu := \int_X f \chi_E d\mu.$$

$f$  — суммируемая на  $E$  если  $\int_E f_+ -$  и  $\int_E f_-$  — конечны одновременно.

### 4.1 Свойства

- $f = \sum \lambda_k \chi_{E_k}$ , то  $\int_E f = \sum \lambda_k \mu(E_k \cap E)$ ;
- $f \geq 0$  — измерима, тогда  $\int_E f d\mu = \sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \left( \int_X g d\mu \right).$

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  — произвольное пространство с мерой.

$\mathcal{L}^0(X)$  — множество измеримых почти везде конечных функций.

## 5 Простейшие свойства интеграла Лебега

1. *Монотонность:*

$$f \leq g \Rightarrow \int_E f \leq \int_E g.$$

### 5.1 Доказательство

- $\sup_{\substack{\tilde{f} \text{ - ступ.} \\ 0 \leq \tilde{f} \leq f}} \left( \int_X \tilde{f} d\mu \right) \leq \sup_{\substack{\tilde{g} \text{ - ступ.} \\ 0 \leq \tilde{g} \leq g}} \left( \int_X \tilde{g} d\mu \right);$
- $f$  и  $g$  — произвольные, то работаем со срезками, и  $f_+ \leq g_+$ , а  $f_- \geq g_-$ , тогда очевидно и для интегралов.

$$2. \int_E 1 \cdot d\mu = \mu E, \int_E 0 \cdot d\mu = 0.$$

### 5.2 Доказательство

По определению.

$$3. \mu E = 0, f \text{ — измерима, тогда } \int_E f = 0.$$

### 5.3 Доказательство

- $f$  — ступенчатая, то по определению интеграла для ступенчатых функций получаем 0;
  - $f \geq 0$  — измеримая, то по определению интеграла для измеримых неотрицательных функций также получаем 0;
  - $f$  — любая, то разбиваем на срезки  $f_+$  и  $f_-$  и снова получаем 0.
4. (a)  $\int -f = - \int f;$   
 (b)  $\forall c > 0 : \int cf = c \int f.$

## 5.4 Доказательство

- $(-f)_+ = f_-$  и  $(-f)_- = f_+$  и  $\int -f = f_- - f_+ = -\int f$ .
- $f \geq 0$  — очевидно,  $\sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq cf}} \left( \int g \right) = c \sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \left( \int g \right)$ .

5. Пусть существует  $\int_E f d\mu$ , тогда  $\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|$ .

## 5.5 Доказательство

$$-|f| \leq f \leq |f|,$$

$$-\int_E |f| \leq \int_E f \leq \int_E |f|.$$

6.  $f$  — измерима на  $E$ ,  $\mu E < +\infty$ ,  $\forall x \in E : a \leq f(x) \leq b$ . Тогда

$$a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E.$$

## 5.6 Доказательство

$$\int_E a \leq \int_E f \leq \int_E b,$$

$$a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E.$$

## 6 Счетная аддитивность интеграла (по множеству)

### 6.1 Лемма

$A = \bigsqcup A_i$ , где  $A, A_i$  — измеримы,  $g \geq 0$  — ступенчатые. Тогда

$$\int_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} g d\mu.$$

#### 6.1.1 Доказательство

$$g = \sum \lambda_k \chi_{E_k}.$$

$$\int_A g d\mu = \sum \lambda_k \mu(A \cap E_k) = \sum_k \lambda_k \sum_i \mu(A_i \cap E_k) = \sum_i \left( \sum_k \lambda_k \mu(A_i \cap E_k) \right) = \sum_i \int_{A_i} g d\mu.$$

### 6.2 Теорема

$f : C \rightarrow \bar{R}$ ,  $f \geq 0$  — измеримая на  $A$ ,  $A$  — измерима,  $A = \bigsqcup A_i$ , все  $A_i$  — измеримы. Тогда

$$\int_A f d\mu = \sum_i \int_{A_i} f d\mu$$

#### 6.2.1 Доказательство

•  $\leq$

$g$  — ступенчатая,  $0 \leq g \leq f$ , тогда  $\int_A g = \sum \int_{A_i} g \leq \sum \int_{A_i} f$ . Осталось перейти к  $\sup$ .

•  $\geq$

$$A = A_1 \sqcup A_2, \sum \lambda_k \chi_{E_k} = g_1 \leq f \chi_{A_1}, g_2 \leq f \chi_{A_2} = \sum \lambda_k \chi_{E_k}, g_1 + g_2 \leq f \chi_A$$

$$\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 = \int_A g_1 + g_2.$$

переходим к  $\sup g_1$  и  $g_2$

$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \leq \int_A f$$

по индукции разобьём для  $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n$ ,  $A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$  и  $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n \sqcup B_n$ , где

$$B_n = \bigsqcup_{i \geq n+1} A_i, \text{ тогда}$$

$$\int_A \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_B f \geq \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f \Rightarrow \int_A f \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f$$

### 6.3 Следствие

$f \geq 0$  — измеримая,  $\nu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ ,  $\nu E = \int_E f d\mu$ . Тогда  $\nu$  — мера.

### 6.4 Следствие 2

$A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ ,  $f$  — суммируемая на  $A$ , тогда

$$\int_A f = \sum_i \int_{A_i} f.$$

## Часть II

# Предельный переход под знаком интеграла

## 7 Теорема Леви

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $f_n$  — измерима,  $\forall n : 0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$  при почти всех  $x$ .

$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  при почти всех  $x$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f d\mu.$$

### 7.1 Доказательство

$f$  — измерима как предел измеримых функций.

•  $\leq$

$f_n(x) \leq f(x)$  почти везде, тогда  $\forall n : \int_X f_n(x) d\mu \leq \int_X f d\mu$ , откуда следует, что и предел интегралов не превосходит интеграл предела.

•  $\geq$

Достаточно доказать, что для любой ступенчатой функции  $g : 0 \leq g \leq f$  верно  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \geq \int_X g$ .

Достаточно доказать, что  $\forall c \in (0, 1)$  верно  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \geq c \int_X g$ .

$$E_n := X (f_n \geq cg), E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$$

$\bigcup E_n = X$ , т.к.  $c < 1$ , то  $cg(x) < f(x)$ ,  $f_n(x) \rightarrow f(x) \Rightarrow f_n$  попадёт в "зазор"  $cg(x) < f(x)$ .

$$\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq \int_{E_n} cg = c \int_{E_n} g,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} c \int_{E_n} g = c \int_X g, \text{ потому что это непрерывность снизу меры } A \mapsto \int_A g.$$

## 8 Линейность интеграла Лебега

Пусть  $f, g$  — измеримы на  $E$ ,  $f \geq 0, g \geq 0$ . Тогда  $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$ .

### 8.1 Доказательство

Если  $f, g$  — ступенчатые, то очевидно.

Разберём общий случай. Существуют ступенчатые функции  $f_n : 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \leq f$ , и  $g_n : 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots \leq g$ , и  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  и  $g_n(x) \rightarrow g(x)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_E f_n + g_n &= \int_E f_n + \int_E g_n, \text{ сделаем предельный переход, значит при } n \rightarrow +\infty \\ \int_E f + g &= \int_E f + \int_E g \end{aligned}$$

### 8.2 Следствие

Пусть  $f, g$  — суммируемые на множестве  $E$ , тогда  $f + g$  тоже суммируема и  $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$ .

#### 8.2.1 Доказательство

$$(f + g)_\pm \leq |f + g| \leq |f| + |g|.$$

$$h := f + g,$$

$$h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-,$$

$$h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+,$$

$$\int h_+ + \int f_- + \int g_- = \int h_- + \int f_+ + \int g_+,$$

$$\int h_+ - \int h_- = \int f_+ - \int f_- + \int g_+ - \int g_-, \text{ тогда}$$

$$\int h = \int f + \int g.$$



## 9 Теорема об интегрировании положительных рядов

$u_n \geq 0$  почти везде, измеримы на  $E$ . Тогда

$$\int_E \left( \sum_{i=1}^{+\infty} u_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu.$$

### 9.1 Доказательство

Очевидно по теореме Леви.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \text{ и } p \leq S_N \leq S_{N+1} \leq \dots \text{ и } S_N \rightarrow S(X).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E S_N = \int_E S,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_E u_k(x) = \int_E S(x) d\mu.$$

### 9.2 Следствие

$u_n$  — измеримая функция,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| < +\infty$ . Тогда

$\sum u_n$  — абсолютно сходится почти везде на  $E$ .

#### 9.2.1 Доказательство

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(x)|$$

$$\int_E S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n(x)| < +\infty, \text{ значит } S(x) \text{ конечна почти всюду.}$$

## 10 Абсолютная непрерывность интеграла

$f$  — суммируемая функция, тогда верно:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall E \in \mathcal{A} : \mu E < \delta : \left| \int_E f \right| < \varepsilon$$

.

### 10.1 Доказательство

$$X_n = X(f \geq n), X_n \supset X_{n+1} \supset \dots \text{ и } \mu \left( \bigcap_{n=1}^{+\infty} X_n \right) = 0.$$

Тогда  $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon : \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \frac{\varepsilon}{2}$  ( $A \mapsto \int_A |f|$  — мера, тогда  $\int_{\bigcap X_n} |f| = 0$  и по непрерывности меры сверху).

$\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$ , берём  $E : \mu E < \delta$ .

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f| = \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \setminus X_{n_\varepsilon}} |f| \leq \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| + n_\varepsilon \mu E < \frac{\varepsilon}{2} + n_\varepsilon \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon} = \varepsilon.$$

### 10.2 Следствие

$e_n$  — измеримое множество,  $\mu e_n \rightarrow 0$ ,  $f$  — суммируемая. Тогда  $\int_{e_n} f \rightarrow 0$ .

## 11 02.03.2020

$f_n \Rightarrow f$  по мере то же самое, что и  $\mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ . Ещё есть способ  $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ . Можно ли вывести хоть какую-нибудь импликацию.

$\Rightarrow$  нельзя, пример:  $f_n(x) = \frac{1}{nx}$  в  $(\mathbb{R}, \lambda)$ , тогда  $f_n \Rightarrow 0$  по мере. а  $\int \left| \frac{1}{nx} \right| d\mu = +\infty$ .

$\Leftarrow$  можно:  $\mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) = \int_{x_n} 1 d\mu \leq \int_{x_n} \frac{|f_n - f|}{\varepsilon} d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n - f| \rightarrow 0$ .

Хотим доказать подобие  $f_n \rightarrow f$ , то  $\int f_n \rightarrow \int f$ .

### 11.1 Теорема Лебега о мажорированной сходимости

$f_n, f$  — измеримые, почти везде конечные функции.  $f_n \Rightarrow_\mu f$ . Также существует  $g$ , что:

1.  $\forall n : |f_n| \leq g$  почти везде;
2.  $g$  — суммируема на  $X$  ( $g$  — мажоранта).

Тогда  $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ , и тем более  $\int_X f_n \rightarrow \int_X f$ .

#### 11.1.1 Доказательство

$f_n$  — суммируема в силу первого утверждения про  $g$ ,  $f$  — суммируема по следствию теоремы Рисса. Тем более  $\left| \int_X f_n - \int_X f \right| \leq \left| \int_X f_n - f \right| \leq \int |f_n - f|$ .

1.  $\mu X < +\infty$ . Фиксируем  $\varepsilon > 0$ .  $X_n := X(|f_n - f| \geq \varepsilon)$ ,  $\mu X_n \rightarrow 0$ .

$$\int_X |f_n - f| = \int_{x_n} + \int_{x_n^c} \leq \int_{x_n} 2g + \int_{x_n^c} \varepsilon_0 \leq \int_{x_n} 2g + \int_x \varepsilon < \varepsilon(1 + \mu X). \text{ (при больших } n \text{ выражение } \int_{x_n} 2g \leq \varepsilon).$$

2.  $\mu X = +\infty$ ,  $\varepsilon > 0$ .

Утверждение:  $\exists A$  — измеримое,  $\mu A$  — конечное,  $\int_{X \setminus A} g < \varepsilon$ .

*Доказательство*

$$\int G = \sup \left\{ \int g_n : h \text{ — ступенчатая функция } 0 \leq h \leq g \right\}$$

$$\begin{aligned} \exists h_0 : \int_X g - \int_X h_0 < \varepsilon, \quad A := \text{supp } h_0. \text{ (где } \text{supp} \text{ — носитель (support))} \\ \int_{X \setminus A} g + \int_A g - h_0 < \varepsilon. \\ \int_X |f_n - f| = \int_A + \int_{X \setminus A} \leq \int_A |f_n - f| + 2\varepsilon < 3\varepsilon \text{ при больших } n. \end{aligned}$$

## 11.2 Теорема Лебега о мажорированной сходимости почти везде

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $f_n, f$  — измеримые,  $f_n \rightarrow f$  — почти везде.

Существует такая  $g$ , что:

1.  $|f_n| \leq g$  почти везде;
2.  $g$  — суммируема.

### 11.2.1 Доказательство

$f_n, f$  — суммируемая, тем более — как и раньше.

$h_n := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, \dots)$ ,  $h_n$  убывает.  $0 \leq h_n \leq 2g$ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) = \overline{\lim} |f_n - f| = 0$  почти везде.

$2g - h \geq 0$ , возрастают, тогда по теореме Леви  $\int_X 2g - h \rightarrow \int_X 2g$ , значит  $\int_X h_n \rightarrow 0$ , тогда  $\int_X |f_n - f| \leq \int_X h_n \rightarrow 0$ .

## 11.3 Теорема Фату

$(X, \mathcal{A}, \mu, f_n \geq 0$  — измеримые,  $f_n \rightarrow f$  почти везде. Если  $\exists C > 0$ , что  $\forall n : \int_X f_n \leq C$ , то  $\int_X f \leq C$ .

### 11.3.1 Замечание

Вообще говоря  $\int_X f_n \not\rightarrow \int_X f$ .

### 11.3.2 Доказательство

$$g_n = \int (f_n, f_{n+1}, \dots).$$

$g_n$  возрастает,  $g_n \rightarrow f$  почти везде.  $\lim g_n = \underline{\lim} f_n = f$  почти везде.

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n \leq C, \text{ тогда } \int F \leq C.$$

Примерчик

$f_n = n \cdot \chi_{[0, \frac{1}{n}]} \rightarrow 0$  почти везде.

$$\int_{\mathbb{R}} f_n = 1, \int f = 0.$$

Положительность важна:

$f_n \geq 0$ , тогда  $\int -f_n \leq -1$ , но  $\int f = 0 \geq -1$ .

### 11.3.3 Следствие

$$f_n \xRightarrow[\mu]{} f \text{ } (f_{n_k} \rightarrow f).$$

### 11.3.4 Следствие 2

$f_n \geq 0$ , измеримая. Тогда

$$\int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n.$$

Доказательство

$$\int_X g_n \leq \int_X f_n \leq C.$$

Берём  $n_k$

$$\underline{\lim} \left( \int_X f_n \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \int_X f_{n_k} \right).$$

$$\int_X f_{n_k} \rightarrow \lim \left( \int_X f_n \right), \text{ а } \int_x g_n \rightarrow \int_X \underline{\lim} f_n.$$

## Часть III

# Произведение мер

## 12 Произведение мер

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  и  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  — пространства с мерой.

$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$  — семейство подмножеств в  $X \times Y$ .

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$  — полукольца, значит и  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  — полукольцо.

$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  — полукольцо *измеримых прямоугольников* (на самом деле это не всегда так).

Тогда введём меру на  $A \times B$  —  $\mu_0(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$ .

Обозначим  $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$  как произведение пространств с мерой.

## 13 Теорема о произведении мер

1.  $\mu_0$  — мера на полукольце  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ;
2.  $\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечные, значит  $\mu_0$  —  $\sigma$ -конечное.

### 13.1 Доказательство

1. Проверим счётную аддитивность  $\mu_0$ .  $\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$ ,  $(x, y) \in X \times Y$ .

$P = \bigsqcup_{\text{сч.}} P_k$  — измеримые прямоугольники.  $P = A \times B$  и  $P_k = A_k \times B_k$ ,  $\chi_P = \sum \chi_{P_k}$ .

$\chi_A(x) \chi_B(y) = \sum_k \chi_{A_k}(x) \chi_{B_k}(y)$ . Интегрируем по  $\nu$  (по пространству  $Y$ ).

$\chi_A(x) \cdot \nu(B) = \sum \chi_{A_k}(x) \nu(B_k)$ . Интегрируем по  $\mu$ .

$$\mu A \cdot \nu B = \sum \mu A_k \cdot \nu B_k.$$

2.  $X = \bigcup X_k$ ,  $Y = \bigcup Y_j$ , где  $\mu X_k$  и  $\nu Y_j$  — конечные,  $X \times Y = \bigcup_{k,j} X_k \times Y_j$ .

$(\mathbb{R}^m, \mathcal{M}^m, \lambda_m)$  и  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}^n, \lambda_n)$ .

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu_0)$ , где  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  — полукольцо.

Запускаем теорему о продолжении меры.

$\rightsquigarrow (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu)$ , где  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  —  $\sigma$ -алгебра.

$\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечная, следовательно продолжение определено однозначно.

### 13.2 Замечание

Произведение мер ассоциативно.

### 13.3 Дополнительная теорема (без доказательства)

$\lambda_{m+n}$  есть произведение мер  $\lambda_m$  и  $\lambda_n$ .



## 14 Сечения множества

$X, Y$  и  $C \subset X \times Y$ ,  $C_x = \{y \in Y : (x, y) \in C\} \subset Y$  — сечение множества  $C$ , аналогично определим  $C^y = \{x \in X : (x, y) \in C\}$ .

Допустимы объединения, пересечения и т.п.

## 15 Принцип Кавальери

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  и  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ , а также  $\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечные и полные.

$m = \mu \times \nu, C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ . Тогда:

1. при почти всех  $x \in X$  сечение  $C_x \in \mathcal{B}$ ;
2.  $x \mapsto \nu(C_x)$  — измерима (почти везде) на  $X$ ;
3.  $mC = \int_X \nu(C_x) d\mu(x)$ .

### 15.1 Замечание

1.  $C$  — измеримая  $\nRightarrow$  что  $\forall x : C_x$  — измеримое.
2.  $\forall x, \forall y, C_x, C_y$  — измеримы  $\nRightarrow$  что  $C$  — измеримо (пример можно взять из Серпинского).

### 15.2 Доказательство

$D$  — класс множеств  $X \times Y$ , для которых принцип Кавальери верен.

1.  $D \times \mathcal{B} \subset D, C = A \times B, C_x = \begin{cases} B & x \in A \\ \emptyset & x \notin A \end{cases}$ .

$$x \mapsto C_x : \nu B \cdot \chi_A(x).$$

$$\int_X \nu B \chi_A(x) d\mu(x) = \mu A \cdot \nu B = mC.$$

2.  $E_i$  — дизъюнктные,  $E_i \in D$ . Тогда  $\bigsqcup E_i \in D$ .

$(E_i)_x$  — измеримые при почти всех  $x$ .

При почти всех  $x$  все сечения  $(E_i)_x, i = 1, 2, \dots$  — измеримые.

$E_x = \bigsqcup (E_i)_x$  — измеримые при почти всех  $x$ .

$\nu E_x = \sum \nu(E_i)_x$ , значит  $x \mapsto \nu E_x$  измеримая функция.

$$\int_X \nu E_x d\mu = \int_X \sum \nu(E_i)_x d\mu = \sum \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \sum mE_i = mE$$

3.  $E_i \in D, \dots \supset E_i \supset E_{i+1} \supset \dots, E = \bigcap_{i=1}^{+\infty} E_i, mE_i < +\infty$ . Тогда  $E \in D$ .

$$\int_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty \Rightarrow \nu(E_i)_x \text{ — почти везде конечны.}$$

$$(E_i)_x \supset (E_{i+1})_x \supset \dots, E_x = \bigcap_{i=1}^{+\infty} (E_i)_x \Rightarrow E_x \text{ — измеримое при почти всех } x.$$

При почти всех  $x$  (для тех  $x$ , для которых  $\nu(E_i)_x$  — конечные сразу все  $i$  или при  $i = 1$ ), поэтому можно утверждать, что  $\nu E_x = \lim_{i \rightarrow +\infty} \nu(E_i)_x \Rightarrow x \mapsto \nu E_x$  — измерима.

$$\int_X \nu E_x d\mu = \int_X \lim(\nu E_i)_x = \lim_{i \rightarrow +\infty} \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \lim mE_i = mE \text{ (по непрерывности сверху меры } m).$$

Перестановка пределов доказывается из теоремы Лебега, которую ещё не доказывали  $|\nu(E_i)_x| \leq \nu(E_1)_x$  — суммируемая функция.

Мы доказали, что если  $A_{ij} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ , то  $\bigcap_j \left( \bigcup_i A_{ij} \right) \in D$ .

$$mE = \inf \left( \sum mP_k, E \subset \bigcup P_k \right).$$

4.  $mE = 0 \Rightarrow E \in D$ .  $H = \bigcap_j \bigcup_i P_{ij}, mH = 0$  ( $P_{ij} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ), тогда  $E \subset H$  ( $H \in D$ ).

$$0 = mH = \int_X \nu H_x d\mu \Rightarrow \nu H_x = 0 \text{ при почти всех } x, \text{ но } E_x \subset H_x \Rightarrow \text{при почти всех } x \nu E_x = 0, \text{ значит}$$

$$\text{и } \int \nu E_x = 0 = mE.$$

5.  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, mC < +\infty \Rightarrow C \in D$ .

Для множества  $C$  существует множество  $e$ , что  $me = 0$  и  $H = \bigcap_j \bigcup_i P_{ij}$  и  $C = H \setminus e, C_x = H_x \setminus e_x$  и  $mC = mH$ .

$\nu e_x = 0$  при почти всех  $x$ , значит  $\nu C_x = \nu H_x - \nu e_x$  при почти всех  $x$ .

$$\int_X \nu C_x d\mu = \int_X \nu H_x - \nu e_x = \int_X \nu H_x - \int_X \nu e_x = mH = mC.$$

6.  $C$  — произвольное,  $m$ -измеримое множество,  $X = \bigsqcup X_k$  и  $Y = \bigsqcup Y_j$ , тогда  $C = \bigsqcup_{i,j} \left( C \cap (X_i \times Y_j) \right) \in D$  по пункту 2. ( $\mu X_k, \mu Y_j$  — конечные).

### 15.3 Следствие

$C \in \mathcal{Q} \otimes \mathcal{B}, P_1(C) := \{x : C_x \neq \emptyset\}$ , тогда если  $P_1(C)$  — измеримое в  $X$ , тогда  $mC = \int_{P_1(C)} \nu C_x d\mu x$ .

## 15.4 Замечание

Из того, что  $C$  измеримое  $\nRightarrow$  что его проекция измерима.

## 16 Совпадение определенного интеграла и интеграла Лебега

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , непрерывное. Тогда  $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda_1$ .

### 16.1 Доказательство

Достаточно доказать для  $f \geq 0$ .

$f$  — непрерывно  $\Rightarrow C = \Pi\Gamma(f, [a, b])$  измеримо в  $\mathbb{R}^2$  (почти очевидно).

$C_x = [0, f(x)]$  (или  $\emptyset$ )  $\Rightarrow$  измеримость  $\lambda_1 C_x = f(x)$ .

$$\int_a^b f(x)dx = \lambda_2(\Pi\Gamma(f, [a, b])) = \int_{[a,b]} f(x)d\lambda_1(x).$$

### 16.2 Замечание

$f \geq 0$  измеримое, значит  $\lambda_2 \Pi\Gamma(f, [a, b]) = \int_{[a,b]} f(x)d\lambda_2(x)$ .

$f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $C \in X \times Y$ ,  $C_x$ ,  $f_x : C_x \rightarrow \mathbb{R}$ , т.е.  $y \mapsto f(x, y)$ , аналогично  $f^y : C^y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ .

## 17 Теорема Тонелли

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  и  $\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечные и полные, а также  $m = \mu \times \nu$ .

$f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $f \geq 0$ , измеримая. Тогда

1. при почти всех  $x$  функция  $f_x$  — измерима почти везде на  $Y$  (аналогично при почти всех  $y$  функция  $f^y$  также измерима на  $X$ );
2.  $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x(y) d\nu(y) = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$  — измерима почти везде на  $X$  (аналогично  $y \mapsto \psi(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$  — измерима почти везде на  $Y$ );
3.  $\int_{X \times Y} f(x, y) d\mu = \int_Y \left( \int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x).$

### 17.1 Доказательство

1.  $f = \chi_C$ ,  $C \subset X \times Y$ , измеримая.  $f_x = \chi_{C_x}(y)$ .  $C_x$  — измеримое при почти всех  $x \Rightarrow f_x$  — измеримая при почти всех  $x$ .

$$\varphi(x) = \int_Y \chi_{C_x}(y) d\nu(y) = \nu(C_x) \quad (x \mapsto \nu C_x \text{ — измерима по принципу Кавальери}).$$

$$\int_X \varphi(x) d\mu = \int_X \nu C_x d\mu = \int_{X \times Y} \chi_C dm.$$

2.  $f = \sum_{\text{кон.}} a_k \chi_{C_k}$ ,  $f \geq 0$ .

$$f_x = \sum a_k \chi_{(C_k)_x}(y).$$

$x \mapsto \int_Y f_x(y) d\nu(y) = \sum a_k \nu(C_k)_x$  — измеримая (отдельные слагаемые — измеримые, значит и вся сумма измеримая).

$$\int_X \left( \int_Y f_x(y) d\nu \right) d\mu = \sum a_k \int_X \nu(C_k)_x d\mu = \sum a_k m C_k = \int_{X \times Y} f dm$$

3.  $f \geq 0$ ,  $g_n$  — ступенчатые, что  $\dots \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = f$ .

$f_x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (g_n)_x$  — измерима как предел измеримых функций.

$\varphi(x) = \int_Y f_x(y) d\nu(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_Y g_n d\nu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x)$ , значит  $\varphi(x)$  измерима из-за измеримости  $\varphi_n$  (Теорема Леви).

$$g_n \leq g_{n+1} \leq \dots \Rightarrow \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \leq \dots$$

$$\int_X \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow} \int_{X \times Y} g_n dm = \int_{X \times Y} f dm \text{ (по теореме Леви)}$$

Везде должна быть приговорка „при почти всех  $x$ “.

## 18 Теорема Фубини

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  и  $\mu, \nu$  —  $\sigma$ -конечные и полные.

$f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , суммируемая. Тогда

1. при почти всех  $x$  функция  $f_x$  — суммируемая почти везде на  $Y$  (аналогично при почти всех  $y$  функция  $f^y$  также измерима на  $X$ ).
2.  $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x(y) d\nu(y) = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$  — суммируемая почти везде на  $X$  (аналогично  $y \mapsto \psi(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$  — суммируемая почти везде на  $Y$ ).
3. 
$$\int_{X \times Y} f(x, y) d\mu = \int_Y \left( \int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

*без доказательства*

### 18.0.1 Следствие

$$\int_C f = \int_{X \times Y} f \chi_C = \int_X \left( \int_Y f \cdot \chi_C \right) d\mu = \int_{P_1(C)} \left( \int_{C_x} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

$P_1(C)$  — проекция, измеримая,  $\{x : C_x \neq \emptyset\}$ .



## 19 Какая-то нужная штука для лекции 02.03.2020, потом удалю

$B(0, 1) \subset \mathbb{R}^m$ , Хотим найти  $\lambda_m B(0, 1) = \alpha_m$ .

$$\lambda_m B(0, R) = \alpha_m \cdot R^M.$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 \leq 1.$$

интеграл обычного кружочка:  $\int \chi_B d\lambda_2 = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 dy dx = \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2} dx = \pi$

$$\alpha_m = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_B = \int_{-1}^1 \left( \int_{B(0, \sqrt{1-x_1^2}) \subset \mathbb{R}^{m-1}} 1 d\nu \right) dx_1 = \int_{-1}^1 (1-x_1^2)^{\frac{m-1}{2}} \alpha_{m-1} dx_1.$$

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \Gamma(n) = (n-1)!, \Gamma(x+1) = \Gamma(x) \cdot x.$$

Тогда объём шара в  $\mathbb{R}^m$  равен  $\alpha_{m-1} 2 \int_0^1 (1-t)^{\frac{m-1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt = B(\frac{1}{2}, \frac{m+1}{2}) \alpha_{m-1}$ . Тогда объём шара можно

переписать как  $\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)\alpha_{m-1}}$ .

## Часть IV

# Замена переменных в интеграле

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  и  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  (пространство и алгебру изобрели, а меру нет)

$\Phi : X \rightarrow Y, \forall B \in \mathcal{B}$ , тогда  $\Phi^{-1}(B)$  — измеримое ( $\in \mathcal{A}$ )

Утверждение:  $\Phi^{-1}(\mathcal{B})$  —  $\sigma$ -алгебра (упражнение).

Определение:  $\nu : \mathcal{B} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, E \in \mathcal{B}, \nu E := \mu(\Phi^{-1}(E))$  — это мера на  $\mathcal{B}$  — образ  $\mu$  при отображении  $\Phi$ .

И кстати:  $\nu E = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 d\mu$ .

$$\nu\left(\bigcup B_i\right) = \mu\left(\Phi^{-1}\left(\bigcup B_i\right)\right) = \mu\left(\bigcup \Phi^{-1}(B_i)\right) = \sum \mu\Phi^{-1}(B_i) = \sum \nu B_i.$$

$f$  — измерима относительно  $\mathcal{B}$ . Тогда  $f \circ \Phi$  — измерима относительно  $\mathcal{A}$ .  $X(f(\Phi(x)) < a) = \Phi^{-1}(Y(f < a))$

Третье замечание:  $\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \omega \geq 0$ , измеримая.  $\nu(B) := \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$  — мера, которая назначает взвешенный образ меры  $\omega$  — вес.

## 19.1 Интегрирование по взвешенному образу меры

$\Phi : X \rightarrow Y$  — измеримое отображение,  $\omega : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \omega \geq 0$  — измеримая на  $X$ .  $\omega$  — взвешенный образ меры  $\nu$ . Тогда

$\forall f \geq 0$  — измеримой на  $Y$ .  $f \circ \Phi$  — измерима на  $X$  и выполняется следующее свойство:

$$\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_X f(\Phi(x)) \omega(x) d\mu(x).$$

То же верно для случая  $f$  — суммируемая.

### 19.1.1 Доказательство

$$1. f = \chi_B, B \in \mathcal{B}. \text{ Тогда } f \circ \Phi(x) = \begin{cases} 1 & \Phi(x) \in B \\ 0 & \Phi(x) \notin B \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(B)}.$$

$$\text{Доказывать нечего (и весёлый смайлик) } \nu B = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu;$$

2.  $f$  — ступенчатая, для каждой ступеньки — правда, и по линейности интеграла получаем результат;

3.  $f \geq 0$  — измеримая. Теорема об аппроксимизации измеримых функций ступенчатыми плюс предельный переход по теореме Леви;

4.  $f$  — измеримая, значит  $|f|$  — всё верно.