Содержание

Часть I

Интеграл по мере

1 Интеграл ступенчатой функции

$f = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \chi_{E_k}$, $f \geqslant 0$, где $E_k \in \mathcal{A}$ — допустимое разбиение, тогда интеграл ступенчатой функции f на множестве X есть

$$\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X f(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mu E_k$$

Дополнительно будем считать, что $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

1.1 Свойства

- Интеграл не зависит от допустимого разбиения:

  $f = \sum \alpha_j \chi_{F_j} = \sum\limits_{k,\, j} \lambda_k \chi_{E_k \cap F_j}$, тогда $\int F = \sum \lambda_k \mu E_k = \sum\limits_k \lambda_k \sum\limits_j \mu(E_k \cap F_j) = \sum \alpha_j \mu F_i = \int F$;

- $f \leqslant g$, то $\int\limits_X f d\mu \leqslant \int\limits_X g d\mu$.

2 Интеграл неотрицательной измеримой функции

$f \geqslant 0$, измерима, тогда интеграл неотрицательной измеримой функции f есть

$$\int\limits_X f d\mu = \sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leqslant g \leqslant f}} \left(\int\limits_X g d\mu \right).$$

2.1 Свойства

- Для ступенчатой функции f (при $f \geqslant 0$) это определение даёт тот же интеграл, что и для ступенчатой функции;
- $0 \leqslant \int\limits_X f \leqslant +\infty$;
- $0 \leqslant g \leqslant f$, g — ступенчатая, f — измеримая, тогда $\int\limits_X g \leqslant \int\limits_X f$.

3 Суммируемая функция

f — измеримая, f_+ и f_- — срезки, тогда если $\int\limits_X f_+$ или $\int\limits_X f_-$ — конечен, тогда интеграл суммируемой функции есть

$\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X f_+ - \int\limits_X f_-$.

Если $\int\limits_X f \neq \pm\infty$, то говорят, что f — *суммируемая*, а также $\int |f|$ — конечен ($|f| = f_+ + f_-$).

3.1 Свойство

Если $f \geqslant 0$ — измерима, то это определение даёт тот же интеграл, что и интеграл измеримой неотрицательной функции.

4 Интеграл суммируемой функции

$E \subset X$ — измеримое множество, f — измеримо на X, тогда интеграл f по множеству E есть

$\int\limits_E f d\mu \coloneqq \int\limits_X f\chi_E d\mu.$

f — суммируемая на E если $\int\limits_E f+ -$ и $\int\limits_E f_-$ — конечны одновременно.

4.1 Свойства

- $f = \sum \lambda_k \chi_{E_k}$, то $\int\limits_E f = \sum \lambda_k \mu\left(E_k \cap E\right)$;
- $f \geqslant 0$ — измерима, тогда $\int\limits_E f d\mu = \sup\limits_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leqslant g \leqslant f}} \left(\int\limits_X g d\mu \right).$

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ — произвольное пространство с мерой.

$\mathcal{L}^0(X)$ — множество измеримых почти везде конечных функций.

5 Простейшие свойства интеграла Лебега

1. *Монотонность*:

   $f \leqslant g \Rightarrow \int\limits_E f \leqslant \int\limits_E g.$

5.1 Доказательство

- $\sup\limits_{\substack{\widetilde{f}\text{ - ступ.}\\ 0\leqslant\widetilde{f}\leqslant f}} \left(\int\limits_X \widetilde{f} d\mu\right) \leqslant \sup\limits_{\substack{\widetilde{g}\text{ - ступ.}\\ 0\leqslant\widetilde{g}\leqslant g}} \left(\int\limits_X \widetilde{g} d\mu\right);$
- f и g — произвольные, то работаем со срезками, и $f_+ \leqslant g_+$, а $f_- \geqslant g_-$, тогда очевидно и для интегралов.

2. $\int\limits_E 1 \cdot d\mu = \mu E$, $\int\limits_E 0 \cdot d\mu = 0$.

5.2 Доказательство

По определению.

3. $\mu E = 0$, f — измерима, тогда $\int\limits_E f = 0$.

5.3 Доказательство

- f — ступенчатая, то по определению интеграла для ступенчатых функций получаем 0;
- $f \geqslant 0$ — измеримая, то по определению интеграла для измеримых неотрицательных функций также получаем 0;
- f — любая, то разбиваем на срезки f_+ и f_- и снова получаем 0.

4. (a) $\int -f = -\int f$;

   (b) $\forall c > 0 : \int cf = c \int f$.

5.4 Доказательство

- $(-f)_+ = f_-$ и $(-f)_= f_+$ и $\int -f = f_- - f_+ = -\int f$.
- $f \geqslant 0$ — очевидно, $\sup\limits_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leqslant g \leqslant cf}} \left(\int g\right) = c \sup\limits_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leqslant g \leqslant f}} \left(\int g\right)$.

5. Пусть существует $\int\limits_E f d\mu$, тогда $\left|\int\limits_E f\right| \leqslant \int\limits_E |f|$.

5.5 Доказательство

$-|f| \leqslant f \leqslant |f|$,

$-\int\limits_E |f| \leqslant \int\limits_E f \leqslant \int\limits_E |f|$.

6. f — измерима на E, $\mu E < +\infty$, $\forall x \in E : a \leqslant f(x) \leqslant b$. Тогда

$a\mu E \leqslant \int\limits_E f \leqslant b\mu E$.

5.6 Доказательство

$\int\limits_E a \leqslant \int\limits_E f \leqslant \int\limits_E b$,

$a\mu E \leqslant \int\limits_E f \leqslant b\mu E$.

6 Счетная аддитивность интеграла (по множеству)

6.1 Лемма

$A = \bigsqcup A_i$, где A, A_i — измеримы, $g \geqslant 0$ — ступенчатые. Тогда

$$\int\limits_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int\limits_{A_i} g d\mu.$$

6.1.1 Доказательство

$g = \sum \lambda_k \chi_{E_k}$.

$$\int\limits_A g d\mu = \sum \lambda_k \mu(A \cap E_k) = \sum_k \lambda_k \sum_i \mu(A_i \cap E_k) = \sum_i \left(\sum_k \lambda_k \mu(A_i \cap E_k) \right) = \sum_i \int\limits_{A_i} g d\mu.$$

6.2 Теорема

$f : C \to \overline{R}$, $f \geqslant 0$ — измеримая на A, A — измерима, $A = \bigsqcup A_i$, все A_i — измеримы. Тогда

$$\int\limits_A f d\mu = \sum_i \int\limits_{A_i} f d\mu$$

6.2.1 Доказательство

- $\leqslant$

  g — ступенчатая, $0 \leqslant g \leqslant f$, тогда $\int\limits_A g = \sum \int\limits_{A_i} g \leqslant \sum \int\limits_{A_i} f$. Осталось перейти к sup.

- $\geqslant$

  $A = A_1 \sqcup A_2$, $\sum \lambda_k \chi_{E_k} = g_1 \leqslant f \chi_{A_1}$, $g_2 \leqslant f \cdot \chi_{A_2} = \sum \lambda_k \chi_{E_k}$, $g_1 + g_2 \leqslant f \cdot \chi_A$

  $$\int\limits_{A_1} g_1 + \int\limits_{A_2} g_2 = \int\limits_A g_1 + g_2.$$

  переходим к sup g_1 и g_2

  $$\int\limits_{A_1} f + \int\limits_{A_2} f \leqslant \int\limits_A f$$

  по индукции разобьём для $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_n$, $A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ и $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_n \sqcup B_n$, где $B_n = \bigsqcup_{i \geqslant n+1} A_i$, тогда

  $$\int\limits_A \geqslant \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{A_i} f + \int\limits_B f \geqslant \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{A_i} f \Rightarrow \int\limits_A f \geqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \int\limits_{A_i} f$$

6.3 Следствие

$f \geqslant 0$ — измеримая, $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $\nu E = \int\limits_E f d\mu$. Тогда ν — мера.

6.4 Следствие 2

$A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$, f — суммируемая на A, тогда

$\int\limits_A f = \sum\limits_i \int\limits_{A_i} f.$

Часть II

Предельный переход под знаком интеграла

7 Теорема Леви

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, f_n — измерима, $\forall n : 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ при почти всех x.

$f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ при почти всех x. Тогда

$\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n(x) d\mu = \int\limits_X f d\mu$.

7.1 Доказательство

f — измерима как предел измеримых функций.

- $\leqslant$

  $f_n(x) \leqslant f(x)$ почти везде, тогда $\forall n : \int\limits_X f_n(x) d\mu \leqslant \int\limits_X f d\mu$, откуда следует, что и предел интегралов не превосходит интеграл предела.

- $\geqslant$

  Достаточно доказать, что для любой ступенчатой функции $g : 0 \leqslant g \leqslant f$ верно $\lim \int\limits_X f_n \geqslant \int\limits_X g$.

  Достаточно доказать, что $\forall c \in (0, 1)$ верно $\lim \int\limits_X f_n \geqslant c \int\limits_X g$.

  $E_n \coloneqq X\,(f_n \geqslant cg)$, $E_n \subset E_{n+1} \subset \ldots$.

  $\bigcup E_n = X$, т.к. $c < 1$, то $cg(x) < f(x)$, $f_n(x) \to f(x) \Rightarrow f_n$ попадёт в "зазор" $cg(x) < f(x)$.

  $\int\limits_X f_n \geqslant \int\limits_{E_n} f_n \geqslant \int\limits_{E_n} cg = c \int\limits_{E_n} g$,

  $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty} c \int\limits_{E_n} g = c \int\limits_X g$, потому что это непрерывность снизу меры $A \mapsto \int\limits_A g$.

8 Линейность интеграла Лебега

Пусть f, g — измеримы на E, $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$. Тогда $\int\limits_E f + g = \int\limits_E f + \int\limits_E g$.

8.1 Доказательство

Если f, g — ступенчатые, то очевидно.

Разберём общий случай. Существуют ступенчатые функции $f_n : 0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1} \leqslant \ldots \leqslant f$, и $g_n : 0 \leqslant g_n \leqslant g_{n+1} \leqslant \ldots \leqslant g$, и $f_n(x) \to f(x)$ и $g_n(x) \to g(x)$. Тогда

$\int\limits_E f_n + g_n = \int\limits_E f_n + \int\limits_E g_n$, сделаем предельный переход, значит при $n \to +\infty$

$\int\limits_E f + g = \int\limits_E f + \int\limits_E g$

8.2 Следствие

Пусть f, g — суммируемые на множестве E, тогда $f + g$ тоже суммируема и $\int\limits_E f + g = \int\limits_E f + \int\limits_E g$.

8.2.1 Доказательство

$(f + g)_\pm \leqslant |f + g| \leqslant |f| + |g|$.

$h := f + g$,

$h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-$,

$h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+$,

$\int h_+ + \int f_- + \int g_- = \int h_- + \int f_+ \int g_+$,

$\int h_+ - \int h_- = \int f_+ - \int f_- + \int g_+ - \int g_-$, тогда

$\int h = \int f + \int g$.

9 Теорема об интегрировании положительных рядов

$u_n \geqslant 0$ почти везде, измеримы на E. Тогда

$$\int\limits_E \left(\sum_{i=1}^{+\infty} u_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_E u_n d\mu.$$

9.1 Доказательство

Очевидно по теореме Леви.

$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ и $p \leqslant S_N \leqslant S_{N+1} \leqslant \ldots$ и $S_N \to S(X)$.

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_E S_N = \int\limits_E S,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_E u_k(x) = \int\limits_E S(x) d\mu.$$

9.2 Следствие

u_n — измеримая функция, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_E |u_n| < +\infty$. Тогда

$\sum u_n$ — абсолютно сходится почти везде на E.

9.2.1 Доказательство

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(x)|$$

$\int\limits_E S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int |u_n(x)| < +\infty$, значит $S(x)$ конечна почти всюду.

10 Абсолютная непрерывность интеграла

f — суммируемая функция, тогда верно:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall E \in \mathcal{A} : \mu E < \delta : \left| \int\limits_E f \right| < \varepsilon$$

.

10.1 Доказательство

$X_n = X\,(f \geqslant n)$, $X_n \supset X_{n+1} \supset \ldots$ и $\mu \left(\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} X_n \right) = 0$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon : \int\limits_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \frac{\varepsilon}{2}$ ($A \mapsto \int\limits_A |f|$ — мера, тогда $\int\limits_{\bigcap X_n} |f| = 0$ и по непрерывности меры сверху).

$\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$, берём $E : \mu E < \delta$.

$\left| \int\limits_E f \right| \leqslant \int\limits_E |f| = \int\limits_{E \cap X_{n_\varepsilon}} |f| + \int\limits_{E \setminus X_{n_\varepsilon}} |f| \leqslant \int\limits_{X_{n_\varepsilon}} |f| + n_\varepsilon \mu E < \frac{\varepsilon}{2} + n_\varepsilon \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon} = \varepsilon.$

10.2 Следствие

e_n — измеримое множество, $\mu e_n \to 0$, f — суммируемая. Тогда $\int\limits_{e_n} f \to 0$.

11 02.03.2020

$f_n \rightrightarrows f$ по мере то же самое, что и $\mu X(|f_n - f| \geqslant \varepsilon) \to 0$. Ещё есть способ $\int\limits_X |f_n - f| d\mu \to 0$. Можно ли вывести хоть какую-нибудь импликацию.

$\Rightarrow$ нельзя, пример: $f_n(x) = \dfrac{1}{nx}$ в $(\mathbb{R}, \lambda)$, тогда $f_n \rightrightarrows 0$ по мере. а $\int \left|\dfrac{1}{nx}\right| d\mu = +\infty$.

$\Leftarrow$ можно: $\mu X(|f_n - f| \geqslant \varepsilon) = \int\limits_{x_n} 1 d\mu \leqslant \int\limits_{x_n} \dfrac{|f_n - f|}{\varepsilon} d\mu \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon} \int\limits_X |f_n - f| \to 0$.

Хотим доказать подобие $f_n \to f$, то $\int f_n \to \int f$.

11.1 Теорема Лебега о мажорированной сходимости

f_n, f — измеримые, почти везде конечные функции. $f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f$. Также существует g, что:

1. $\forall n : |f_n| \leqslant g$ почти везде;
2. g — суммируема на X (g — мажоранта).

Тогда $\int\limits_X |f_n - f| d\mu \to 0$, и тем более $\int\limits_X f_n \to \int\limits_X f$.

11.1.1 Доказательство

f_n — суммируема в силу первого утверждения про g, f — суммируема по следствию теоремы Рисса. Тем более $\left|\int\limits_X f_n - \int\limits_X f\right| \leqslant \left|\int\limits_X f_n - f\right| \leqslant \int |f_n - f|$.

1. $\mu X < +\infty$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. $X_n \coloneqq X(|f_n - f| \geqslant \varepsilon)$, $\mu X_n \to 0$.

   $\int\limits_X |f_n - f| = \int\limits_{x_n} + \int\limits_{x_n^c} \leqslant \int\limits_{x_n} 2g + \int\limits_{x_n^c} \varepsilon_0 \leqslant \int\limits_{x_n} 2g + \int\limits_{x} \varepsilon < \varepsilon(1 + \mu X)$. (при больших n выражение $\int\limits_{x_n} 2g \leqslant \varepsilon$).
2. $\mu X = +\infty$, $\varepsilon > 0$.

   Утверждение: $\exists A$ — измеримое, μA — конечное, $\int\limits_{X \setminus A} g < \varepsilon$.

   Доказательство

   $\int G = \sup\left\{\int g_n : h - \text{ступенчатая функция} 0 \leqslant h \leqslant g\right\}$

   $\exists h_0 : \int\limits_X g - \int\limits_X h_0 < \varepsilon$, $A \coloneqq \operatorname{supp} h_0$. (где supp — носитель (support))

$$\int\limits_{X\setminus A} g + \int\limits_A g - h_0 < \varepsilon.$$

$$\int\limits_X |f_n - f| = \int\limits_A + \int\limits_{X\setminus A} \leqslant \int\limits_A |f_n - f| + 2\varepsilon < 3\varepsilon \text{ при больших } n.$$

11.2 Теорема Лебега о мажорированной сходимости почти везде

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, f_n, f — измеримые, $f_n \to f$ — почти везде.

Существует такая g, что:

1. $|f_n| \leqslant g$ почти везде;
2. g — суммируема.

11.2.1 Доказательство

f_n, f — суммируемая, тем более — как и раньше.

$h_n := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, \dots)$, h_n убывает. $0 \leqslant h_n \leqslant 2g$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(x) = \overline{\lim} |f_n - f| = 0$ почти везде.

$2g - h \geqslant 0$, возрастают, тогда по теореме Леви $\int\limits_X 2g - h \to \int\limits_X 2g$, значит $\int\limits_X h_n \to 0$, тогда $\int\limits_X |f_n - f| \leqslant \int\limits_X h_n \to 0$.

11.3 Теорема Фату

$(X, \mathcal{A}, \mu$, $f_n \geqslant 0$ — измеримые, $f_n \to f$ почти везде. Если $\exists C > 0$, что $\forall n : \int\limits_X f_n \leqslant C$, то $\int\limits_X f \leqslant C$.

11.3.1 Замечание

Вообще говоря $\int\limits_X f_n \not\to \int\limits_X f$.

11.3.2 Доказательство

$g_n = \int (f_n, f_{n+1}, \dots)$.

g_n возрастает, $g_n \to f$ почти везде. $\lim g_n = \underline{\lim} f_n = f$ почти везде.

$$\int\limits_X g_n \leqslant \int\limits_X f_n \leqslant C, \text{ тогда } \int F \leqslant C.$$

Примерчик

$$f_n = n \cdot \chi_{[0, \frac{1}{n}} \to 0 \text{ почти везде.}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_n = 1, \int f = 0.$$

Положительность важна:

$$f_n \geqslant 0, \text{ тогда } \int -f_n \leqslant -1, \text{ но } \int f = 0 \geqslant -1.$$

11.3.3 Следствие

$$f_n \underset{\mu}{\Longrightarrow} f \ (f_{n_k} \to f).$$

11.3.4 Следствие 2

$f_n \geqslant 0$, измеримая. Тогда

$$\int\limits_X \underline{\lim} f_n \leqslant \underline{\lim} \int\limits_X f_n.$$

Доказательство

$$\int\limits_X g_n \leqslant \int\limits_X f_n \leqslant C.$$

Берём n_k

$$\underline{\lim} \left(\int\limits_X f_n \right) = \lim_{k \to +\infty} \left(\int\limits_X f_{n_k} \right).$$

$$\int\limits_X f_{n_k} \to \lim \left(\int\limits_X f_n \right), \text{ а } \int\limits_x g_n \to \int\limits_X \underline{\lim} f_n.$$

Часть III

Произведение мер

12 Произведение мер

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ — пространства с мерой.

$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ — семейство подмножеств в $X \times Y$.

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — полукольца, значит и $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ — полукольцо.

$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ — полукольцо *измеримых прямоугольников* (на самом деле это не всегда так).

Тогда введём меру на $A \times B$ — $\mu_0(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$.

Обозначим $(X \times Y, A \otimes B, \mu \times \nu)$ как произведение пространств с мерой.

13 Теорема о произведении мер

1. μ_0 — мера на полукольце $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$;

2. μ, ν — σ-конечное, значит μ_0 — σ-конечное.

13.1 Доказательство

1. Проверим счётную аддитивность μ_0. $\chi_{A\times B}(x,y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$, $(x,y) \in X \times Y$.

   $P = \bigsqcup\limits_{\text{сч.}} P_k$ — измеримые прямоугольники. $P = A \times B$ и $P_k = A_k \times B_k$, $\chi_P = \sum \chi_{P_k}$.

   $\chi_A(x)\chi_B(y) = \sum\limits_k \chi_{A_k}(x)\chi_{B_k}(y)$. Интегрируем по ν (по пространству Y).

   $\chi_A(x) \cdot \nu(B) = \sum \chi_{A_k}(x)\nu(B_k)$. Интегрируем по μ.

   $\mu A \cdot \nu B = \sum \mu A_k \cdot \nu B_k$.

2. $X = \bigcup X_k$, $Y = \bigcup Y_j$, где μX_k и νY_j — конечные, $X \times Y = \bigcup\limits_{k,j} X_k \times Y_j$.

   $(\mathbb{R}^m, \mathcal{M}^m, \lambda_m)$ и $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}^n, \lambda_n)$.

   $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu_0)$, где $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ — полукольцо.

   Запускаем теорему о продолжении меры.

   $\rightsquigarrow (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu)$, где $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ — σ-алгебра.

   μ, ν — σ-конечная, следовательно продолжение определено однозначно.

13.2 Замечание

Произведение мер ассоциативно.

13.3 Дополнительная теорема (без доказательства)

λ_{m+n} есть произведение мер λ_m и λ_n.

14 Сечения множества

X, Y и $C \subset X \times Y$, $C_x = \{y \in Y : (x, y) \in C\} \subset Y$ — сечение множества C, аналогично определим $C^y = \{x \in X : (x, y) \in C\}$.

Допустимы объедения, пересечения и т.п.

15 Принцип Кавальери

$(X,\mathcal{A},\mu)$ и $(Y,\mathcal{B},\nu)$, а также μ, ν — σ-конечные и полные.

$m = \mu \times \nu$, $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Тогда:

1. при почти всех $x \in X$ сечение $C_x \in \mathcal{B}$;
2. $x \mapsto \nu(C_x)$ — измерима (почти везде) на X;
3. $mC = \int\limits_X \nu(C_x) d\mu(x)$.

15.1 Замечание

1. C — измеримая $\not\Rightarrow$ что $\forall x : C_x$ — измеримое.
2. $\forall x$, $\forall y$, C_x, C^y — измеримы $\not\Rightarrow$ что C — измеримо (пример можно взять из Серпинского).

15.2 Доказательство

D — класс множеств $X \times Y$, для который принцип Кавальери верен.

1. $D \times \mathcal{B} \subset D$, $C = A \times B$, $C_x = \begin{cases} B & x \in A \\ \varnothing & x \notin A \end{cases}$.

   $x \longmapsto C_x : \nu B \cdot \chi_A(x)$.

   $\int\limits_X \nu B \chi_A(x) d\mu(x) = \mu A \cdot \nu B = mC$.

2. E_i — дизъюнктные, $E_i \in D$. Тогда $\bigsqcup E_i \in D$.

   $(E_i)_x$ — измеримые при почти всех x.

   При почти всех x все сечения $(E_i)_x$, $i = 1, 2, \ldots$ — измеримые.

   $E_x = \bigsqcup (E_i)_x$ — измеримые при почти всех x.

   $\nu E_x = \sum \nu(E_i)_x$, значит $x \mapsto \nu E_x$ измеримая функция.

   $\int\limits_X \nu E_x d\mu = \int\limits_X \sum \nu(E_i)_x d\mu = \sum \int\limits_X \nu(E_i)_x d\mu = \sum mE_i = mE$

3. $E_i \in D$, $\ldots \supset E_i \supset E_{i+1} \supset \ldots$, $E = \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} E_i$, $mE_i < +\infty$. Тогда $E \in D$.

   $\int\limits_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty \Rightarrow \nu(E_i)_x$ — почти везде конечны.

   $(E_i)_x \supset (E_{i+1})_x \supset \ldots$, $E_x = \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} (E_i)_x \Rightarrow E_x$ — измеримое при почти всех x.

   При почти всех x (для тех x, для который $\nu(E_i)_x$ — конечные сразу все i или при $i = 1$), поэтому можно утверждать, что $\nu E_x = \lim\limits_{i\to+\infty} \nu(E_i)_x \Rightarrow x \mapsto \nu E_X$ — измерима.

   $\int\limits_X \nu E_x d\mu = \int\limits_X \lim(\nu E_i)_x = \lim\limits_{i\to+\infty} \int\limits_X \nu(E_i)_x d\mu = \lim mE_i = mE$ (по непрерывности сверху меры m).

   Перестановка пределов доказывается из теоремы Лебега, которую ещё не доказывали $|\nu(E_i)_x| \leqslant \nu(E_1)_x$ — суммируемая функция.

   Мы доказали, что если $A_{ij} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, то $\bigcap\limits_j \left(\bigcup\limits_i A_{ij}\right) \in D$.

   $mE = \inf\left(\sum mP_k,\ E \subset \bigcup P_k\right)$.

4. $mE = 0 \Rightarrow E \in D$. $H = \bigcap\limits_j \bigcup\limits_i P_{ij}$, $mH = 0$ ($P_{ij} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$), тогда $E \subset H$ ($H \in D$).

   $0 = mH = \int\limits_X \nu H_x d\mu \Rightarrow \nu H_x = 0$ при почти всех x, но $E_x \subset H_x \Rightarrow$ при почти всех x $\nu E_x = 0$, значит и $\int \nu E_x = 0 = mE$.

5. $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $mC < +\infty \Rightarrow C \in D$.

   Для множества C существует множество e, что $me = 0$ и $H = \bigcap \bigcup P_{ij}$ и $C = H \setminus e$, $C_x = H_x \setminus e_x$ и $mC = mH$.

   $\nu e_x = 0$ при почти всех x, значит $\nu C_x = \nu H_x - \nu e_x$ при почти всех x.

   $\int\limits_X \nu C_x d\mu = \int\limits_X \nu H_x - \nu e_x = \int\limits_X \nu H_x - \int\limits_X \nu e_x = mH = mC$.

6. C — произвольное, m-измеримое множество, $X = \bigsqcup X_k$ и $Y = \bigsqcup Y_j$, тогда $C = \bigsqcup\limits_{i,j} (C \bigcap (X_i \times Y_j)) \in D$ по пункту 2. (μX_k, μY_j — конечные).

15.3 Следствие

$C \in Q \otimes B$, $P_1(C) := \{x : C_x \neq \varnothing\}$, тогда если $P_1(C)$ — измеримое в X, тогда $mC = \int\limits_{P_1(C)} \nu C_x d\mu x$.

15.4 Замечание

Из того, что C измеримое $\not\Rightarrow$ что его проекция измерима.

16 Совпадение определенного интеграла и интеграла Лебега

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, непрерывное. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{[a,b]} f d\lambda_1$.

16.1 Доказательство

Достаточно доказать для $f \geqslant 0$.

f — непрерывно $\Rightarrow C = \Pi\Gamma\left(f, [a, b]\right)$ измеримо в $\mathbb{R}^2$ (почти очевидно).

$C_x = [0, f(x)]$ (или $\varnothing$) $\Rightarrow$ измеримость $\lambda_1 C_x = f(x)$.

$\int\limits_a^b f(x)dx = \lambda_2\left(\Pi\Gamma\left(f, [a, b]\right)\right) = \int\limits_{[a,b]} f(x)d\lambda_1(x)$.

16.2 Замечание

$f \geqslant 0$ измеримое, значит $\lambda_2 \Pi\Gamma(f, [a, b]) = \int\limits_{[a,b]} f(x)d\lambda_2(x)$.

$f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $C \in X \times Y$, C_x, $f_x : C_x \to \mathbb{R}$, т.е. $y \mapsto f(x, y)$, аналогично $f^y : C^y \to \overline{\mathbb{R}}$.

17 Теорема Тонелли

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ и μ, ν — σ-конечные и полные, а также $m = \mu \times \nu$.

$f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, измеримая. Тогда

1. при почти всех x функция f_x — измерима почти везде на Y (аналогично при почти всех y функция f^y также измерима на X);
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int\limits_Y f_x(y) d\nu(y) = \int\limits_Y f(x,y) d\nu(y)$ — измерима почти везде на X (аналогично $y \mapsto \psi(y) = \int\limits_X f(x,y) d\mu(x)$ — измерима почти везде на Y);
3. $\int\limits_{X \times Y} f(x,y) d\mu = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$.

17.1 Доказательство

1. $f = \chi_c$, $C \subset X \times Y$, измеримая. $f_x = \chi_{C_x}(y)$. C_x — измеримое при почти всех $x \Rightarrow f_x$ — измеримая при почти всех x.

   $\varphi(x) = \int\limits_Y \chi_{C_x}(y) d\nu(y) = \nu(C_x)$ ($x \mapsto \nu C_x$ — измерима по принципу Кавальери).

   $\int\limits_X \varphi(x) = \int\limits_X \nu C_X = mC = \int\limits_{X \times Y} \chi_C dm.$
2. $f = \sum\limits_{\text{кон.}} a_k \chi_{C_k}$, $f \geqslant 0$.

   $f_x = \sum a_k \chi_{(C_k)_x}(y)$.

   $x \mapsto \int f_x(y) d\nu(y) = \sum a_k \nu(C_k)_x$ — измеримая (отдельные слагаемые — измеримые, значит и вся сумма измеримая).

   $\int\limits_X \left(\int\limits_Y f_x(y) d\nu \right) d\mu = \sum a_k \int\limits_X \nu(C_k)_x d\mu = \sum a_k m C_k = \int\limits_{X \times Y} f dm$
3. $f \geqslant 0$, g_n — ступенчатые, что $\ldots \leqslant g_n \leqslant g_{n+1} \leqslant \ldots$, $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n = f$.

   $f_x = \lim\limits_{n \to +\infty} (g_n)_x$ — измерима как предел измеримых функций.

   $\varphi(x) = \int\limits_Y f_x(y) d\nu(y) = \lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_Y g_n d\nu = \lim\limits_{n \to +\infty} \varphi_n(x)$, значит $\varphi(x)$ измерима из-за измеримости φ_n (Теорема Леви).

   $g_n \leqslant g_{n+1} \leqslant \ldots \Rightarrow \varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x) \leqslant \ldots$

$$\int\limits_X \varphi(x) = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_X \varphi_n(x) = \lim_{n\to} \int\limits_{X\times Y} g_n dm = \int\limits_{X\times Y} f dm \text{ (по теореме Леви)}$$

Везде должна быть приговорка „при почти всех x“.

18 Теорема Фубини

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ и μ, ν — σ-конечные и полные.

$f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, суммируемая. Тогда

1. при почти всех x функция f_x — суммируемая почти везде на Y (аналогично при почти всех y функция f^y также измерима на X).
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int\limits_Y f_x(y) d\nu(y) = \int\limits_Y f(x,y) d\nu(y)$ — суммируемая почти везде на X (аналогично $y \mapsto \psi(y) = \int\limits_X f(x,y) d\mu(x)$ — суммируемая почти везде на Y).
3. $\int\limits_{X \times Y} f(x,y) d\mu = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$

без доказательства

18.0.1 Следствие

$$\int\limits_C f = \int\limits_{X \times Y} f \chi_C = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f \cdot \chi_C \right) d\mu = \int\limits_{P_1(C)} \left(\int\limits_{C_x} f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

$P_1(C)$ — проекция, измеримая, $\{x : C_x \neq \varnothing\}$.

19 Какая-то нужная штука для лекции 02.03.2020, потом удалю

$B(0,1) \subset \mathbb{R}^m$, Хотим найти $\lambda_m B(0,1) = \alpha_m$.

$\lambda_m B(0,R) = \alpha_m \cdot R^M$.

$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 \leqslant 1$.

интеграл обычного кружочка: $\int \chi_B d\lambda_2 = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 dy dy dx = \int\limits_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2} dx = \pi$

$\alpha_m = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \chi_B = \int\limits_{-1}^{1} \left(\int\limits_{B(0,\sqrt{1-x_1^2}) \subset \mathbb{R}^{m-1}} 1 d\nu \right) dx_1 = \int\limits_{-1}^{1} (1 - x_1^2)^{\frac{m-1}{2}} \alpha_{m-1} dx_1$.

$B(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$.

$B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\Gamma(x+1) = \Gamma(x) \cdot x$.

Тогда объём шара в $\mathbb{R}^m$ равен $\alpha_{m-1} 2 \int\limits_0^1 (1-t)^{\frac{m-1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt = B(\dfrac{1}{2}, \dfrac{m+1}{2})\alpha_{m-1}$. Тогда объём шара можно переписать как $\dfrac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)\alpha_{m-1}}$.

Часть IV

Замена переменных в интеграле

20 Образ меры при отображении

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B},)$ (пространство и алгебру изобрели, а меру нет).

$\Phi : X \to Y$, $\forall B \in \mathcal{B}\ \Phi^{-1}(B)$ — измеримо ($\in \mathcal{A}$).

$\nu : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}$, $E \in \mathcal{B}$, $\nu E \coloneqq \mu(\Phi^{-1}(E))$ — это мера на $\mathcal{B}$, а также *образ меры μ при отображении* Φ.

20.1 Замечание 1

$\nu E = \int\limits_{\Phi^{-1}(E)} 1 d\mu.$

$\nu \left(\bigsqcup B_i\right) = \mu \left(\Phi^{-1} \left(\bigsqcup B_i\right)\right) = \mu \left(\bigsqcup \Phi^{-1}(B_i)\right) = \sum \mu \Phi^{-1}(B_i) = \sum \nu B_i.$

20.2 Замечание 2

f — измерима относительна $\mathcal{B}$, тогда $f \circ \Phi$ — измерима относительна $\mathcal{A}$.

$X \left(f \left(\Phi(x)\right) < a\right) = \Phi^{-1} \left(Y(f < a)\right).$

21 Взвешенный образ меры

$\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geqslant 0$, измеримая.

Тогда $\nu(B) \coloneqq \int\limits_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$ — мера, которая назначает *взвешенный образ меры* μ, где ω — её вес.

22 Теорема о вычислении интеграла по взвешенному образу меры

$\Phi : X \to Y$ — измеримое отображение, $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\omega \geqslant 0$ —измеримая на X. ν — взвешенный образ меры μ (ω — её вес). Тогда

$\forall f \geqslant 0$ — измеримой на Y верно, что $f \circ \Phi$ — измерима на X и выполняется следующее свойство:

$\int\limits_Y f(y) d\nu(y) = \int\limits_X f(\Phi(x))\omega(x) d\mu(x).$

22.1 Замечание

То же верно для случая f — суммируемая.

22.2 Доказательство

1. $f = \chi_B$, $B \in \mathcal{B}$. Тогда $(f \circ \Phi)(x) = \begin{cases} 1 & \Phi(X) \in B \\ 0 & \Phi(x) \notin B \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(B)}$.

   Доказывать нечего ☺ : $\nu B = \int\limits_{\Phi(B)} \omega d\mu$;

2. f – ступенчатая, для каждой ступеньки — правда, и по линейности интеграла получаем результат;

3. $f \geqslant 0$ — измеримая. Теорема об аппроксимизации измеримых функций ступенчатыми плюс предельный переход по теореме Леви;

4. f — измеримая, значит $|f|$ — всё верно.

22.3 Следствие

f — суммируема на Y, $B \in \mathcal{B}$, $\int\limits_B f d\nu(y) = \int\limits_{\Phi^{-1}} (B)(f \circ \Phi) w d\mu$.

Частный случай: $X = Y$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\Phi = \mathrm{id}$, $\omega \geqslant 0$ — измерима.

23 Плотность одной меры по отношению к другой

$\nu B = \int\limits_B \omega(x) d\mu(x)$, тогда ω — *плотность меры* ν *относительно меры* μ.

23.1 Замечание

$\int\limits_X f(x) d\nu(x) = \int\limits_X f(x)\omega(x) d\mu(x)$.

24 Критерий плотности

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, ν — ещё одна мера на $\mathcal{A}$, $\omega \geqslant 0$ — измеримая. Тогда

ω — плотность ν относительно $\mu \iff \forall A \in \mathcal{A}$ верно: $\inf\limits_A \omega \cdot \mu A \leqslant \nu A \leqslant \sup\limits_A \omega \cdot \mu A$ $(0 \cdot \infty = 0)$.

24.0.1 Доказательство

- $\Rightarrow$ Очевидно (интеграл μA обладает этими свойствами из-за плотностей);
- $\Leftarrow$ Считаем, что $\omega > 0$. Для $\omega = 0$ получаем: $e \coloneqq X(\omega = 0)$, $\nu e = 0 = \int\limits_e \omega d\mu$, тогда $\nu(A) = \int\limits_A \omega d\mu = 0$.

  Теперь пусть $\omega > 0$, то $q \in (0,1)$. $A_j \coloneqq A(q^j \leqslant \omega \leqslant q^{j-1})$, $j \in \mathbb{Z}$, $A = \bigsqcup\limits_{j \in \mathbb{Z}} A_j$.

  $q^j \mu A_j \leqslant \nu A_j \leqslant q^{j-1} \mu A_j$.

  $q^j \mu A_j \leqslant \int\limits_{A_j} \omega d\mu \leqslant q^{j-1} \mu A_j$.

  $q \int\limits_A \omega d\mu = q \sum \int\limits_{A_j} \leqslant \sum q^j \mu A_j \leqslant \nu A \leqslant \frac{1}{q} \sum q^j \mu A_j \leqslant \frac{1}{q} \int\limits_A \omega$.

  Устремим $q \to 1$ и получим доказательство равенства.

25 Единственность плотности

f, g — суммируемые на X, $\forall A$ — измеримых верно: $\int\limits_A f = \int\limits_a g$. Тогда $f = g$ почти везде.

25.0.1 Доказательство

$h = f - g$, $\forall A$ — измеримых, $\int\limits_A h = 0$.

$A_+ = X(h \geqslant 0)$, $A_- = X(h < 0)$, $A_+ \bigcap A_- = \varnothing$.

$\int\limits_{A_+} |h| = \int\limits_{A_+} h = 0$.

$\int\limits_{A_-} |h| = -\int\limits_{A_-} h = 0$.

$X = A_+ \bigsqcup A_-$, $\int\limits_X |h| = 0$, тогда $h = 0$.

25.1 Следствие

Плотность ν относительно ν определена однозначно с точностью до μ почти везде.

26 Лемма об образе малых кубических ячеек

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $a \in O$. Φ — дифференцируема G в окрестности точки a, $\det \Phi'(a) \neq 0$. Пусть $c > |\det \Phi'(a)|$.

Тогда существует такое $\delta > 0$, что для любого куба $Q \subset B(a, \delta)$, $a \in Q$ верно, что $c \cdot \lambda Q > \lambda \Phi(Q)$.

26.0.1 Доказательство

$L := \Phi'(a)$ — обратимое линейное отображение.

$\Phi(x) = \Phi(a) + L(x - a) + o(x - a)$.

$a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a)) = x + o(x - a)$ (увеличили в константу, поэтому *о маленькое* остаётся *о маленьким*).

$\forall \varepsilon > 0$ можно записать шар $B_\varepsilon(a)$, что при $x \in B_\varepsilon(a)$ $|\psi(x) - x| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{m}}|x - a|$.

$Q \subset B_\varepsilon$, $a \in Q$ — куб со стороной h, при $x \in Q : |\psi(x) - x| < \varepsilon h$. $|x_i - a_i| \leqslant h$.

x, $y \in Q$, тогда $|\psi(x)_i - \psi(y)_i| = |\psi(x)_i - x_i| + |\psi(y)_i - y_i| + |x_i - y_i| \leqslant |\psi(x) - x| + |\psi(y) - y| + h < (1 + 2\varepsilon)h$.

$\psi(Q)$ — содержится в кубе со стороной $(1 + 2\varepsilon)h$, тогда $\lambda\psi(Q) \leqslant (1 + 2\varepsilon)^m \lambda Q$.

$\lambda\Phi(Q) \leqslant (1 + 2\varepsilon)^m |\det L| \lambda Q < C \lambda Q$.

Берём $\varepsilon : (1 + 2\varepsilon)|\det L| < C$, где δ — радиус $B_\varepsilon(a)$.

$\lambda A = \inf\limits_{\text{G - открытое}, A \subset G} \lambda G$

27 Теорема об образе меры Лебега при диффеоморфизме

27.1 Лемма

$f : \underset{\text{откр.}}{O} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, O — непрерывное. A — измеримое, $A \subset Q \subset \overline{Q} \subset O$.

Тогда $\displaystyle\int\limits_{A \subset G \text{открытое}} \left(\lambda(G) \sup_G f\right) = \lambda A \sup_A f$.

Без доказательства.

27.2 Теорема

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм. $A \in \mathcal{M}^m$, $A \subset O$. Тогда

$\displaystyle\lambda\Phi(A) = \int\limits_A |\det \Phi'(a)|\, d\lambda$.

27.2.1 Доказательство

$\nu A \coloneqq \lambda\Phi(A)$. Верно ли, что $J_\Phi(x) \coloneqq |\det \Phi'(x)|$ — это плотность ν по отношению к μ.

Достаточно проверить, что $\forall A$ верно: $\inf\limits_A J_\Phi \cdot \lambda A \leqslant \nu A \leqslant \sup\limits_A J_\Phi \cdot \lambda A$.

Достаточно проверить правое неравенство. Левое — правое для Φ^{-1} и $\widetilde{A} = \Phi(A)$.

$\lambda\Phi^{-1}\left(\widetilde{A}\right) \leqslant \sup J_{\Phi^{-1}} \cdot \lambda\widetilde{A}$.

$\lambda A \leqslant \sup \left|\det(\Phi^{-1})'\right| \lambda\Phi(A)$.

$\displaystyle\sup \frac{1}{|\det \Phi'|}$

$\displaystyle\frac{1}{\inf |\det \Phi'|}$

1. A — кубическая ячейка, $\overline{A} \subset O$. От противного: пусть оказалось, что $\lambda Q \sup J_\Phi < \nu Q$. Возьмём $c > \sup\limits_Q J_\Phi$, так, что $\lambda Q \cdot c < \nu Q$. Значит существует такая часть Q_i, что $\lambda Q_i \cdot c < \nu Q_i$. $\lambda Q_n \cdot c < nuQ_n$, $a = \bigcap \overline{Q_n}$, накроем точку a этим кубиков. $c > |\det \Phi'(a)|$, тогда $\nu Q_n = \lambda\Phi(Q_n)$. Получили, что $\lambda\Phi(Q_n) > c\lambda Q_n$, а по лемме нужно наоборот.

2. Оценка $\nu A \leqslant \sup J_\Phi \lambda A$, верна для случая, когда A — открытое множество.

$\nu Q \leqslant \sup\limits_A J_\Phi \lambda Q.$

Суммируя по Q: $\nu A \leqslant \sup\limits_A J_\Phi \lambda A.$

Что было в лемме (и что мы потеряли):

$\inf\limits_{A \subset G} \left(\lambda G \cdot \sup\limits_G f \right) = \lambda A \cdot \sup\limits_A f.$

G — открытое, тогда

$\nu G \leqslant \sup\limits_G J_\Phi \cdot \lambda G.$

$\nu A \leqslant \nu G \leqslant \lambda \lambda A \sup\limits_A f.$

$\forall A \in \mathcal{M}^m$, $\Phi(A)$ — измерима

$$\lambda\Phi(A) = \int\limits_A |\det \Phi'(x)|\, d\lambda(x).$$

$\Phi : X \to Y$

$$\nu(E) = \int -\Phi^{-1}(E)\omega d\mu.$$

$E = \Phi(A).$

28 Теорема о гладкой замене переменной в интеграле Лебега

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм, f — измеримое, $f \geqslant 0$, $\mathcal{O} = \Phi(O)$. Тогда

$$\int\limits_{\mathcal{O}} f(y)dy = \int\limits_{O} f(\Phi(x)) \left|\det \Phi'(x)\right| dx.$$

То же верно для суммируемой функции f.

28.1 Доказательство

Следует из теоремы об образе меры Лебега.

29 Сферические координаты в $\mathbb{R}^m$

r — расстояние от центра до точки

φ_1, φ_2, …, φ_{m-1} — соответствующие углы, определяются по индукции на меньшие подпространства.

$x_1 = r\cos\varphi_1$;

$x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2$;

$\vdots$

$x_m = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_{m-1}$.

$x_1,\dots,x_m$. Выразим последние две переменные через угол φ_{m-1} и какое-то расстояние ρ_{m-1}.

$x_1,\dots,x_{m-2}$, ρ_{m-1}, φ_{m-1}, тогда

$x_{m-1} = \rho_{m-1}\cos\varphi_{m-1}$, а $x_m = \rho_{m-1}\sin\varphi_{m-1}$.

$x_{m-2} = \rho_{m-2}\cos\varphi_{m-2}$.

$\vdots$

Пусть осталось только x_1, тогда $x_1 = r\cos\varphi_1$ и $\rho_2 = r\sin\varphi_1$, т.е. $\rho_1 = r$.

$$\int dx_1\dots dx_m = \int \rho_{m-1}dx_1\dots dx_{m-2}d\rho_{m-1}d\varphi_{m-1} = \int \rho_{m-2}^2\sin\varphi_{m-2}dx_1\dots dx_{m-3}d\rho_{m-2}d\varphi_{m-2}d\varphi_{m-1} =$$

$$= \int \rho_{m-3}^3\sin^2\varphi_{m-3}\sin\varphi_{m-2}dx_1\dots = \int r^{m-1}\sin^{m-2}\varphi_1\sin^{m-3}\varphi_2\dots\sin\varphi_{m-2}\dots$$

$r^{m-1}sin^{m-2}\varphi_1\sin^{m-3}\varphi_2\dots\sin\varphi_{m-2}$ — это Якобиан.

30 Формула для Бета-функции

$$B(s,t)=\int\limits_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}dx=\frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}.$$

30.0.1 Доказательство

По определению гаммы-функции:

$\Gamma(s)\Gamma(t)=\int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}e^{x}\left(\int\limits_0^{+\infty} y^{t-1}e^{-y}dy\right)dx=\int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\int\limits_X (u-x)^{t-1}e^{-u+x}dudx$, где $y=u-x$,

$\int\limits_0^{+\infty} du\int\limits_0^{u} dxx^{s-1}(u-x)^{t-1}e^{-u}$, заменим $x=uv$ и получим

$\int\limits_0^{+\infty} du\int\limits_0^{1} dvu^{s-1}v^{s-1}u^{t-1}(1-v)^{t-1}ue^{-u}=\int\limits_0^{+\infty} duu^{s+t-1}e^{-u}\int\limits_0^{1} v^{s-1}(1-v)^{t-1}dv=\Gamma(s+t)B(s,t).$

31 Объем шара в $\mathbb{R}^m$

$\lambda_m B(0,R) = \int\limits_{x_1^2+\ldots+x_m^2=R^2} 1dx$, введём сферические координаты.

$\int\limits_0^R dr \int\limits_0^\pi d\varphi_1 \ldots \int\limits_0^\pi d\varphi_{m-2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_{m-1} r^{m-1} \sin^{m-2}\varphi_1 \sin^{m-3}\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{m-2}$, а дальше воспользуемся бетой-функцией.

Пример как вычислять sin в какой-то степени:

$\int\limits_0^\pi (\sin\varphi_k)^{m-1-k} = 2\int\limits_0^{\pi/2} t^{\frac{m-1-k}{2}-\frac{1}{2}}(1-t)^{-0.5}dt = B\left(\frac{m-k}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{m-k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-k}{2}+\frac{1}{2}\right)}$.

Часть V

Функция распределения

32 Теорема о вычислении интеграла по мере Бореля—Стилтьеса (с леммой)

32.1 Определение

$(X, \mathcal{O}, \mu)$, $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая, пространство конечное.

Пусть $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mu X(h < t) < +\infty$.

$H(t) := \mu X(h < t)$ — функция распределения функции h по μ $(H : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$.

Очевидно, что H возрастает, $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\nu := h(\mu)$, $\nu(A) = \mu\left(h^{-1}(A)\right)$.

Пусть h — измеримая, тогда $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $h^{-1}(\mathcal{B})$ — измеримая.

$\mu_H[a, b) = H(b-0) - H(a-0)$ — *мера Бореля-Стилтьеса.*

32.2 Лемма

$h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая, почти везде конечная.

H — функция распределения (корректно заданная), $\forall t$ $\mu X(h < t) < +\infty$.

Тогда на $\mathcal{B}$, μ_H совпадает с $h(\mu)$.

32.2.1 Доказательство

$\mu_h[a, b) = H(b-0) - H(a-0) = H(b) - H(a)$ — непрерывность меры снизу.

$H(b) - H(a) = \mu X(a \leqslant h < b) = \mu\left(h^{-1}[a, b)\right) = \nu[a, b]$, где $\nu = h(\mu)$

Значит $\mu_H = \nu$ на $\mathcal{B}$.

32.3 Теорема

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\geqslant 0$, измеримое по Борелю.

$h : X \to \overline{\mathbb{R}}$, измеримая, почти везде конечная, с функцией распределения H.

μ_H — мера Бореля-Стилтьеса. Тогда

$$\int\limits_X f(h(x))\,d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)d\mu_H(t).$$

32.3.1 Доказательство

По теореме о взвешенном образе меры:

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y = \mathbb{R}, \mathcal{B}, h(\mu))$,

$\Phi = h : X \to Y$, $\omega = 1$.

$$\int\limits_Y f(y)d\nu = \int\limits_X f(\Phi(x))1d\mu(x).$$

Путь $f \geqslant 0$, измеримая, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(|x|)\,d\lambda_m = \int\limits_0^{+\infty} f(t)d\mu_H$ при $h(x) = |x|$, где $H(r) = \mu\mathbb{R}^m(|x| < r) = \alpha_m r^m$.

$$\mu_H[a,b) = H(b) - H(a) = \int\limits_a^b H'(t)dt = \int\limits_a^b m\alpha_m t^{m-1}dt.$$

μ_H и мера $\nu : \nu(A) = \int\limits_A m\alpha_m t^{m-1}dt$, значит $\mu_h = \nu$ на $\mathcal{B}$.

$$\int\limits_0^{+\infty} f(t)m\alpha_m t^{m-1}dt.$$

32.3.2 Следствие

Мы проверили, что g возрастает, $g \in C^1(\mathbb{R})$ и $M_g(A) = \int\limits_A g'(x)dx$.

Часть VI

Ряды Фурье

33 Интегральные неравенства Гельдера и Минковского

1. Неравенство Гёльдера:

   $p,\ q > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, заданы почти везде, измеримы.

   $(X, \mathcal{A}, \mu),\ f,\ g : X \to \mathbb{C}\ (\mathbb{R})$. Тогда

   $$\int\limits_X |fg| d\mu \leqslant \left(\int\limits_X |f|^p \right)^{1/p} \left(\int\limits_X |g|^q \right)^{1/q}$$

2. Неравенство Минковского

   $(X, \mathcal{A}, \mu),\ f,\ g : X \to \mathbb{C}$ — измерима почти везде, конечна, $1 \leqslant p < +\infty$. Тогда

   $$\left(\int\limits_X |f+g|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\int\limits_X |f|^p \right)^{1/p} + \left(\int\limits_X |g|^p \right)^{1/p}$$

34 Интеграл комплекснозначной функции

$(X, \mathcal{A}, \mu),\ f : X \to \mathbb{C},\ f(x) = g(x) + ih(x)$.

f — измерима $\Longleftrightarrow$ $g = \mathrm{Re} f$ и $h = \mathrm{Im} f$ — измеримые.

f — суммируемая $\Longleftrightarrow$ $g = \mathrm{Re} f$ и $h = \mathrm{Im} f$ — суммируемые.

$\int\limits_X f = \int\limits_X g + i \int\limits_X h.$

34.1 Вывод

$\left| \int\limits_X f d\mu \right| \leqslant \int\limits_X |f| d\mu.$

35 Пространство $L^p(E,\mu)$

$L^p(X,\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$

$$\mathcal{L}^p(X,\mu) = \left\{ f : X \xrightarrow[\text{п.в.}]{} \overline{\mathbb{R}}(\overline{\mathbb{C}}), f \text{ — измерима}, \int\limits_X |f|^p d\mu < +\infty \right\}$$

- $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ — линейное пространство — по н. Минковского;
- Введём норму $\|f\| = \left(\int\limits_X |f|^p \right)^{1/p}$;
- f эквивалентно g если $f(x) = g(x)$ при почти всех x

L^p — уберём из $\mathcal{L}$ все одинаковые функции, оставив только одного представителя из каждого класса эквивалентности.

36 Существенный супремум

$f : X \underset{\text{п.в.}}{\longrightarrow} \overline{\mathbb{R}}$, $\operatorname{ess\,sup} f = \inf\left\{A \in \overline{\mathbb{R}} : f(x) \leqslant A \text{ п.в.}\right\}$.

36.1 Свойства

1. $\operatorname{ess\,sup} f \leqslant \sup f$;
2. $f(x) \leqslant \operatorname{ess\,sup} f$ при почти всех x;
3. $\left|\int\limits_{\mathbb{R}} fg\right| \leqslant \operatorname{ess\,sup}|f| \cdot \int\limits_X |g|$.

36.1.1 Доказательство

1. Очевидно
2. $M = \operatorname{ess\,sup} f$

   $\forall n \in \mathbb{N}$ верно $f(x) \leqslant M + \dfrac{1}{n}$ почти везде.
3. Очевидно $\left|\int\limits_X fg\right| \leqslant \int\limits_X |fg|$,

   $|fg| \leqslant M|g|$ почти везде.

37 Пространство $L^\infty(E,\mu)$

$\mathcal{L}^\infty(X,\mu) = \left\{ f : X \underset{\text{п.в.}}{\longrightarrow} \mathbb{R}(\mathbb{C}), f \text{ — измерима}, \operatorname{ess\,sup} |f| < +\infty \right\}$

$f,\, g \in \mathcal{L}^\infty \Rightarrow f + g \in \mathcal{L}^\infty$.

т.е. $\mathcal{L}^\infty$ — линейное пространство, норма $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_x |f|$.

$\operatorname{ess\,sup} |f+g| \leqslant \operatorname{ess\,sup} |f| + \operatorname{ess\,sup} |g|$.

37.1 Замечание

$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$ — неравенство Гёльдера (можно брать $p = 1$ и $q = +\infty$).

$f \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $\Rightarrow f$ — почти всюду конечно $\Rightarrow$ можно считать, что f задана почти всюду на X и всюду конечна.

38 Теорема о вложении пространств L^p

X, $\mu X < +\infty$, $1 \leqslant s < r \leqslant +\infty$. Тогда

1. $L^r(X,\mu) \subset L^s(x,\mu)$;
2. $\|f\|_s \leqslant (\mu X)^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} \|f\|_r$

38.1 Доказательство

1. следует из 2;
2. $r = \infty$ — очевидно

   r — конечно, тогда:

   $$\|f\|_s = \left(\int\limits_X |f|^s\right)^{\frac{1}{s}} \leqslant \left(\int\limits_X \|f\|_\infty^s\right)^{\frac{1}{s}}$$

   $|f| \leqslant \operatorname{ess\,sup} f = \|f\|_\infty = \|f\|_\infty \mu X^{1/s}$

   $\|f\|_s^s = \int\limits_X |f|^s 1 d\mu$ по Гёльдеру получаем неравенство

   $$\left(\int\limits_X (|f|^s)^{r/s}\right)^{s/r} \left(\int\limits_X 1\right)^{\frac{r-s}{r}} = \left(\int\limits_x |f|^r\right)^{s/r} (\mu X)^{1-\frac{s}{r}}.$$

38.2 Следствие

$\mu E < +\infty$, $1 \geqslant s < r \geqslant +\infty$.

f_n, $f \in L^s$, $f_n \to f$ на L^r. Тогда $f_n \to f$ на L^s.

38.2.1 Доказательство

очевидно, потому что $\|f\|_s \leqslant \mu E^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} \|f\|_r$.

Часть VII

Поверхностный интеграл

39 Измеримое множество на простом гладком двумерном многообразии в $\mathbb{R}^3$

M — просто гладкое двумерное многообразие в $\mathbb{R}^3$, $\varphi : \underset{\text{откр.}}{O} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ — параметризация.

$E \subset M$ — измеримое (по Лебегу), если его $\varphi^{-1}(E)$ — измерим в $\mathbb{R}^2$.

40 Мера Лебега на простом гладком двумерном многообразии в $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{A}_M = \{E \subset M, E$ — изм.$\}$ — σ-алгебра.

Мера Лебега на $\mathcal{A}_M$: $S(E) = \iint\limits_{\varphi^{-1}(E)} |\varphi'_u \times \varphi'_v|\, dudv$.

41 Поверхностный интеграл первого рода

M — простое двумерное гладкое многообразие, φ — гладкая параметризация, $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, измеримая.

Тогда

$\iint\limits_M f ds$ — Поверхностный интеграл I рода и вычисляется следующим образом:

$$\iint\limits_M f ds = \iint\limits_{\varphi^{-1} M} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) |\varphi'_u \times \varphi'_v| dv du.$$

42 Кусочно-гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$

$M \subset \mathbb{R}^3$ — кусочно-гладкое многообразие в $\mathbb{R}^3$

M — объекты конечного числа элементов:

- Простые двумерные гладкие многообразия;
- Гладкие кривые — простые k-мерные многообразия в $\mathbb{R}^3$;
- Точки.

$M = \bigsqcup M_i \bigsqcup l_i \bigsqcup p_i$.

$S(E) = \sum S(E \bigcap M_i)$.

Часть VIII

Преобразование Фурье

43 Теорема о сходимости в пространствах L^p и по мере

$1 \leqslant p < +\infty$, f_n, $f \in L^p(X,\mu)$. Тогда верны следующие утверждения:

1. $f_n \to f$ в L^p, тогда $f_n \rightrightarrows f$ по мере μ.

2. $f_n \rightrightarrows f$ по мере μ (либо $f_n \to f$ почти везде).

   Если $\exists g \in L^p : |f_n| \leqslant g$. Тогда $f_n \to f$ в L^p.

43.1 Доказательство

1. $X_n(\varepsilon) := X\left(|f_n - f| \geqslant \varepsilon\right)$.

   $\mu X_n(\varepsilon) = \int\limits_{X_n(\varepsilon)} 1 \leqslant \frac{1}{\varepsilon^p} \int\limits_{X_n(\varepsilon)} |f_n - f|^p d\mu \leqslant \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|_p^p \to 0.$

2. $f_n \rightrightarrows f$, тогда $f_{n_k} \to f$ п.в.. Тогда $|f| \leqslant g$ п.в. $|f_n - f|^p \leqslant (2g)^p$, $\|f_n - f\|_p^p = \int\limits_X |f_n - f|^p d\mu \to 0$ по теореме Лебега.

44 Полнота L^p

$L^P(X, \mu)$, $1 \leqslant p < +\infty$ — полное.

44.0.1 Доказательство

f_n — фундаментальная.

Для $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ $\exists N_1$ при $n = n_1 > N_1$, $\forall k > n_1$ $\|f_{n_1} - f_k\| < \dfrac{1}{2}$.

Для $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$ $\exists N_2 > n1$ при $n = n_2 > N_2$, $\forall k > n_2$ $\|f_{n_2} - f_k\| < \dfrac{1}{4}$.

$\varepsilon = \dfrac{1}{2^m}$ $\exists N_m > n_m$ при $n = n_m > N_m$, $\forall k > n_m$ $\|f_{n_m} - f_k\| < \dfrac{1}{2^m}$.

Таким образом, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 1$.

Рассмотрим $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \in [0, +\infty]$.

S_n, $\|S_n\|_p \leqslant \sum \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|$

S_n, $\|S_n\|_p \leqslant \sum\limits_{k=1}^{N} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 1$.

$\int\limits_X S_n^p \leqslant 1$, по т. Фату $\int S^p \leqslant 1$, тогда S^p — сходится, значит S конечно почти везде, тогда

$\sum (f_{n_{k+1}} f_{n_k})$ — сходится почти везде.

$f(x) := f_{n_1} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ — сходится с потрам

$f_{n_1} + \sum\limits_{k=1}^{m-1} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) = f_{n_m}$.

$f_{n_m} \to f$ почти везде.

Проверим, что $\|f_n - f\|_p \to 0$.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall m, n > N$ $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$

$\|f_n - f_{n_k}\|_p^p = \int\limits_X |f_n - f_{n_k}|^p d\mu < \varepsilon^p$ верно при всех больших k.

Тогда по теореме Фату: $\int\limits_X |f_n - f|^p d\mu < \varepsilon^P$, т.е. $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$, т.е. $f_n \to f$ в L^p.

45 Плотность в L^p множества ступенчатых функций

45.1 Определение

Y — множество, $\mathcal{A} \subset Y$ — (всюду) плотное множество, если $\forall y \in Y : \forall U(y)$ верно $U(y) \bigcap \mathcal{A} \neq \varnothing$.

Пример: $\mathcal{A} = \mathbb{Q} \subset Y = \mathbb{R}$.

45.2 Лемма

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$

Тогда

$\{f \in L^p : f$ — ступ.$\}$ — плотно L^p.

45.2.1 Замечание

$p < +\infty$, $\varphi \in L^p$ — ступенчатая, тогда $\mu X(\varphi \neq 0) < +\infty$.

45.2.2 Доказательство

1. $p = +\infty$, $f \in L^\infty$, подменим f на множество меры $0 : |f| \leqslant \|f\|_\infty$ всюду.

   $\exists$ ступ. $\varphi_n \rightrightarrows f_+$, $\psi_m \rightrightarrows f_-$, т.е. $\|\varphi_n - f_+\|_\infty \to 0$, $\varphi_n \to f_+$ в C^∞, $\psi_m \to f_-$.

2. $p < +\infty$, $f \geqslant 0$, $\exists \varphi_n$ — ступенчатая, $\varphi_n \to f$ всюду.

   $\|\varphi_n - f\|_p^p = \int\limits_X |\varphi_n - f|^p d\mu \to 0$, $|\varphi - f|^p \leqslant |f|^p$.

45.3 Определение

X — *топологическое* пространство, если $\forall F_1,\ F_2$ — замкнутых подмножеств, $F_1 \bigcap F_2 = \varnothing$.

Если $\exists$ открытые $U(F_1), U(F_2)$, которые не пересекаются, то это свойство X называются *нормальностью.* (дополнительно требуется, чтобы $\forall y \in X\ \{y\}$ — замкнутое).

45.4 Лемма Урысона

Будет дописано позже.

X — норм, $F_0,\ F_1$ — замкнуты, $F_0 \bigcap F_1 = \varnothing$.

Тогда $\exists f : X \to \mathbb{R},\ 0 \leqslant f \leqslant 1$, непрерывное.

$f\Big|_{F_0} = 0,\ f\Big|_{F_1} = 1$.

45.5 Доказательство

Переформулируем нормальность:

$\forall F_1$ — замкнутого, $\subset G$ — открытого, $\exists U(F_1)$ — открытое, что выполняется $F_1 \subset U(F_1) \subset \overline{U(F_1)} \subset G$.

1. $F_0 \subset U(F_0) \subset \overline{U(F_1)} \subset F_1^C$
2. $\overline{G_0} \subset U(\overline{G_0}) \subset G_1$
3. $\overline{G_0} \subset U'(\overline{G}_0) \subset \overline{U'(\overline{G_0})} \subset G_{1/2}$

   $G_{1/2} \subset U(\overline{G}_{1/2}) \subset \overline{U} \subset G_1$, где $U(\overline{G}_{1/2}) = G_{3/4}$.

f — непрерывна, значит $f^{-1}(a,b)$ — открыто. Достаточно проверить, что:

1. $f^{-1}(-\infty, s)$ — открыто;
2. $f^{-1}(-\infty, s)$ — замкнуто.

$f^{-1}(a,b) = f^{-1}(-\infty, b) \setminus f^{-1}(-\infty, a)$.

1. $\forall s : f^{-1}(-\infty, s) = \bigcup\limits_{q \in s, q\text{-дв. рац.}} G_q$ — открыто.

   $\subset f(y) < S$, где $f(y) = \inf\{q : x \in G_q\}$.

   $\supset x \in$ ЛЧ, $f(x) = S_0 < q_1 < S$, $x \in G_{q_1}$.

Часть IX

Поверхностный интеграл II рода

46 Финитная функция

Финитная функция — функция, равная $\mathbf{0}$ вне некоторого шара, и непрерывная в $C_0(\mathbb{R}^m)$.

Очевидно, что $\forall p \in [1, +\infty) : C_0(\mathbb{R}^m) \subset L^p(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$.

47 Сторона поверхности

Поверхность — простое гладкое двумерное многообразие.

Сторона поверхности (гладкой) — непрерывное векторное поле единичных нормалей.

Если не существует непрерывного поля единичных нормалей, то такая поверхность — односторонняя.

48 Задание стороны поверхности с помощью касательных реперов

Репер — Пара ЛНЗ касательных векторов.

Способ задания стороны — задать поле касательных реперов.

49 Интеграл II рода

Ω — двусторонняя поверхность в $\mathbb{R}^3$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$.

n_0 — сторона поверхности.

Тогда интегралом II рода (поля F на Ω) называют:

$\int\limits_\Omega \langle F, n_0 \rangle ds.$

49.0.1 Замечания

1. поменяем сторону — поменяем знак;
2. Не зависит от параметризации;
3. Обозначения: $F = (P, Q, R)$

   $\int\limits_\Omega = \int\limits_\Omega Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$

   $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$, тогда

   $(x'_u, y'_u, z'_u) \times (x'_v, y'_v, z'_v) = \vec{n}$

   $dydz = (y'_u du + y'_v dv) \wedge (z'_u du + z'_v dv) = du \wedge dv (y'_u z'_v - y'_v z'_u)$

   $\wedge$ — косо-коммутативная операция

   $da \wedge db = -db \wedge da$

   $da \wedge da = -da \wedge da = 0.$

50 Плотность в L^p множества финитных непрерывных функций

$(\mathbb{R}^m, \mathcal{M}^m, \lambda_m)$, $E \subset \mathbb{R}^m$ — измеримая.

Тогда множество финитных функций (непрерывных) плотно в $L^p(E, \lambda_m)$

50.1 Доказательство

$g \in L^p(E, \mu)$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists f \in C_0(\mathbb{R}^m),\ \|g - f\big|_E\|_p < \varepsilon$. Пусть $g = 0$ вне E, то $\|g - f\big|E\|_{2^p(E,\mu)} \leqslant \|g - f\| < \varepsilon$ в $L^p(\mathbb{R}^m)$.

$g = g^+ - g^-$, g^+ — приблизим ступенчатыми, $\exists$ ступ. $h : \|g^+ - h\| < \varepsilon$.

$h = \sum c_k \chi_{a_k}$. Каждую χ_{A_k} приблизим финитной непрерывной функцией:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists$ замкнутая $F_k \subset A_k \subset G_k$(откр.), $\lambda_m(G_k \setminus F_k) < \left(\frac{\varepsilon}{|c_k| \cdot q}^p\right)$.

По лемме Урысона $\exists f_k : 0 \leqslant f_k \leqslant 1,\ f = 1$ на F_k, $f = 0$ на $\mathbb{R}^m \setminus G_k$.

$\|g^+ - \sum c_k f_k\|_p \leqslant \|g^+ - h\|_p + \|h - \sum c_k f_k\| \leqslant \varepsilon + \sum |c_k| \cdot \|\chi_{A_k} - f_k\| \leqslant \int |\chi_{A_k} - f_k|^p \leqslant \varepsilon + \sum \frac{\varepsilon}{q} = 2\varepsilon$

$\int\limits_{G_k \setminus F_k} 1^p < \left(\frac{\varepsilon}{|c_k| q}\right)^p$.

$1 \leqslant p < +\infty$.

50.2 Замечание

1. В $L^\infty(\mathbb{R}^m)$ этот факт не работает.

   $L^\infty([0,2])$ функцию $\chi_{[0,1]}$ не приблизить непрерывной.

2. В $L^p(E, \lambda_m)$ плотны:

   - Линейная комбинация характеристических функций ячеек;
   - Гладкие финитные функции;
   - Рациональные линейные комбинации рациональных ячеек;
   - Просто непрерывные функции.

51 Теорема о непрерывности сдвига

51.1 Необходимое определение

$L^p[0,T]$, $T \in \mathbb{R}$, можем понимать как пространство T-периодических функций ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$), $\int\limits_0^T f = \int\limits_a^{a+T} f$.

$C[0,T]$ — пространство непрерывных функций, $\|f\| = \max\limits_{x \in [0,T]} |f(x)|$.

$\widetilde{C}[0,T]$ — пространство непрерывных T-пер. функций.

$f \in \widetilde{C}[0,T] \Rightarrow f$ — равномерно непрерывные.

$\widetilde{C}[0,T]$ плотно в $L^P[0,T]$, $p < +\infty$.

51.2 Формулировка теоремы

$f_h(x) := f(x+h)$.

1. f — равномерно непрерывная на $\mathbb{R}^m \Rightarrow \|f_h - f\| \to 0$ при $n \Rightarrow 0$;
2. $1 \leqslant p < +\infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^m) \Rightarrow \|f_n - f\|_p \to 0$ при $n \to 0$;
3. $f \in \widetilde{C}[0,T] \Rightarrow \|f_n\ f\|_{+\infty} \to 0$;
4. $1 \leqslant p < +\infty$ $f \in L^p[0,T] \Rightarrow \|f_n - f\|_p \to 0$.

51.3 Доказательство

1 и 3 очевидные утверждения по определению равномерной непрерывности.

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall x, x' : |x - x'| < \delta\ |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

$\forall |h| < \delta : \|f_h - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

g — финитно непрерывная: $\|f - g\|_p < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

$\|f_h - f\|_p \leqslant \|f_h - g_h\|_p + \|g_h - g\|_p + \|g - f\|_p \leqslant \dfrac{2\varepsilon}{3} + \|g_h - g\|_p$

$g = 0$ вне $B(0,r)$, пусть $|h| < 1$, тогда $\|g_h - g\|_p = \|g_h - g\|_{L^p(B(0,r+1))} \leqslant \|g_h - g\|_{+\infty} \cdot \lambda B^{1/p}$

и 4) $\|g_h - g\|_p \leqslant \|g_h - g\|_\infty T^{1/p}$

52 Формула Грина

D — компактное, связное, односвязное, множество в $\mathbb{R}^2$, ограниченное кусочно-гладкой кривой.

На ∂D направление "против часовой стрелки".

52.1 Теорема

$D \subset \mathbb{R}^2$ — см выше.

P, Q — векторные поля, гладкие в $U(D)$. Тогда

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_{\partial D} Pdx + Qdy.$$

52.2 Доказательство

D — кривая 4-угольника относительно OX, а также относительно OY.

Рассмотрим поле $(P, \mathbf{0})$ (для $(\mathbf{0}, Q)$ аналогично).

ПЧ: $-\iint\limits_{D_b} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_{\partial D} Pdx + \mathbf{0}dy$

ЛЧ: $-\int\limits_a^b d \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = -\int\limits_a^b P(x,y)\Big|_{y=f_1}^{y=f_2} dx = \int\limits_a^b P(x, f_1(x))dx - \int\limits_a^b P(x, f_2(x))dx.$

ПЧ: $\int\limits_{\gamma_1} + \int\limits_{\gamma_2} + \int\limits_{\gamma_3} + \int\limits_{\gamma_4}$, $\int\limits_{\gamma_1} = \int\limits_a^b P(x, f(x)) \cdot 1 + 0 \cdot f'(x)dx$, $\int\limits_{\gamma_2} = \int\limits_{\gamma_4} = 0$, $\int\limits_{\gamma_3} = \int\limits_b^a P(x, f(x))dx.$

53 Формула Стокса

Ω — двусторонняя, гладкая поверхность, $\overline{n_0}$ — сторона.

$\partial\Omega$ — кусочно-гладкая кривая с согласованной ориентацией.

(P, Q, R) — гладкое векторное поле в $U(\Omega)$. Тогда

$$\int\limits_{\partial\Omega} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{\Omega} (R'_y - Q'_z)dydz + (P'_z - R'_x)dzdx + (Q'_x - P'_y)dxdy.$$

53.1 Доказательство

Считаем, что поверхность C^r-гладкая.

Достаточно проверить для $(P, 0, 0)$.

$$\int\limits_{\partial\Omega} Pdx = \iint P'_z dzdx - P'_y dxdy.$$

$\displaystyle\int\limits_{\partial\Omega} Pdx = \int P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)$ и по формуле Грина получаем

$$\int\limits_{L} Px'_u du + Px'_v dv = \iint\limits_{G} \frac{\partial}{\partial u}(Px'_v) - \frac{\partial}{\partial v}(Px'_u)dudv = \iint \left(P'_x x'_u + P'_y y'_u + P'_z z'_u\right)x'_v + Px''_v v - \left(P'_x x'_v + P'_y y'_v + P'_y z'_v\right)x'_u - Px''_u v dudv = \iint P'_x \mathbf{0} + P'_y(x'_v y'_u - x'_u y'_v) + P'_z(x'_v z'_u - x'_u z'_v) = \iint\limits_{G} P'_z dzdx - P'_y dxdy$$

Получили что хотели.

54 Формула Гаусса-Остроградского

$V = \{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega \text{ и } f(x, y) \leqslant z \leqslant F(x, y)\}$

$\Omega \underset{\text{замкн.}}{\subset} \mathbb{R}^2$, $\partial\Omega$ — кусочно-гладкая кривая, $f,\ F \in C^1(\Omega)$.

$R : U(V) \to \mathbb{R}$, $R \in C^1$. Тогда

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{\partial V^+} Rdxdy.$$

54.1 Доказательство

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_\Omega dxdy \int\limits_{f(x,y)}^{F(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint\limits_\Omega R(x, y, F(x, y)) - \iint\limits_\Omega R(x, yf(x, y))dxdy = \iint\limits_{\text{график F (верх)}} Rdxdy + \iint\limits_{\text{график f (низ)}} Rdxdy.$$

$$0 = \iint\limits_{\text{цил. } \partial V} Rdxdy.$$

54.2 Следствие

$$\iint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_{\partial V^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

55 Соленоидальность бездивергентного векторного поля

55.1 Дивергенция

$\mathrm{div}A$ — это функция $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$.

$\mathrm{div}A(a) = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{1}{\lambda_3 B} \iiint\limits_{B(a,r)} \mathrm{div}A dxdydz = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{1}{\lambda_3 B} \iint\limits_{S(a,r)} \langle (P,Q,R), n_0\rangle dS.$

55.2 Ротор

$(P,Q,R) \in C^1$ — ротор (вихрь).

$\mathrm{rot}A = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y)$.

$\mathrm{rot}V = 0$, $\gamma = 0$. Тогда $\int\limits_\gamma Pdx + Qdy + Rdz = 0$.

γ — путь от A до B. Тогда $\int\limits_\gamma$ — зависит от A и B, но не от самого пути.

Если $O \subset \mathbb{R}^3$ — не односвязная, $\mathrm{rot}V = 0$. $I(v,\gamma)$ не зависит от γ

$\int\limits_\Omega \mathrm{rot}V = \int\limits_{\gamma_2} V + \int\limits_{\gamma_1} V.$

$\mathrm{div}(P,Q,R) = 0$.

$\forall V : \iint\limits_{\partial V} \langle (P,Q,R), n_0\rangle dS = 0.$

55.3 Вспомогательная теорема

V — поле. Если $\mathrm{rot}V = 0$ и область односвязная, то поле гладкое.

$\mathrm{rot} = 0$ — дифференциальный критерий потенциальности $\Leftrightarrow$ поле локально-потенциальное $\Leftrightarrow$ V — потенциальное.

55.4 Соленоидальное поле

Поле V — *соленоидальное* в Ω если существует векторный потенциал, т.е. существует такое векторное поле B, что $\mathrm{rot}B = V$.

55.5 Теорема

Ω — параллелепипед, $(A_1, A_2, A_3) = A$ — соленоид в $\Omega \Leftrightarrow \mathrm{div} A = 0$ в Ω.

55.5.1 Доказательство

$\Rightarrow$ Тривиально $\mathrm{divrot} B = 0$ — упражнение.

$\Leftarrow$.

$\mathrm{div} A = 0$. Ищем векторный потенциал $B : \mathrm{rot} B = A$.

$B = (P, Q, R)$, $R'_y - Q'_z = A_1$, $P'_z - R'_x = A_2$, $Q'_z - P'_y = A_3$.

Забавный факт: можем подменить B на B_1, что $\mathrm{B} - \mathrm{B}_1 = 0$ и $B - b_1$ — потенциал f.

Пусть $R = 0$, тогда $-Q'_z = A_1$, $P'_z = A_2$ и $Q'_x - P'_y = A_3$. $P(x, y, z) = \int\limits_{z_0}^{z} A_2(x, y, z) dt$

$Q(x, y, z) = -\int\limits_{z_0}^{z} A_1 dz + \varphi(x, y)$.

$I(y) = \int\limits_a^b f(x, y) dx$, $I'_(y) = \int\limits_a^b f'_y(x, y) dx$.

$\varphi'_x - \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\partial A_1}{\partial x} - \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\partial A_2}{\partial y} = A_3$.

$\mathrm{div} = 0$ по условию, тогда $\varphi'_x + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\partial A_3}{\partial z} dz = A_3$.

$\varphi'_x(x, y) + A_3(x, y, z) - A_3(x, y, z_0) = A_3$.

$\varphi'_x(x, y) = A_3(x, y, z_0)$.

$\varphi = \int\limits_{x_0}^{x} A_3(x, y, z_0) dx + g(y)$.

Часть X

Гильбертовы пространства

56 Гильбертово пространство

Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ — линейное пространство со скалярным произведением (и соответствующей нормой), полное (как линейное нормированное пространство).

57 Теорема о свойствах сходимости в Гильбертовом пространстве

Пусть x, y лежат в Гильбертовом пространстве. Тогда верны следующие свойства:

1. $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$. Тогда $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x_0, y_0 \rangle$.
2. $\sum x_k$ — сходится. Тогда $\forall y \in \mathcal{H} : \langle \sum\limits_{k=1}^{+\infty} x_k, y \rangle = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \langle x_k, y \rangle$.
3. $\sum x_k$ — ортогональный ряд. Тогда $\sum x_k$ — сходится $\Longleftrightarrow \sum \|x_k\|^2 < +\infty$ и при этом $\| \sum x_k \|^2 = \sum \|x_k\|^2$.

57.1 Доказательство

1. $|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| = |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y_0 \rangle + \langle x_n, y_0 \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| \leqslant |\langle x_n, y_n - y_0 \rangle| + |\langle x_n - x_0, y_0 \rangle| \leqslant \|x_0\| \|y_n - y_0\| + \|x_n - x_0\| \|y_0\| \to 0$ при $n \to +\infty$.
2. $S_N = \sum\limits_{k=1}^{N} x_k$, тогда $\langle \sum\limits_{k=1}^{N} x_k, y \rangle = \sum\limits_{k=1}^{N} \langle x_n, y \rangle$. При устремлении к бесконечности получаем необходимое равенство.
3. $S_N = \sum\limits_{k=1}^{N} x_k$, $\|S_N\|^2 = \langle \sum\limits_{k=1}^{N} x_k, \sum\limits_{k=1}^{N} x_k \rangle = \sum \langle x_k, x_l \rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x_k, x_k \rangle = \sum\limits_{k=1}^{N} \|x_k\|^2 = \sum\limits_{N}$.

   Аналогично $\|S_N - S_M\|^2 = \left| \sum\limits_{N} - \sum\limits_{M} \right|$

   S_n и $\sum\limits_{N}$ — фундаментальны одновременно.

58 Ортогональная система (семейство) векторов

$\{e_k\}$ — *ортогональная система (семейство) векторов*, если $e_k \in \mathcal{H}$, что $\forall i, j : i \neq j : e_i \perp e_j$, $e_k \neq 0$.

59 Ортонормированная система

Если ортогональная система $\{e_k\}$, для которой $\forall k : \|e_k\| = 1$ — ортонормированная система векторов.

59.1 Замечание

Если $\{e_k\}$ — ортогональная система, то $\left\{\dfrac{e_k}{\|e_k\|}\right\}$ — ортонормированная система.

60 Теорема о коэффициентах разложения по ортогональной системе

$\{e_k\}$ — ортонормированная система в $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k e_k = x$. Тогда

1. ортонормированная система — ЛНЗ;
2. $c_k = \dfrac{\langle x, e_k\rangle}{\|e_k\|^2}$;
3. $c_k e_k$ — ортогональная проекция x на прямую $\{te_k | t \in \mathbb{R}\}$, т.е. $x = c_k e_k + z$, где $z \perp e_k$.

60.1 Доказательство

1. $\sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k e_k = 0$.

   Умножим e_j $1 \leqslant j \leqslant N$, $\langle \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k e_k, e_j\rangle = \sum \alpha_k \langle p_k, p_j\rangle \Rightarrow \alpha_j = 0$.
2. $\langle x, e_m\rangle = \langle \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k e_k, e_m\rangle = \sum c_k \langle e_k, e_m\rangle = c_m \langle e_m, e_m\rangle$.
3. $\langle x - c_k e_k, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle - c_k \|e_k\|^2 = 0$.

Часть XI

Ряды Фурье

61 Коэффициенты Фурье

$\{e_k\}$ — ортогональная система векторов в $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$.

$c_k(x) := \dfrac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$ — *коэффициенты Фурье* вектора x по системе $\{e_k\}$.

$\sum c_k(x) e_k$ — ряд Фурье в выражениях x. При перенормировке $\{e_k\}$ ряд Фурье не меняется.

62 Теорема о свойствах частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя

$\{e_k\}$ — ортогональная система $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$. $S_n \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(x)e_k$, $\mathcal{L} \coloneqq \mathrm{Lin}\ (e_1, \ldots, e_n)$.

Тогда верны следующие свойства:

1. S_n — проекция x на S. $x = S_n + z$, где $z \perp \mathcal{L}$.
2. S_n — элемент наилучшего приближения для x в $\mathcal{L}$.

   $\|x - S_n\| = \min\limits_{y \in \mathcal{L}} \|x - y\|$.
3. $\|S_n\| \leqslant \|x\|$.

62.1 Доказательство

$z \coloneqq x - S_n$, $\langle x, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle - \langle S_n, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle - \langle \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(x)e_i, a_k\rangle = \langle x_i, e_k\rangle - \sum c_i(x)\langle e_i, e_k\rangle = 0$

$x = S_n + z$, $z \perp \mathcal{L}$.

$y \in \mathcal{L}$, $\|x - y\|^2 = \|S_n - y + z\|^2 = \|S_n - y\|^2 + \|z\|^2 \geqslant \|z\|^2 = \|S_n - x\|^2$

$\|x\|^2 = \|S_n\|^2 + \|z\|^2 \geqslant \|S_n\|^2$.

62.2 Неравенство Бесселя

В условиях теоремы выполняется следующее равенство:

$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |C_k(x)|^2 \|e_k\|^2 \leqslant \|x\|^2$.

из 3 свойства следует $\|x\|^2 \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2$ для любого n.

63 Теорема Рисса – Фишера о сумме ряда Фурье. Равенство Парсеваля

$\{e_k\}$ — ортогональная система в $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H}$. Тогда выполняеются следующие утверждения:

1. Ряд Фурье x сходится в $\mathcal{H}$.
2. $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k + z$, где $\forall k : z \perp e_k$.
3. $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k \iff \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$ (равенство Парсеваля).

63.1 Доказательство

$\sum x_k$ — ортогональный — сх $\iff \sum \|x_k\|$ — сходится.

Р.Ф. — сходится $\iff \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2$ — сходится — это всё верно по неравенству Бесселя.

$z : x - \sum c_k e_k$, $\langle z, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle - \sum = \langle x, e_n \rangle - c_n \langle e_n, e_n \rangle$.

$\Rightarrow$ — очевидно из предыдущей теоремы пункта 3.

$\Leftarrow \|x\|^2 = \| \sum c_k(x) p_k \|^2 + \|z\|^2 = \sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 + \|z\|^2 \Rightarrow z = 0$

64 Базис, полная, замкнутая ОС

1. ортогональная система векторов — *базис*, если $\forall x \in \mathcal{H} : x = \sum c_k(x) e_k$.

2. ортогональная система векторов *полная*, если не $\exists z : z \perp \{e_k\}$.

3. ортогональная система векторов *замкнутая* если $\forall x \in \mathcal{H}$ выполняется уравнение замкнутости, т.е. $\sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$.

64.1 Теорема о характеристике базиса

$\{e_k\}$ — ортогональная система векторов, тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\{e_k\}$ — базис.
2. $\forall x, y \in \mathcal{H}$ выполняется обобщающее уравнение замкнутости:
   $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k(x)\overline{c_k(y)}\|e_k\|^2$.
3. $\{e_k\}$ — замкнутая ортогональная система.
4. $\{e_k\}$ — полная ортогональная система.
5. $\mathrm{Lin}\ (e_1, e_2, e_3, \ldots)$ — плотное в пространстве $\mathcal{H}$.

64.1.1 Доказательство

- $1 \Rightarrow 2)$ $x = \sum c_k(x)P_k$, $\dfrac{\langle y, e_k\rangle}{\|e_k\|^2} = c_k(y)$. $\langle x, y\rangle = \sum c_k(x)\langle e_k, y\rangle = \sum c_k(x)\overline{c_k(y)}\|e_k\|^2$
- $2 \Rightarrow 3)$ $y \coloneqq x$.
- $3 \Rightarrow 4)$ $z \perp e_k : \forall k,\ c_k(z) = 0$.

  Уравнение замкнутой системы: $\|z\|^2 = \sum |c_k(z)|^2\ \|e_k\|^2 = 0$.
- $4 \Rightarrow 1)$ По теореме Рисса-Фишера $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k(x)e_k + z$, $z \perp e_k \forall k$, то по условию $z = 0$, значит это и есть базис.
- $4 \Rightarrow 5)$ $\mathcal{L} = Cl(\mathrm{Lin}\ (e_1, e_2, \ldots))? = \mathcal{H}$.

  Если $\neq$, то $\exists x \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{L}$, тогда $x = \sum c_k(x)e_k + z$, $z \perp e_k \forall k \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x \in \mathcal{L}$.
- $5 \Rightarrow 4)$ $y \perp e_k \forall k$, $y \perp \mathcal{L} = \mathcal{H}$, $y \perp y$, что значит $\langle y, y\rangle = 0$.