Содержание

Часть I

Интеграл по мере

1 Интеграл ступенчатой функции

$f = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \chi_{E_k}$, $f \geqslant 0$, где $E_k \in \mathcal{A}$ — допустимое разбиение, тогда интеграл ступенчатой функции f на множестве X есть

$$\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X f(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mu E_k$$

Дополнительно будем считать, что $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

1.1 Свойства

- Интеграл не зависит от допустимого разбиения:

  $f = \sum \alpha_j \chi_{F_j} = \sum\limits_{k,\, j} \lambda_k \chi_{E_k \cap F_j}$, тогда $\int F = \sum \lambda_k \mu E_k = \sum\limits_{k} \lambda_k \sum\limits_{j} \mu(E_k \cap F_j) = \sum \alpha_j \mu F_i = \int F$;

- $f \leqslant g$, то $\int\limits_X f d\mu \leqslant \int\limits_X g d\mu$.

2 Интеграл неотрицательной измеримой функции

$f \geqslant 0$, измерима, тогда интеграл неотрицательной измеримой функции f есть

$$\int\limits_X f d\mu = \sup_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leqslant g \leqslant f}} \left(\int\limits_X g d\mu \right).$$

2.1 Свойства

- Для ступенчатой функции f (при $f \geqslant 0$) это определение даёт тот же интеграл, что и для ступенчатой функции;
- $0 \leqslant \int\limits_X f \leqslant +\infty$;
- $0 \leqslant g \leqslant f$, g — ступенчатая, f — измеримая, тогда $\int\limits_X g \leqslant \int\limits_X f$.

3 Суммируемая функция

f — измеримая, f_+ и f_- — срезки, тогда если $\int\limits_X f_+$ или $\int\limits_X f_-$ — конечен, тогда интеграл суммируемой функции есть

$$\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X f_+ - \int\limits_X f_-.$$

Если $\int\limits_X f \neq \pm\infty$, то говорят, что f — *суммируемая*, а также $\int |f|$ — конечен ($|f| = f_+ + f_-$).

3.1 Свойство

Если $f \geqslant 0$ — измерима, то это определение даёт тот же интеграл, что и интеграл измеримой неотрицательной функции.

4 Интеграл суммируемой функции

$E \subset X$ — измеримое множество, f — измеримо на X, тогда интеграл f по множеству E есть

$\int\limits_E f d\mu := \int\limits_X f \chi_E d\mu.$

f — суммируемая на E если $\int\limits_E f + -$ и $\int\limits_E f_-$ — конечны одновременно.

4.1 Свойства

- $f = \sum \lambda_k \chi_{E_k}$, то $\int\limits_E f = \sum \lambda_k \mu \left(E_k \cap E\right);$
- $f \geqslant 0$ — измерима, тогда $\int\limits_E f d\mu = \sup\limits_{\substack{g \text{ - ступ.} \\ 0 \leqslant g \leqslant f}} \left(\int\limits_X g d\mu \right).$

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ — произвольное пространство с мерой.

$\mathcal{L}^0(X)$ — множество измеримых почти везде конечных функций.

4.2 Свойства интегралов

1. Монотонность: $f \leqslant g \Rightarrow \int\limits_E f \leqslant \int\limits_E g$.

   Доказательство

   - $0 \leqslant f \leqslant g$, $\sum\limits_{\widetilde{f} stup, 0 \leqslant \widetilde{f} \leqslant f} \int \widetilde{f} \leqslant \sum\limits_{\widetilde{g} stup, 0 \leqslant \widetilde{g} \leqslant g} \int \widetilde{g}$;
   - f и g — произвольные, то работает со срезками и $f_+ \leqslant g_+$, а $f_- \geqslant g_-$, тогда очевидно и для интегралов.

2. $\int\limits_E 1 d\mu = \mu E$, $\int\limits_E 0 d\mu = 0$;

3. $\mu E = 0$, f — измерима, тогда $\int\limits_E f = 0$.

   Доказательство

   - f — ступенчатая, то очевидно;
   - $f \geqslant 0$ — измеримая, то очевидно;
   - f — любая, то аналогично.

4. $\int -f = -\int f$, $\forall c > 0 : \int cf = c \int f$.

   Доказательство

   - $(-f)_+ = f_-$ и $(-f)_= f_+$.
   - $f \geqslant 0$ — очевидно, $\sum\limits_{g stup, 0 \leqslant g \leqslant cf} \left(\int G \right) = c \sup\limits_{\widetilde{g} stup, 0 \leqslant \widetilde{g} \leqslant f} \left(\int g \right)$.

5. Пусть существует $\int\limits_E f d\mu$, тогда $\left| \int\limits_E f \right| \leqslant \int\limits_E |f|$.

   Доказательство

   $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$

   $-\int |f| \leqslant \int f \leqslant \int |f|$

6. f — измерима на E, $\mu E < +\infty$, $\forall x \in E$ $a \leqslant f(x) \leqslant b$. Тогда

   $$a\mu E \leqslant \int\limits_E f \leqslant b\mu E.$$

4.3 Лемма

$A = \bigsqcup A_i$, A, A_i — измеримы, $g \leqslant 0$ — ступенчатые. Тогда

$$\int\limits_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int\limits_{A_i} g d\mu.$$

4.3.1 Доказательство

$g = \sum \lambda_k \chi_{E_k}$.

$$\int\limits_A g d\mu = \sum \lambda_k \mu(A \cap E_k) = \sum_k \lambda_k \sum_i \mu(A_i \cap E_k) = \sum_i \left(\sum_k \lambda_k \mu(A_i \cap E_k) \right) = \sum_i \int\limits_{A_i} g.$$

4.4 Теорема

$f : C \to \overline{R}$, $f \geqslant 0$ — измеримая на A, A — измерима, $A = \bigsqcup A_i$, все A_i — измеримы. Тогда

$$\int\limits_A f d\mu = \sum_i \int\limits_{A_i} f d\mu$$

4.4.1 Доказательство

- $\leqslant$

  g — ступенчатая, $0 \leqslant g \leqslant f$, тогда $\int_A g = \sum \int\limits_{A_i} g \leqslant \sum \int\limits_{A_i} f$. Осталось перейти к sup.

- $\geqslant$

  $A = A_1 \sqcup A_2$, $\sum \lambda_k \chi_{E_k} = g_1 \leqslant f\chi_{A_1}$, $g_2 \leqslant f \cdot \chi_{A_2} = \sum \lambda_k \chi_{E_k}$, $g_1 + g_2 \leqslant f \cdot \chi_A$

  $$\int\limits_{A_1} g_1 + \int\limits_{A_2} g_2 = \int\limits_A g_1 + g_2.$$

  переходим к sup g_1 и g_2

  $$\int\limits_{A_1} f + \int\limits_{A_2} f \leqslant \int\limits_A f$$

по индукции разобьём для $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_n$, $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$ и $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_n \sqcup B_n$, где $B_n = \bigsqcup\limits_{i \geqslant n+1} A_i$, тогда

$$\int\limits_A \geqslant \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{A_i} f + \int\limits_B f \geqslant \sum_{i=1}^{n} f \Rightarrow \int\limits_A f \geqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \int\limits_{A_i} f$$

4.5 Следствие

$f \geqslant 0$ — измеримая, $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $\nu E = \int\limits_E f d\mu$. Тогда

ν — мера.

4.6 Следствие 2

$A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$, f — суммируема на A, тогда

$\int\limits_A f = \sum\limits_i \int\limits_{A_i} f.$

Часть II

Предельный переход под знаком интеграла

4.7 Теорема

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, f_n — измерима, $\forall n : 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ при почти всех x.

$f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$ при почти всех x. Тогда

$\lim \int\limits_X f_n(x) d\mu = \int\limits_X f d\mu.$

4.7.1 Доказательство

f — измерима как предел, измерима.

- $\leqslant$

  $f_n(x) \leqslant f(x)$ почти везде, тогда $\forall n: \int\limits_X f_n(x) d\mu \leqslant \int\limits_X f d\mu$, откуда следует, что и предел не превосходит.

- $\geqslant$

  Достаточно доказать, что для любой ступенчатой функции $g: 0 \leqslant g \leqslant f$ верно $\lim \int\limits_X f_n \geqslant \int\limits_X g$.

  Достаточно доказать, что $\forall c \in (0, 1)$ верно $\lim \int\limits_X f_n \geqslant c \int\limits_X g$.

  $E_n := X\,(f_n \geqslant cg)$, $E_n \subset E_{n+1} \subset \ldots$.

  $\bigcup E_n = X$, т.е. $c < 1$, то $cg(x) < f(x)$, $f_n(x) \to f(x) \Rightarrow f_n$ попадёт в с зазор $cg(x) < f(x)$.

  $\int\limits_X f_n \geqslant \int\limits_{E_n} f_n \geqslant \int\limits_{E_n} cg = c \int\limits_{E_n} g$,

  $\lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_X f_n \geqslant \lim\limits_{n \to +\infty} c \int\limits_{E_n} g = c \int\limits_X g$, потому что это непрерывность снизу меры $A \mapsto \int\limits_A g$.

4.8 Теорема

Пусть f, g — измеримы на E, $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$. Тогда $\int\limits_E f + g = \int\limits_E f + \int\limits_E g$.

4.8.1 Доказательство

Если f, g — ступенчатые, то очевидно.

Разберём общий случай. Существуют ступенчатые функции $f_n: 0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1} \leqslant \ldots \leqslant f$, и $g_n: 0 \leqslant g_n \leqslant g_{n+1} \leqslant \ldots \leqslant g$, и $f_n(x) \to f(x)$ и $g_n(x) \to g(x)$. Тогда

$\int\limits_E f_n + g_n = \int\limits_E f_n + \int\limits_E g_n$, сделаем предельный переход, значит при $n \to +\infty$

$\int\limits_E f + g = \int\limits_f + \int\limits_E g$

4.8.2 Следствие

Пусть f, g — суммируемые на множестве E, тогда $f + g$ тоже суммируема и $\int\limits_E f + g = \int\limits_E f + \int\limits_E g$.

Доказательство

$(f+g)_\pm \leqslant |f+g| \leqslant |f|+|g|.$

$h := f+g,$

$h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-,$

$h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+,$

$\int h_+ + \int f_- + \int g_- = \int h_- + \int f_+ \int g_+,$

$\int h_+ - \int h_- = \int f_+ - \int f_- + \int g_+ - \int g_-$, тогда

$\int h = \int f + \int g.$

4.9 Определение

$\mathcal{L}(X)$ — множество суммируемых функций. Это линейное пространство.

Интеграл: $\mathcal{L}(X) \to \mathbb{R}$ — это линейная функция, но красивее говорить линейный функционал.

$f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{L}(X)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, тогда $\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n \in \mathcal{L}(x)$.

$\int\limits_X f = I(f)$, $\int\limits_X \alpha_1 f_1 + \ldots \alpha_n f_n = \alpha_1 \int\limits_X f_1 + \ldots + \alpha_n \int\limits_X f_n$

$I(\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n) = I(\alpha_1 f_1) + \ldots + I(\alpha_n f_n).$

4.10 Теорема об интегрировании положительных рядов

$u_n \geqslant 0$ почти везде, измеримы на E. Тогда

$\int\limits_E \left(\sum_{i=1}^{+\infty} u_n \right) d\mu = \sum_{i \int =1}^{+\infty} \int\limits_E u_n d\mu.$

4.10.1 Доказательство

Очевидно по теореме Леви.

$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ и $p \leqslant S_N \leqslant S_{N+1} \leqslant \ldots$ и $S_N \to S(X)$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_E S_N = \int\limits_E S$

$$\lim\sum_{k=1}^{n}\int\limits_E u_k(x) = \int\limits_E S(x)d\mu.$$

4.10.2 Следствие

u_n — измеримая функция, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int\limits_E |u_n| < +\infty$. Тогда

$\sum u_n$ — абсолютно сходится почти везде на E.

Доказательство

$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n(x)|$

$\int\limits_E S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int |u_n(x)| < +\infty$, значит $S(x)$ конечна почти всюду.

$S(x) = +\infty$ при $x \in B$, $\mu B > 0$, $S(x) \geqslant n \cdot \chi_B \int\limits_E S(x) \geqslant n \cdot \mu B$.