Algoritmo de la transformada rápida de Fourier

Lección 07.2

Dr. Pablo Alvarado Moya

CE5201 Procesamiento y Análisis de Imágenes Digitales
Área de Ingeniería en Computadores
Tecnológico de Costa Rica

I Semestre, 2017

Contenido

Historia

- FFT: Algoritmo para cálculo eficiente de la DFT
- Propuesto por Gauss (1805) y redescubierto varias veces
- Último redescubrimiento en 1965 por
  - James Cooley (IBM, Watson Research Center)
  - John Tukey (Priceton U., AT&T Bell Labs)
- Gilbert Strang (MIT): *"el algoritmo numérico más importante de nuestras vidas"*
- IEEE: uno de los *top 10* algoritmos del Siglo XX

Transformada Discreta de Fourier

- La **transformada discreta de Fourier** DFT:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

- Para cada uno de los N posibles k:
  - N productos complejos, $N-1$ sumas complejas
  - $4N$ productos reales, $4N-2$ sumas reales

Transformada Discreta de Fourier

- La **transformada discreta de Fourier** DFT:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

- Para cada uno de los N posibles k:
  - N productos complejos, $N-1$ sumas complejas
  - $4N$ productos reales, $4N-2$ sumas reales
- Orden de implementación directa: $\mathcal{O}(N^2)$
  - N^2 productos complejos, N^2-N sumas complejas
  - $4N^2$ productos reales, $4N^2-2N$ sumas reales

Transformada Discreta de Fourier

- La **transformada discreta de Fourier** DFT:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

- Para cada uno de los N posibles k:
  - N productos complejos, $N-1$ sumas complejas
  - $4N$ productos reales, $4N-2$ sumas reales
- Orden de implementación directa: $\mathcal{O}(N^2)$
  - N^2 productos complejos, $N^2 - N$ sumas complejas
  - $4N^2$ productos reales, $4N^2 - 2N$ sumas reales
- La **transformada discreta de Fourier inversa** (IDFT):

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

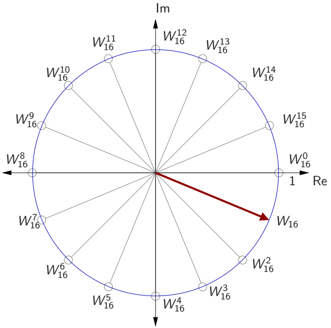
Raíz de la unidad

- Defínase: $W_N = e^{-j2\pi/N}$
- La DFT se reescribe:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

- Simetría conjugada: $W_N^{k(N-n)} = W_N^{-kn} = \left(W_N^{kn}\right)^*$
- Periodicidad en n, k: $W_N^{kn} = W_N^{k(N+n)} = W_N^{(k+N)n}$
- Diezmado: $W_N^{2k} = W_{N/2}^{k}$

Por ejemplo, con $N = 16$:



Notación de matriz (1)

Para la k-ésima componente espectral $X(k)$ se cumple

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

o en notación vectorial:

$$X(k) = \begin{bmatrix} 1 & W_N^k & W_N^{2k} & W_N^{3k} & \dots & W_N^{(N-1)k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

Notación de matriz (2)

- Para la DFT completa se usa notación matricial:

$$\underline{\mathbf{X}} = \mathbf{W}_N \underline{\mathbf{x}}$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ 1 & W_N^3 & W_N^6 & \dots & W_N^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

- Se cumple para la DFT inversa:

$$\underline{\mathbf{x}} = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N{}^* \underline{\mathbf{X}}$$

DFT de dos puntos

- El caso $N = 2$: $W_2 = e^{-j\pi} = -1$
- La matriz de transformación en este caso:

$$\mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- La transformación es entonces:

$$\begin{aligned} X(0) &= x(0) + x(1) \\ X(1) &= x(0) - x(1) \end{aligned}$$

Diezmado en el tiempo

- Una posible estrategia: Dividir DFT en dos (asumiendo N par)

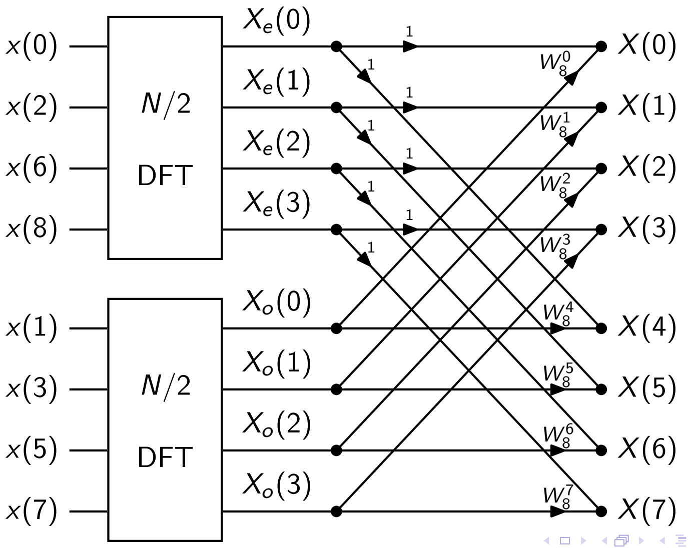
$$
\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \\
&= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_N^{k2r} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) W_N^{k(2r+1)} \\
&= \underbrace{\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_{N/2}^{kr}}_{X_e(k)} + W_N^k \underbrace{\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) W_{N/2}^{kr}}_{X_o(k)}
\end{aligned}
$$

$$
X(k) = X_e(k) + W_N^k X_o(k)
$$

- $X_e(k)$ es la DFT de $N/2$ para las muestras pares
- $X_o(k)$ es la DFT de $N/2$ para las muestras impares

Diagrama de diezmado en el tiempo

Caso $N = 8$

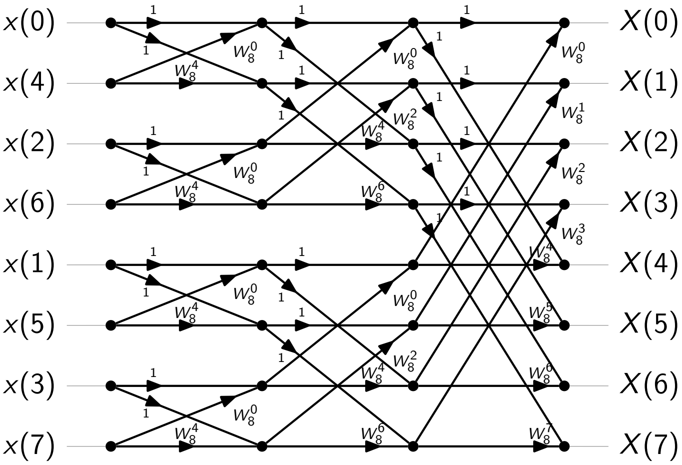


Complejidad

- DFT de N muestras: N^2 productos complejos
- Dos DFT de $N/2$ muestras: $2 \times (N/2)^2 = N^2/2$
- Faltan los N productos adicionales por W_N^k
- ¡$N^2/2 + N$ productos tienden a ¡$N^2/2$ para $N \gg 1$!
- Ganacia aproximada en un factor 2
- Podemos dividir DFT de $N/2$ en dos DFT de $N/4$ y así recursivamente hasta llegar a DFT de $N = 2$.
- Recursión lleva a utilizar $N + N \log_2 N$ productos
- Orden es entonces $\mathcal{O}(N \log_2 N)$

Diagrama de flujo de datos: FFT DiT

Caso $N = 8$



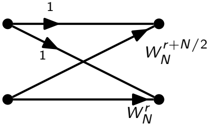
Reversión de bits

- Partición en $x(2r)$ pone bit menos significativo de índice en 0 y para $x(2r+1)$ el bit menos significativo en 1
- Recursión revierte los bits de los índices de entrada:

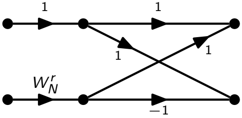
$$
\begin{array}{lll}
0 & 000_b \rightarrow 000_b & 0 \\
1 & 001_b \rightarrow 100_b & 4 \\
2 & 010_b \rightarrow 010_b & 2 \\
3 & 011_b \rightarrow 110_b & 6 \\
4 & 100_b \rightarrow 001_b & 1 \\
5 & 101_b \rightarrow 101_b & 5 \\
6 & 110_b \rightarrow 011_b & 3 \\
7 & 111_b \rightarrow 111_b & 7
\end{array}
$$

Operador de mariposa

- Operación básica de “mariposa” (butterfly):



- Por etapa, se requieren $N/2$ mariposas
- Hay $\log_2 N$ etapas
- Se cumple $W_N^{N/2} = -1$ y por tanto $W_N^{r+N/2} = W_N^r W_N^{N/2} = -W_N^r$
- Se reduce así en un factor 2 los productos complejos:



FFT Diezmado en la frecuencia (1)

- Resultado es el proceso inverso: inversión de bits en el espectro
- Idéntica complejidad que DiT
- Muestras pares de espectro son:

$$
\begin{aligned}
X(2r) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{n(2r)} \\
&= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{2nr} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n) W_N^{2nr} \\
&= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{2nr} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n+N/2) W_N^{2(n+N/2)r}
\end{aligned}
$$

FFT Diezmado en la frecuencia (2)

- Con $W_N^{2(n+N/2)r} = W_N^{2nr} W_N^{Nr} = W_N^{2nr} = W_{N/2}^{nr}$ se tiene

$$X(2r) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) + x(n+N/2)\right] W_{N/2}^{nr}$$

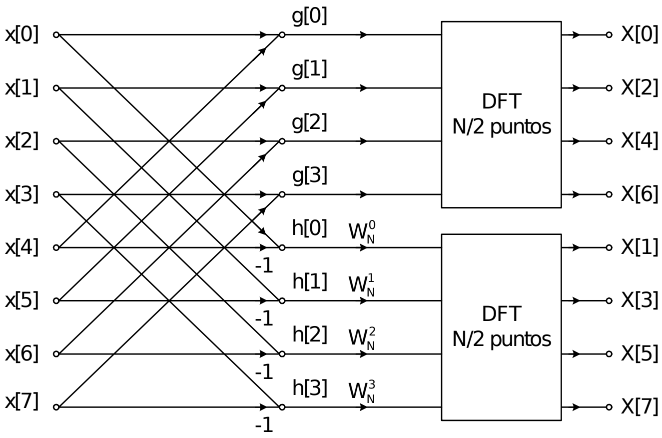
  que es una DFT de $N/2$ muestras, de la suma de la primera y última mitad de la secuencia de entrada.

- De forma similar se puede demostrar que

$$X(2r+1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) - x(n+N/2)\right] W_N^{n} W_{N/2}^{nr}$$

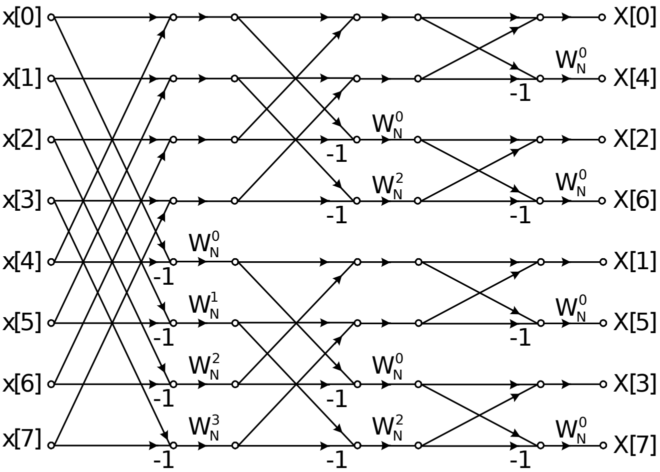
  que es la DFT de $N/2$ muestras de la resta de la primera y segunda mitad de la secuencia de entrada, multiplicada por W_N^n.

Diezmado en la frecuencia
Primera etapa



Diezmado en la frecuencia

Flujo de datos



Otros algoritmos

- Existen diversidad de algoritmos para la FFT
- Esquemas anteriores asumen que $N = 2^p$ (Radix-2)
- Otros esquemas reducen multiplicaciones si $N = 4^p$ o $N = 8^p$ (Radix-4, Radix-8)
- Algoritmo de Factores Primos (Good-Thomas) y el de Radix Mixto asumen $N = N_1 N_2$, lo que permite optimizar casos donde $N \neq 2^p$.

Resumen

1. Definiciones
   - DFT directa e inversa
   - Cambio a notación con W_N
2. Transformada rápida de Fourier
   - Diezmado en el tiempo
   - Diezmado en la frecuencia

Este documento ha sido elaborado con software libre incluyendo LaTeX, Beamer, GNUPlot, GNU/Octave, XFig, Inkscape, LTI-Lib-2, GNU-Make y Subversion en GNU/Linux