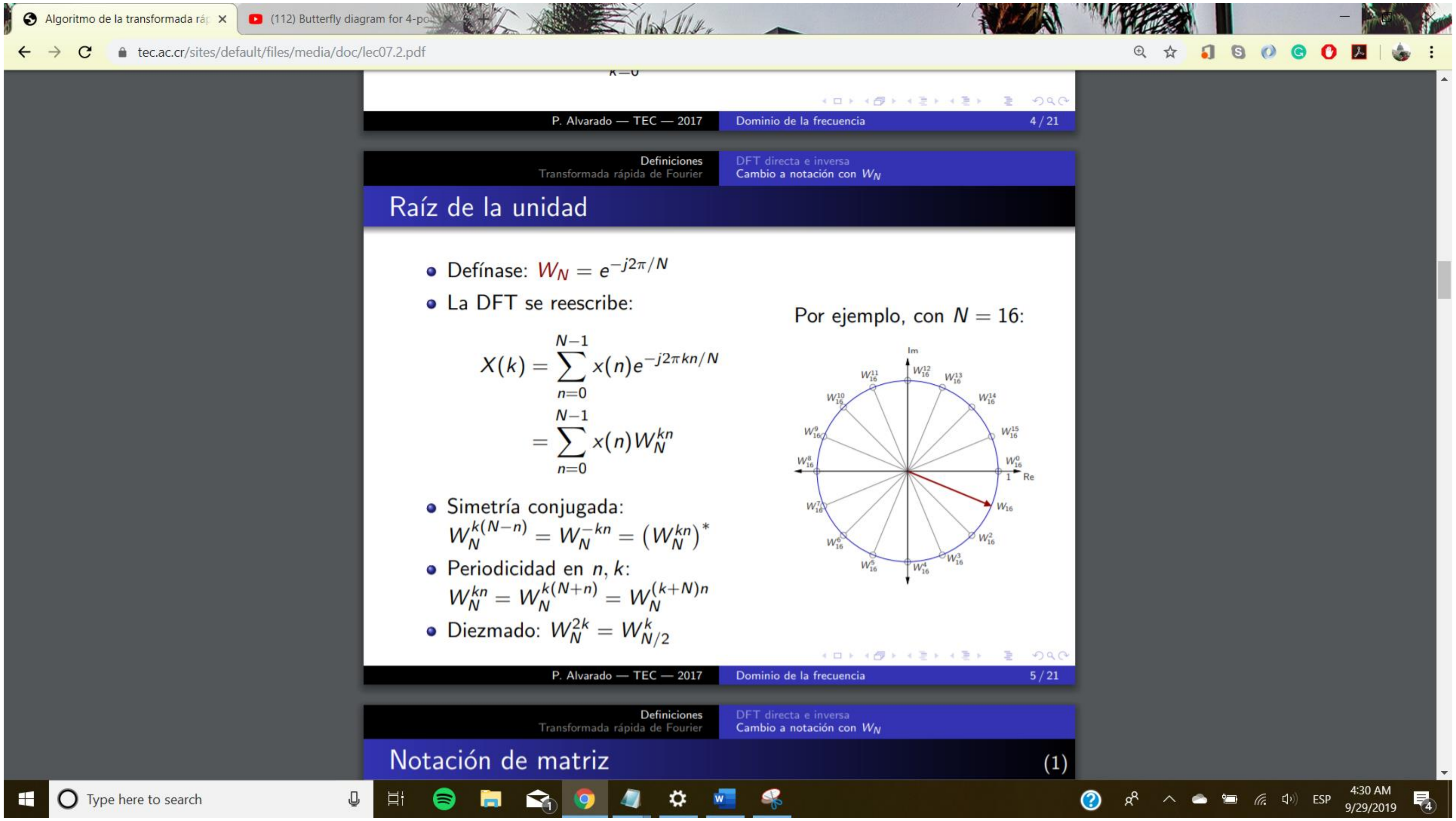
Notas complementarias: https://www.tec.ac.cr/sites/default/files/media/doc/lec07.2.pdf



Notación de matriz (1)

Para la k-ésima componente espectral $X(k)$ se cumple

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

o en notación vectorial:

$$X(k) = \begin{bmatrix} 1 & W_N^k & W_N^{2k} & W_N^{3k} & \dots & W_N^{(N-1)k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

Notación de matriz (2)

Notación de matriz (2)

- Para la DFT completa se usa notación matricial:

$$\underline{\mathbf{X}} = \mathbf{W}_N \underline{\mathbf{x}}$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ 1 & W_N^3 & W_N^6 & \dots & W_N^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

- Se cumple para la DFT inversa:

$$\underline{\mathbf{x}} = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N{}^* \underline{\mathbf{X}}$$

DFT de dos puntos

Diezmado en el tiempo

- Una posible estrategia: Dividir DFT en dos (asumiendo N par)

$$
\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \\
&= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_N^{k2r} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) W_N^{k(2r+1)} \\
&= \underbrace{\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_{N/2}^{kr}}_{X_e(k)} + W_N^k \underbrace{\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) W_{N/2}^{kr}}_{X_o(k)}
\end{aligned}
$$

$$X(k) = X_e(k) + W_N^k X_o(k)$$

- $X_e(k)$ es la DFT de $N/2$ para las muestras pares
- $X_o(k)$ es la DFT de $N/2$ para las muestras impares

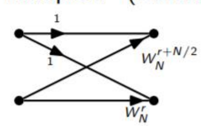
Diagrama de diezmado en el tiempo

Caso $N = 8$

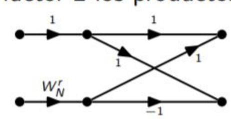
$X(0)$

Operador de mariposa

- Operación básica de "mariposa" (butterfly):



- Por etapa, se requieren $N/2$ mariposas
- Hay $\log_2 N$ etapas
- Se cumple $W_N^{N/2} = -1$ y por tanto $W_N^{r+N/2} = W_N^r W_N^{N/2} = -W_N^r$
- Se reduce así en un factor 2 los productos complejos:



FFT Diezmado en la frecuencia (1)