

Notas complementarias: <https://www.tec.ac.cr/sites/default/files/media/doc/lec07.2.pdf>

Algoritmo de la transformada rápida de Fourier (112) Butterfly diagram for 4-point DFT

tec.ac.cr/sites/default/files/media/doc/lec07.2.pdf

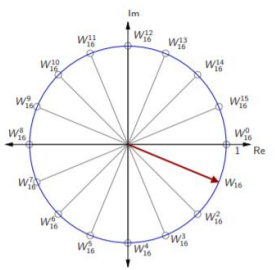
P. Alvarado — TEC — 2017 Dominio de la frecuencia 4 / 21

Definiciones Transformada rápida de Fourier DFT directa e inversa Cambio a notación con W_N

Raíz de la unidad

- Defínase: $W_N = e^{-j2\pi/N}$
- La DFT se reescribe:
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}$$

Por ejemplo, con $N = 16$:



- Simetría conjugada: $W_N^{k(N-n)} = W_N^{-kn} = (W_N^{kn})^*$
- Periodicidad en n, k : $W_N^{kn} = W_N^{k(N+n)} = W_N^{(k+N)n}$
- Diezmado: $W_N^{2k} = W_{N/2}^k$

P. Alvarado — TEC — 2017 Dominio de la frecuencia 5 / 21

Definiciones Transformada rápida de Fourier DFT directa e inversa Cambio a notación con W_N

Notación de matriz (1)

Windows Taskbar: Type here to search, 4:30 AM 9/29/2019

Algoritmo de la transformada rápida de Fourier - Lección 07.2 8 / 23

Definiciones Transformada rápida de Fourier DFT directa e inversa Cambio a notación con W_N

Notación de matriz (1)

Para la k -ésima componente espectral $X(k)$ se cumple

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

o en notación vectorial:

$$X(k) = \begin{bmatrix} 1 & W_N^k & W_N^{2k} & W_N^{3k} & \dots & W_N^{(N-1)k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

P. Alvarado — TEC — 2017 Dominio de la frecuencia 6 / 21

Definiciones Transformada rápida de Fourier DFT directa e inversa Cambio a notación con W_N

Notación de matriz (2)

Windows taskbar: Type here to search, 4:30 AM 9/29/2019

Algoritmo de la transformada rápida de Fourier - Lección 07.2

9 / 23

Definiciones
Transformada rápida de Fourier

DFT directa e inversa
Cambio a notación con W_N

Notación de matriz (2)

- Para la DFT completa se usa notación matricial:

$$\underline{X} = W_N \underline{x}$$
$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ 1 & W_N^3 & W_N^6 & \dots & W_N^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

- Se cumple para la DFT inversa:

$$\underline{x} = \frac{1}{N} W_N^* \underline{X}$$

P. Alvarado — TEC — 2017

Dominio de la frecuencia

7 / 21

Definiciones
Transformada rápida de Fourier

DFT directa e inversa
Cambio a notación con W_N

DFT de dos puntos

Type here to search

4:30 AM
9/29/2019

Diezmado en el tiempo

- Una posible estrategia: Dividir DFT en dos (asumiendo N par)

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \\
 &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_N^{k2r} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) W_N^{k(2r+1)} \\
 &= \underbrace{\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_{N/2}^{kr}}_{X_e(k)} + W_N^k \underbrace{\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) W_{N/2}^{kr}}_{X_o(k)}
 \end{aligned}$$

$$X(k) = X_e(k) + W_N^k X_o(k)$$

- $X_e(k)$ es la DFT de $N/2$ para las muestras pares
- $X_o(k)$ es la DFT de $N/2$ para las muestras impares

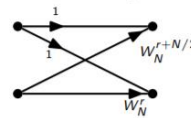
Diagrama de diezmado en el tiempo

Caso $N = 8$

$x(n)$

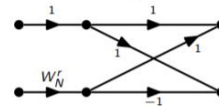
Operador de mariposa

- Operación básica de "mariposa" (butterfly):



- Por etapa, se requieren $N/2$ mariposas
- Hay $\log_2 N$ etapas
- Se cumple $W_N^{N/2} = -1$ y por tanto

$$W_N^{r+N/2} = W_N^r W_N^{N/2} = -W_N^r$$
- Se reduce así en un factor 2 los productos complejos:



FFT Diezmado en la frecuencia

(1)