Université d'Evry Val d'Essonne,
2020-2021

Master 1 de Mathématiques, Optimisation

17 novembre 2020

Points de Torricelli généralisés

A rendre pour Décembre 2020.

Le propos de ce projet est de mettre en oeuvre différents algorithmes d'optimisation pour résoudre un problème *relativement* concret. Précisément si l'on se donne N points du plan $(x_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ non tous alignés comment trouver le point x^* minimisant, pour une distance donnée, la somme de la distance à chacun des points considérés. Ce problème avait par exemple été considéré dans le triangle par Torricelli et Fermat. Nous considérerons dans un premier temps, pour $p \in (1,+\infty)$, la fonction

$$\left\{\begin{array}{cccc} J_p: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & J_p(x) = \sum_{i=1}^n \|x - x_i\|_p, \end{array}\right. \qquad (\mathscr{F})$$

où $\|\cdot\|_p$ désigne la norme p de $\mathbb{R}^2$, i.e. pour $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2$, $\|z\|_p := \Big(|z_1|^p + |z_2|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$.

Le lien avec un problème concret se fera via une projection de la sphère sur un plan. Dans ce cadre on pourra ramener la minimisation de J_p à un problème de choix de disposition d'un *hub*, dans le cas du trafic aérien, i.e. une compagnie souhaite savoir où installer son siège central de sorte à minimiser la distance qui le sépare des destinations qu'elle dessert. On peut encore penser au choix géographique de l'installation d'un *serveur principal* dans le cadre d'un réseau informatique qui devra ensuite distribuer l'information à des serveurs secondaires.

On s'intéressera par la suite à rajouter des contraintes, qui peuvent apparaître naturellement, pour des raisons physiques : on n'installera pas forcément un serveur au milieu de l'océan, pratiques : telle ou telle compagnie aérienne préfèrera avoir son siège dans une certaine zone géographique (Afrique, Amérique, Asie, Europe, Océanie) ou bien en éviter d'autres.

Le but du projet sera tout d'abord d'implémenter les différents algorithmes d'optimisations sans contraintes vus en cours dans le plan pour minimiser la fonction introduite en $(\mathscr{F})$. On s'intéressera dans ce cadre d'un point de vue théorique au caractère bien posé du problème, i.e. existence et unicité du minimum, comment choisir un point de départ adéquat pour les algorithmes.

Dans un deuxième temps on s'intéressera à un système de projection de la sphère (la terre) sur le plan. On pourra considérer, en ayant fixé un point, le pôle nord par exemple, la projection stéréographique qui permet de définir un homéorphisme entre la sphère privée d'un point et le plan. A partir des longitudes et latitudes d'un certain nombre de villes précisées ci-après, on se ramènera ensuite au cas précédent via cette transformation. On exclut de ce fait le pôle. On pourra également considérer d'autres systèmes de projections, comme la projection cylindrique ou la projection azimutale.

La dernière partie du projet consistera d'abord à considérer dans le cas du plan des contraintes et à implémenter par exemple dans ce cadre les algorithmes de Arrow-Hurwicz.

1 Optimisation sans contraintes dans le plan

On décompose en plusieurs étapes la démarche qui va permettre de montrer qu'il existe un unique minimum x^* de la fonction J_p introduite en $(\mathscr{F})$ et de trouver un point pour initialiser les algorithmes vus en cours pour le déterminer à une précision donnée.

1. Etablir que la fonction J_p est coercive.
2. Montrer qu'elle est strictement convexe sur $\mathbb{R}^d$.
3. En déduire qu'il existe un unique minimum global x^* tel que $J_p(x^*) = \min_{x\in\mathbb{R}^2} J_p(x)$. Montrer ensuite que ce point x^* appartient à $\mathscr{C} := \mathrm{Conv}\Big((x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\Big)$ enveloppe convexe des points $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.
4. Implémenter un algorithme de construction de l'enveloppe convexe pour les points $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, on pourra penser à l'algorithme de Jarvis ou à en algorithme faisant intervenir un tri rapide (par exemple le parcours de Graham de complexité $n\log(n)$ pour des données de taille n).
5. Choisir un point dans l'enveloppe convexe précédemment identifiée de sorte que les algorithmes vus en cours soient stable pour une boule centrée en ce point et contenue dans l'enveloppe convexe.
6. Implémenter les algorithmes de gradients à pas fixe, optimal et la généralisation du gradient conjugué. Indiquer, en justifiant votre choix, quelle approche vous semble la plus performante (en fonction de la précision, du temps de calcul, de la stabilité...)
7. Implémenter aussi une méthode d'ordre 2, de type Newton. Comparez-là aux approches précédentes.

2 Projections et mise en oeuvre pratique

On considère un ensemble de villes sur la planète qui seront repérées par leur latitude et longitude. Dans un premier temps : *Alger, Antananarivo, Atlanta, Cape Town, Dakkar, Irkoutsk, Le Caire, Libreville, Moscou, Nairobi, New Dehli, Paris, Pékin, Quito, Rome, Seattle, Sidney, Stockholm, Tokyo*.

1. Se ramener à une optimisation dans le plan à l'aide du système de projection choisi.
2. Modifier le problème d'optimisation précédent de sorte à tenir de a déformation des géodésiques de la sphère par la projection.
3. Les optimaux obtenus sont ils très différents suivant ces deux méthodes.

3 Cas contraint

On va ici chercher à mettre en oeuvre l'algorithme de Arrow-Hurwicz faisant intervenir successivement des étapes de descente de gradient, dans la variable primale, et une étape de gradient projeté dans la variable duale (multiplicateurs de Lagrange).

1. La première chose à effectuer est une forme de vérification. L'idée est de considérer dans le cadre de la Section 1 précédente (optimisation dans le plan) un domaine de contraintes qui contient en fait l'optimum sans contraintes. Dans ce cadre on va mettre en oeuvre un algorithme contraint et l'on doit bien sûr retomber sur l'optimum précédent. On pourra choisir des domaines faisant intervenir des contraintes égalité et/ou inégalités et tels que les points soient qualifiés en un sens vu en cours (condition de Karush, Kuhn et Tucker ou Slater).
2. Toujours dans le cadre de l'optimisation planaire, considérer des ensembles adéquats (au sens qu'ils vérifieront les conditions de qualification) mais qui ne contiennent plus le point optimal non contraint. Etudier l'influence du choix du domaine contraint sur l'optimum associé.
3. Dans le cadre du problème concret essayer de chercher, un optimum en considérant une boule de rayon 1000 km autour de Moscou, un rayon de 1500 km autour de Lincoln Nebraska (USA). Une boule de 1500 km autour de Kisangani (République Démocratique du Congo). Une boule de 1500 Km autour de Cuiabá (Brésil).