Теория вероятностей
Домашнее задание №3
студента ИУ7-52Б
Тарасев Никита
Вариант №5.

№1.

Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{3}{4a}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), & |x| < a \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = b^2 - X^2$, если $b > a$.

Решение.

Так как $y = \varphi(x) = b^2 - x^2$ - это строго возрастающая ф-ия при $x < 0$ и строго убывающая ф-ия при $x > 0$, обратная ф-ия может быть найдена на каждом из этих интервалов

$[-a; 0]$: $x = \psi_1(y) = -\sqrt{b^2 - y}$, $|\psi_1'(y)| = \frac{y}{2 \cdot \sqrt{b^2 - y}}$

$[0; a]$: $x = \psi_2(y) = \sqrt{b^2 - y}$, $|\psi_2'(y)| = \frac{1}{\sqrt{b^2 - y}}$

При этом $y(0) = b^2$, $y(\pm a) = b^2 - a^2$

Тогда,

$$g_y(y) = \frac{3}{4a}\left(1 - \frac{\left(-\sqrt{b^2 - y}\right)^2}{a^2}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{b^2 - y}} + \frac{3}{4a}\left(1 - \frac{\left(\sqrt{b^2 - y}\right)^2}{a^2}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{b^2 - y}} =$$

$$= \frac{3}{4a\sqrt{b^2-y}} \cdot \left(1 - \frac{b^2-y}{a^2}\right)$$

Тогда

$$g_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le b^2 - a^2 \\ \frac{3}{4a\sqrt{b^2-y}} \cdot \left(1 - \frac{b^2-y}{a^2}\right), & b^2 - a^2 < y < b^2 \\ 0, & y > b^2. \end{cases}$$

№2.

Найти $P(X_1 - X_2 > -1)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\bar{m}, \Sigma)$,

где $\bar{m} = (0, 5)$, $\Sigma = \begin{pmatrix} 16 & -2 \\ -2 & 16 \end{pmatrix}$ $\leftarrow DX_1$, $\leftarrow cov(X_1, X_2)$, $\leftarrow DX_2$

Решение:

Рассмотрим $Z = X_1 - X_2$, Z - явл. линейной комбинацией нормальных случайных величин X_1 и X_2 => Z имеет нормальное распределение, т.е. $Z \sim N(m_Z, \sigma_Z^2)$

$m_Z = MZ = M[X_1 - X_2] = MX_1 - MX_2 = 0 - 5 = -5$

$\sigma_Z^2 = DZ = D[X_1 - X_2] = DX_1 + DX_2 - 2 \cdot cov(X_1, X_2) =$

$= 16 + 16 + 4 = 36$

$$P\{z > -1\} = \Phi_0(+\infty) - \Phi_0\left(\frac{-1-m_z}{\sigma_z}\right) =$$

$$\Phi_0(+\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt = 0{,}5$$

$$\Phi_0\left(\frac{-1-m_z}{\sigma_z}\right) = \Phi_0\left(\frac{-1+5}{6}\right) = \Phi_0\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{2/3} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0{,}2475$$

$= 0{,}5 - 0{,}2475 = 0{,}2525$

Ответ: $0{,}2525$.