Aplicación en R de conceptos de la materia

García Luis Mena Manuel

December 2, 2014

Estimar el valor de π mediante la técnica sugerida en el ejercicio de la Práctica 5, 12 b. ¿Cuántos valores se deben tomar si se quiere un error menor a 0.001 con probabilidad mayor que 0.9?

Calculemos primero cuantos valores se deben tomar para aproximar π con un error a 0.001 y con probabilidad mayor que 0.9

Haciendo la referencia al ejercicio correspondiente: Tenemos $U_1, ..., U_n$ una muestra aleatoria con distribución U[0,1]. Por la Ley de Los Grandes Números se debía demostrar que para una función continua h vale que:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(U_i) \longrightarrow \int_0^1 h(x)dx \tag{1}$$

cuando $n \to \infty$.

Pensemos en un arco de circunferencia de radio uno en el primer cuadrante del plano cartesiano y llamemos a la región denotada A.

$$Area(A) = \frac{\pi * \phi^2}{4} \iff 4Area(A) = \pi$$

donde $\phi = radio\ de\ la\ circunferencia = 1$

Sabemos bien que entonces $\pi = 4Area(A) = 4\int_0^1 h(x)dx$ donde $h(x) = \sqrt{1-x^2}$. Por (1) Tenemos que $\pi \approx 4\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-U_i^2}$. Llamemos a la expresión última (del lado derecho) X, entonces:

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(4\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-U_i^2}) = 4\mathrm{E}(\sqrt{1-U^2}) = \frac{4}{4}\pi = \pi$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(4\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-U_i^2}) = \frac{16n}{n^2}\mathrm{Var}(\sqrt{1-U^2}) \tag{2}$$

donde

$$\mathrm{Var}(\sqrt{1-U^2}) = \mathrm{E}(1-U^2) - \mathrm{E}(\sqrt{1-U^2})^2 = \frac{2}{3} - \frac{\pi^2}{16}$$

y finalmente la expresión (2) queda como

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{16}{n}(\frac{2}{3} - \frac{\pi^2}{16}) \approx \frac{0.797}{n}$$

Luego, tomando un n tal que $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$ existan, por Chebyshev tenemos que

$$\Pr(|X - \mathrm{E}(X)| \leq \epsilon) \geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{\epsilon^2}$$

es decir que para $\epsilon = 0.001$

$$\Pr(|X - \pi| \leq 0.001) \geq 1 - \frac{0.797}{n0.001^2} \geq 0.9 \iff 7970000 \leq n$$

Y el código propuesto en su versión vectorizada para R es

```
aproximarPi <- function(cantPuntos = 1000){
        x <- runif(cantPuntos, 0, 1)
        h <- function(x){
                return(sqrt(1 - x^2))
        }
        promedio <- mean(h(x))
        return(4 * promedio)
}
```