

Relação entre altura e número de nós

Se a altura é h , então a árvore:

- tem no mínimo h nós
- tem no máximo $2^h - 1$ nós



Se a árvore tem $n \geq 1$ nós, então:

- a altura é no mínimo $\lceil \lg(n + 1) \rceil$
 - quando a árvore é completa
- a altura é no máximo n
 - quando cada nó não-terminal tem apenas um filho

Implementação em C

```
1 typedef struct No {
2     int dado;
3     struct No *esq, *dir; /* *pai */
4 } No;
5
6 typedef No * p_no;
7
8 p_no criar_arvore(int x, p_no esq, p_no dir);
9
10 p_no procurar_no(p_no raiz, int x);
11
12 int numero_nos(p_no raiz);
13
14 int altura(p_no raiz);
```

Criando uma árvore e buscando

```
1 p_no criar_arvore(int x, p_no esq, p_no dir) {
2     p_no r = malloc(sizeof(No));
3     r->dado = x;
4     r->esq = esq;
5     r->dir = dir;
6     return r;
7 }
```

Árvores são estruturas definidas recursivamente

- basta observar a função `criar_arvore`
- faremos muitos algoritmos recursivos

```
1 p_no procurar_no(p_no raiz, int x) {
2     p_no esq;
3     if (raiz == NULL || raiz->dado == x)
4         return raiz;
5     esq = procurar_no(raiz->esq, x);
6     if (esq != NULL)
7         return esq;
8     return procurar_no(raiz->dir, x);
9 }
```

Número de nós e altura

```
1 int numero_nos(p_no raiz) {  
2     if (raiz == NULL)  
3         return 0;  
4     return numero_nos(raiz->esq) + numero_nos(raiz->dir) + 1;  
5 }
```

```
1 int altura(p_no raiz) {  
2     int h_esq, h_dir;  
3     if (raiz == NULL)  
4         return 0;  
5     h_esq = altura(raiz->esq);  
6     h_dir = altura(raiz->dir);  
7     return 1 + (h_esq > h_dir ? h_esq : h_dir);  
8 }
```

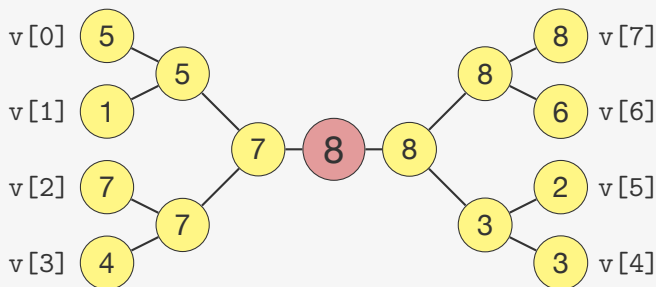
Exercício: faça versões sem recursão dos algoritmos acima

- você vai precisar de uma pilha...

Exemplo: Criando um torneio

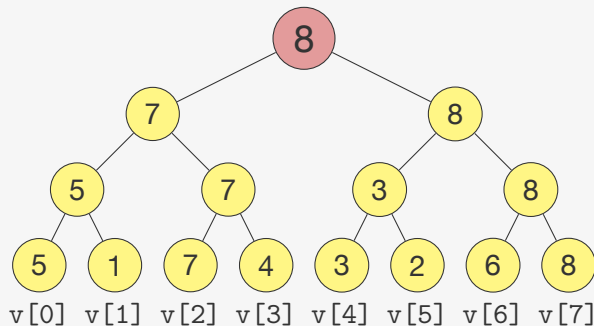
Dado um vetor **v** com **n** números, queremos criar um torneio

- Decidir qual é o maior número em um esquema de chaves
 - Ex.: para **n** = 8, temos quartas de final, semifinal e final



É uma árvore binária, onde o valor do pai é o maior valor dos seus filhos

Exemplo: Criando um torneio

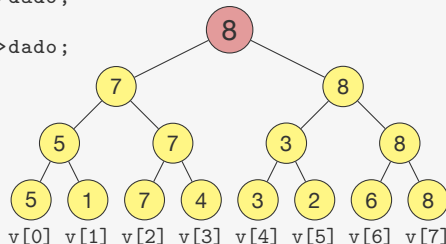


Para resolver o torneio:

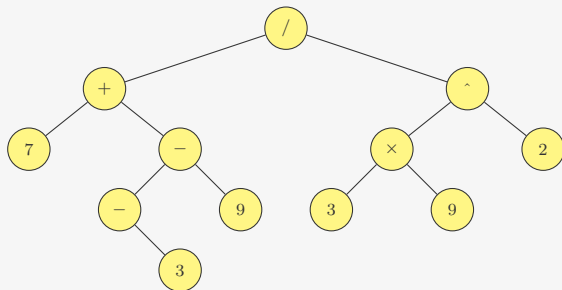
- resolva o torneio das duas subárvores recursivamente
- decida o vencedor

Exemplo: Criando um torneio

```
1 p_no torneio(int *v, int l, int r) {  
2     int m = (l+r)/2;  
3     p_no raiz = criar_arvore(v[m], NULL, NULL);  
4     if (l < r) {  
5         raiz->esq = torneio(v, l, m);  
6         raiz->dir = torneio(v, m+1, r);  
7         if (raiz->esq->dado > raiz->dir->dado)  
8             raiz->dado = raiz->esq->dado;  
9         else  
10            raiz->dado = raiz->dir->dado;  
11     }  
12     return raiz;  
13 }
```



Percurso em profundidade e expressões



Notação

- **Pré-fixa:** $/ + 7 - - 3 9 ^ \times 3 9 2$
- **Pós-fixa:** $7 3 - 9 - + 3 9 \times 2 ^ /$
- **Infixa:** $7 + - 3 - 9 / 3 \times 9 ^ 2$

Implementação de percurso em profundidade

```
1 void pre_ordem(p_no raiz) {
2     if (raiz) {
3         printf("%d ", raiz->dado); /* visita raiz */
4         pre_ordem(raiz->esq);
5         pre_ordem(raiz->dir);
6     }
7 }
```

```
1 void pos_ordem(p_no raiz) {
2     if (raiz) {
3         pos_ordem(raiz->esq);
4         pos_ordem(raiz->dir);
5         printf("%d ", raiz->dado); /* visita raiz */
6     }
7 }
```

```
1 void inordem(p_no raiz) {
2     if (raiz) {
3         inordem(raiz->esq);
4         printf("%d ", raiz->dado); /* visita raiz */
5         inordem(raiz->dir);
6     }
7 }
```

Percurso em profundidade com pilha

Como implementar sem usar recursão?

```
1 void pre_ordem(p_no raiz) {
2     p_pilha p; /* pilha de p_no */
3     p = criar_pilha();
4     empilhar(p, raiz);
5     while(!pilha_vazia(p)) {
6         raiz = desempilhar(p);
7         if (raiz) {
8             empilhar(p, raiz->dir);
9             empilhar(p, raiz->esq);
10            printf("%d ", raiz->dado); /* visita raiz */
11        }
12    }
13    destruir_pilha(p);
14 }
```

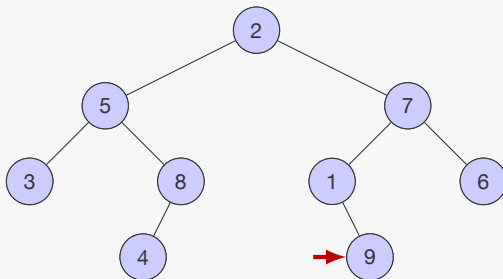
Por que empilhamos `arvore->dir` primeiro?

- E se fosse o contrário?

Implementação do percurso em largura

Como implementar a busca em largura?

- Usamos uma fila
- Colocamos a raiz na fila e depois
- pegamos um elemento da fila e enfileiramos seus filhos



Percurso em largura

```
1 void percurso_em_largura(p_no raiz) {
2     p_fila f;
3     f = criar_fila();
4     enfileirar(f, raiz);
5     while(!fila_vazia(f)) {
6         raiz = desenfileirar(f);
7         if (raiz) {
8             enfileirar(f, raiz->esq);
9             enfileirar(f, raiz->dir);
10            printf("%d ", raiz->dado); /* visita raiz */
11        }
12    }
13    destruir_fila(f);
14 }
```

Agora enfileiramos `arvore->esq` primeiro

- E se fosse o contrário?