# Modelos para la Toma de Decisiones: Tarea 2

Sergio García Prado

Universidad de Valladolid

## Ejercicio 1

**1. La compañía de telefonía móvil *Tusim* ha decidido dar cobertura $4G$ a una determinada zona geográfica que actualmente solo posee cobertura $2G$. La gerencia de la compañía ha asignado un presupuesto de 5 millones de euros para esta operación. Un estudio ha puesto de manifiesto que los transmisores solamente se pueden ubicar en 7 lugares de las 15 municipios en que está dividida la zona y, además, se sabe que cada transmisor solamente cubre un cierto número de municipios. La tabla siguiente muestra los municipios cubiertos por cada transmisor, así como su coste (que depende de la ubicación).**

| *Localización* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Coste (millones de euros)* | 0.9 | 0.65 | 2.0 | 1.75 | 1.9 | 1.3 | 1.05 |
| *Municipios cubiertos* | 1, 2, 4 | 2, 3, 5 | 4, 7, 8, 10 | 5, 6, 8, 9 | 8, 9, 12 | 7, 10, 11, 12, 15 | 12, 13, 14, 15 |

**El número de habitantes (en miles) de cada uno de los 15 municipios es el siguiente:**

| *Municipio* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Población* | 4 | 8 | 26 | 12 | 18 | 8 | 16 | 24 | 20 | 22 | 12 | 28 | 18 | 6 | 12 |

### a. Formular un modelo de PLE para determinar dónde se deben construir los transmisores para cubrir la mayor población con el límite del presupuesto de 5 millones de euros.

Inicialmente puede pareceder que para modelar el problema harían falta más variables de las necesarias para resolver el problema, ya que intuitivamente necesitaríamos 7 variables para representar si se construye o no un transmisor y otras 15 para determinar si se cubre un municipio o no, es decir, en total necesitaríamos 22 variables. Pero si nos fijamos bien descubrimos que algunas de las poblaciones solo se pueden cubrir por un único transmisor por lo que son equivalentes. Modelando el problema de esta manera llegamos a la conclusión de que son necesarias $9 + 7 = 16$ variables, por lo que nos hemos ahorrado 6 variables y 6 restricciones.

La modelización del problema como de PLE es la siguiente:

- $x_i =$ Se construye un transmisor en la localización i. $1 <= i <= 7$
- $p_j$ La población j tiene señal de comunicación. $j \in 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 15$ Nota: no es $1 <= j <= 15$ por las razones expuestas en el parrafo anterior.

$$\text{Max} z = 4x_1 + 8p_2 + 26x_2 + 12p_4 + 18p_5 + 8x_4 + 16p_7$$
$$+24p_8 + 20p_9 + 22p_{10} + 12x_6 + 28p_{12} + (18 + 6)x_7 + 12p_{15}$$

$$0{,}9x_1 + 0{,}65x_2 + 2x_3 + 1{,}75x_4 + 1{,}9x_5 + 1{,}3x_6 + 1{,}05x_7 <= 5$$

$$p_2 <= x_1 + x_2$$

$$p_4 <= x_1 + x_3$$

$$p_5 <= x_2 + x_4$$

$$p_7 <= x_3 + x_6$$

$$p_8 <= x_3 + x_4 + x_5$$

$$p_9 <= x_4 + x_5$$

$$p_{10} <= x_3 + x_6$$

$$p_{12} <= x_5 + x_6 + x_7$$

$$p_{15} <= x_6 + x_7$$

$$p_j, x_i \in 0, 1$$

b. ¿Cuántos transmisores se deben construir y en qué lugares? ¿Cuál es el tamaño de la población cubierto por esos transmisores? ¿Y el coste de la operación? ¿Existen municipios sin cubrir por esos transmisores?. Justificar las respuestas.

TASK2_1.TXT

Open with Atom

```
Combined Report for task2_1

        13:11:26                Friday  May     20      2016

        Decision        Solution        Unit Cost or    Total   Reduced Basis
        Variable        Value   Profit c(j)     Contribution    Cost    Status

1       x1      0       4.0000  0       4.0000  at bound
2       x2      1.0000  26.0000 26.0000 0       basic
3       x3      0       0       0       0       at bound
4       x4      1.0000  8.0000  8.0000  0       basic
5       x5      0       0       0       0       basic
6       x6      1.0000  12.0000 12.0000 0       basic
7       x7      1.0000  24.0000 24.0000 0       basic
8       p2      1.0000  8.0000  8.0000  0       basic
9       p4      0       12.0000 0       0       basic
10      p5      1.0000  18.0000 18.0000 0       basic
11      p7      1.0000  16.0000 16.0000 0       basic
12      p8      1.0000  24.0000 24.0000 0       basic
13      p9      1.0000  20.0000 20.0000 0       basic
14      p10     1.0000  22.0000 22.0000 0       basic
15      p12     1.0000  28.0000 28.0000 0       basic
16      p15     1.0000  12.0000 12.0000 0       basic

        Objective       Function        (Max.) =        218.0000

                Left Hand               Right Hand      Slack   Shadow
        Constraint      Side    Direction       Side    or Surplus      Price

1       C1      0       <=      0       0       8.0000
2       C2      0       <=      0       0       12.0000
3       C3      -1.0000 <=      0       1.0000  0
4       C4      0       <=      0       0       16.0000
5       C5      0       <=      0       0       0
6       C6      0       <=      0       0       0
7       C7      0       <=      0       0       22.0000
8       C8      -1.0000 <=      0       1.0000  0
9       C9      -1.0000 <=      0       1.0000  0
10      C10     4.7500  <=      5.0000  0.2500  0
```

## Ejercicio 2

**2. Antes de salir de vacaciones, *Martín* desea hacer una copia de seguridad de sus archivos de video más importantes en discos CD-ROM. Dispone para ello de suficientes discos vacíos de 900MB. Los dieciséis archivos que desea guardar tienen los siguientes tamaños (en MB): 28.75, 34.375, 38.75, 54.375, 67.5, 71.25, 85.625, 102.5, 158.125, 227.5, 232.5, 242.5, 253.75, 270, 288.125 y 531.875.**

a. Suponiendo que Martín no tiene ningún programa para comprimir los archivos, formular un modelo de PLE para determinar cómo se deben distribuir los archivos con el fin de reducir al mínimo el número de discos CD-ROM que debe utilizar.

Modelizaremos el problema como si se pudiera dar el peor caso, es decir, que cada fichero tan solo entrase en un CD-ROM. A pesar de ello para resolverlo hemos ido probando primero con 1 CD-ROM, pero al ver que no era factible seguidamente probamos con 2 y así sucesivamente hasta que hemos encontrado la solución óptima (3 CD-ROM's). El movivo de que sea así es que sino para resolver el problema necesitariamos $16x16 = 256$ variables de las cuales la mayoría serían innecesarias.

- $x_{ij}$ => Variable binaria que indica si se en el CD-ROM i se alojará el fichero j. $i \in \{1, ..., 16\}$, $j \in \{1, ..., 16\}$
- $c_i$ => Variables que indica si se utilizará el CD-ROM i.

$$\text{Min} z = \sum_{i=1}^{16} c_i$$

$$\begin{aligned} 0{,}9x_{i1} + 0{,}65x_{i2} + 2x_{i3} + 1{,}75x_{i4} \\ +1{,}9x_{i5} + 1{,}3x_{i6} + 1{,}05x_{i7} + 1{,}05x_{i8} \\ +0{,}65x_{i9} + 2x_{i10} + 1{,}75x_{i11} + 1{,}75x_{i12} \\ +1{,}9x_{i13} + 1{,}3x_{i14} + 1{,}05x_{i15} + 1{,}05x_{i16} <= 900c_i, i \in \{1, ..., 16\} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{16} x_{ij} = 1, j \in \{1, ..., 16\}$$

$$c_i, x_{ij} \in 0, 1, i \in \{1, ..., 16\}, j \in \{1, ..., 16\}$$

b. ¿Cuántos CD debe utilizar y qué archivos debe ubicar en cada uno de ellos? Justificar la respuesta.

TASK2_2.TXT  Open with Atom

Combined Report for task2_2

17:17:34  Sunday May 22 2016

| | Decision Variable | Solution Value | Unit Cost or Profit c(j) | Total Contribution | Reduced Cost | Basis Status |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | X1 | 0 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 2 | X2 | 0 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 3 | X3 | 0 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 4 | X4 | 0 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 5 | X5 | 0 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 6 | X6 | 1.0000 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 7 | X7 | 0 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 8 | X8 | 0 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 9 | X9 | 0 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 10 | X10 | 0 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 11 | X11 | 0 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 12 | X12 | 0 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 13 | X13 | 0 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 14 | X14 | 0 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 15 | X15 | 1.0000 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 16 | X16 | 1.0000 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 17 | X17 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | at bound |
| 18 | X18 | 1.0000 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 19 | X19 | 0 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 20 | X20 | 0 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 21 | X21 | 0 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 22 | X22 | 0 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 23 | X23 | 0 | 0 | 0 | 0 | basic |
| 24 | X24 | 0 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 25 | X25 | 1.0000 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 26 | X26 | 0 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 27 | X27 | 0 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 28 | X28 | 0 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 29 | X29 | 1.0000 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 30 | X30 | 1.0000 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 31 | X31 | 1.0000 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 32 | X32 | 0 | 0 | 0 | 0 | basic |
| 33 | X33 | 0 | 0 | 0 | 0 | basic |
| 34 | X34 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | at bound |
| 35 | X35 | 0 | 0 | 0 | 0 | basic |
| 36 | X36 | 1.0000 | 0 | 0 | 0 | basic |
| 37 | X37 | 1.0000 | 0 | 0 | 0 | basic |
| 38 | X38 | 1.0000 | 0 | 0 | 0 | basic |
| 39 | X39 | 1.0000 | 0 | 0 | 0 | basic |
| 40 | X40 | 0 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 41 | X41 | 1.0000 | 0 | 0 | 0 | basic |
| 42 | X42 | 0 | 0 | 0 | 0 | basic |
| 43 | X43 | 1.0000 | 0 | 0 | 0 | basic |
| 44 | X44 | 1.0000 | 0 | 0 | 0 | basic |
| 45 | X45 | 1.0000 | 0 | 0 | 0 | basic |
| 46 | X46 | 0 | 0 | 0 | 0 | basic |
| 47 | X47 | 0 | 0 | 0 | 0 | basic |
| 48 | X48 | 0 | 0 | 0 | 0 | basic |
| 49 | X49 | 0 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 50 | X50 | 0 | 0 | 0 | 0 | at bound |
| 51 | X51 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | at bound |

Objective Function (Min.) = 3.0000

TASK2_2.TXT

| | Constraint | Left Hand Side | Direction | Right Hand Side | Slack or Surplus | Shadow Price |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | C1 | -8.7500 | <= | 0 | 8.7500 | 0 |
| 2 | C2 | -2.5000 | <= | 0 | 2.5000 | 0 |
| 3 | C3 | -1.2500 | <= | 0 | 1.2500 | 0 |
| 4 | C5 | 1.0000 | = | 1.0000 | 0 | 0 |
| 5 | C6 | 1.0000 | = | 1.0000 | 0 | 0 |
| 6 | C7 | 1.0000 | = | 1.0000 | 0 | 0 |
| 7 | C8 | 1.0000 | = | 1.0000 | 0 | 0 |
| 8 | C9 | 1.0000 | = | 1.0000 | 0 | 0 |
| 9 | C10 | 1.0000 | = | 1.0000 | 0 | 0 |
| 10 | C11 | 1.0000 | = | 1.0000 | 0 | 0 |
| 11 | C12 | 1.0000 | = | 1.0000 | 0 | 0 |
| 12 | C13 | 1.0000 | = | 1.0000 | 0 | 0 |
| 13 | C14 | 1.0000 | = | 1.0000 | 0 | 0 |
| 14 | C15 | 1.0000 | = | 1.0000 | 0 | 0 |
| 15 | C16 | 1.0000 | = | 1.0000 | 0 | 0 |
| 16 | C17 | 1.0000 | = | 1.0000 | 0 | 0 |
| 17 | C18 | 1.0000 | = | 1.0000 | 0 | 0 |
| 18 | C19 | 1.0000 | = | 1.0000 | 0 | 0 |
| 19 | C20 | 1.0000 | = | 1.0000 | 0 | 0 |

## Ejercicio 3

**3.** El Sr. Arroyo, que vive en el número 1 de la calle Babbage está organizando una fiesta para unas treinta personas que llegarán en quince coches. La longitud (en metros) de cada coche es la siguiente:

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $l_i$ | 4 | 4.5 | 5 | 4.1 | 2.4 | 5.2 | 3.7 | 3.5 | 3.2 | 4.5 | 2.3 | 3.3 | 3.8 | 4.6 | 3 |

Con el fin de evitar molestias a los vecinos, el Sr. Arroyo desearía realizar el estacionamiento en ambos lados de la calle para que la longitud de la calle ocupada por coches sea mínima.

### a. Formular un modelo PLE para resolver el problema.

Para modelar este problema tenemos que descomponer el valor absoluto de la diferencia entre la longitud que ocupan los coches aparcados a un lado de la calle y los del otro dado que es el valor que queremos minimizar. Añadimos dos variables auxiliares que contendrán la longitud de cada uno de los lados para facilitar la lectura de los resultados.

Por lo tanto modelizaremos el problema de la siguiente manera:

- $c_i$ => Longitud en metros del lado i de la calle. $i \in \{1, 2\}$
- $x_{ij}$ => Variable binaria que indica si se aparca en el lado i de la calle el coche j $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, ..., 15\}$,
- $y^+, y^-$ => Variables que descomponen la parte positiva y negativa de la diferencia entre un lado y otro de la calle.

$$\min z = y^{+} + y^{-}$$

$$y^{+} - y^{-} = c_1 - c_2$$

$$c_i = 4x_{i1} + 4{,}5x_{i2} + 5x_{i3} + 4{,}1x_{i4} + 2{,}4x_{i5} + 5{,}2x_{i6} + 3{,}7x_{i7} + 3{,}5x_{i8}$$
$$+3{,}2x_{i9} + 4{,}5x_{i10} + 2{,}3x_{i11} + 3{,}3x_{i12} + 3{,}8x_{i13} + 4{,}6x_{i14} + 3x_{i15}, i \in \{1, 2\}$$

$$x_{1j} + x_{2j} = 1, j \in \{1, ..., 15\}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i \in \{1, 2\}, j \in \{1, ..., 15\}$$

$$c_i, y^{+}, y^{-} >= 0, i \in \{1, 2\}$$

b. Indicar la solución óptima del modelo planteado en el apartado anterior.

```
TASK2_3.TXT                                          Open with Atom
Combined Report for task2_3

        20:49:33                Friday  May     20      2016

        Decision        Solution        Unit Cost or    Total   Reduced Basis
        Variable        Value   Profit c(j)     Contribution    Cost    Status

1       y+      0.1000  1.0000  0.1000  0       basic
2       y-      0       1.0000  0       2.0000  at bound
3       c1      28.6000 0       0       0       basic
4       c2      28.5000 0       0       0       basic
5       x11     0       0       0       0       at bound
6       x12     0       0       0       0       at bound
7       x13     0       0       0       0       at bound
8       x14     1.0000  0       0       0       at bound
9       x15     0       0       0       0       at bound
10      x16     1.0000  0       0       0       at bound
11      x17     1.0000  0       0       0       at bound
12      x18     0       0       0       0       at bound
13      x19     1.0000  0       0       0       at bound
14      x110    0       0       0       0       at bound
15      x111    1.0000  0       0       0       at bound
16      x112    1.0000  0       0       0       at bound
17      x113    1.0000  0       0       0       at bound
18      x114    0       0       0       0       at bound
19      x115    1.0000  0       0       0       at bound
20      x21     1.0000  0       0       0       basic
21      x22     1.0000  0       0       0       basic
22      x23     1.0000  0       0       0       basic
23      x24     0       0       0       0       basic
24      x25     1.0000  0       0       0       basic
25      x26     0       0       0       0       basic
26      x27     0       0       0       0       basic
27      x28     1.0000  0       0       0       basic
28      x29     0       0       0       0       basic
29      x210    1.0000  0       0       0       basic
30      x211    0       0       0       0       basic
31      x212    0       0       0       0       basic
32      x213    0       0       0       0       basic
33      x214    1.0000  0       0       0       basic
34      x215    0       0       0       0       basic

        Objective       Function        (Min.) =        0.1000

                Left Hand               Right Hand      Slack   Shadow
        Constraint      Side    Direction       Side    or Surplus      Price

1       C1      0       =       0       0       1.0000
2       C2      0.0000  =       0       0       1.0000
3       C3      0.0000  =       0       0       -1.0000
4       C4      1.0000  =       1.0000  0       -4.0000
5       C5      1.0000  =       1.0000  0       -4.5000
6       C6      1.0000  =       1.0000  0       -5.0000
7       C7      1.0000  =       1.0000  0       -4.1000
8       C8      1.0000  =       1.0000  0       -2.4000
9       C9      1.0000  =       1.0000  0       -5.2000
10      C10     1.0000  =       1.0000  0       -3.7000
11      C11     1.0000  =       1.0000  0       -3.5000
12      C12     1.0000  =       1.0000  0       -3.2000
13      C13     1.0000  =       1.0000  0       -4.5000
14      C14     1.0000  =       1.0000  0       -2.3000
15      C15     1.0000  =       1.0000  0       -3.3000
16      C16     1.0000  =       1.0000  0       -3.8000
17      C17     1.0000  =       1.0000  0       -4.6000
18      C18     1.0000  =       1.0000  0       -3.0000
```

c. Supongamos ahora que en uno de los lados de la calle no deben ocupar más de 15 metros. Formular y resolver este nuevo problema.

Para resolver este nuevo problema tendremos que definir una nueva variable binaria que denominaremos **b** y utilizaremos para representar la dicotomía entre cual de los dos lados de la calle es el que no podrá superar los 15 metros. A este nuevo problema habrá que añadirle dos restricciones correspondientes a la dicotomía. Por lo tanto la modelización es la siguiente:

$$\min z = y^+ + y^-$$

$$y^+ - y^- = c_1 - c_2$$

$$c_1 - 15 <= Mb$$

$$c_2 - 15 <= M(1 - b)$$

$$c_i = 4x_{i1} + 4{,}5x_{i2} + 5x_{i3} + 4{,}1x_{i4} + 2{,}4x_{i5} + 5{,}2x_{i6} + 3{,}7x_{i7} + 3{,}5x_{i8}$$
$$+3{,}2x_{i9} + 4{,}5x_{i10} + 2{,}3x_{i11} + 3{,}3x_{i12} + 3{,}8x_{i13} + 4{,}6x_{i14} + 3x_{i15}, i \in \{1, 2\}$$

$$x_{1j} + x_{2j} = 1, j \in \{1, ..., 15\}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i \in \{1, 2\}, j \in \{1, ..., 15\}$$

$$b, c_i, y^+, y^- >= 0, i \in \{1, 2\}$$

TASK2_3C.TXT Open with Atom

```
Combined Report for task2_3

        13:44:49                Sunday  May     22      2016

        Decision        Solution        Unit Cost or    Total   Reduced Basis
        Variable        Value   Profit c(j)     Contribution    Cost    Status

1       y+      27.1000 1.0000  27.1000 0       basic
2       y-      0       1.0000  0       2.0000  at bound
3       c1      42.1000 0       0       0       basic
4       c2      15.0000 0       0       0       basic
5       x11     1.0000  0       0       0       at bound
6       x12     1.0000  0       0       0       at bound
7       x13     1.0000  0       0       0       at bound
8       x14     1.0000  0       0       0       at bound
9       x15     0       0       0       0       at bound
10      x16     1.0000  0       0       0       at bound
11      x17     1.0000  0       0       0       at bound
12      x18     0       0       0       0       at bound
13      x19     1.0000  0       0       0       basic
14      x110    1.0000  0       0       0       at bound
15      x111    0       0       0       0       at bound
16      x112    1.0000  0       0       0       at bound
17      x113    0       0       0       0       at bound
18      x114    1.0000  0       0       0       at bound
19      x115    0       0       0       0       at bound
20      x21     0       0       0       0       basic
21      x22     0       0       0       0       basic
22      x23     0       0       0       0       basic
23      x24     0       0       0       0       basic
24      x25     1.0000  0       0       0       basic
25      x26     0       0       0       0       basic
26      x27     0       0       0       0       basic
27      x28     1.0000  0       0       0       basic
28      x29     0       0       0       0       basic
29      x210    0       0       0       0       basic
30      x211    1.0000  0       0       0       basic
31      x212    0       0       0       0       basic
32      x213    1.0000  0       0       0       basic
33      x214    0       0       0       0       basic
34      x215    1.0000  0       0       0       basic
35      b       1.0000  0       0       0       at bound

        Objective       Function        (Min.) =        27.1000

                Left Hand               Right Hand      Slack   Shadow
        Constraint      Side    Direction       Side    or Surplus      Price

1       C1      0       =       0       0       1.0000
2       C2      0.0000  =       0       0       1.0000
3       C3      0.0000  =       0       0       1.0000
4       C4      1.0000  =       1.0000  0       4.0000
5       C5      1.0000  =       1.0000  0       4.5000
6       C6      1.0000  =       1.0000  0       5.0000
7       C7      1.0000  =       1.0000  0       4.1000
8       C8      1.0000  =       1.0000  0       2.4000
9       C9      1.0000  =       1.0000  0       5.2000
10      C10     1.0000  =       1.0000  0       3.7000
11      C11     1.0000  =       1.0000  0       3.5000
12      C12     1.0000  =       1.0000  0       3.2000
13      C13     1.0000  =       1.0000  0       4.5000
14      C14     1.0000  =       1.0000  0       2.3000
15      C15     1.0000  =       1.0000  0       3.3000
16      C16     1.0000  =       1.0000  0       3.8000
17      C17     1.0000  =       1.0000  0       4.6000
18      C18     1.0000  =       1.0000  0       3.0000
19      C19     -57.9000        <=      15.0000 72.9000 0
20      C20     115.0000        <=      115.0000        0       -2.0000
```