Modelos para la Toma de Decisiones: Tarea 2

SERGIO GARCÍA PRADO

Universidad de Valladolid

EJERCICIO 1

1. La compañía de telefonía móvil *Tusim* ha decidido dar cobertura $4G$ a una determinada zona geográfica que actualmente solo posee cobertura $2G$. La gerencia de la compañía ha asignado un presupuesto de 5 millones de euros para esta operación. Un estudio ha puesto de manifiesto que los transmisores solamente se pueden ubicar en 7 lugares de las 15 municipios en que está dividida la zona y, además, se sabe que cada transmisor solamente cubre un cierto número de municipios. La tabla siguiente muestra los municipios cubiertos por cada transmisor, así como su coste (que depende de la ubicación).

Localización	1	2	3	4	5	6	7
Coste (millones de euros)	0.9	0.65	2.0	1.75	1.9	1.3	1.05
Municipios cubiertos	1, 2, 4	2, 3, 5	4, 7, 8, 10	5, 6, 8, 9	8, 9, 12	7, 10, 11, 12, 15	12, 13, 14, 15

El número de habitantes (en miles) de cada uno de los 15 municipios es el siguiente:

Municipio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Población	4	8	26	12	18	8	16	24	20	22	12	28	18	6	12

a. Formular un modelo de PLE para determinar dónde se deben construir los transmisores para cubrir la mayor población con el límite del presupuesto de 5 millones de euros.

Inicialmente puede pareceder que para modelar el problema harían falta más variables de las necesarias para resolver el problema, ya que intuitivamente necesitaríamos 7 variables para representar si se construye o no un transmisor y otras 15 para determinar si se cubre un municipio o no, es decir, en total necesitaríamos 22 variables. Pero si nos fijamos bien descubrimos que algunas de las poblaciones solo se pueden cubrir por un único transmisor por lo que son equivalentes. Modelando el problema de esta manera llegamos a la conclusión de que son necesarias $9 + 7 = 16$ variables, por lo que nos hemos ahorrado 6 variables y 6 restricciones.

La modelización del problema como de PLE es la siguiente:

- x_i = Se construye un transmisor en la localización i. $1 <= i <= 7$
- p_j La población j tiene señal de comunicación. $j \in 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 15$ Nota: no es $1 <= j <= 15$ por las razones expuestas en el parrafo anterior.

$$\begin{aligned}
\text{Max} z = 4x_1 + 8p_2 + 26x_2 + 12p_4 + 18p_5 + 8x_4 + 16p_7 \\
+24p_8 + 20p_9 + 22p_{10} + 12x_6 + 28p_{12} + (18+6)x_7 + 12p_{15} \\
\\
0{,}9x_1 + 0{,}65x_2 + 2x_3 + 1{,}75x_4 + 1{,}9x_5 + 1{,}3x_6 + 1{,}05x_7 <= 5 \\
p_2 <= x_1 + x_2 \\
p_4 <= x_1 + x_3 \\
p_5 <= x_2 + x_4 \\
p_7 <= x_3 + x_6 \\
p_8 <= x_3 + x_4 + x_5 \\
p_9 <= x_4 + x_5 \\
p_{10} <= x_3 + x_6 \\
p_{12} <= x_5 + x_6 + x_7 \\
p_{15} <= x_6 + x_7 \\
p_j, x_i \in 0, 1
\end{aligned}$$

b. ¿Cuántos transmisores se deben construir y en qué lugares? ¿Cuál es el tamaño de la población cubierto por esos transmisores? ¿Y el coste de la operación? ¿Existen municipios sin cubrir por esos transmisores?. Justificar las respuestas.

Ejercicio 2

2. Antes de salir de vacaciones, *Martín* desea hacer una copia de seguridad de sus archivos de video más importantes en discos CD-ROM. Dispone para ello de suficientes discos vacíos de 900MB. Los dieciséis archivos que desea guardar tienen los siguientes tamaños (en MB): 28.75, 34.375, 38.75, 54.375, 67.5, 71.25, 85.625, 102.5, 158.125, 227.5, 232.5, 242.5, 253.75, 270, 288.125 y 531.875.

a. Suponiendo que Martín no tiene ningún programa para comprimir los archivos, formular un modelo de PLE para determinar cómo se deben distribuir los archivos con el fin de reducir al mínimo el número de discos CD-ROM que debe utilizar.

b. ¿Cuántos CD debe utilizar y qué archivos debe ubicar en cada uno de ellos? Justificar la respuesta.

Ejercicio 3

3. El Sr. Arroyo, que vive en el número 1 de la calle Babbage está organizando una fiesta para unas treinta personas que llegarán en quince coches. La longitud (en metros) de cada coche es la siguiente:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
l_i	4	4.5	5	4.1	2.4	5.2	3.7	3.5	3.2	4.5	2.3	3.3	3.8	4.6	3

Con el fin de evitar molestias a los vecinos, el Sr. Arroyo desearía realizar el estacionamiento en ambos lados de la calle para que la longitud de la calle ocupada por coches sea mínima.

a. Formular un modelo PLE para resolver el problema.

Para modelar este problema tenemos que descomponer el valor absoluto de la diferencia entre la longitud que ocupan los coches aparcados a un lado de la calle y los del otro dado que es el valor que queremos minimizar. Añadimos dos variables auxiliares que contendrán la longitud de cada uno de los lados para facilitar la lectura de los resultados.

Por lo tanto modelizaremos el problema de la siguiente manera:

- c_i => Longitud en metros del lado i de la calle. $i \in \{1, 2\}$
- x_{ij} => Variable binaria que indica si se aparca en el lado i de la calle el coche j $i \in \{1, 2\}$, $j \in 1, ..., 15$,
- y^+, y^- => Variables que descomponen la parte positiva y negativa de la diferencia entre un lado y otro de la calle.

$$\min z = y^+ + y^-$$

$$\begin{aligned}
y^+ - y^- &= c_1 - c_2 \\
c_i <= 4x_{i1} + 4{,}5x_{i2} + 5x_{i3} + 4{,}1x_{i4} + 2{,}4x_{i5} + 5{,}2x_{i6} + 3{,}7x_{i7} + 3{,}5x_{i8} \\
+3{,}2x_{i9} + 4{,}5x_{i10} + 2{,}3x_{i11} + 3{,}3x_{i12} + 3{,}8x_{i13} + 4{,}6x_{i14} + 3x_{i15}, i \in \{1, 2\} \\
x_{1j} + x_{2j} &= 1, j \in \{1, ..., 15\} \\
x_{ij} &\in 0, 1, i \in \{1, 2\}, j \in \{1, ..., 15\} \\
c_i, y^+, y^- &>= 0, i \in \{1, 2\}
\end{aligned}$$

b. Indicar la solución óptima del modelo planteado en el apartado anterior.

c. Supongamos ahora que en uno de los lados de la calle no deben ocupar más de 15 metros. Formular y resolver este nuevo problema.