Modelos para la Toma de Decisiones: Tarea 2

Sergio García Prado

Universidad de Valladolid

Ejercicio 1

1. **La compañía de telefonía móvil *Tusim* ha decidido dar cobertura $4G$ a una determinada zona geográfica que actualmente solo posee cobertura $2G$. La gerencia de la compañía ha asignado un presupuesto de 5 millones de euros para esta operación. Un estudio ha puesto de manifiesto que los transmisores solamente se pueden ubicar en 7 lugares de las 15 municipios en que está dividida la zona y, además, se sabe que cada transmisor solamente cubre un cierto número de municipios. La tabla siguiente muestra los municipios cubiertos por cada transmisor, así como su coste (que depende de la ubicación).**

Localización	1	2	3	4	5	6	7
Coste (millones de euros)	0.9	0.65	2.0	1.75	1.9	1.3	1.05
Municipios cubiertos	1, 2, 4	2, 3, 5	4, 7, 8, 10	5, 6, 8, 9	8, 9, 12	7, 10, 11, 12, 15	12, 13, 14, 15

El número de habitantes (en miles) de cada uno de los 15 municipios es el siguiente:

Municipio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Población	4	8	26	12	18	8	16	24	20	22	12	28	18	6	12

a. Formular un modelo de PLE para determinar dónde se deben construir los transmisores para cubrir la mayor población con el límite del presupuesto de 5 millones de euros.

Inicialmente puede parecer que para modelar el problema harían falta más variables de las realmente necesarias para resolverlo ya que intuitivamente necesitaríamos 7 variables para representar si se construye o no un transmisor y otras 15 para determinar si se cubre un municipio o no, es decir, en total necesitaríamos 22 variables. Pero si nos fijamos bien descubrimos que algunas de las poblaciones solo se pueden cubrir por un único transmisor por lo que son equivalentes. Modelando el problema de esta manera llegamos a la conclusión de que son necesarias $9+7=16$ variables, por lo que nos hemos ahorrado 6 variables y 6 restricciones.

La modelización del problema como de PLE es la siguiente:

- $x_i =$ Se construye un transmisor en la localización i. $1 <= i <= 7$
- p_j La población j tiene señal de comunicación. $j \in 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 15$ Nota: no es $1 <= j <= 15$ por las razones expuestas en el parrafo anterior.

$$\text{Max}z = 4x_1 + 8p_2 + 26x_2 + 12p_4 + 18p_5 + 8x_4 + 16p_7$$
$$+24p_8 + 20p_9 + 22p_{10} + 12x_6 + 28p_{12} + (18+6)x_7 + 12p_{15}$$

$$0{,}9x_1 + 0{,}65x_2 + 2x_3 + 1{,}75x_4 + 1{,}9x_5 + 1{,}3x_6 + 1{,}05x_7 <= 5$$

$$p_2 <= x_1 + x_2$$

$$p_4 <= x_1 + x_3$$

$$p_5 <= x_2 + x_4$$

$$p_7 <= x_3 + x_6$$

$$p_8 <= x_3 + x_4 + x_5$$

$$p_9 <= x_4 + x_5$$

$$p_{10} <= x_3 + x_6$$

$$p_{12} <= x_5 + x_6 + x_7$$

$$p_{15} <= x_6 + x_7$$

$$p_j, x_i \in 0, 1$$

b. ¿Cuántos transmisores se deben construir y en qué lugares? ¿Cuál es el tamaño de la población cubierto por esos transmisores? ¿Y el coste de la operación? ¿Existen municipios sin cubrir por esos transmisores?. Justificar las respuestas.

Tal y como podemos ver en los resultados obtenidos en WinQSB que se muestran en la figura 1 la solución óptima del problema es la siguiente:
Construir 4 transmisores en las localizaciones 2, 4, 6 y 7.
El tamaño de la población cubierta es 218 millones de personas.
El coste de la operación es de 4.75 millones de euros.
Si que existen municipios sin cubrir y son el 1, 3, 4 y 5.

Ejercicio 2

2. **Antes de salir de vacaciones, *Martín* desea hacer una copia de seguridad de sus archivos de video más importantes en discos CD-ROM. Dispone para ello de suficientes discos vacíos de 900MB. Los dieciséis archivos que desea guardar tienen los siguientes tamaños (en MB): 28.75, 34.375, 38.75, 54.375, 67.5, 71.25, 85.625, 102.5, 158.125, 227.5, 232.5, 242.5, 253.75, 270, 288.125 y 531.875.**

a. Suponiendo que Martín no tiene ningún programa para comprimir los archivos, formular un modelo de PLE para determinar cómo se deben distribuir los archivos con el fin de reducir al mínimo el número de discos CD-ROM que debe utilizar.

Modelizaremos el problema como si se pudiera dar el peor caso, es decir, que cada fichero tan solo entrase en un CD-ROM. A pesar de ello para resolverlo hemos ido probando primero con 1 CD-ROM, pero al ver que no era factible seguidamente probamos con 2 y así sucesivamente hasta que hemos encontrado la solución óptima (3 CD-ROM's). El movivo de que sea así es que sino para resolver el problema necesitariamos $16x16 + 16 = 272$ variables de las cuales la mayoría serían innecesarias. Por contra se ha podido resolver utilizando $16x3 + 3 = 51$ variables.

- x_{ij} => Variable binaria que indica si se en el CD-ROM i se alojará el fichero j. $i \in \{1, ..., 16\}$, $j \in \{1, ..., 16\}$
- c_i => Variables que indica si se utilizará el CD-ROM i.

$$\text{Min} z = \sum_{i=1}^{16} c_i$$

$$\begin{aligned} 0{,}9x_{i1} + 0{,}65x_{i2} + 2x_{i3} + 1{,}75x_{i4} \\ +1{,}9x_{i5} + 1{,}3x_{i6} + 1{,}05x_{i7} + 1{,}05x_{i8} \\ +0{,}65x_{i9} + 2x_{i10} + 1{,}75x_{i11} + 1{,}75x_{i12} \\ +1{,}9x_{i13} + 1{,}3x_{i14} + 1{,}05x_{i15} + 1{,}05x_{i16} <= 900c_i, i \in \{1, ..., 16\} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{16} x_{ij} = 1, j \in \{1, ..., 16\}$$

$$c_i, x_{ij} \in 0, 1, i \in \{1, ..., 16\}, j \in \{1, ..., 16\}$$

b. ¿Cuántos CD debe utilizar y qué archivos debe ubicar en cada uno de ellos? Justificar la respuesta.

Tal y como podemos ver en los resultados obtenidos en WinQSB que se muestran en la figura 2 la solución al problema es la siguiente:

La solución óptima del problema es utilizar 3 CD's distribuyendo los ficheros de la siguiente forma:

- $CD1$ => Ficheros 6, 15 y 16
- $CD2$ => Ficheros 1, 8 , 12, 13 y 14.
- $CD3$ => Ficheros 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10 y 11.

Ejercicio 3

3. El Sr. Arroyo, que vive en el número 1 de la calle Babbage está organizando una fiesta para unas treinta personas que llegarán en quince coches. La longitud (en metros) de cada coche es la siguiente:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
l_i	4	4.5	5	4.1	2.4	5.2	3.7	3.5	3.2	4.5	2.3	3.3	3.8	4.6	3

Con el fin de evitar molestias a los vecinos, el Sr. Arroyo desearía realizar el estacionamiento en ambos lados de la calle para que la longitud de la calle ocupada por coches sea mínima.

a. Formular un modelo PLE para resolver el problema.

Para modelar este problema tenemos que descomponer el valor absoluto de la diferencia entre la longitud que ocupan los coches aparcados a un lado de la calle y los del otro dado que es el valor que queremos minimizar. Añadimos dos variables auxiliares que contendrán la longitud de cada uno de los lados para facilitar la lectura de los resultados.

Por lo tanto modelizaremos el problema de la siguiente manera:

- c_i => Longitud en metros del lado i de la calle. $i \in \{1, 2\}$
- x_{ij} => Variable binaria que indica si se aparca en el lado i de la calle el coche j $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, ..., 15\}$,
- y^+, y^- => Variables que descomponen la parte positiva y negativa de la diferencia entre un lado y otro de la calle.

$$\min z = y^+ + y^-$$

$$y^+ - y^- = c_1 - c_2$$

$$c_i = 4x_{i1} + 4{,}5x_{i2} + 5x_{i3} + 4{,}1x_{i4} + 2{,}4x_{i5} + 5{,}2x_{i6} + 3{,}7x_{i7} + 3{,}5x_{i8}$$
$$+3{,}2x_{i9} + 4{,}5x_{i10} + 2{,}3x_{i11} + 3{,}3x_{i12} + 3{,}8x_{i13} + 4{,}6x_{i14} + 3x_{i15}, i \in \{1, 2\}$$

$$x_{1j} + x_{2j} = 1, j \in \{1, ..., 15\}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i \in \{1, 2\}, j \in \{1, ..., 15\}$$

$$c_i, y^+, y^- >= 0, i \in \{1, 2\}$$

b. Indicar la solución óptima del modelo planteado en el apartado anterior.

Tal y como podemos ver en los resultados obtenidos en WinQSB que se muestran en la figura 3 la solución al problema es la siguiente:

La solución óptima del problema es colocar los coches de la siguiente manera:

- $Lado1$ => Coches 4, 6, 7, 9, 11, 12, 13 y 15 usando 28,6 metros.
- $Lado2$ => Coches 1, 2, 3, 5, 8, 10 y 14 usando 28,5 metros.

c. Supongamos ahora que en uno de los lados de la calle no deben ocupar más de 15 metros. Formular y resolver este nuevo problema.

Para resolver este nuevo problema tendremos que definir una nueva variable binaria que denominaremos **b** y utilizaremos para representar la dicotomía entre cual de los dos lados de la calle es el que no podrá superar los 15 metros. A este nuevo problema habrá que añadirle dos restricciones correspondientes a la dicotomía. Por lo tanto la modelización es la siguiente:

$$\min z = y^{+} + y^{-}$$

$$y^{+} - y^{-} = c_1 - c_2$$

$$c_1 - 15 <= Mb$$

$$c_2 - 15 <= M(1 - b)$$

$$c_i = 4x_{i1} + 4{,}5x_{i2} + 5x_{i3} + 4{,}1x_{i4} + 2{,}4x_{i5} + 5{,}2x_{i6} + 3{,}7x_{i7} + 3{,}5x_{i8}$$
$$+3{,}2x_{i9} + 4{,}5x_{i10} + 2{,}3x_{i11} + 3{,}3x_{i12} + 3{,}8x_{i13} + 4{,}6x_{i14} + 3x_{i15}, i \in \{1, 2\}$$

$$x_{1j} + x_{2j} = 1, j \in \{1, ..., 15\}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i \in \{1, 2\}, j \in \{1, ..., 15\}$$

$$b, c_i, y^{+}, y^{-} >= 0, i \in \{1, 2\}$$

Tal y como podemos ver en los resultados obtenidos en WinQSB que se muestran en la figura 4 la solución al problema es la siguiente:

La solución óptima del problema con las nuevas restricciones es colocar los coches de la siguiente manera:

- $Lado1$ => Coches 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12 y 14 usando 42,1 metros.
- $Lado2$ => Coches 5, 8, 11, 13 y 15 usando 15 metros.

Resultados WinQSB

Combined Report for task2_1

13:11:26 Friday May 20 2016

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
1	x1	0	4.0000	0	4.0000	at bound
2	x2	1.0000	26.0000	26.0000	0	basic
3	x3	0	0	0	0	at bound
4	x4	1.0000	8.0000	8.0000	0	basic
5	x5	0	0	0	0	basic
6	x6	1.0000	12.0000	12.0000	0	basic
7	x7	1.0000	24.0000	24.0000	0	basic
8	p2	1.0000	8.0000	8.0000	0	basic
9	p4	0	12.0000	0	0	basic
10	p5	1.0000	18.0000	18.0000	0	basic
11	p7	1.0000	16.0000	16.0000	0	basic
12	p8	1.0000	24.0000	24.0000	0	basic
13	p9	1.0000	20.0000	20.0000	0	basic
14	p10	1.0000	22.0000	22.0000	0	basic
15	p12	1.0000	28.0000	28.0000	0	basic
16	p15	1.0000	12.0000	12.0000	0	basic

Objective Function (Max.) = 218.0000

	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price
1	C1	0	<=	0	0	8.0000
2	C2	0	<=	0	0	12.0000
3	C3	-1.0000	<=	0	1.0000	0
4	C4	0	<=	0	0	16.0000
5	C5	0	<=	0	0	0
6	C6	0	<=	0	0	0
7	C7	0	<=	0	0	22.0000
8	C8	-1.0000	<=	0	1.0000	0
9	C9	-1.0000	<=	0	1.0000	0
10	C10	4.7500	<=	5.0000	0.2500	0

Figura 1: *Resultados Ejercicio 1*

Combined Report for task2_2

17:17:34 Sunday May 22 2016

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)		Total Contribution	Reduced Cost	Basis	Status
1	X1	0	0	0	0	at bound		
2	X2	0	0	0	0	at bound		
3	X3	0	0	0	0	at bound		
4	X4	0	0	0	0	at bound		
5	X5	0	0	0	0	at bound		
6	X6	1.0000	0	0	0	at bound		
7	X7	0	0	0	0	at bound		
8	X8	0	0	0	0	at bound		
9	X9	0	0	0	0	at bound		
10	X10	0	0	0	0	at bound		
11	X11	0	0	0	0	at bound		
12	X12	0	0	0	0	at bound		
13	X13	0	0	0	0	at bound		
14	X14	0	0	0	0	at bound		
15	X15	1.0000	0	0	0	at bound		
16	X16	1.0000	0	0	0	at bound		
17	X17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	at bound		
18	X18	1.0000	0	0	0	at bound		
19	X19	0	0	0	0	at bound		
20	X20	0	0	0	0	at bound		
21	X21	0	0	0	0	at bound		
22	X22	0	0	0	0	at bound		
23	X23	0	0	0	0	basic		
24	X24	0	0	0	0	at bound		
25	X25	1.0000	0	0	0	at bound		
26	X26	0	0	0	0	at bound		
27	X27	0	0	0	0	at bound		
28	X28	0	0	0	0	at bound		
29	X29	1.0000	0	0	0	at bound		
30	X30	1.0000	0	0	0	at bound		
31	X31	1.0000	0	0	0	at bound		
32	X32	0	0	0	0	basic		
33	X33	0	0	0	0	basic		
34	X34	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	at bound		
35	X35	0	0	0	0	basic		
36	X36	1.0000	0	0	0	basic		
37	X37	1.0000	0	0	0	basic		
38	X38	1.0000	0	0	0	basic		
39	X39	1.0000	0	0	0	basic		
40	X40	0	0	0	0	at bound		
41	X41	1.0000	0	0	0	basic		
42	X42	0	0	0	0	basic		
43	X43	1.0000	0	0	0	basic		
44	X44	1.0000	0	0	0	basic		
45	X45	1.0000	0	0	0	basic		
46	X46	0	0	0	0	basic		
47	X47	0	0	0	0	basic		
48	X48	0	0	0	0	basic		
49	X49	0	0	0	0	at bound		
50	X50	0	0	0	0	at bound		
51	X51	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	at bound		

Objective Function (Min.) = 3.0000

	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price
1	C1	-8.7500	<=	0	8.7500	0
2	C2	-2.5000	<=	0	2.5000	0
3	C3	-1.2500	<=	0	1.2500	0
4	C5	1.0000	=	1.0000	0	0
5	C6	1.0000	=	1.0000	0	0
6	C7	1.0000	=	1.0000	0	0
7	C8	1.0000	=	1.0000	0	0
8	C9	1.0000	=	1.0000	0	0
9	C10	1.0000	=	1.0000	0	0
10	C11	1.0000	=	1.0000	0	0
11	C12	1.0000	=	1.0000	0	0
12	C13	1.0000	=	1.0000	0	0
13	C14	1.0000	=	1.0000	0	0
14	C15	1.0000	=	1.0000	0	0
15	C16	1.0000	=	1.0000	0	0
16	C17	1.0000	=	1.0000	0	0
17	C18	1.0000	=	1.0000	0	0
18	C19	1.0000	=	1.0000	0	0
19	C20	1.0000	=	1.0000	0	0

Figura 2: *Resultados Ejercicio 2*

Combined Report for task2_3

20:49:33 Friday May 20 2016

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
1	y+	0.1000	1.0000	0.1000	0	basic
2	y-	0	1.0000	0	2.0000	at bound
3	c1	28.6000	0	0	0	basic
4	c2	28.5000	0	0	0	basic
5	x11	0	0	0	0	at bound
6	x12	0	0	0	0	at bound
7	x13	0	0	0	0	at bound
8	x14	1.0000	0	0	0	at bound
9	x15	0	0	0	0	at bound
10	x16	1.0000	0	0	0	at bound
11	x17	1.0000	0	0	0	at bound
12	x18	0	0	0	0	at bound
13	x19	1.0000	0	0	0	at bound
14	x110	0	0	0	0	at bound
15	x111	1.0000	0	0	0	at bound
16	x112	1.0000	0	0	0	at bound
17	x113	1.0000	0	0	0	at bound
18	x114	0	0	0	0	at bound
19	x115	1.0000	0	0	0	at bound
20	x21	1.0000	0	0	0	basic
21	x22	1.0000	0	0	0	basic
22	x23	1.0000	0	0	0	basic
23	x24	0	0	0	0	basic
24	x25	1.0000	0	0	0	basic
25	x26	0	0	0	0	basic
26	x27	0	0	0	0	basic
27	x28	1.0000	0	0	0	basic
28	x29	0	0	0	0	basic
29	x210	1.0000	0	0	0	basic
30	x211	0	0	0	0	basic
31	x212	0	0	0	0	basic
32	x213	0	0	0	0	basic
33	x214	1.0000	0	0	0	basic
34	x215	0	0	0	0	basic

Objective Function (Min.) = 0.1000

	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price
1	C1	0	=	0	0	1.0000
2	C2	0.0000	=	0	0	1.0000
3	C3	0.0000	=	0	0	-1.0000
4	C4	1.0000	=	1.0000	0	-4.0000
5	C5	1.0000	=	1.0000	0	-4.5000
6	C6	1.0000	=	1.0000	0	-5.0000
7	C7	1.0000	=	1.0000	0	-4.1000
8	C8	1.0000	=	1.0000	0	-2.4000
9	C9	1.0000	=	1.0000	0	-5.2000
10	C10	1.0000	=	1.0000	0	-3.7000
11	C11	1.0000	=	1.0000	0	-3.5000
12	C12	1.0000	=	1.0000	0	-3.2000
13	C13	1.0000	=	1.0000	0	-4.5000
14	C14	1.0000	=	1.0000	0	-2.3000
15	C15	1.0000	=	1.0000	0	-3.3000
16	C16	1.0000	=	1.0000	0	-3.8000
17	C17	1.0000	=	1.0000	0	-4.6000
18	C18	1.0000	=	1.0000	0	-3.0000

Figura 3: *Resultados Ejercicio 3*

Combined Report for task2_3

13:44:49 Sunday May 22 2016

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
1	y+	27.1000	1.0000	27.1000	0	basic
2	y-	0	1.0000	0	2.0000	at bound
3	c1	42.1000	0	0	0	basic
4	c2	15.0000	0	0	0	basic
5	x11	1.0000	0	0	0	at bound
6	x12	1.0000	0	0	0	at bound
7	x13	1.0000	0	0	0	at bound
8	x14	1.0000	0	0	0	at bound
9	x15	0	0	0	0	at bound
10	x16	1.0000	0	0	0	at bound
11	x17	1.0000	0	0	0	at bound
12	x18	0	0	0	0	at bound
13	x19	1.0000	0	0	0	basic
14	x110	1.0000	0	0	0	at bound
15	x111	0	0	0	0	at bound
16	x112	1.0000	0	0	0	at bound
17	x113	0	0	0	0	at bound
18	x114	1.0000	0	0	0	at bound
19	x115	0	0	0	0	at bound
20	x21	0	0	0	0	basic
21	x22	0	0	0	0	basic
22	x23	0	0	0	0	basic
23	x24	0	0	0	0	basic
24	x25	1.0000	0	0	0	basic
25	x26	0	0	0	0	basic
26	x27	0	0	0	0	basic
27	x28	1.0000	0	0	0	basic
28	x29	0	0	0	0	basic
29	x210	0	0	0	0	basic
30	x211	1.0000	0	0	0	basic
31	x212	0	0	0	0	basic
32	x213	1.0000	0	0	0	basic
33	x214	0	0	0	0	basic
34	x215	1.0000	0	0	0	basic
35	b	1.0000	0	0	0	at bound

Objective Function (Min.) = 27.1000

	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price
1	C1	0	=	0	0	1.0000
2	C2	0.0000	=	0	0	1.0000
3	C3	0.0000	=	0	0	1.0000
4	C4	1.0000	=	1.0000	0	4.0000
5	C5	1.0000	=	1.0000	0	4.5000
6	C6	1.0000	=	1.0000	0	5.0000
7	C7	1.0000	=	1.0000	0	4.1000
8	C8	1.0000	=	1.0000	0	2.4000
9	C9	1.0000	=	1.0000	0	5.2000
10	C10	1.0000	=	1.0000	0	3.7000
11	C11	1.0000	=	1.0000	0	3.5000
12	C12	1.0000	=	1.0000	0	3.2000
13	C13	1.0000	=	1.0000	0	4.5000
14	C14	1.0000	=	1.0000	0	2.3000
15	C15	1.0000	=	1.0000	0	3.3000
16	C16	1.0000	=	1.0000	0	3.8000
17	C17	1.0000	=	1.0000	0	4.6000
18	C18	1.0000	=	1.0000	0	3.0000
19	C19	-57.9000	<=	15.0000	72.9000	0
20	C20	115.0000	<=	115.0000	0	-2.0000

Figura 4: *Resultados Ejercicio 3 C*