Inferencia Estadística II: Trabajo T1

Sergio García Prado
sergio.garcia.prado@alumnos.uva.es

21 de octubre de 2018

```
options(repr.plot.width=8, repr.plot.height=5)
```

1. Se lanzan seis monedas en cien ocasiones y se anota el número de caras en cada lanzamiento. Los resultados fueron:

```
coins <- data.frame(hits = c(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6),
                    freq = c(2, 8, 10, 12, 16, 30, 22))
```

Número de caras	0	1	2	3	4	5	6
Frecuencias	2	8	10	12	16	30	22

1.1. Obtener el *pvalor* del test de razón de verosimilitud para contrastar la siguiente hipótesis:

$$H_0 : \text{Todas las monedas tienen la misma probabilidad de cara}$$

Vamos a definir las siguientes variables aleatorias:

$$Y_1, ..., Y_6 \; iid \quad | \; Y_i \sim Bin(n, p_i)$$

Donde $n = 100$ es el número de realizaciones de la muestra, tal y como se indica en el enunciado y la variable Y_i representa el número de caras obtenidas por la moneda i-ésima. Por tanto, el contraste se puede reescribir utilizando esta notación de tal manera que la hipótesis sea:

$$H_0 : p_i = p_j \quad \forall i, j \in \{1, ..., 6\}$$

Por la propiedad de independencia de las variables Y_i entre si, podemos redefinir dicho test apoyándonos en:

$$X_0 = \sum_{i=1}^{6} Y_i \sim Bin(m, p_0)$$

Donde $m = n * 6 = 600$ y $p_0 = p_i \forall i, \in \{1, ..., 6\}$ Por lo tanto, podemos redefinir el contraste como de bondad de ajuste, donde la hipótesis nula se transforma en:

$$H_0 : x \sim X_0$$

Frente a la hipótesis nula de que el vector observado x se distribuye de manera diferente.

Para contrastar esta hipótesis utilizaremos un test G (o test χ^2) basado en la comparación entre frecuencias observadas y esperadas, para lo cual nos apoyaremos en la distribución multinomial.

Para ello, lo primeo es calcular el número de observaciones:

```
m <- coins %>%
    summarise((max(hits) * sum(freq))) %>%
    pull()
```

$$m = 600$$

Puesto que vamos a realizar el test utilizando frecuencias relativas, es necesario calcular estas sobre los datos observados

```
coins <- coins %>%
    mutate(freq.rel = freq / sum(freq))
```

Número de caras	0.00	1.00	2.0	3.00	4.00	5.0	6.00
Frecuencias	2.00	8.00	10.0	12.00	16.00	30.0	22.00
Frecuencias Relativas	0.02	0.08	0.1	0.12	0.16	0.3	0.22

El siguiente paso es obtener el Estimador Máximo Verosimil bajo la hipótesis nula:

```
p.zero.hat <- coins %>%
    mutate(total = freq * hits) %>%
    summarise(sum(total) / m) %>%
    pull()
```

$$\hat{p}_0 = 0.6833$$

Una vez hemos calculado el EMV bajo la hipótesis nula, ya podemos calcular el las frecuencias esperadas que deberían seguir nuestras observaciones aproximadamente para poder verificar que todas ellas pertenencen a una misma distribución Binomial con parámetro p_0.

```
coins <- coins %>%
    mutate(expected.freq.rel = dbinom(0:6, n(), p.zero.hat))
```

Número de caras	0.00	1.000	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000
Frecuencias	2.00	8.000	10.000	12.000	16.000	30.000	22.000
Frecuencias Relativas	0.02	0.080	0.100	0.120	0.160	0.300	0.220
Frecuencias Relativas Esperadas	0.00	0.005	0.031	0.112	0.242	0.314	0.226

El siguiente paso es obtener el estadístico test G. Este se obtiene a partir del test de razón de verosimilitud de la siguiente forma:

Sea:

$$L(p; x_1, ..., x_m) \propto p^{\sum x_i} \cdot (1-p)^{m - \sum x_i}$$

Por lo que:

$$logL(p; x_1, ..., x_m) \propto \sum x_i \cdot log(p) + (m - \sum x_i) \cdot log(1-p)$$

El estadístico test de razón de verosimilitud se puede escribir por tanto como:

$$
\begin{aligned}
G &= -2 \cdot log\left(\Delta(x_1, ..., x_m)\right) \\
&= -2 \cdot log\left(\frac{L(\hat{p}_0; x_1, ..., x_m)}{L(\hat{p}_{obs}; x_1, ..., x_m)}\right) \\
&= 2 \cdot \left(L(\hat{p}_{obs}; x_1, ..., x_m) - L(\hat{p}_0; x_1, ..., x_m)\right) \\
&= 2 \cdot \sum_i y_i \cdot log\left(\frac{\hat{p}_{obs,i}}{\hat{p}_{0,i}}\right)
\end{aligned}
$$

```
G <- coins %>%
    summarise(2 * sum(freq.rel * log(freq / expected.freq.rel))) %>%
    pull()
```

$$G = 9.903$$

Entonces, para calcular el *pvalor* del test, basta comparar este estadístico con su distribución bajo H_0, en este caso una χ^2 con $7 - 1 = 6$ grados de libertad, ya que el espacio parámetrico de partida es de 7 valores, mientras que bajo la hipótesis nula, este queda reducido a 1 único parámetro. Por tanto:

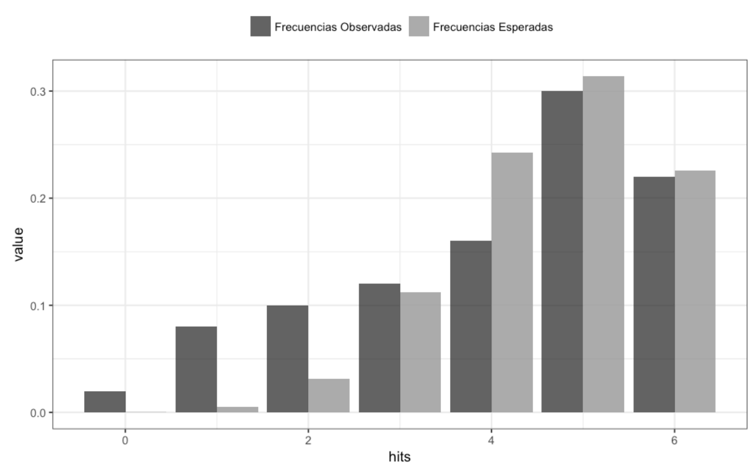
$$pvalor = P(G \geq \chi^2_6)$$

```
pvalue <- 1 - pchisq(G, df=6)
```

$$pvalor = 0.1288$$

Tal y como indica el *pvalor*, a con una confianza del 95 % no tenemos indicios suficientes como para rechazar la hipótesis de que todas las observaciones obtenidas provienen todas ellas de una distribución de 6 monedas, todas ellas distribuidas de la misma forma (igual tasa de acierto).

A continuación se muestra un gráfico de barras que representa de manera conjunta las frecuencias observadas y esperadas:



1.2. En el modelo que define la hipótesis nula obtener intervalos de confianza (95 %) para el parámetro, basados en los estadísticos de Wald (W) y de razón de verosimilitud (VR).

```
alpha <- 0.05
```

Cálculo por ecuación explícita

```
W.var <- p.zero.hat * (1 - p.zero.hat) / m
W.IC <- p.zero.hat + c(-1, 1) * qnorm(1 - alpha / 2) * sqrt(W.var)
```

$$(0.64611, 0.72055)$$

Cálculo por optimización numérica

```
nloglhood <- function(p, n = 600, y = 410) {
    return( -(log(choose(n, y)) + y * log(p) + (n - y) *log(1 - p)) )
}
```

```
opt <- optim(0.5, nloglhood,lower = 0.0001,upper = 0.9999,
             hessian = TRUE, method = "L-BFGS-B")
phat <- opt$par
phat.var <- as.numeric(1 / opt$hessian)
```

1. 0.646111848300026 2. 0.720553688712397

```
control.list=list(label="p",est=p.zero.hat,low=0,upp=1)
invisible(capture.output(LR.ci <- plkhci(control.list, nloglhood, "p")))
```

1. 0.645386613311019 2. 0.719718791742196

2. Considerar el vector aleatorio $X = (X_1, ..., X_5)$

Supongamos que X se distribuye sobre una distribución multinomial, tal que:

$$X \sim multinomial\left(n, \left(\frac{1}{2}, \frac{\theta}{4}, \frac{1-\theta}{4}, \frac{1-\theta}{4}, \frac{\theta}{4}\right)\right)$$

Se define el vector aleatorio

$$\begin{aligned} Y &= (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) \\ &= (X_1 + X_2, X_3, X_4) \end{aligned}$$

Si se observa $y = (125, 18, 20, 34)$, usar 3 iteraciones del algoritmo EM para aproximar el estimador máximo verosímil de θ, partiendo del valor inicial $\theta^{(0)} = 0.5$.

```r
y <- c(125, 18, 20, 24)
theta.zero <- 0.5
iterations <- 3
```

```r
p.mapper <- function(theta) {
    c(1 / 2, theta / 4, (1 - theta) / 4, (1 - theta) / 4, theta / 4)
}
```

```r
minus.likelihood <- function(theta) {
    # TODO
}
```

```r
conditional.expectation <- function() {
    # TODO
}
```

```r
for (itr in 1:iterations) {
    # TODO
}
```