

Problema del Viajante (TSP)

García Prado, Sergio
sergio@garciparedes.me

28 de abril de 2017

Resumen

En este documento se realiza una descripción acerca del problema del viajante (TSP), que consiste en la búsqueda del camino más corto que permita visitar un conjunto de nodos. Además se proporcionan distintas formulaciones para dicho problema así como un conjunto de heurísticas aproximadas que permiten su resolución de manera mucho menos costosa. También se presenta la descripción de la variante del problema del viajante con ventana de tiempo (TSPTW), que se caracteriza por exigir que la visita de un determinado nodo se realice dentro de un intervalo temporal prefijado. Por último, se presentan las soluciones de distintos conjuntos de datos resultas mediante las estrategias descritas en el documento.

1. PROBLEMA DEL VIAJANTE (TSP)

El *Problema del Viajante* (o *Travelling Salesman Problem (TSP)* en inglés) consiste en la búsqueda del camino más corto necesario para visitar un conjunto de n nodos separados entre sí por unas determinadas distancias d_{ij} . Esto es equivalente a la generación del ciclo hamiltoniano en un grafo cuyas aristas tienen determinados pesos (las distancias).

Para resolver este problema existen distintas formulaciones de manera exacta, entre las que se encuentran la formulación estándar de la ecuación (1), la formulación de *Tucker-Miller* descrita en la ecuación (3) o la resolución mediante el apoyo en un modelo de redes complementario tal y como se muestra en la ecuación (2).

1.1 Formulaciones Exactas

La formulación estándar o básica para el problema del viajante se muestra en la ecuación (1), sin embargo esta tan solo es de interés a nivel teórico debido al elevado número de restricciones que se generan en su modelización. Por tanto en la práctica se utilizan otras formulaciones que se describen a continuación.

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \\
 &\text{sujeto a} && \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, && \forall j \in \{1, \dots, n\} \\
 &&& \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, && \forall i \in \{1, \dots, n\} \\
 &&& \sum_{i \in S, j \notin S} x_{ij} \geq 1, && \forall S \subset N/S \neq \emptyset, S \neq N \\
 &&& x_{ij} \in \{0, 1\}, && \forall i, j \in \{1, \dots, n\}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Ecuación 1: Formulación estándar para el problema del viajante (TSP).

La formulación de redes consiste en la modificación de las restricciones derivadas del conjunto S por un modelo de redes complementario a partir de las variables de decisión y_{ij} de carácter real positivo así como las constantes b_i , que en conjunto generan un encadenamiento del camino, lo cual elimina la posibilidad de que se generen subtours. Esta modelización se puede visualizar en la ecuación (2).

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \\
 &\text{sujeto a} && \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, && \forall j \in \{1, \dots, n\} \\
 &&& \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, && \forall i \in \{1, \dots, n\} \\
 &&& \sum_{j=1}^n y_{ij} - \sum_{j=1}^n y_{ji} = b_i, && \forall i \in \{1, \dots, n\} \\
 &&& y_{ij} \leq (n-1)x_{ij}, && \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \\
 &&& b_1 = n-1, \\
 &&& b_i = -1, && \forall i \in \{2, \dots, n\} \\
 &&& y_{ij} \geq 0, && \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \\
 &&& x_{ij} \in \{0, 1\}, && \forall i, j \in \{1, \dots, n\}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Ecuación 2: *Formulación de Redes para el problema del viajante (TSP).*

La formulación propuesta por *Tucker-Miller* se apoya en la existencia de las variables de decisión u_i de carácter entero y positivo, que desempeñan la misma tarea que el modelo de redes complementario de la formulación anterior, es decir, la restricción que elimine la posibilidad de que se formen subtours. La formulación de *Tucker-Miller* se muestra en la ecuación (3).

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \\
 &\text{sujeto a} && \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, && \forall j \in \{1, \dots, n\} \\
 &&& \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, && \forall i \in \{1, \dots, n\} \\
 &&& u_i - u_j + nx_{ij} \leq n-1, && \forall i, j \in \{2, \dots, n\}, i \neq j \\
 &&& u_i \in \{2, \dots, n\}, && \forall i \in \{2, \dots, n\} \\
 &&& u_1 = 1, \\
 &&& x_{ij} \in \{0, 1\}, && \forall i, j \in \{1, \dots, n\}
 \end{aligned} \tag{3}$$

Ecuación 3: *Formulación de Tucker-Miller para el problema del viajante (TSP).*

La resolución del problema del viajante mediante la optimización exacta de los modelos descritos anteriormente conlleva un gran coste computacional derivado de la dificultad por la explosión combinatoria que se produce cuando el número de nodos del conjunto de datos crece. Por lo tanto, existen alternativas que ofrecen resultados aproximados mediante distintas heurísticas que reducen de manera drástica el tiempo de cómputo. Entre ellas se encuentran la heurística del *Entorno más Cercano*, *2-opt*, *GRASP* y *Simulated Annealing*, que se describen a continuación.

1.2 Estrategia Entorno más Cercano

La heurística del entorno más cercano se muestra en la figura 1. Consiste en una estrategia iterativa que trata de minimizar el error relativo durante cada iteración (seleccionando el nodo más cercano al actual) hasta formar un camino que visite todos los nodos del conjunto de datos.

```

actual <- 'nodo de forma aleatoria'
FORALL nodes DO
  visitado <- visitado U actual
  selected <- 'nodo más cercano a "actual" y no visitado'
  camino <- camino U (current, selected)
  actual <- selected
END

```

Figura 1: *Heurística del Entorno más Cercano*

```

camino <- 'solucion inicial mediante entorno mas cercano'
DO
  nuevo_camino <- 'buscar solucion que más reduce la distancia
                  intercambiando 2 índices del camino'
  IF nuevo_camino != camino THEN
    camino <- nuevo_camino
    mejora <- true
  ELSE
    mejora <- false
  END
WHILE mejora = true

```

Figura 2: *Heurística 2-opt*

1.3 Estrategia 2-OPT

La heurística 2-opt se muestra en la figura 2. Esta estrategia consiste en una mejora sobre la del entorno más cercano, que se apoya en una solución inicial de la misma para después tratar de mejorarla buscando la minimización de la distancia total mediante el intercambio de índices entre los nodos del camino. Se realiza dicha acción hasta que el camino no se puede minimizar más mediante dicha estrategia (por entrar en un mínimo local).

1.4 Estrategia GRASP

La heurística GRASP se muestra en la figura 3. Esta se apoya en las estrategias anteriores pero añade aleatoriedad en el punto de selección del nodo más próximo, seleccionando uno al azar de entre los k más próximos. Para mejorar la precisión en los resultados realiza esta acción durante N iteraciones y selecciona el camino que minimiza la distancia de entre todas las soluciones obtenidas.

1.5 Estrategia Simulated Annealing

La heurística Simulated Annealing se muestra en la figura 4. Dicha estrategia es similar a la 2-opt descrita anteriormente. Sin embargo, esta se apoya en ideas extraídas del sector de la metalurgia, en el cual se realiza un enfriamiento de manera suavizada de los metales para tratar de mejorar su resistencia. En este caso se seleccionan dos nodos al azar y se intercambian los nodos subsiguientes a estos. Este cambio se fija si se reduce la

```

FORALL n DO
  nuevo_camino <- 'solución inicial mediante 2-opt modificando
                  la fase de selección del nodo más cercano
                  seleccionándolo aleatoriamente de entre los
                  k más cercanos sin visitar'
  IF nuevo_camino != camino THEN
    camino <- nuevo_camino
  ELSE
  END
END

```

Figura 3: *Heurística GRASP*

```

camino <- 'solucion inicial mediante entorno mas cercano'
DO
  nuevo_camino <- 'buscar solucion aleatoria
                  intercambiando 2 índices del camino'
  IF nuevo_camino != camino THEN
    camino_siguiente <- nuevo_camino
  END
  IF nuevo_camino < camino THEN
    camino <- nuevo_camino
  ELSE
    IF THEN
      camino_siguiente <- nuevo_camino
    ELSE
      END
    temp <- 'reducir temperatura'
  WHILE NOT 'condición de parada'

```

Figura 4: *Heurística* Simulated Anneling

distancia global del camino o de manera aleatoria en el caso de que no sea así. La probabilidad de que se cambie aleatoriamente se va decrementando mediante un determinado factor llamado temperatura.

2. PROBLEMA DEL VIAJANTE CON VENTANA DE TIEMPO (TSPTW)

El problema del viajante con ventana de tiempo consiste en una variación respecto del problema básico que añade la restricción de visitar a los nodos en un determinado intervalo de tiempo prefijado mediante los valores $[a_i, b_i]$ para cada nodo. En la ecuación (4) se muestra una modelización para dicho problema. Nótese que en este caso se ha utilizado como problema base la formulación descrita por Tucker-Miller para el problema del viajante, al cual se le han añadido las pertinentes restricciones para que se cumplan las ventanas de tiempo. Esto se ha llevado a cabo añadiendo las variables de decisión β_i de carácter real positivo, que se corresponden con el momento en que el nodo i será visitado.

$$\begin{aligned}
&\text{Minimizar} && \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \\
&\text{sujeto a} && \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, && \forall j \in \{1, \dots, n\} \\
&&& \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, && \forall i \in \{1, \dots, n\} \\
&&& \beta_i + d_{ij} - M(1 - x_{ij}) \leq \beta_j, && \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, j \neq 1 \\
&&& u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1, && \forall i, j \in \{2, \dots, n\}, i \neq j \\
&&& u_i \in \{2, \dots, n\}, && \forall i \in \{2, \dots, n\} \\
&&& u_1 = 1, \\
&&& a_i \leq \beta_i, && \forall i \in \{1, \dots, n\} \\
&&& \beta_i \leq b_i, && \forall i \in \{1, \dots, n\} \\
&&& x_{ij} \in \{0, 1\}, && \forall i, j \in \{1, \dots, n\}
\end{aligned} \tag{4}$$

Ecuación 4: *Formulación de Tucker-Miller para el problema del viajante con ventana de tiempo (TSPTW).*

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En esta sección se presentan los resultados obtenidos tras resolver el problema del viajante (TSP) con distintos conjuntos de datos de entrada. Dichos resultados se han agrupado por problema en lugar de por estrategia de

resolución, lo cual permite comparar de manera más simple cada una de ellas. En algunos casos estos conjuntos de datos se corresponden con coordenadas cartesianas, para lo cual es necesario calcular la distancias entre cada par de puntos, lo que permite realizar una representación gráfica de la solución. Sin embargo, en otros casos tan solo se suministran las distancias, por lo que la representación gráfica no es posible. Por último, se resuelven dos problemas con ventana de tiempo (TSPTW) de manera exacta, para el cual se suministran además los puntos de inicio y fin permitidos para visitar cada nodo.

3.1 burma14

El conjunto de datos está formado por las coordenadas de 14 nodos (por lo que es necesario calcular las distancias previamente). En este caso se resuelve de manera exacta mediante la formulación de *Tucker-Miller* y la de *Redes*. En la tabla 1 se muestran los resultados de forma numérica mientras que en la figura 5 se muestra la representación gráfica. Tal y como se puede apreciar ambas soluciones son óptimas, sin embargo proporcionan caminos distintos

Método	Distancia	Camino
Exacto (TM)	30	1 2 3 4 12 5 6 14 7 13 8 11 9 10
Exacto (Redes)	30	1 10 9 11 8 13 7 6 5 12 4 3 14 2

Tabla 1: Soluciones para el conjunto de datos burma14

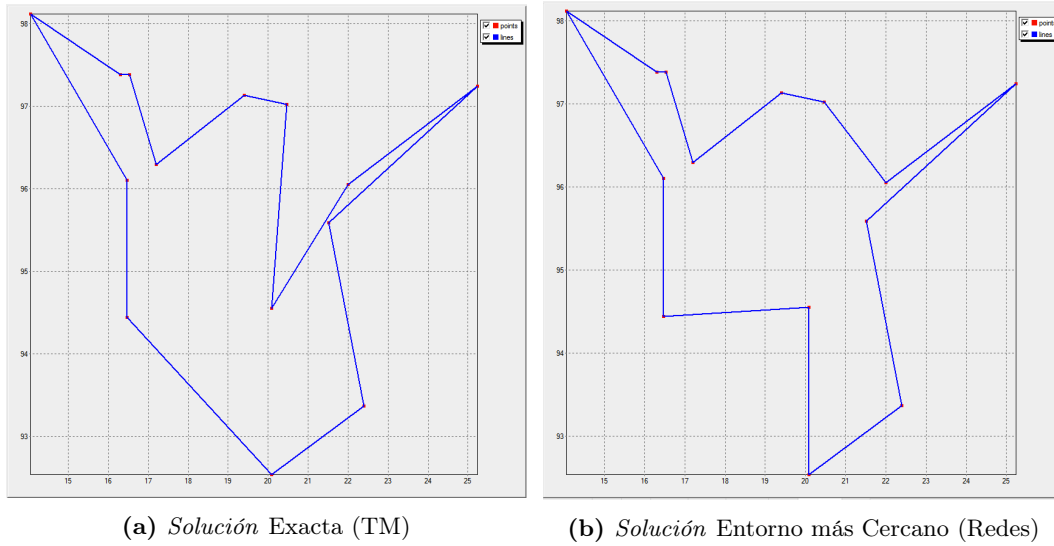


Figura 5: Representación gráfica de las distintas soluciones para el conjunto de datos burma14

3.2 br17

El conjunto de datos está formado por la matriz de distancias de 17 nodos. En este caso se resuelve de manera exacta mediante la formulación de *Tucker-Miller* y la de *Redes*. Al igual que en el caso anterior, ambas soluciones son óptimas, sin embargo proporcionan caminos distintos. Los resultados se muestran en la tabla 2.

Método	Distancia	Camino
Exacto (TM)	39	1 12 14 3 13 11 2 10 17 8 9 4 5 16 15 7 6
Exacto (Redes)	39	1 3 14 10 11 2 13 6 7 16 15 5 4 17 8 9 12

Tabla 2: Soluciones para el conjunto de datos br17

3.3 n21_1

El conjunto de datos está formado por la matriz de distancias de 21 nodos. En este caso se ha resultado de manera exacta mediante la formulación de *Tucker-Miller* y de manera aproximada mediante heurísticas *Entorno más Cercano*, *2-opt*, *GRASP* y *Simulated Annealing*. Los resultados se muestran en la tabla 3.

Método	Distancia	Camino
Exacto	198	1 8 15 3 16 2 6 12 9 11 13 19 18 20 10 4 17 7 21 14 5
Greedy	231	1 14 4 8 15 3 16 2 6 12 9 11 13 19 18 20 10 17 7 21 5
2-opt	221	1 5 21 14 4 17 7 10 18 20 19 11 13 9 12 6 2 16 3 15 8
GRASP	210	1 8 15 3 16 2 6 12 9 13 11 19 20 18 10 17 7 4 21 14 5
Simulated Annealing	198	1 5 14 21 7 17 4 10 20 18 19 13 11 9 12 6 2 16 3 15 8

Tabla 3: Soluciones para el conjunto de datos n21_1

3.4 n21_2

El conjunto de datos está formado por la matriz de distancias de 21 nodos. En este caso se ha resultado de manera exacta mediante la formulación de *Tucker-Miller* y de manera aproximada mediante heurísticas *Entorno más Cercano*, *2-opt*, *GRASP* y *Simulated Annealing*. Los resultados se muestran en la tabla 4.

Método	Distancia	Camino
Exacto	174	1 14 8 4 21 13 18 16 11 10 12 17 6 7 20 9 5 19 3 15 2
Greedy	230	1 2 21 11 10 20 13 18 16 12 17 7 6 4 8 5 9 19 3 15 14
2-opt	216	1 14 2 15 19 5 9 3 8 4 21 13 18 16 12 17 7 6 20 10 11
GRASP	178	1 14 21 13 18 16 11 10 12 17 20 7 6 4 8 5 9 19 3 15 2
Simulated Annealing	187	1 21 13 18 4 8 7 6 16 11 10 12 17 20 5 9 19 3 15 2 14

Tabla 4: Soluciones para el conjunto de datos n21_2

3.5 n21_3

El conjunto de datos está formado por la matriz de distancias de 21 nodos. En este caso se ha resultado de manera exacta mediante la formulación de *Tucker-Miller* y de manera aproximada mediante heurísticas *Entorno más Cercano*, *2-opt*, *GRASP* y *Simulated Annealing*. Los resultados se muestran en la tabla 5.

Método	Distancia	Camino
Exacto	213	1 6 20 16 15 18 13 12 8 3 5 19 17 10 9 11 2 21 4 14 7
Greedy	227	1 7 6 20 18 13 12 19 15 16 8 3 5 17 10 9 11 2 21 4 14
2-opt	217	1 7 6 20 16 15 8 18 13 12 19 3 5 17 10 9 11 2 21 4 14
GRASP	217	1 7 6 20 16 15 8 18 13 12 19 3 5 17 10 9 11 2 21 4 14
Simulated Annealing	213	1 7 14 4 21 2 11 9 10 17 19 5 3 8 13 12 18 15 16 20 6

Tabla 5: Soluciones para el conjunto de datos n21_3

3.6 n21_4

El conjunto de datos está formado por la matriz de distancias de 21 nodos. En este caso se ha resultado de manera exacta mediante la formulación de *Tucker-Miller* y de manera aproximada mediante heurísticas *Entorno más Cercano*, *2-opt*, *GRASP* y *Simulated Annealing*. Los resultados se muestran en la tabla 6.

Método	Distancia	Camino
Exacto	189	1 12 5 15 11 14 7 6 2 9 20 3 8 10 16 19 18 17 21 13 4
Greedy	254	1 12 15 11 20 2 6 9 7 14 5 16 19 18 17 10 3 8 4 13 21
2-opt	222	1 12 21 17 18 19 16 10 8 3 20 11 15 5 14 7 6 2 9 13 4
GRASP	213	1 12 5 14 7 6 2 9 10 16 19 18 17 21 13 4 8 3 20 11 15
Simulated Annealing	194	1 4 13 21 17 18 19 16 10 8 3 11 20 9 2 6 7 14 15 5 12

Tabla 6: Soluciones para el conjunto de datos n21_4

3.7 n21_5

El conjunto de datos está formado por la matriz de distancias de 21 nodos. En este caso se ha resultado de manera exacta mediante la formulación de *Tucker-Miller* y de manera aproximada mediante heurísticas *Entorno más Cercano*, *2-opt*, *GRASP* y *Simulated Annealing*. Los resultados se muestran en la tabla 7.

Método	Distancia	Camino
Exacto	193	1 12 14 20 10 7 16 13 15 5 11 6 3 18 9 2 4 21 19 17 8
Greedy	212	1 8 17 19 21 4 2 9 18 3 6 11 5 15 16 10 7 13 20 14 12
2-opt	204	1 8 17 19 21 4 2 9 18 13 10 7 16 15 5 11 6 3 20 14 12
GRASP	203	1 7 10 5 11 6 3 15 16 13 18 9 2 4 19 21 17 8 12 14 20
Simulated Annealing	193	1 8 17 19 21 4 2 9 18 3 6 11 5 15 13 16 7 10 20 14 12

Tabla 7: Soluciones para el conjunto de datos n21_5

3.8 tsp_60_1

El conjunto de datos está formado por las coordenadas de 60 nodos (por lo que es necesario calcular las distancias previamente). En este caso se ha resultado de manera exacta mediante la formulación de *Tucker-Miller* y de manera aproximada mediante heurísticas *Entorno más Cercano*, *2-opt*, *GRASP* y *Simulated Annealing*. En la tabla 8 se muestran los resultados de forma numérica mientras que en la figura 6 se muestra la representación gráfica.

Método	Distancia	Camino
Exacto	653	1 53 40 49 60 13 22 10 18 37 24 41 38 17 2 7 33 3 45 52 14 30 46 57 6 26 15 58 50 31 39 54 51 20 21 12 8 32 23 48 42 5 59 44 11 36 9 19 34 16 28 29 4 25 43 47 56 55 27 35
Greedy	772	1 35 53 27 23 32 8 12 20 51 54 39 31 50 58 15 26 6 57 46 30 13 22 10 14 37 18 24 52 45 3 33 2 7 17 38 41 19 9 11 44 36 59 5 42 48 40 49 60 21 55 47 56 43 25 34 16 4 29 28
2-opt	752	1 35 53 27 23 32 8 12 20 51 21 42 48 5 56 36 11 44 59 3 33 45 52 24 41 38 17 2 7 30 46 26 6 57 15 58 31 50 54 39 40 49 60 22 10 13 14 37 18 29 4 34 16 25 19 9 43 47 55 28
GRASP	654	1 35 53 27 23 40 49 60 22 13 30 46 57 6 26 15 58 50 31 39 54 51 20 12 21 8 32 48 42 5 59 36 44 11 9 43 56 47 55 28 29 4 16 34 25 19 41 38 17 7 2 33 3 45 52 24 18 37 14 10
Simulated Annealing	666	1 10 22 13 60 49 40 20 12 21 51 54 39 31 50 58 15 26 6 57 46 30 14 24 41 38 17 7 2 33 3 45 52 37 18 29 4 19 25 34 16 28 55 43 9 11 44 59 36 47 56 5 48 42 8 32 23 27 53 35

Tabla 8: Soluciones para el conjunto de datos tsp_60_1

3.9 tsp_60_2

El conjunto de datos está formado por las coordenadas de 60 nodos (por lo que es necesario calcular las distancias previamente). En este caso se ha resultado de manera exacta mediante la formulación de *Tucker-Miller* y de manera aproximada mediante heurísticas *Entorno más Cercano*, *2-opt*, *GRASP* y *Simulated Annealing*. En la tabla 9 se muestran los resultados de forma numérica mientras que en la figura 7 se muestra la representación gráfica.

Método	Distancia	Camino
Exacto	631	1 57 3 13 29 44 4 28 30 9 25 19 39 14 60 10 47 24 32 37 7 34 26 54 15 56 50 40 8 27 5 18 51 43 16 21 46 52 45 33 6 55 38 20 53 36 2 17 48 42 23 31 11 22 35 12 41 59 49 58
Greedy	755	1 57 30 9 28 39 47 24 32 37 15 56 40 50 8 27 5 43 16 21 33 6 45 46 52 38 55 3 36 53 20 2 17 48 23 42 31 41 59 49 58 12 35 11 22 25 19 18 51 14 10 60 26 34 54 7 4 44 29 13
2-opt	686	1 57 30 9 28 4 44 29 13 5 27 8 40 50 56 15 54 7 26 34 60 10 14 47 39 19 25 24 32 37 18 51 43 16 21 33 6 45 46 52 38 55 3 36 53 20 2 17 12 35 11 22 31 23 48 42 41 59 49 58
GRASP	686	1 57 30 9 28 4 44 29 13 5 27 8 40 50 56 15 54 7 26 34 60 10 14 47 39 19 25 12 35 11 22 24 32 37 18 51 43 16 21 33 6 45 46 52 38 55 3 36 53 20 2 17 48 23 42 31 41 59 49 58
Simulated Annealing	691	1 57 3 52 46 38 55 6 33 45 21 16 43 51 18 50 40 8 27 5 13 29 44 4 28 30 9 14 10 60 34 26 7 54 56 15 37 24 32 47 39 19 25 22 11 12 35 59 41 31 42 48 23 17 2 20 53 36 49 58

Tabla 9: Soluciones para el conjunto de datos tsp_60_2

3.10 tsp_60_3

El conjunto de datos está formado por las coordenadas de 60 nodos (por lo que es necesario calcular las distancias previamente). En este caso se ha resultado de manera exacta mediante la formulación de *Tucker-Miller* y de manera aproximada mediante heurísticas *Entorno más Cercano*, *2-opt*, *GRASP* y *Simulated Annealing*. En la tabla 10 se muestran los resultados de forma numérica mientras que en la figura 8 se muestra la representación gráfica.

Método	Distancia	Camino
Exacto	582	1 27 50 30 7 21 11 25 10 15 54 60 41 6 12 28 20 22 24 29 26 33 46 43 39 53 57 34 2 31 40 49 32 35 36 37 8 59 13 48 23 56 18 52 19 3 51 55 5 47 17 42 45 44 16 14 58 38 4 9
Greedy	690	1 27 4 38 49 40 31 57 34 2 39 43 46 29 53 24 22 20 28 12 6 41 60 54 15 10 25 11 21 7 30 50 26 33 35 36 8 37 59 13 32 48 23 56 18 52 19 3 51 55 5 47 17 45 42 44 16 14 58 9
2-opt	751	1 9 58 14 16 44 45 42 17 47 55 3 19 51 52 18 23 56 48 13 32 35 36 8 37 59 5 21 11 7 30 15 54 60 41 6 28 12 22 20 29 43 39 53 46 33 26 24 50 10 25 31 57 34 2 40 49 38 4 27
GRASP	690	1 27 4 38 49 40 31 57 34 2 39 43 46 29 53 24 22 20 28 12 6 41 60 54 15 10 25 11 21 7 30 50 26 33 35 36 8 37 59 13 32 48 23 56 18 52 19 3 51 55 5 47 17 45 42 44 16 14 58 9
Simulated Annealing	682	1 9 4 24 22 20 26 33 46 29 43 39 53 57 2 34 31 40 32 13 35 36 8 37 59 52 18 56 23 48 49 38 58 14 16 17 55 3 19 51 5 47 42 45 44 21 11 7 30 15 10 25 60 41 6 28 12 54 50 27

Tabla 10: Soluciones para el conjunto de datos tsp_60_3

3.11 tsp_100_1

El conjunto de datos está formado por las coordenadas de 100 nodos (por lo que es necesario calcular las distancias previamente). En este caso se ha resultado de manera exacta mediante la formulación de *Tucker-Miller* y de manera aproximada mediante heurísticas *Entorno más Cercano*, *2-opt*, *GRASP* y *Simulated Annealing*. En la tabla 11 se muestran los resultados de forma numérica mientras que en la figura 9 se muestra la representación gráfica.

Método	Distancia	Camino
Exacto	1002	1 57 99 64 80 63 36 47 4 79 82 67 2 50 93 40 31 7 34 68 43 35 54 76 49 95 13 92 29 27 86 73 75 3 33 39 81 100 97 19 45 15 6 74 18 65 23 71 10 25 17 72 53 52 32 48 11 66 12 42 16 61 98 8 84 26 14 83 46 37 58 77 60 38 88 96 85 70 94 44 89 62 90 22 21 87 91 59 24 41 20 69 5 78 30 51 28 56 55 9
Greedy	989	1 24 41 59 57 40 31 64 80 63 36 47 99 4 67 79 82 19 45 97 50 2 93 20 69 5 78 92 29 27 86 28 15 74 18 65 23 71 10 25 17 32 52 66 12 42 16 61 26 84 14 83 37 77 60 38 88 96 85 70 94 44 89 21 87 91 34 7 22 90 62 58 46 35 54 43 76 49 95 13 48 11 53 72 98 8 68 6 3 73 75 100 33 39 81 9 55 56 30 51
2-opt	1005	1 24 41 59 57 40 31 64 80 63 36 47 99 4 67 79 82 19 45 97 39 81 33 100 3 73 75 28 86 27 29 92 78 5 69 20 43 76 49 95 13 48 11 12 42 16 61 26 84 14 83 37 77 60 38 88 96 85 70 94 44 89 21 87 91 34 7 22 90 62 58 46 35 54 68 98 8 93 50 2 66 52 32 53 72 17 25 10 23 71 65 18 74 6 15 9 55 56 30 51
GRASP	899	1 28 86 27 29 92 78 5 69 20 43 76 49 95 13 48 11 10 25 17 32 52 66 12 42 16 61 26 84 14 83 37 77 60 38 88 96 85 70 94 44 89 21 87 91 34 7 22 90 62 58 46 35 54 68 98 8 53 72 71 23 65 18 74 6 15 75 73 3 100 33 45 97 19 79 67 82 24 41 59 57 40 31 64 80 63 36 47 99 4 93 50 2 39 81 9 55 56 30 51
Simulated Annealing	968	1 24 41 59 57 40 31 64 80 63 36 47 99 4 67 79 82 19 45 97 50 2 93 20 69 5 78 92 68 98 8 53 72 6 74 18 65 23 71 10 25 17 32 52 66 12 42 16 61 26 84 14 83 37 77 60 38 88 96 85 70 94 44 89 21 87 91 34 7 22 90 62 58 46 35 54 43 76 49 95 13 48 11 27 29 86 28 30 56 55 9 81 39 33 100 3 73 75 15 51

Tabla 11: Soluciones para el conjunto de datos tsp_100_1

3.12 tsp_100_2

El conjunto de datos está formado por las coordenadas de 100 nodos (por lo que es necesario calcular las distancias previamente). En este caso se ha resultado de manera exacta mediante la formulación de *Tucker-Miller* y de manera aproximada mediante heurísticas *Entorno más Cercano*, *2-opt*, *GRASP* y *Simulated Annealing*. En la tabla 12 se muestran los resultados de forma numérica mientras que en la figura 10 se muestra la representación gráfica.

Método	Distancia	Camino
Exacto	945	1 87 20 16 77 86 9 55 53 51 26 21 59 6 57 8 5 13 81 84 11 62 92 4 35 44 71 94 48 34 42 68 61 32 85 3 50 93 80 79 73 19 43 66 38 99 25 56 75 47 27 37 67 54 39 24 82 45 22 65 14 97 89 52 96 28 63 98 70 88 91 41 95 49 2 12 69 100 46 64 83 7 60 74 40 15 90 36 30 17 10 58 29 72 18 33 76 23 78 31
Greedy	935	1 22 45 82 11 62 92 4 35 44 48 94 34 42 68 56 32 85 61 25 99 38 66 73 19 43 74 40 7 64 83 41 60 15 90 36 30 17 10 58 29 72 18 33 70 88 91 100 69 95 2 49 46 12 80 93 50 3 71 14 65 52 96 89 97 79 28 63 98 78 77 86 9 55 53 51 26 6 59 57 8 5 13 81 84 24 39 54 67 27 75 47 37 21 16 23 76 20 31 87
2-opt	946	1 28 96 52 89 97 71 44 48 94 68 42 37 47 75 27 67 54 39 84 24 11 62 92 35 4 14 65 22 45 82 5 8 57 59 6 55 26 51 53 56 34 81 13 21 9 86 77 78 98 70 33 18 88 91 74 19 43 66 73 79 80 93 50 3 32 85 61 25 99 38 12 2 95 49 46 69 100 41 83 64 7 40 60 36 90 15 30 17 10 58 29 72 63 76 23 16 31 20 87
GRASP	863	1 87 31 20 16 23 76 63 88 91 70 33 18 72 29 58 10 17 30 15 90 36 60 40 7 64 83 74 41 100 69 46 49 95 2 12 38 99 25 61 85 32 3 50 93 80 79 73 66 43 19 71 65 14 97 89 52 96 28 98 78 77 86 9 5 21 26 51 53 55 59 6 57 8 13 81 84 24 39 54 67 47 75 27 37 56 68 42 34 94 48 44 35 4 92 62 11 82 45 22
Simulated Annealing	866	1 22 45 82 11 62 92 4 35 44 48 94 34 42 68 56 37 27 75 47 67 54 39 24 84 81 13 8 57 6 59 55 53 51 26 21 5 9 86 77 78 98 33 70 63 58 29 72 18 88 91 100 69 46 49 95 2 12 38 99 25 61 85 32 3 50 93 80 79 73 66 43 19 74 41 83 64 7 40 60 36 90 15 30 17 10 71 65 14 97 89 52 96 28 76 23 16 20 31 87

Tabla 12: Soluciones para el conjunto de datos tsp_100_2

3.13 tsp_100_3

El conjunto de datos está formado por las coordenadas de 100 nodos (por lo que es necesario calcular las distancias previamente). En este caso se ha resultado de manera exacta mediante la formulación de *Tucker-Miller* y de manera aproximada mediante heurísticas *Entorno más Cercano*, *2-opt*, *GRASP* y *Simulated Annealing*. En la tabla 13 se muestran los resultados de forma numérica mientras que en la figura 11 se muestra la representación gráfica.

Método	Distancia	Camino
Exacto	1344	1 90 67 88 83 27 68 37 16 71 95 46 60 22 6 15 61 35 77 64 26 24 97 34 73 76 25 21 57 99 51 66 94 50 8 43 87 86 85 10 12 5 32 11 53 91 74 65 38 13 54 81 52 40 48 41 75 47 84 89 17 70 7 62 14 96 45 72 31 4 55 42 20 69 19 100 98 23 2 9 59 18 82 79 29 36 33 44 78 28 56 3 92 63 80 39 58 30 93 49
Greedy	990	1 49 88 67 19 69 98 23 42 4 55 18 57 99 66 94 10 12 86 85 11 53 32 5 50 8 9 59 87 43 31 72 2 20 51 76 91 74 65 29 38 44 79 36 33 3 45 96 78 28 82 56 52 54 13 48 40 81 60 22 46 71 95 93 100 64 6 24 41 75 47 84 89 7 62 14 92 63 73 34 21 25 30 90 68 27 58 39 80 97 70 17 83 26 15 77 61 35 37 16
2-opt	986	1 16 37 35 61 26 15 77 64 6 17 70 40 48 54 52 13 56 28 82 44 38 65 74 29 36 79 3 45 96 78 14 92 63 73 34 21 25 30 90 68 27 58 39 80 97 100 19 69 98 23 42 4 55 18 57 99 66 94 10 12 86 85 11 53 32 5 50 8 9 59 87 43 31 72 2 20 51 76 91 33 62 7 81 89 84 41 75 47 24 83 60 22 46 71 95 93 67 88 49
GRASP	899	1 49 88 67 30 90 27 68 58 39 80 97 21 25 51 20 23 98 69 19 100 93 95 71 46 22 60 83 24 47 75 41 84 89 79 44 38 65 74 29 36 33 53 11 32 86 10 12 94 66 99 57 18 55 4 42 72 2 31 50 8 9 59 87 43 5 85 91 76 34 73 63 92 14 96 3 45 78 28 82 56 52 54 13 48 40 81 7 62 70 17 6 64 77 15 26 61 35 37 16
Simulated Annealing	900	1 49 88 67 19 69 98 23 2 72 31 9 59 87 43 8 50 5 32 53 11 85 86 12 10 94 66 99 57 18 55 4 42 20 51 76 91 74 65 29 33 36 79 44 38 3 45 96 78 28 82 56 52 13 54 48 40 81 7 62 14 92 63 73 34 21 25 30 90 68 89 84 41 75 47 24 64 6 17 70 97 80 39 58 27 93 100 71 95 46 22 60 37 35 61 77 15 26 83 16

Tabla 13: Soluciones para el conjunto de datos tsp_100_3

3.14 n40w20.001

El conjunto de datos está formado por la matriz de distancias de 41 nodos junto con sus correspondientes ventanas de tiempo. En este caso se ha resultado de manera exacta mediante la formulación de *Tucker-Miller* añadiendo las correspondientes restricciones $\beta(\beta)$ referidas a las ventanas de tiempo. Los resultados se muestran en la tabla 14.

Método	Distancia	Camino
Exacto	500	1 8 14 17 38 7 16 13 40 3 36 26 5 24 33 4 39 9 2 19 34 15 6 37 11 32 23 22 27 20 10 30 12 28 35 29 25 21 18 41 31

Tabla 14: Soluciones para el conjunto de datos n40w20.001

3.15 n40w20.004

El conjunto de datos está formado por la matriz de distancias de 41 nodos junto con sus correspondientes ventanas de tiempo. En este caso se ha resultado de manera exacta mediante la formulación de *Tucker-Miller* añadiendo las correspondientes restricciones $\beta(\beta)$ referidas a las ventanas de tiempo. Los resultados se muestran en la tabla 15.

Método	Distancia	Camino
Exacto	382	1 14 20 27 34 4 8 16 29 10 31 19 38 5 30 32 7 25 33 37 39 15 9 11 24 6 12 40 22 35 17 36 21 3 28 26 13 2 23 18 41

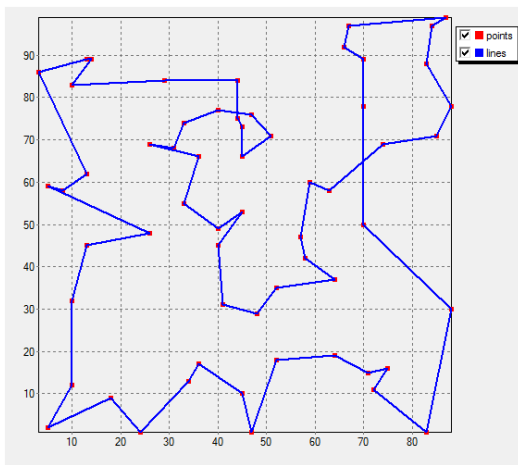
Tabla 15: Soluciones para el conjunto de datos n40w20.004

3.16 n60w20.005

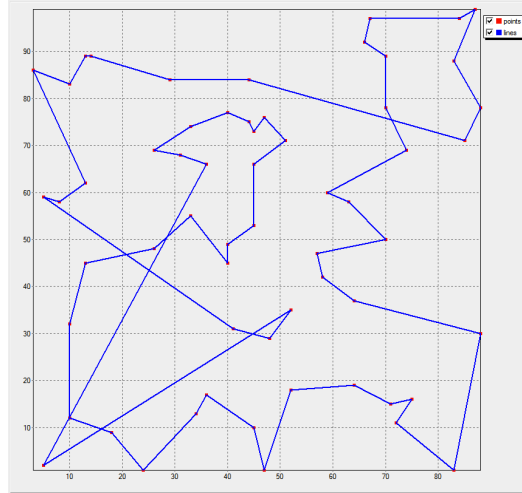
El conjunto de datos está formado por la matriz de distancias de 61 nodos junto con sus correspondientes ventanas de tiempo. En este caso se ha resultado de manera exacta mediante la formulación de *Tucker-Miller* añadiendo las correspondientes restricciones $\beta(\beta)$ referidas a las ventanas de tiempo. Los resultados se muestran en la tabla 16.

Método	Distancia	Camino
Exacto	603	1 9 12 14 36 19 27 43 52 13 51 34 8 30 35 4 45 48 11 21 56 17 29 38 46 20 59 3 50 26 22 33 49 47 54 23 2 53 57 18 7 58 40 28 37 55 32 44 24 39 41 60 31 15 10 6 25 61 16 42 5

Tabla 16: Soluciones para el conjunto de datos n60w20.005



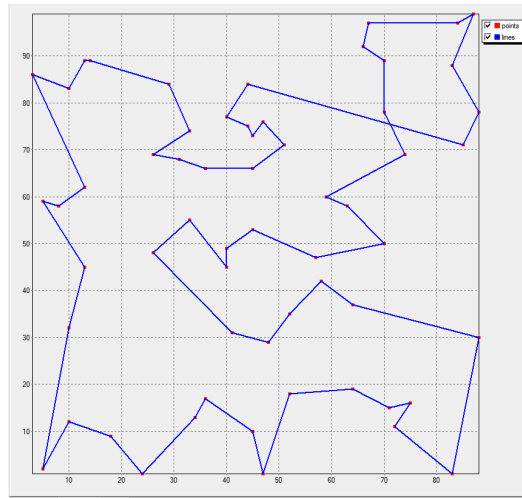
(a) *Solución Exacta*



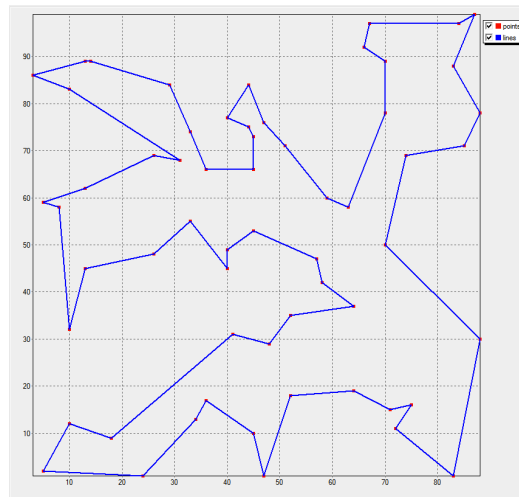
(b) *Solución Entorno más Cercano*



(c) *Solución 2-opt*

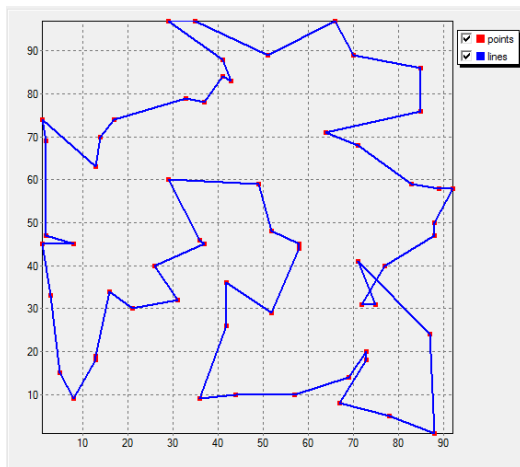


(d) *Solución GRASP*

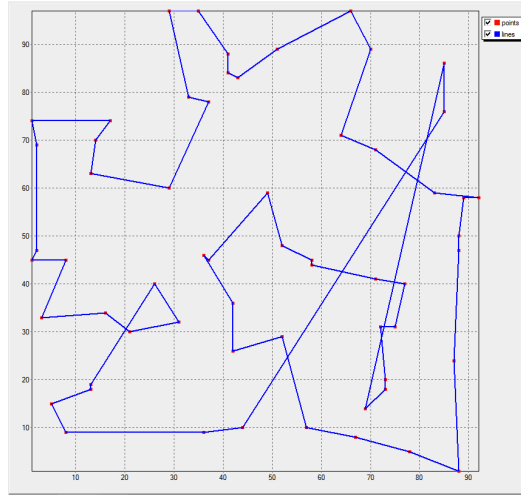


(e) *Solución Simulated Annealing*

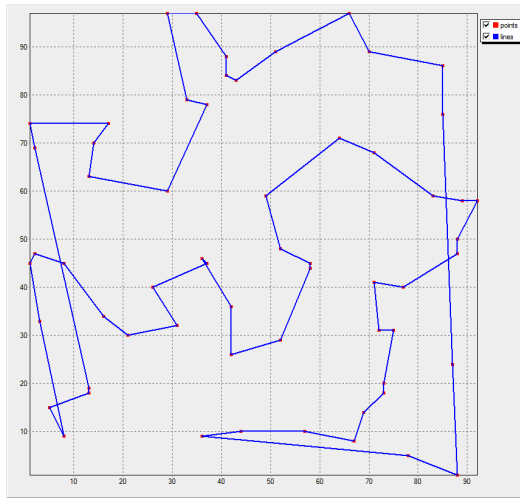
Figura 6: Representación gráfica de las distintas soluciones para el conjunto de datos tsp_60_1



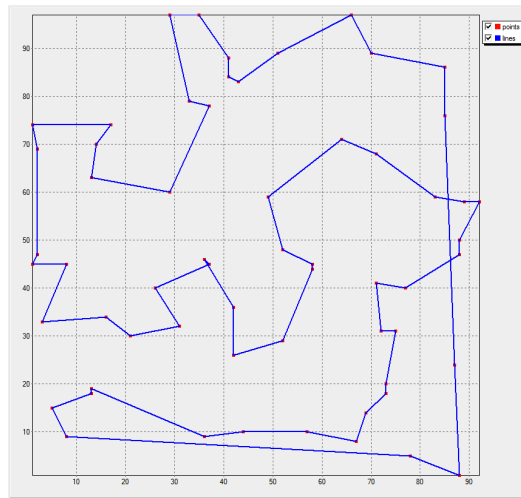
(a) *Solución Exacta*



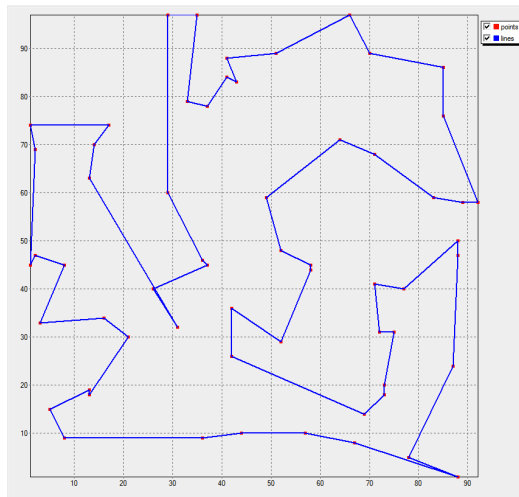
(b) *Solución Entorno más Cercano*



(c) *Solución 2-opt*

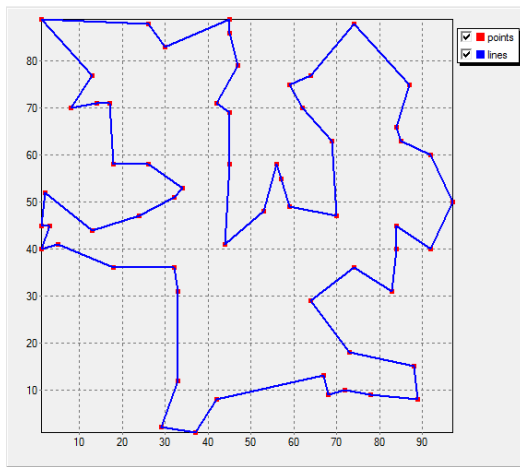


(d) *Solución GRASP*

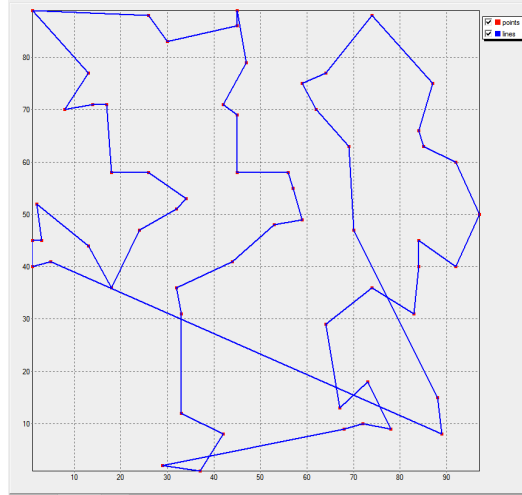


(e) *Solución Simulated Annealing*

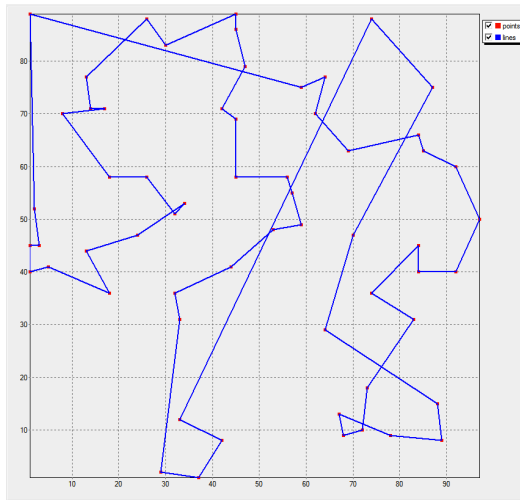
Figura 7: Representación gráfica de las distintas soluciones para el conjunto de datos `tsp_60_2`



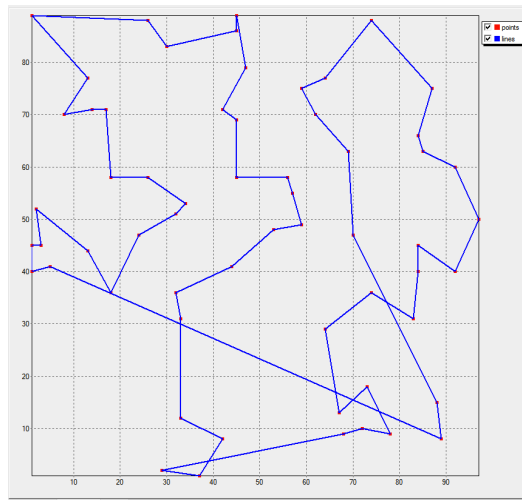
(a) *Solución Exacta*



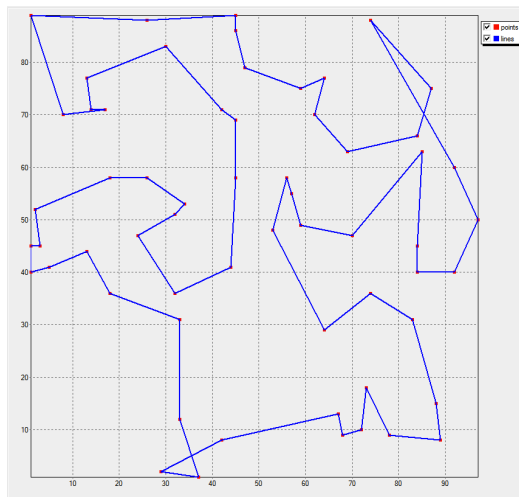
(b) *Solución Entorno más Cercano*



(c) *Solución 2-opt*

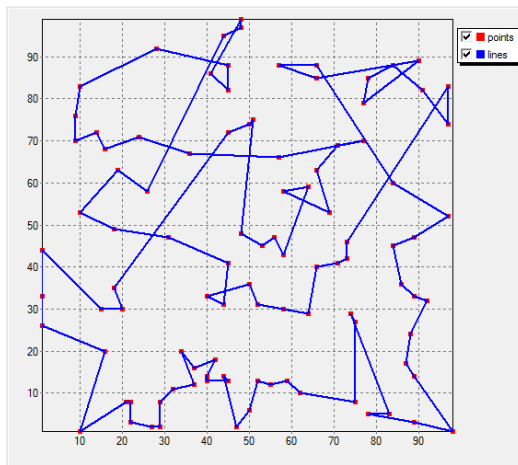


(d) *Solución GRASP*

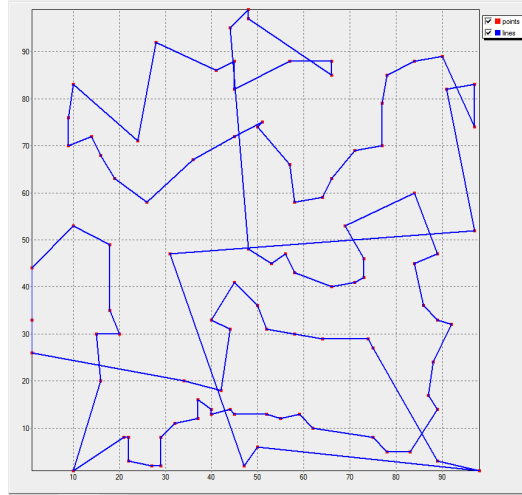


(e) *Solución Simulated Annealing*

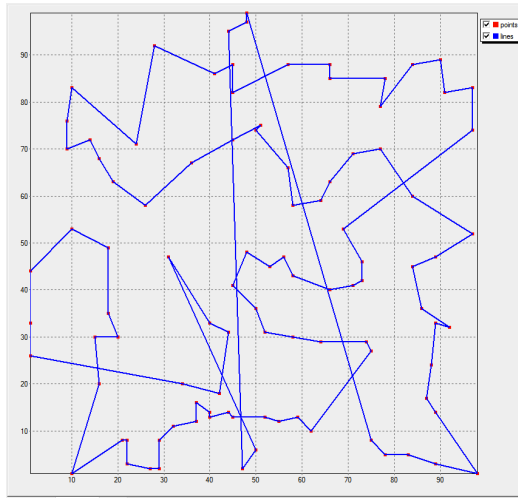
Figura 8: Representación gráfica de las distintas soluciones para el conjunto de datos tsp_60_3



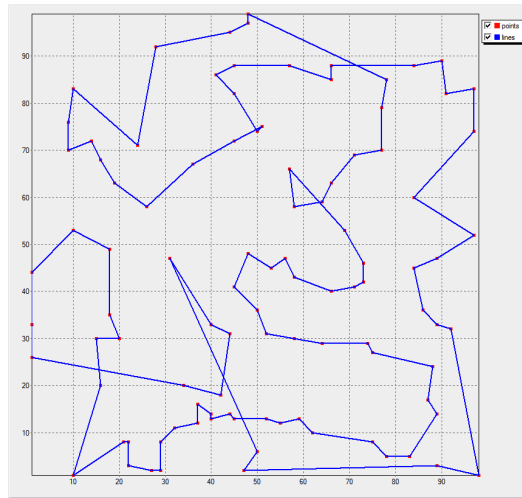
(a) *Solución Exacta*



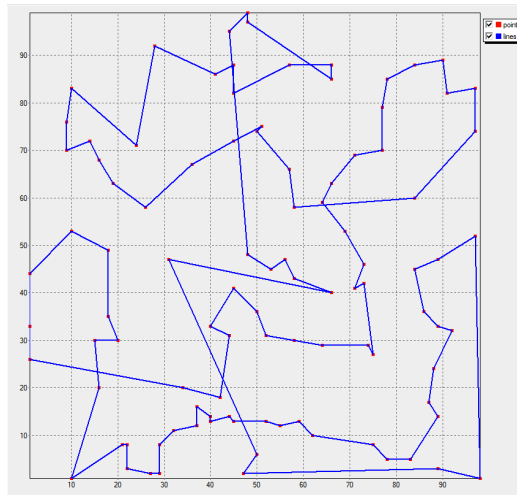
(b) *Solución Entorno más Cercano*



(c) *Solución 2-opt*



(d) *Solución GRASP*



(e) *Solución Simulated Annealing*

Figura 9: Representación gráfica de las distintas soluciones para el conjunto de datos `tsp_100_1`

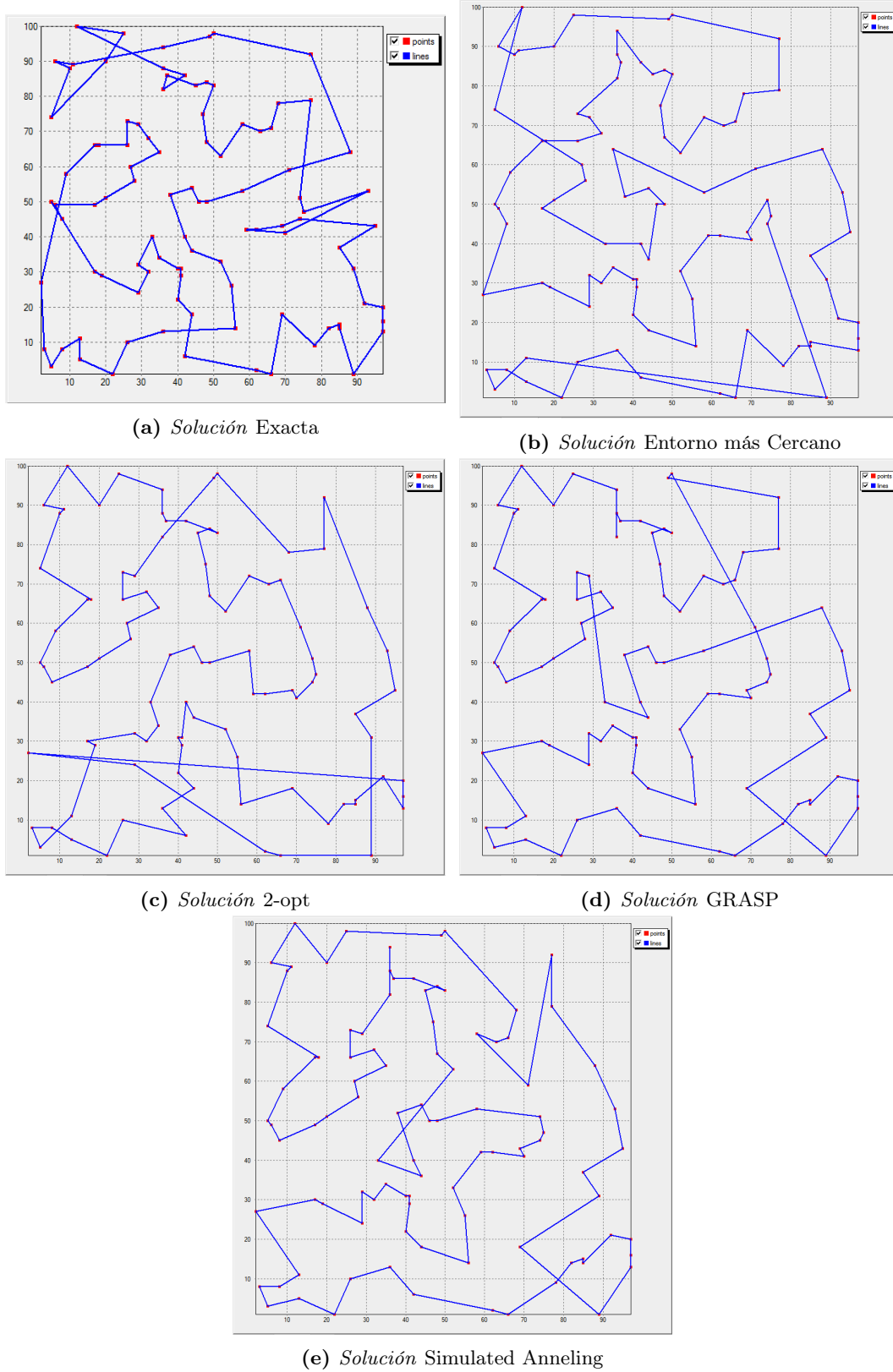


Figura 10: Representación gráfica de las distintas soluciones para el conjunto de datos `tsp_100_2`

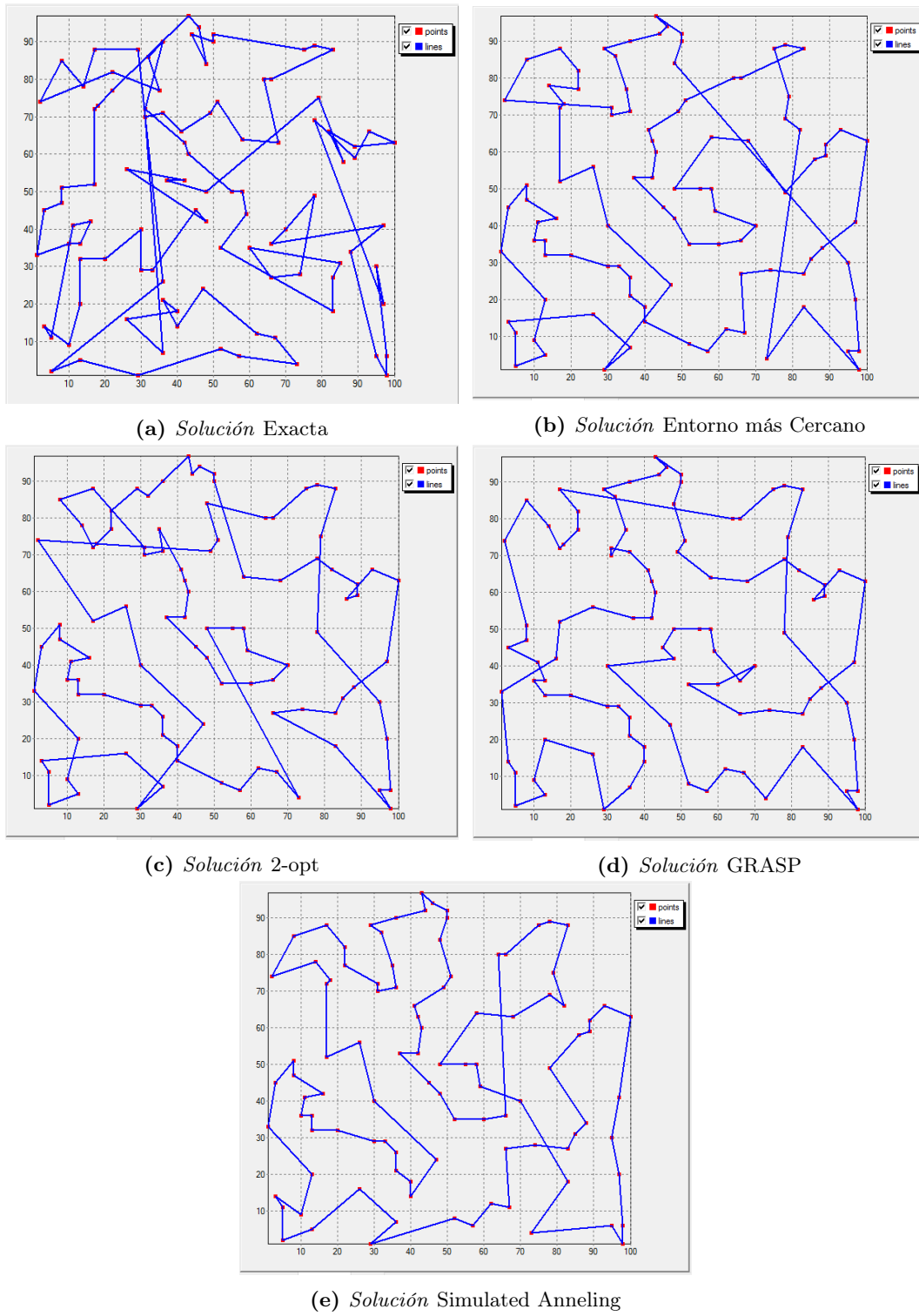


Figura 11: Representación gráfica de las distintas soluciones para el conjunto de datos `tsp_100_3`

REFERENCIAS

- [1] AGUADO, J. S. Modelos de Investigación Operativa, 2016/17.
- [2] GARCÍA PRADO, S. Mosel Examples. <https://github.com/garciparedes/mosel-examples>.