Probabilidad: Tipificación de la Distribución $Normal(\mu, \sigma^2)$ *

García Prado, Sergio
sergio@garciparedes.me

24 de septiembre de 2017

1. Demostración

Demostración de equivalencia en la tipificación de una distribución normal arbitraria ($N(\mu, \sigma^2)$) con la distribución Normal estándar ($N(0,1)$)

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$

$$Z \sim N(0,1) \qquad f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{2}$$

$$Y = \frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \qquad f_Y(y) = ? \tag{3}$$

$$g(y) = \frac{y-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \qquad g^{-1}(y) = \mu\sqrt{\sigma^2} + y \qquad \left|\frac{\partial}{\partial y} g^{-1}(y)\right| = 1 \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{\partial}{\partial y} g^{-1}(y)\right| && (5)\\
&= f\left(\frac{\sqrt{\sigma^2}}{y-\mu}\right)\left|\frac{\partial}{\partial y} g^{-1}(y)\right| && (6)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{((\mu\sqrt{\sigma^2}+y)-\mu)^2}{2\sigma^2}} && (7)\\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{((\sigma-1)\mu+y)^2}{2\sigma^2}} && (8)\\
&= ... && (9)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}} && (10)\\
&= f_Z(y) && (11)\\
Y &= Z \sim N(0,1) && (12)
\end{aligned}$$

Referencias

[RdT18] María Pilar Rodríguez del Tío. Probabilidad, 2017/18.

*URL: https://github.com/garciparedes/probability-normal-standardization