

Probabilidad

Distribución Ordenada *

García Prado, Sergio
sergio@garciparedes.me

1 de noviembre de 2017

1. Introducción

La distribución ordenada es aquella que surge a partir de un conjunto de *variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas* (v.a.i.i.d. a partir de ahora) sobre las cuales se impone la restricción de orden ascendente entre ellas. De manera matemática, se dice que $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$ es un conjunto de v.a.i.i.d. Entonces, la distribución ordenada que surge a partir de estas se denota como $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(i)}, \dots, X_{(n)}$, es decir, se añaden paréntesis a los subíndices. Por tanto, la restricción que tiene esta distribución generada respecto de la anterior es el siguiente: $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(i)} < \dots < X_{(n)}$.

Cabe destacar que estas variables llevan siguen todas ellas la misma distribución (de ahí el *igualmente distribuidas*). Esto se puede denotar como $X_i \sim F$ donde F puede ser cualquier distribución. Por tanto, todas las variables poseen la misma función de densidad y de distribución, es decir, $f(x) = f_{X_i}(x) = f_{X_j}(x)$ y $F(x) = F_{X_i}(x) = F_{X_j}(x)$, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$. La propiedad de *independencia* implica por tanto, que la función de distribución conjunta cumpla la siguiente propiedad: $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1) * \dots * f(x_n)$. Dichas cualidades serán de utilidad posteriormente.

[TODO]

El resto del trabajo se desarrolla de la siguiente manera: en la sección ?? se demuestra la función de densidad conjunta para el vector $(X_{(1)}, X_{(n)})$, que después se particulariza para el caso $X_i \sim \text{Exp}(1)$. En la sección 3 se estudia la distribución del rango $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ y se particulariza para el caso exponencial de parámetro $\lambda = 1$ al igual que en la sección anterior. Por último, en la sección 4 se obtienen las distribuciones del rango y la mediana para el caso de que $X_i \sim U\{1, 2, 3\} \forall i \in \{1, \dots, 4\}$ utilizando propiedades de combinatoria.

2. Función de densidad conjunta de la distribución ordenada $(X_{(1)}, X_{(n)})$ para variables continuas

En esta sección se va a desarrollar la expresión de la función de densidad de la distribución conjunta para el valor mínimo y máximo de una distribución ordenada arbitraria donde el mínimo viene dado por $X_{(1)}$ y el máximo por $X_{(n)}$. Por tanto, se estudiará la distribución generada por el vector aleatorio $(X_{(1)}, X_{(n)})$.

Para estudiar obtener la función de densidad conjunta en este caso, primeramente se va a desarrollar en la ecuación 1 la función de distribución conjunta para llegar hasta una expresión dada a partir de la ley de las variables que componen el conjunto de v.a.i.i.d., que se asume como conocida. En este caso, la idea intuitiva está en el tercer paso, en el que aplica la ley de probabilidades totales para conseguir la desigualdad $x < X_{(1)} < X_{(n)} < y$ que es fácil entender que es equivalente a $x < X_i < y$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

*URL: <https://github.com/garciparedes/probability-ordered-distribution>

$$\begin{aligned}
F_{(X_{(1)}, X_{(n)})}(x, y) &= \\
&= P(X_{(1)} < x, X_{(n)} < y) \\
&= P(X_{(n)} < y) - P(x < X_{(1)}, X_{(n)} < y) \\
&= P(X_{(n)} < y) - P(x < X_{(1)} < X_{(n)} < y) \\
&= P(X_1 < y) * \dots * P(X_n < y) - P(x < X_1 < y) * \dots * P(x < X_n < y) \\
&= F(y) * \dots * F(y) - (F(y) - F(x)) * \dots * (F(y) - F(x)) \\
&= F(y)^n - (F(y) - F(x))^n
\end{aligned} \tag{1}$$

El siguiente paso para llegar a la función de densidad conjunta consiste en el desarrollo de la aplicación de derivación múltiple para llegar a la función de densidad a partir de la de distribución. Esto es posible puesto que se cumple que $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx$. Por tanto, en este caso, la derivación se basa únicamente en la aplicación de operaciones algebraicas a partir de dicha propiedad. Esto se muestra en la ecuación 2.

$$\begin{aligned}
f_{(X_{(1)}, X_{(n)})}(x, y) &= \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{(X_{(1)}, X_{(n)})}(x, y) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} F(y)^n - (F(y) - F(x))^n \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} (n(F(y))^{n-1} * f(y) - (F(y) - F(x))^{n-1} * f(y)) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} (-n(F(y) - F(x))^{n-1} * f(y)) \\
&= n(n-1)f(x)f(y)(F(y) - F(x))^{n-2}
\end{aligned} \tag{2}$$

2.1. Particularización para $X_i \sim \text{Exp}(1)$

Lo siguiente que se va a llevar a cabo es la particularización de la función de densidad conjunta de la distribución ordenada de *v.a.i.i.d* para el caso de que estas sigan una distribución exponencial de parámetro $\lambda = 1$.

$$\begin{aligned}
X_i &\sim \text{Exp}(1) \\
f_{X_i}(x) &= e^{-x} \\
F_{X_i}(x) &= 1 - e^{-x}
\end{aligned}$$

Este desarrollo se lleva a cabo en la ecuación (3) substituyendo las funciones de distribución y densidad de manera apropiada y aplicando operaciones algebraicas.

$$\begin{aligned}
f_{(X_{(1)}, X_{(n)})}(x, y) &= \\
&= n(n-1)f(x)f(y)(F(y) - F(x))^{n-2} \\
&= n(n-1)e^{-x}e^{-y}((1 - e^{-y}) - (1 - e^{-x}))^{n-2} \\
&= n(n-1)e^{-(x+y)}(e^{-x} - e^{-y})^{n-2}
\end{aligned} \tag{3}$$

3. Función de densidad del rango de la distribución ordenada $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ para variables continuas

[TODO]

$$T^{-1} : \begin{cases} R = X_{(n)} - X_{(1)} \\ S = X_{(1)} \end{cases} \quad T : \begin{cases} X_{(1)} = S \\ X_{(n)} = R + S \end{cases} \quad (4)$$

$$abs(J) = abs(det(DT)) = abs \left(det \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial X_{(1)}}{\partial X_{(1)}} & \frac{\partial X_{(n)}}{\partial X_{(1)}} \\ \frac{\partial X_{(1)}}{\partial S} & \frac{\partial X_{(n)}}{\partial S} \end{array} \right) \right) = abs \left(det \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right) \right) = |-1| = 1 \quad (5)$$

$$f_{R,S}(r, s) = \quad (6)$$

$$= f_{(X_{(1)}, X_{(n)})}(s, r + s) \quad (7)$$

$$= n(n-1)f(s)f(r+s)(F(r+s) - F(s))^{n-2} \quad (8)$$

$$f_R(r) = \quad (9)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{R,S}(r, s) ds \quad (10)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} n(n-1)f(s)f(r+s)(F(r+s) - F(s))^{n-2} ds \quad (11)$$

$$= n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} f(s)f(r+s)(F(r+s) - F(s))^{n-2} ds \quad (12)$$

$$(13)$$

3.1. Particularización para $X_i \sim Exp(1)$

[TODO]

$$X_i \sim Exp(1)$$

$$f_{X_i}(x) = e^{-x}$$

$$F_{X_i}(x) = 1 - e^{-x}$$

$$f_R(r) = \quad (14)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{R,S}(r, s) ds \quad (15)$$

$$= n(n-1) \int_0^{\infty} f(s)f(r+s)(F(r+s) - F(s))^{n-2} ds \quad (16)$$

$$= n(n-1) \int_0^{\infty} e^{-s} e^{-(r+s)} ((1 - e^{-(r+s)}) - (1 - e^{-s}))^{n-2} ds \quad (17)$$

$$= n(n-1) e^{-r} \int_0^{\infty} e^{-2s} (e^{-s} - e^{-(r+s)})^{n-2} ds \quad (18)$$

$$= (n-1) e^{-r} e^{-r(-2+n)} (e^r - 1)^{-2+n} \quad (19)$$

$$= (n-1) e^{-2r(-2+n)r} (e^r - 1)^{-2+n} \quad (20)$$

4. Distribuciones del rango y la mediana para la distribución ordenada generada por $X_i \sim U\{1, 2, 3\} \forall i \in \{1, \dots, 4\}$

[TODO]

4.1. Rango

$$\begin{aligned}
X_{(1)} = 1, X_{(4)} = 1 &\Rightarrow \frac{1}{81} \\
1111 &\rightarrow 1 \\
X_{(1)} = 1, X_{(4)} = 2 &\Rightarrow \frac{14}{81} \\
1112 &\rightarrow \frac{4!}{3!1!} = 4 \\
1122 &\rightarrow \frac{4!}{2!2!} = 6 \\
1222 &\rightarrow \frac{4!}{3!1!} = 4 \\
X_{(1)} = 1, X_{(4)} = 3 &\Rightarrow \frac{50}{81} \\
1113 &\rightarrow \frac{4!}{3!1!} = 4 \\
1133 &\rightarrow \frac{4!}{2!2!} = 6 \\
1333 &\rightarrow \frac{4!}{3!1!} = 4 \\
1123 &\rightarrow \frac{4!}{2!} = 12 \\
1223 &\rightarrow \frac{4!}{2!} = 12 \\
1233 &\rightarrow \frac{4!}{2!} = 12 \\
X_{(1)} = 2, X_{(4)} = 2 &\Rightarrow \frac{1}{81} \\
2222 &\rightarrow 1 \\
X_{(1)} = 2, X_{(4)} = 3 &\Rightarrow \frac{14}{81} \\
2223 &\rightarrow \frac{4!}{3!1!} = 4 \\
2233 &\rightarrow \frac{4!}{2!2!} = 6 \\
2333 &\rightarrow \frac{4!}{3!1!} = 4 \\
X_{(1)} = 3, X_{(4)} = 3 &\Rightarrow \frac{1}{81} \\
3333 &\rightarrow 1
\end{aligned}$$

$X_{(1)}, X_{(4)}$	1	2	3	
1	$\frac{1}{81}$	$\frac{14}{81}$	$\frac{50}{81}$	$\frac{65}{81}$
2	0	$\frac{1}{81}$	$\frac{14}{81}$	$\frac{15}{81}$
3	0	0	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{81}$
	$\frac{1}{81}$	$\frac{15}{81}$		1

Tabla 1

Valores	0	1	2
Probabilidad	$\frac{3}{81}$	$\frac{28}{81}$	$\frac{50}{81}$

Tabla 2

4.2. Mediana

$X_{(2)}, X_{(3)}$	1	2	3	
1	$\frac{9}{81}$	$\frac{18}{81}$	$\frac{6}{81}$	$\frac{39}{81}$
2	0	$\frac{21}{81}$	$\frac{18}{81}$	$\frac{27}{81}$
3	0	0	$\frac{9}{81}$	$\frac{9}{81}$
	$\frac{9}{81}$	$\frac{27}{81}$	$\frac{39}{81}$	1

Tabla 3

$$\begin{aligned}
X_{(2)} = 1, X_{(3)} = 1 &\Rightarrow \frac{9}{81} \\
&1111 \rightarrow 1 \\
&1112 \rightarrow \frac{4!}{3!1!} = 4 \\
&1113 \rightarrow \frac{4!}{3!1!} = 4 \\
X_{(2)} = 1, X_{(3)} = 2 &\Rightarrow \frac{18}{81} \\
&1123 \rightarrow \frac{4!}{2!} = 12 \\
&1122 \rightarrow \frac{4!}{2!2!} = 6 \\
X_{(2)} = 1, X_{(3)} = 3 &\Rightarrow \frac{6}{81} \\
&1133 \rightarrow \frac{4!}{2!2!} = 6 \\
X_{(2)} = 2, X_{(3)} = 2 &\Rightarrow \frac{21}{81} \\
&2222 \rightarrow 1 \\
&2223 \rightarrow \frac{4!}{3!1!} = 4 \\
&1222 \rightarrow \frac{4!}{3!1!} = 4 \\
&1223 \rightarrow \frac{4!}{2!} = 12 \\
X_{(2)} = 2, X_{(3)} = 3 &\Rightarrow \frac{18}{81} \\
&1233 \rightarrow \frac{4!}{2!} = 12 \\
&2233 \rightarrow \frac{4!}{2!2!} = 6 \\
X_{(2)} = 3, X_{(3)} = 3 &\Rightarrow \frac{9}{81} \\
&3333 \rightarrow 1 \\
&1333 \rightarrow \frac{4!}{3!1!} = 4
\end{aligned}$$

$$2333 \rightarrow \frac{4!}{3!1!} = 4$$

Valores	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
Probabilidad	$\frac{9}{81}$	$\frac{18}{81}$	$\frac{27}{81}$	$\frac{18}{81}$	$\frac{9}{81}$

Tabla 4

Referencias

- [1] RODRÍGUEZ DEL TÍO, M. P. Probabilidad, 2017/18.