Probabilidad
Distribución Ordenada *

García Prado, Sergio
sergio@garciparedes.me

31 de octubre de 2017

1. Introducción

La distribución ordenada es aquella que surge a partir de un conjunto de *variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas* (v.a.i.i.d. a partir de ahora) sobre las cuales se impone la restricción de orden ascendente entre ellas. De manera matemática, se dice que $X_1, X_2, ..., X_i, ..., X_n$ es un conjunto de v.a.i.i.d. Entonces, la distribución ordenada que surge a partir de estas se denota como $X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(i)}, ..., X_{(n)}$, es decir, se añaden paréntesis a los subíndices. Por tanto, la restricción que tiene esta distribución generada respecto de la anterior es el siguiente: $X_{(1)} < X_{(2)} < ... < X_{(i)} < ... < X_{(n)}$.

Cabe destacar que estas variables llevan siguen todas ellas la misma distribución (de ahí el *igualmente distribuidas*). Esto se puede denotar como $X_i \sim F$ donde F puede ser cualquier distribución. Por tanto, todas las variables poseen la misma función de densidad y de distribución, es decir, $f(x) = f_{X_i}(x) = f_{X_j}(x)$ y $F(x) = F_{X_i}(x) = F_{X_j}(x)$ $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$. La propiedad de *independencia* implica por tanto, que la función de distribución conjunta cumpla la siguiente propiedad: $f(x_1, ..., x_n) = f(x_1) * ... * f(x_n)$. Dichas cualidades serán de utilidad posteriormente.

[TODO]

El resto del trabajo se desarrolla de la siguiente manera: en las sección **??** se demuestra la función de densidad conjunta para el vector $(X_{(1)}, X_{(n)})$, que después se particulariza para el caso $X_i \sim Exp(1)$. En la sección 3 se estudia la distribución del rango $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ y se particulariza para el caso exponencial de parámetro $\lambda = 1$ al igual que en la sección anterior. Por último, en la sección 4 se obtienen las distribuciones del rango y la mediana para el caso de que $X_i \sim U\{1, 2, 3\}$ $\forall i \in \{1, ..., 4\}$ utilizando propiedades de combinatoria.

2. Función de densidad conjunta de la distribución ordenada $(X_{(1)}, X_{(n)})$ para variables continuas

[TODO]

$$
\begin{aligned}
F_{(X_{(1)}, X_{(n)})}(x, y) = & & (1)\\
&= P(X_{(1)} < x, X_{(n)} < y) & (2)\\
&= P(X_{(n)} < y) - P(x < X_{(1)}, X_{(n)} < y) & (3)\\
&= P(X_{(n)} < y) - P(x < X_{(1)} < X_{(n)} < y) & (4)\\
&= P(X_1 < y) * ... * P(X_n < y) - P(x < X_1 < y) * ... * P(x < X_n < y) & (5)\\
&= F(y) * ... * F(y) - (F(y) - F(x)) * ... * (F(y) - F(x)) & (6)\\
&= F(y)^n - (F(y) - F(x))^n & (7)
\end{aligned}
$$

*URL: https://github.com/garciparedes/probability-ordered-distribution

$$
\begin{aligned}
f_{(X_{(1)},X_{(n)})}(x,y) = & & (8)\\
=&\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{(X_{(1)},X_{(n)})}(x,y) & (9)\\
=&\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial y} F(y)^n - (F(y)-F(x))^n) & (10)\\
=&\frac{\partial}{\partial x}(n(F(y)^{n-1} * f(y) - (F(y)-F(x))^{n-1} * f(y))) & (11)\\
=&\frac{\partial}{\partial x}(-n(F(y)-F(x))^{n-1} * f(y))) & (12)\\
=&n(n-1)f(x)f(y)(F(y)-F(x))^{n-2} & (13)
\end{aligned}
$$

2.1. Particularización para $X_i \sim Exp(1)$

$$
\begin{aligned}
X_i \sim & Exp(1) & (14)\\
f_{X_i}(x) = & e^{-x} & (15)\\
F_{X_i}(x) = & 1-e^{-x} & (16)\\
& & (17)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{(X_{(1)},X_{(n)})}(x,y) = & & (18)\\
=&n(n-1)f(x)f(y)(F(y)-F(x))^{n-2} & (19)\\
=&n(n-1)e^{-x}e^{-y}((1-e^{-y})-(1-e^{-x}))^{n-2} & (20)\\
=&n(n-1)e^{-(x+y)}(e^{-x}-e^{-y})^{n-2} & (21)
\end{aligned}
$$

[TODO]

3. Función de densidad del rango de la distribución ordenada $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ para variables continuas

[TODO]

$$
T^{-1}: \begin{cases} R = X_{(n)} - X_{(1)} \\ S = X_{(1)} \end{cases} \qquad T: \begin{cases} X_{(1)} = S \\ X_{(n)} = R + S \end{cases} \tag{22}
$$

$$
abs(J) = abs(det(DT)) = abs\left(det\left(\begin{array}{cc} \frac{\partial X_{(1)}}{\partial R} & \frac{\partial X_{(n)}}{\partial R} \\ \frac{\partial X_{(1)}}{\partial S} & \frac{\partial X_{(n)}}{\partial S} \end{array}\right)\right) = abs\left(det\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right)\right) =\mid -1 \mid = 1 \tag{23}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{R,S}(r,s) = & & (24)\\
=&f_{(X_{(1)},X_{(n)})}(s, r+s) & (25)\\
=&n(n-1)f(s)f(r+s)(F(r+s)-F(s))^{n-2} & (26)
\end{aligned}
$$

$$
f_R(r) = \tag{27}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_{R,S}(r,s)ds && (28)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} n(n-1)f(s)f(r+s)(F(r+s)-F(s))^{n-2}ds && (29)\\
&= n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty} f(s)f(r+s)(F(r+s)-F(s))^{n-2}ds && (30)\\
& && (31)
\end{aligned}
$$

3.1. Particularización para $X_i \sim Exp(1)$

[TODO]

$$
\begin{aligned}
X_i \sim& Exp(1) && (32)\\
f_{X_i}(x) =& e^{-x} && (33)\\
F_{X_i}(x) =& 1-e^{-x} && (34)\\
& && (35)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_R(r) &= && (36)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_{R,S}(r,s)ds && (37)\\
&= n(n-1)\int_{0}^{\infty} f(s)f(r+s)(F(r+s)-F(s))^{n-2}ds && (38)\\
&= n(n-1)\int_{0}^{\infty} e^{-s}e^{-(r+s)}((1-e^{-(r+s)})-(1-e^{-s}))^{n-2}ds && (39)\\
&= n(n-1)e^{-r}\int_{0}^{\infty} e^{-2s}(e^{-s}-e^{-(r+s)})^{n-2}ds && (40)\\
&= (n-1)e^{-r}e^{-r(-2+n)}(e^{r}-1)^{-2+n} && (41)\\
&= (n-1)e^{-2r(-2+n)r}(e^{r}-1)^{-2+n} && (42)
\end{aligned}
$$

4. Distribuciones del rango y la mediana para la distribución ordenada generada por $X_i \sim U\{1,2,3\}\ \forall i \in \{1,...,4\}$

[TODO]

4.1. Rango

$$
\begin{aligned}
X_{(1)} = 1, X_{(4)} = 1 &\Rightarrow \frac{1}{81}\\
1111 &\rightarrow 1\\
X_{(1)} = 1, X_{(4)} = 2 &\Rightarrow \frac{14}{81}\\
1112 &\rightarrow \frac{4!}{3!1!} = 4\\
1122 &\rightarrow \frac{4!}{2!2!} = 6\\
1222 &\rightarrow \frac{4!}{3!1!} = 4
\end{aligned}
$$

$$X_{(1)} = 1, X_{(4)} = 3 \Rightarrow \frac{50}{81}$$

$$1113 \rightarrow \frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$1133 \rightarrow \frac{4!}{2!2!} = 6$$

$$1333 \rightarrow \frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$1123 \rightarrow \frac{4!}{2!} = 12$$

$$1223 \rightarrow \frac{4!}{2!} = 12$$

$$1233 \rightarrow \frac{4!}{2!} = 12$$

$$X_{(1)} = 2, X_{(4)} = 2 \Rightarrow \frac{1}{81}$$

$$2222 \rightarrow 1$$

$$X_{(1)} = 2, X_{(4)} = 3 \Rightarrow \frac{14}{81}$$

$$2223 \rightarrow \frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$2233 \rightarrow \frac{4!}{2!2!} = 6$$

$$2333 \rightarrow \frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$X_{(1)} = 3, X_{(4)} = 3 \Rightarrow \frac{1}{81}$$

$$3333 \rightarrow 1$$

$X_{(1)}, X_{(4)}$	1	2	3	
1	$\frac{1}{81}$	$\frac{14}{81}$	$\frac{50}{81}$	$\frac{65}{81}$
2	0	$\frac{1}{81}$	$\frac{14}{81}$	$\frac{15}{81}$
3	0	0	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{81}$
	$\frac{1}{81}$	$\frac{15}{81}$		1

Tabla 1

Valores	0	1	2
Probabilidad	$\frac{3}{81}$	$\frac{28}{81}$	$\frac{50}{81}$

Tabla 2

4.2. Mediana

$X_{(2)}, X_{(3)}$	1	2	3	
1	$\frac{9}{81}$	$\frac{18}{81}$	$\frac{6}{81}$	$\frac{39}{81}$
2	0	$\frac{21}{81}$	$\frac{18}{81}$	$\frac{27}{81}$
3	0	0	$\frac{9}{81}$	$\frac{9}{81}$
	$\frac{9}{81}$	$\frac{27}{81}$	$\frac{39}{81}$	1

Tabla 3

$$
\begin{aligned}
X_{(2)} = 1, X_{(3)} = 1 &\Rightarrow \frac{9}{81} \\
&1111 \to 1 \\
&1112 \to \frac{4!}{3!1!} = 4 \\
&1113 \to \frac{4!}{3!1!} = 4 \\
X_{(2)} = 1, X_{(3)} = 2 &\Rightarrow \frac{18}{81} \\
&1123 \to \frac{4!}{2!} = 12 \\
&1122 \to \frac{4!}{2!2!} = 6 \\
X_{(2)} = 1, X_{(3)} = 3 &\Rightarrow \frac{6}{81} \\
&1133 \to \frac{4!}{2!2!} = 6 \\
X_{(2)} = 2, X_{(3)} = 2 &\Rightarrow \frac{21}{81} \\
&2222 \to 1 \\
&2223 \to \frac{4!}{3!1!} = 4 \\
&1222 \to \frac{4!}{3!1!} = 4 \\
&1223 \to \frac{4!}{2!} = 12 \\
X_{(2)} = 2, X_{(3)} = 3 &\Rightarrow \frac{18}{81} \\
&1233 \to \frac{4!}{2!} = 12 \\
&2233 \to \frac{4!}{2!2!} = 6 \\
X_{(2)} = 3, X_{(3)} = 3 &\Rightarrow \frac{9}{81} \\
&3333 \to 1 \\
&1333 \to \frac{4!}{3!1!} = 4 \\
&2333 \to \frac{4!}{3!1!} = 4
\end{aligned}
$$

Valores	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
Probabilidad	$\frac{9}{81}$	$\frac{18}{81}$	$\frac{27}{81}$	$\frac{18}{81}$	$\frac{9}{81}$

Tabla 4

Referencias

[1] Rodríguez del Tío, M. P. Probabilidad, 2017/18.