

Probabilidad

Distribución Ordenada *

García Prado, Sergio
sergio@garciparedes.me

31 de octubre de 2017

1. Introducción

La distribución ordenada es aquella que surge a partir de un conjunto de *variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas* (v.a.i.i.d. a partir de ahora) sobre las cuales se impone la restricción de orden ascendente entre ellas. De manera matemática, se dice que $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$ es un conjunto de v.a.i.i.d. Entonces, la distribución ordenada que surge a partir de estas se denota como $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(i)}, \dots, X_{(n)}$, es decir, se añaden paréntesis a los subíndices. Por tanto, la restricción que tiene esta distribución generada respecto de la anterior es el siguiente: $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(i)} < \dots < X_{(n)}$.

Cabe destacar que estas variables llevan siguen todas ellas la misma distribución (de ahí el *igualmente distribuidas*). Esto se puede denotar como $X_i \sim F$ donde F puede ser cualquier distribución. Por tanto, todas las variables poseen la misma función de densidad y de distribución, es decir, $f(x) = f_{X_i}(x) = f_{X_j}(x)$ y $F(x) = F_{X_i}(x) = F_{X_j}(x) \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$. La propiedad de *independencia* implica por tanto, que la función de distribución conjunta cumpla la siguiente propiedad: $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1) * \dots * f(x_n)$. Dichas cualidades serán de utilidad posteriormente.

[TODO]

El resto del trabajo se desarrolla de la siguiente manera: en la sección ?? se demuestra la función de densidad conjunta para el vector $(X_{(1)}, X_{(n)})$, que después se particulariza para el caso $X_i \sim \text{Exp}(1)$. En la sección 3 se estudia la distribución del rango $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ y se particulariza para el caso exponencial de parámetro $\lambda = 1$ al igual que en la sección anterior. Por último, en la sección 4 se obtienen las distribuciones del rango y la mediana para el caso de que $X_i \sim U\{1, 2, 3\} \forall i \in \{1, \dots, 4\}$ utilizando propiedades de combinatoria.

2. Función de densidad conjunta de la distribución ordenada $(X_{(1)}, X_{(n)})$ para variables continuas

[TODO]

$$F_{(X_{(1)}, X_{(n)})}(x, y) = \tag{1}$$

$$= P(X_{(1)} < x, X_{(n)} < y) \tag{2}$$

$$= P(X_{(n)} < y) - P(x < X_{(1)}, X_{(n)} < y) \tag{3}$$

$$= P(X_{(n)} < y) - P(x < X_{(1)} < X_{(n)} < y) \tag{4}$$

$$= P(X_1 < y) * \dots * P(X_n < y) - P(x < X_1 < y) * \dots * P(x < X_n < y) \tag{5}$$

$$= F(y) * \dots * F(y) - (F(y) - F(x)) * \dots * (F(y) - F(x)) \tag{6}$$

$$= F(y)^n - (F(y) - F(x))^n \tag{7}$$

*URL: <https://github.com/garciparedes/probability-ordered-distribution>

$$f_{(X_{(1)}, X_{(n)})}(x, y) = \quad (8)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{(X_{(1)}, X_{(n)})}(x, y) \quad (9)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} F(y)^n - (F(y) - F(x))^n \right) \quad (10)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (n(F(y)^{n-1} * f(y) - (F(y) - F(x))^{n-1} * f(y))) \quad (11)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (-n(F(y) - F(x))^{n-1} * f(y)) \quad (12)$$

$$= n(n-1)f(x)f(y)(F(y) - F(x))^{n-2} \quad (13)$$

2.1. Particularización para $X_i \sim Exp(1)$

$$X_i \sim Exp(1) \quad (14)$$

$$f_{X_i}(x) = e^{-x} \quad (15)$$

$$F_{X_i}(x) = 1 - e^{-x} \quad (16)$$

$$(17)$$

$$f_{(X_{(1)}, X_{(n)})}(x, y) = \quad (18)$$

$$= n(n-1)f(x)f(y)(F(y) - F(x))^{n-2} \quad (19)$$

$$= n(n-1)e^{-x}e^{-y}((1 - e^{-y}) - (1 - e^{-x}))^{n-2} \quad (20)$$

$$= n(n-1)e^{-(x+y)}(e^{-x} - e^{-y})^{n-2} \quad (21)$$

[TODO]

3. Función de densidad del rango de la distribución ordenada $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ para variables continuas

[TODO]

$$T^{-1} : \begin{cases} R = X_{(n)} - X_{(1)} \\ S = X_{(1)} \end{cases} \quad T : \begin{cases} X_{(1)} = S \\ X_{(n)} = R + S \end{cases} \quad (22)$$

$$abs(J) = abs(det(DT)) = abs \left(det \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial X_{(1)}}{\partial R} & \frac{\partial X_{(n)}}{\partial R} \\ \frac{\partial X_{(1)}}{\partial S} & \frac{\partial X_{(n)}}{\partial S} \end{pmatrix} \right) \right) = abs \left(det \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \right) = |-1| = 1 \quad (23)$$

$$f_{R,S}(r, s) = \quad (24)$$

$$= f_{(X_{(1)}, X_{(n)})}(s, r + s) \quad (25)$$

$$= n(n-1)f(s)f(r+s)(F(r+s) - F(s))^{n-2} \quad (26)$$

$$f_R(r) = \quad (27)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{R,S}(r, s) ds \quad (28)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} n(n-1)f(s)f(r+s)(F(r+s) - F(s))^{n-2} ds \quad (29)$$

$$= n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} f(s)f(r+s)(F(r+s) - F(s))^{n-2} ds \quad (30)$$

$$(31)$$

3.1. Particularización para $X_i \sim \text{Exp}(1)$

[TODO]

$$X_i \sim \text{Exp}(1) \quad (32)$$

$$f_{X_i}(x) = e^{-x} \quad (33)$$

$$F_{X_i}(x) = 1 - e^{-x} \quad (34)$$

$$(35)$$

$$f_R(r) = \quad (36)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{R,S}(r, s) ds \quad (37)$$

$$= n(n-1) \int_0^{\infty} f(s)f(r+s)(F(r+s) - F(s))^{n-2} ds \quad (38)$$

$$= n(n-1) \int_0^{\infty} e^{-s} e^{-(r+s)} ((1 - e^{-(r+s)}) - (1 - e^{-s}))^{n-2} ds \quad (39)$$

$$= n(n-1) e^{-r} \int_0^{\infty} e^{-2s} (e^{-s} - e^{-(r+s)})^{n-2} ds \quad (40)$$

$$= (n-1) e^{-r} e^{-r(-2+n)} (e^r - 1)^{-2+n} \quad (41)$$

$$= (n-1) e^{-2r(-2+n)r} (e^r - 1)^{-2+n} \quad (42)$$

4. Distribuciones del rango y la mediana para la distribución ordenada generada por $X_i \sim U\{1, 2, 3\} \forall i \in \{1, \dots, 4\}$

[TODO]

4.1. Rango

| $X_{(1)}, X_{(4)}$ | 1 | 2 | 3 | |
|--------------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1 | $\frac{1}{81}$ | $\frac{14}{81}$ | $\frac{50}{81}$ | $\frac{65}{81}$ |
| 2 | 0 | $\frac{1}{81}$ | $\frac{14}{81}$ | $\frac{15}{81}$ |
| 3 | 0 | 0 | $\frac{1}{81}$ | $\frac{1}{81}$ |
| | $\frac{1}{81}$ | $\frac{15}{81}$ | | 1 |

Tabla 1

| | | | |
|--------------|----------------|-----------------|-----------------|
| Valores | 0 | 1 | 2 |
| Probabilidad | $\frac{3}{81}$ | $\frac{28}{81}$ | $\frac{50}{81}$ |

Tabla 2

4.2. Mediana

| $X_{(2)}, X_{(3)}$ | 1 | 2 | 3 | |
|--------------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1 | $\frac{9}{81}$ | $\frac{18}{81}$ | $\frac{6}{81}$ | $\frac{39}{81}$ |
| 2 | 0 | $\frac{21}{81}$ | $\frac{18}{81}$ | $\frac{27}{81}$ |
| 3 | 0 | 0 | $\frac{9}{81}$ | $\frac{9}{81}$ |
| | $\frac{9}{81}$ | $\frac{27}{81}$ | $\frac{39}{81}$ | $\frac{81}{81}$ |
| | | | | 1 |

Tabla 3

| | | | | | |
|--------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|
| Valores | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | $\frac{5}{2}$ | 3 |
| Probabilidad | $\frac{9}{81}$ | $\frac{18}{81}$ | $\frac{27}{81}$ | $\frac{18}{81}$ | $\frac{9}{81}$ |

Tabla 4

Referencias

- [1] RODRÍGUEZ DEL TÍO, M. P. Probabilidad, 2017/18.