Probabilidad: Transformación de Variables *

García Prado, Sergio
sergio@garciparedes.me

16 de septiembre de 2017

1. Sea X una v. a. normal con media $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = 1$, es decir, $X \sim N(0, 1)$. Hallar la función de densidad de la v.a. $Y = X^2$

Para obtener la función de densidad de la variable transformada se seguirá la ecuación (18). Esta se cumple cuando la función f_X es monotona creciente. Sin embargo, en este caso se deberá adaptar a trozos para que esta sea así, puesto que la función de densidad de la variable normal tiene forma de montículo ("*Campana de Gauss*").

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \implies f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} g(x) =& x^2 && (2) \\ g^{-1}(x) =& \pm\sqrt{x} && (3) \\ \left|\frac{d}{dx} g^{-1}(x)\right| =& \left|\pm\frac{1}{2\sqrt{x}}\right| = \frac{1}{2\sqrt{x}} && (4) \end{aligned}$$

$$f_Y(y) = \sum f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right| \tag{5}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) =& && (6) \\ =& \sum f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right| && (7) \\ =& f_X\left(\sqrt{y}\right)\left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right| + f_X\left(-\sqrt{y}\right)\left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right| && (8) \\ =& 2 f_X\left(\sqrt{y}\right)\left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right| && (9) \\ =& 2 f_X\left(\sqrt{y}\right)\left|\pm\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| && (10) \\ =& 2 f_X\left(\sqrt{y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} && (11) \\ =& 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} && (12) \\ =& \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{y}} \qquad 0 < y < \infty && (13) \end{aligned}$$

---

* https://github.com/garciparedes/probability-variable-transformations

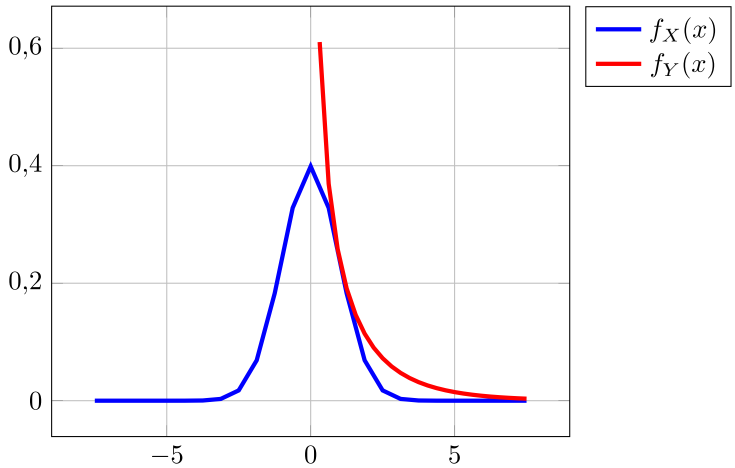

Figura 1:

Debido a

2. Sea X una v. a. uniformemente distribuida en $[0, 2\pi]$, es decir, con función de densidad $f(x) = \frac{1}{2\pi},\ x \in (0, 2\pi)$. Hallar la función de densidad de la v.a. $Y = \cos(X)$

[TODO]

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \tag{14}$$

$$g(x) = \cos(x) \tag{15}$$
$$g^{-1}(x) = \arccos(x) \tag{16}$$
$$\left|\frac{d}{dx}g^{-1}(x)\right| = \left|-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right| = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \tag{17}$$

$$f_Y(y) = \sum f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right| \tag{18}$$

$$f_Y(y) = \tag{19}$$
$$= \sum f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right| \tag{20}$$
$$= 2\frac{1}{2\pi}\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right| \tag{21}$$
$$= 2\frac{1}{2\pi} * \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \tag{22}$$
$$= \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} \qquad -1 < y < 1 \tag{23}$$

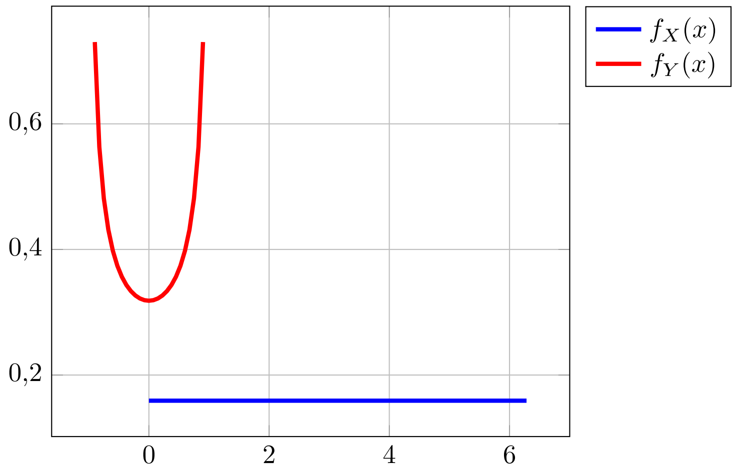

Figura 2:

Referencias

[RdT18] María Pilar Rodríguez del Tío. Probabilidad, 2017/18.