

Probabilidad: Transformación de Variables *

García Prado, Sergio
sergio@garciparedes.me

16 de septiembre de 2017

1. Sea X una v. a. normal con media $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = 1$, es decir, $X \sim N(0, 1)$. Hallar la función de densidad de la v.a. $Y = X^2$

Para obtener la función de densidad de la variable transformada se seguirá la ecuación (18). Esta se cumple cuando la función f_X es monotonamente creciente. Sin embargo, en este caso se deberá adaptar a trozos para que esta sea así, puesto que la función de densidad de la variable normal tiene forma de montículo (“*Campana de Gauss*”).

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \implies f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$g(x) = x^2 \quad (2)$$

$$g^{-1}(x) = \pm \sqrt{x} \quad (3)$$

$$\left| \frac{d}{dx} g^{-1}(x) \right| = \left| \pm \frac{1}{2\sqrt{x}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (4)$$

$$f_Y(y) = \sum f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \quad (5)$$

$$f_Y(y) = \quad (6)$$

$$= \sum f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \quad (7)$$

$$= f_X(\sqrt{y}) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| + f_X(-\sqrt{y}) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \quad (8)$$

$$= 2f_X(\sqrt{y}) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \quad (9)$$

$$= 2f_X(\sqrt{y}) \left| \pm \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| \quad (10)$$

$$= 2f_X(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad (11)$$

$$= 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad (12)$$

$$= \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{y}} \quad 0 < y < \infty \quad (13)$$

* <https://github.com/garciparedes/probability-variable-transformations>

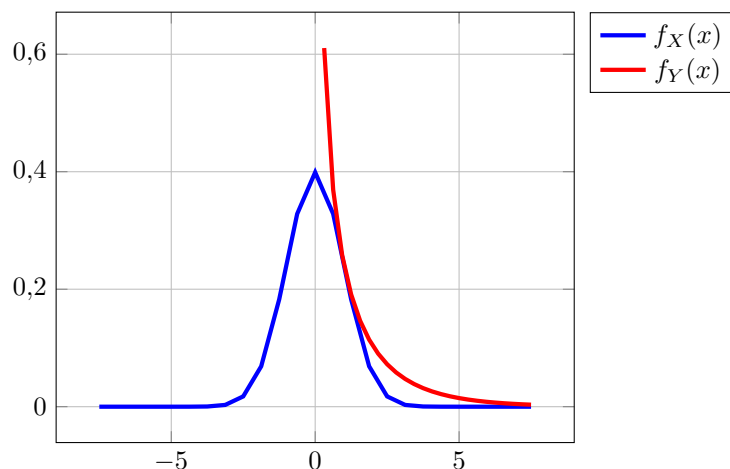


Figura 1

Debido a

2. Sea X una v. a. uniformemente distribuida en $[0, 2\pi]$, es decir, con función de densidad $f(x) = \frac{1}{2\pi}$, $x \in (0, 2\pi)$. Hallar la función de densidad de la v.a. $Y = \cos(X)$

[TODO]

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 < x < 2\pi \quad (14)$$

$$g(x) = \cos(x) \quad (15)$$

$$g^{-1}(x) = \arccos(x) \quad (16)$$

$$\left| \frac{d}{dx} g^{-1}(x) \right| = \left| -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (17)$$

$$f_Y(y) = \sum f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \quad (18)$$

$$f_Y(y) = \quad (19)$$

$$= \sum f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \quad (20)$$

$$= 2 \frac{1}{2\pi} \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \quad (21)$$

$$= 2 \frac{1}{2\pi} * \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad (22)$$

$$= \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}} \quad -1 < y < 1 \quad (23)$$

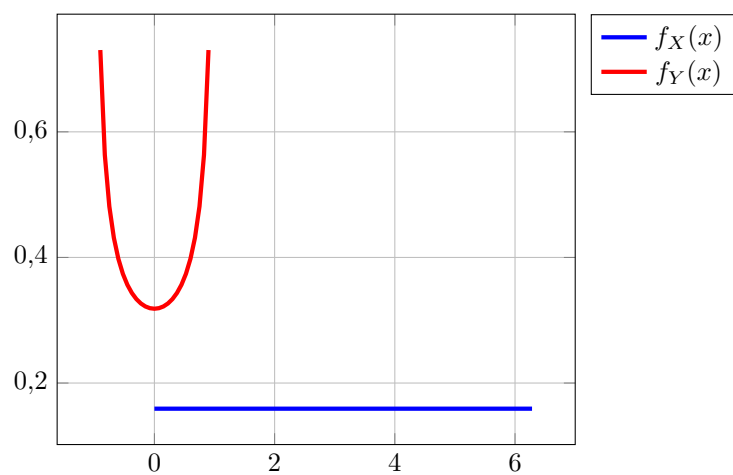


Figura 2

Referencias

[RdT18] María Pilar Rodríguez del Tío. Probabilidad, 2017/18.