Probabilidad: Transformación de Variables *

García Prado, Sergio
sergio@garciparedes.me

16 de septiembre de 2017

1. Sea X una v. a. normal con media $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = 1$, es decir, $X \sim N(0,1)$. Hallar la función de densidad de la v.a. $Y = X^2$

Para obtener la función de densidad de la variable transformada se seguirá la ecuación (5). Esta se cumple cuando la función f_X es monotona creciente. Sin embargo, en este caso se deberá adaptar a trozos para que esta sea así, puesto que la función de densidad de la variable normal tiene forma de montículo ("*Campana de Gauss*").

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \implies f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x/2} \tag{1}$$

$$g(x) = x^2 \tag{2}$$
$$g^{-1}(x) = \pm\sqrt{x} \tag{3}$$
$$\left|\frac{d}{dx} g^{-1}(x)\right| = \left|\pm\frac{1}{2\sqrt{x}}\right| = \frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{4}$$

$$f_Y(y) = \sum f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right| \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
f_Y(y) = & \qquad (6)\\
&= \sum f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right| \qquad (7)\\
&= f_X\left(\sqrt{y}\right)\left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right| + f_X\left(-\sqrt{y}\right)\left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right| \qquad (8)\\
&= 2 f_X\left(\sqrt{y}\right)\left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right| \qquad (9)\\
&= 2 f_X\left(\sqrt{y}\right)\left|\pm\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| \qquad (10)\\
&= 2 f_X\left(\sqrt{y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad (11)\\
&= 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2}\frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad (12)\\
&= \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{y}} \qquad 0 < y < \infty \qquad (13)
\end{aligned}$$

*https://github.com/garciparedes/probability-variable-transformations

Debido a

2. Sea X una v. a. uniformemente distribuida en $[0, 2\pi]$, es decir, con función de densidad $f(x) = \frac{1}{2\pi} if x \in (0, 2\pi)$. Hallar la función de densidad de la v.a. $Y = cos(X)$

[TODO]

Referencias

[RdT18] María Pilar Rodríguez del Tío. Probabilidad, 2017/18.