

# Probabilidad: Transformación de Variables \*

García Prado, Sergio  
sergio@garciparedes.me

17 de septiembre de 2017

## 1. Transformación de la Función de Densidad

Para realizar obtener la función de densidad de la transformación se utiliza la ecuación (1), que relaciona una variable con su transformación. Se denomina  $X$  a la variable aleatoria de origen,  $Y = g(X)$  a la variable obtenida tras la transformación definida por la función  $g$ , cuya inversa es  $g^{-1}$ . Las funciones de densidad de  $X$  e  $Y$  se denominan  $f_X$  y  $f_Y$  respectivamente.

La ecuación (1) se define como una suma de funciones a trozos, particionadas de tal manera que cada tramo sea una función inyectiva. Nótese que (por la definición de función de densidad) la imagen de esta función deberá pertenecer al intervalo  $[0, 1]$ , eliminando del soporte de  $Y$  los casos en que esta restricción no se cumpla.

$$f_Y(y) = \sum f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \quad (1)$$

## 2. Ejercicios

**2.1. Sea  $X$  una v. a. normal con media  $\mu = 0$  y varianza  $\sigma^2 = 1$ , es decir,  $X \sim N(0, 1)$ . Hallar la función de densidad de la v.a.  $Y = X^2$**

Para obtener la función de densidad de la variable transformada se seguirá la ecuación (1), por lo tanto, lo primero es definir  $f_X(x)$ ,  $g(x)$ ,  $g^{-1}(x)$  y  $\left| \frac{d}{dx} g^{-1}(x) \right|$ :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$g(x) = x^2 \quad (3)$$

$$g^{-1}(x) = \pm \sqrt{x} \quad (4)$$

$$\left| \frac{d}{dx} g^{-1}(x) \right| = \left| \pm \frac{1}{2\sqrt{x}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (5)$$

Tal y como se puede apreciar en la figura 1,  $g(x)$  puede representarse a partir de dos funciones inyectivas, que además son simétricas entre sí. Lo cual es útil en el proceso de obtención de la función  $f_Y$  siguiendo la ecuación (1), la cual se realiza en las ecuaciones (6) - (13). En la ecuación (8) simplemente se sustituyen todas las variables por las indicadas anteriormente. En (9) se utiliza la propiedad de simetría.

---

\* <https://github.com/garciparedes/probability-variable-transformations>

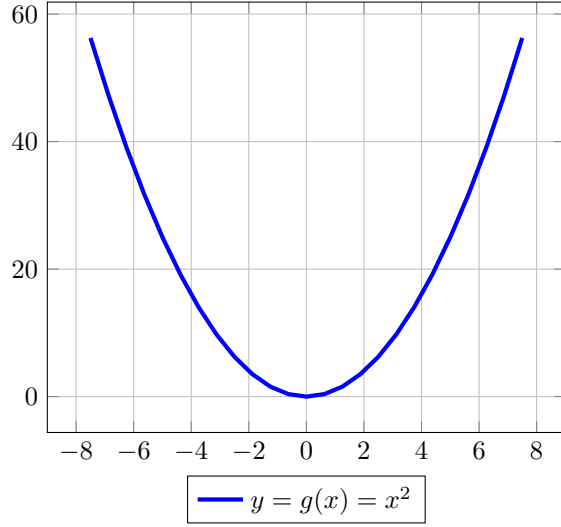


Figura 1

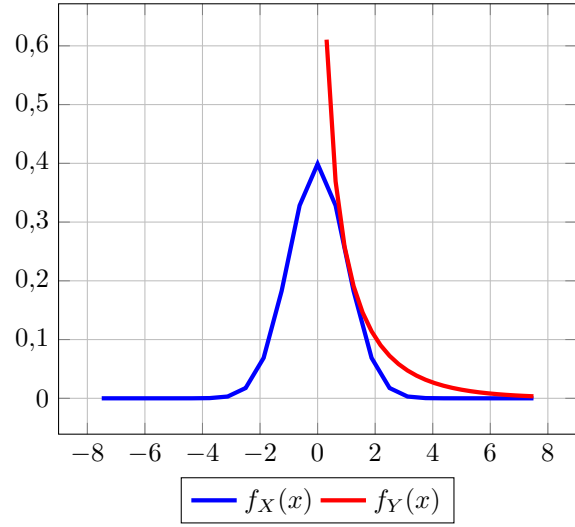


Figura 2

$$f_Y(y) = \quad (6)$$

$$= \sum f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \quad (7)$$

$$= f_X(\sqrt{y}) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| + f_X(-\sqrt{y}) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \quad (8)$$

$$= 2f_X(\sqrt{y}) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \quad (9)$$

$$= 2f_X(\sqrt{y}) \left| \pm \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| \quad (10)$$

$$= 2f_X(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad (11)$$

$$= 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad (12)$$

$$= \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{y}} \quad 0 < y < \infty \quad (13)$$

El resto de cálculos se basan en simplificación hasta llegar a (13), donde se ha indicado el soporte de la variable  $Y$  (todos los reales positivos sin el cero). Se podría haber llegado a esta conclusión estudiando la función  $g$  puesto que su imagen es  $\mathbb{R}^*$ . En la figura 2 se puede visualizar de manera gráfica la relación entre  $f_X$  y  $f_Y$ .

**2.2. Sea  $X$  una v. a. uniformemente distribuida en  $[0, 2\pi]$ , es decir, con función de densidad  $f(x) = \frac{1}{2\pi}$ ,  $x \in (0, 2\pi)$ . Hallar la función de densidad de la v.a.  $Y = \cos(X)$**

Al igual que en el ejercicio anterior, para obtener la función de densidad de la variable transformada se seguirá la ecuación (1), por lo tanto, lo primero es definir  $f_X(x)$ ,  $g(x)$ ,  $g^{-1}(x)$  y  $\left| \frac{d}{dx} g^{-1}(x) \right|$ :

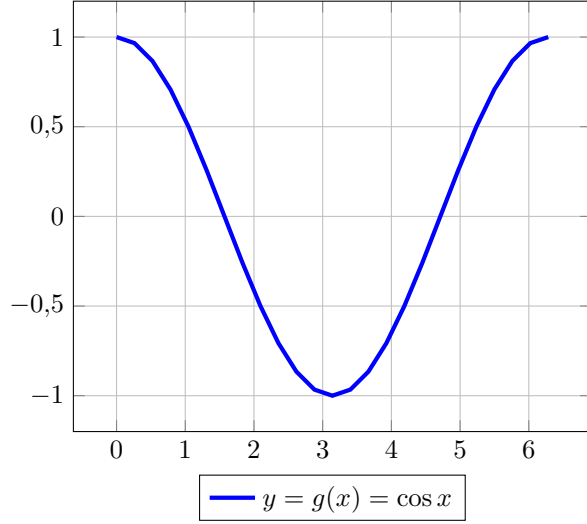


Figura 3

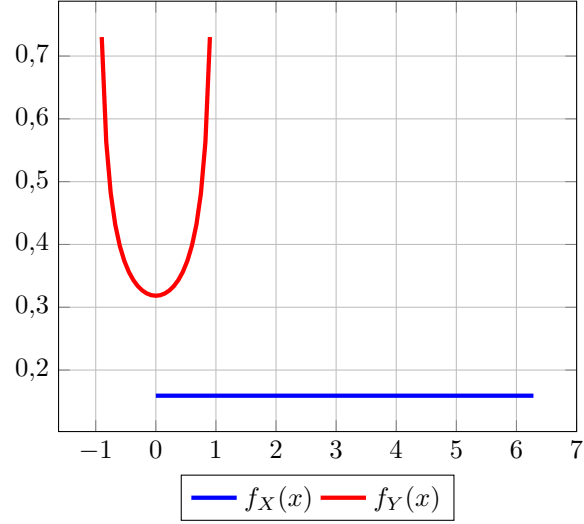


Figura 4

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 < x < 2\pi \quad (14)$$

$$g(x) = \cos(x) \quad (15)$$

$$g^{-1}(x) = \arccos(x) \quad (16)$$

$$\left| \frac{d}{dx} g^{-1}(x) \right| = \left| -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (17)$$

Tal y como se puede apreciar en la figura 1,  $g(x)$  puede representarse a partir de dos funciones inyectivas, que además son simétricas entre sí. Lo cual es útil en el proceso de obtención de la función  $f_Y$  siguiendo la ecuación (1), la cual se realiza en las ecuaciones (18) - (10). En (8) se utiliza la propiedad de simetría.

$$f_Y(y) = \quad (18)$$

$$= \sum f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \quad (19)$$

$$= 2 \frac{1}{2\pi} \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \quad (20)$$

$$= 2 \frac{1}{2\pi} * \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad (21)$$

$$= \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}} \quad -1 < y < 1 \quad (22)$$

El resto de cálculos se basan en simplificación hasta llegar a (22), donde se ha indicado el soporte de la variable  $Y$  (el intervalo  $(-1, 1)$ ). Se podría haber llegado a esta conclusión estudiando la función  $g$  puesto que su imagen es  $(-1, 1)$ . En la figura 4 se puede visualizar de manera gráfica la relación entre  $f_X$  y  $f_Y$ .

## Referencias

[RdT18] María Pilar Rodríguez del Tío. Probabilidad, 2017/18.