

# Muestreo Estadístico: Muestreo Aleatorio Simple con y sin Reemplazamiento \*

García Prado, Sergio  
sergio@garciparedes.me

8 de octubre de 2017

## 1. Demostraciones

A continuación se demuestran distintas propiedades relacionadas con los estadísticos referidos al muestreo aleatorio simple con y sin reemplazamiento.

### 1.1. Probabilidad de inclusión de primer y segundo nivel en muestreo aleatorio simple sin reemplazamiento (m.a.s)

La probabilidad de inclusión en el muestreo aleatorio simple sin reemplazamiento viene condicionada por dos factores diferentes:

(a) el número de posibles muestras que incluyan el elemento  $k$ -ésimo determinado por  $\binom{N-1}{n-1}$  y el de posibles muestras que incluyan los elementos  $k$  y  $l$  tales que  $k \neq l$  determinado por  $\binom{N-2}{n-2}$  así como, (b) la probabilidad de elegir una determinada muestra de tamaño  $n$  de entre todas las posibles, definida como  $\frac{1}{\binom{N}{n}}$ .

Nótese que dichos valores provienen del área de teoría combinatoria, donde se cumple la siguiente propiedad: “Sean  $n$  elementos distintos y  $k \leq n$ . A las distintas agrupaciones no ordenadas de  $k$  elementos elegidos entre  $n$  distintos se las denomina combinaciones de  $n$  elementos tomados en grupos de  $k$ , y el número de dichas combinaciones es  $\binom{N}{k}$ ” [LMPMSB14]

Por tanto, la probabilidad de inclusión queda determinada por el sumatorio de las probabilidades de todas aquellas muestras que incluyen al elemento  $k$  para el caso del primer nivel y de los elementos  $\{k, l\}$ , con  $k \neq l$  para el segundo nivel:

$$\pi_k = \sum_{k \in s} p(s) = \frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} \frac{n}{N} \quad (1)$$

$$\pi_{kl} = \sum_{\{k, l\} \in s} p(s) = \frac{\binom{N-2}{n-2}}{\binom{N}{n}} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \quad (2)$$

### 1.2. Probabilidad de inclusión de primer nivel en muestreo aleatorio con reemplazamiento

$$\pi_k = 1 - \left(1 - \frac{n}{N}\right)^n \quad (3)$$

---

\*URL: <https://github.com/garciparedes/statistical-sampling-simple-random-sample>

**1.3. Varianza del  $\pi$ -estimador para proporciones en muestreo aleatorio simple sin reemplazamiento (m.a.s)**

$$\widehat{Var}(\widehat{P}_\pi) = \frac{1-f}{n-1} \widehat{P}_\pi (1 - \widehat{P}_\pi) \quad (4)$$

**1.4. Intervalo de confianza del  $\pi$ -estimador para el total poblacional en muestreo aleatorio simple sin reemplazamiento (m.a.s)**

$$Pr \left( \tau \in \left[ \widehat{\tau}_\pi \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\widehat{Var}[\widehat{\tau}_\pi]} \right] \right) = 1 - \alpha \quad (5)$$

## Referencias

- [LMPMSB14] Esperanza Larrinaga Miner, María Felisa Pérez Martínez, and Araceli Suárez Barrio. Grado en ingeniería informática, uva: Matemática discreta. 2014.
- [TG18] Jesús Alberto Tapia García. Muestreo Estadístico 1, 2017/18.