Procesos Estocásticos: Ejercicios de Poisson

Gabriel Rodríguez Canal Marcos Ventura Conde Osorio Sergio García Prado

26 de noviembre de 2018

(a) Ejercicio 2.37 - Durret

El enunciado del ejercicio se indica a continuación:

"As a community service members of the Mu Alpha Theta fraternity are going to pick up cans from along a roadway. A Poisson mean 60 members show up for work. Two-third of the workers are enthusiastic and will pick up a mean of ten cans with a standard deviation of 5. One-third of the workers are lazy and will only pick up an average of three cans with a standard deviation of 2. Find the mean and standard deviation of the the number of cans collected."

Lo primero es indicar la notación que utilizaremos para plantear el problema:

$$
\begin{aligned}
M &\equiv \text{Número de miembros que van a recoger latas en cada excursión.} \\
p &\equiv \text{Proporción de miembros entusiastas respecto del total.} \\
M_E &\equiv \text{Número de miembros entusiastas que van a recoger latas.} \\
M_L &\equiv \text{Número de miembros perezosos que van a recoger latas.} \\
E_i &\equiv \text{Número de latas recogidas por el miembro entusiastas i-ésimo} \\
L_j &\equiv \text{Número de latas recogidas por el miembro perezoso j-ésimo} \\
S &\equiv \text{Número de latas recogidas en total.} \\
S_E &\equiv \text{Número de latas recogidas por miembros entusiastas en total.} \\
S_L &\equiv \text{Número de latas recogidas por miembros perezos en total.}
\end{aligned}
$$

Además, el enunciado indica las siguientes propiedades acerca de estas variables aleatorias:

$$
\begin{aligned}
\lambda &= 60 \\
p &= \frac{2}{3} \\
M &\sim Poisson(\lambda) \equiv Poisson(60) \\
E[E_i] &= 10 \\
Var[E_i] &= 5^2 = 25 \\
E[L_j] &= 3 \\
Var[L_j] &= 2^2 = 4
\end{aligned}
$$

Aplicando la propiedad de *thinning* sobre el número de miembros de cada tipo tenemos que:

$$
\begin{aligned}
M_E &\sim Poisson(p \cdot \lambda) \equiv Poisson(40) \\
M_L &\sim Poisson((1-p) \cdot \lambda) \equiv Poisson(20)
\end{aligned}
$$

Además M_E y M_L son independientes entre si. Por tanto, podemos descomponer la suma de latas recogidas en dos subgrupos que podemos calcular por separado:

$$S = S_E + S_L$$

Para el cálculo de esperanzas aplicamos la propiedad de la suma de N variables X_i $i.i.d$, que indica que $E[X_1 + ... + X_N] = E[X_i] \cdot E[N]$. A continuación se muestran los cálculos pertinentes:

$$\begin{aligned} E[S_E] &= E[E_i] \cdot E[M_E] \\ &= 10 * 40 \\ &= 400 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[S_L] &= E[L_j] \cdot E[M_L] \\ &= 3 * 20 \\ &= 60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[S] &= E[S_E] + E[S_L] \\ &= 400 + 60 \\ &= 460 \end{aligned}$$

Para el cálculo de varianzas aplicamos la propiedad de la suma de N variables X_i $i.i.d$, que indica que $Var[X_1 + ... + X_N] = E[N] \cdot Var[X_i] + Var[N] \cdot E[X_i]^2$. A continuación se muestran los cálculos pertinentes:

$$\begin{aligned} Var[S_E] &= E[M_E] \cdot Var[E_i] + Var[M_E] \cdot E[E_i]^2 \\ &= 40 \cdot 25 + 40 \cdot 10^2 \\ &= 5000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var[S_L] &= E[M_L] \cdot Var[L_j] + Var[M_L] \cdot E[L_j]^2 \\ &= 20 \cdot 4 + 20 \cdot 3^2 \\ &= 260 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var[S] &= Var[S_E] + Var[S_L] \\ &= 5000 + 260 \\ &= 5260 \\ SD[S] &= \sqrt{Var[S]} \\ &= \sqrt{5260} \\ &\approx 72{,}5 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución al ejercicio es la siguiente: **En promedio, se recogen 460 latas, con una desviación estándar de 72,5 latas aproximadamente**.

(b) Ejercicio 2.52 - Durret

El enunciado del ejercicio se indica a continuación:

“A light bulb has a life time that is exponential with a mean of 200 days. When it burns out a janitor replaces it immediately. In addition there is a handyman who comes at times of a Poisson process at rate 0.01 and replaces the bulb as ‘preventive maintenance.’ (a) How often is the bulb replaced? (b) In the long run what fraction of the replacements are due to failure?”

Lo primero es indicar la notación que utilizaremos para plantear el problema:

$$\begin{aligned} T_C(n) &\equiv \text{Tiempo en días hasta que un conserje cambie la bombilla por n-ésima vez.} \\ T_M(n) &\equiv \text{Tiempo en días hasta que un encargado de mantenimiento cambie la bombilla por n-ésima vez.} \end{aligned}$$

Además, el enunciado indica las siguientes propiedades acerca de estas variables aleatorias:

$$\begin{aligned}
\lambda_C(n) &= \frac{1}{200 \cdot n} \\
\lambda_M(n) &= \frac{1}{100 \cdot n} \\
T_C(n) &\sim Exp(\lambda_C(n)) \equiv Exp\left(\frac{1}{200 \cdot n}\right) \\
T_M(n) &\sim Exp(\lambda_M(n)) \equiv Exp\left(\frac{1}{100 \cdot n}\right)
\end{aligned}$$

Aplicando la propiedad de *superposition* entre los dos procesos (que asumimos independientes) de cambio de bombilla definimos:

$$\begin{aligned}
T(n) \sim Exp(\lambda_C(n) + \lambda_M(n)) &\equiv Exp\left(\frac{1}{100 \cdot n} + \frac{1}{200 \cdot n}\right) \\
&\equiv Exp\left(\frac{3}{200 \cdot n}\right)
\end{aligned}$$

Entonces, el tiempo esperado para que se cambie una bombilla es:

$$\begin{aligned}
E[T(1)] &= \frac{1}{\lambda_C(1) + \lambda_M(1))} \\
&= \frac{200}{3} \\
&\approx 66{,}6
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución al apartado (a) es la siguiente: **La bombilla se cambia en promedio cada 66.6 días aproximadamente**.

En cuanto al apartado (b), se pregunta pro la fracción a largo plazo referida a que una bombilla se funda antes de cambiarla en buen estado. Esto se puede calcular como la probabilidad de que el suceso T_C (cambio por rotura) ocurra antes que T_M (cambio preventivo). Esto se puede calcular de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} P(T_C(n) < T_M(n)) &= \frac{\lambda_C(n)}{\lambda_C(n) + \lambda_M(n)} \\
&= \frac{\frac{1}{200 \cdot n}}{\frac{3}{200 \cdot n}} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución al apartado (b) es la siguiente: **La probabilidad de que se funda la bombilla antes de que la cambien es de $\frac{1}{3}$**.

(c) Ejercicio 2.60 - Durret

El enunciado del ejercicio se indica a continuación:

"Suppose that the number of calls per hour to an answering service follows a Poisson process with rate 4. Suppose that 3/4s of the calls are made by men, 1/4 by women, and the sex of the caller is independent of the time of the call. (a) What is the probability that in 1 h exactly two men and three women will call the answering service? (b) What is the probability three men will make phone calls before three women do?"

Lo primero es indicar la notación que utilizaremos para plantear el problema:

$$\begin{aligned}
C &\equiv \text{Número de llamadas por hora.}\\
p &\equiv \text{Proporción de hombres respecto del total.}\\
C_H &\equiv \text{Número de miembros entusiastas que van a recoger latas.}\\
C_M &\equiv \text{Número de miembros perezosos que van a recoger latas.}
\end{aligned}$$

Además, el enunciado indica las siguientes propiedades acerca de estas variables aleatorias:

$$\begin{aligned}
&\lambda = 4\\
&p = \frac{3}{4}\\
&C \sim Poisson(\lambda) \equiv Poisson(4)
\end{aligned}$$

Aplicando la propiedad de *thinning* sobre el número de miembros de cada tipo tenemos que:

$$\begin{aligned}
C_H &\sim Poisson(p \cdot \lambda) \equiv Poisson(3)\\
C_M &\sim Poisson((1-p) \cdot \lambda) \equiv Poisson(1)
\end{aligned}$$

Aplicando la propiedad de independencia $P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$ calculamos la probabilidad conjunta de que llamen exactamente 2 hombres y 3 mujeres. Los cálculos se muestran a continuación:

$$\begin{aligned}
P(C_H = 2, C_M = 3) &= P(C_H = 2) \cdot P(C_M = 3)\\
&= \frac{e^{-3} \cdot 3^2}{2!} \cdot \frac{e^{-1} \cdot 1^3}{3!}\\
&\approx 0{,}0137
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución al apartado (a) del ejercicio es la siguiente: **La probabilidad de que en una hora llamen exactamente 2 hombres y 3 mujeres es de 0,0137 approximadamente**.

Para el apartado (b), vamos a aplicar la propiedad que indica que cuando se fija el número de sucesos posibles en un proceso de Poisson, entonces el número de casos favorables se puede probabilizar a partir de la distribución Binomial. La justificación es la siguiente:

Si estudiamos 2 procesos $N_1 \sim Poisson(\lambda_1)$, $N_2 \sim Poisson(\lambda_2)$ independientes, considerando N_1 como casos favorables y N_2 como casos desfavorables, al fijar el número de casos totales en n, entonces la distribucion $Y \sim Bin\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$ permite estudiar el número de casos favorables obtenidos.

Por tanto, para nuestro caso particular definimos $X \sim Bin\left(5, \frac{3}{4}\right)$ dado que el suceso de que llamen 3 hombres antes que 3 mujeres se da estudiando 5 llamadas consecutivas y la proporción de llamadas realizadas por hombres es de $\frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned}
P(X \geq 3) &= \sum_{i=3}^{6} \binom{6}{k} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{6-k}\\
&\approx 0{,}633
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución al apartado (b) del ejercicio es la siguiente: **La probabilidad de que lleguen 3 llamadas realizadas por hombres antes que 3 llamadas realizadas por mujeres es de 0,633 aproximadamente**.