

Synthetic Aperture Radar

Problèmes inverses

Pierrick Bournez, Mathis Wetterwald

Master Mathématiques, Vision, Apprentissage

ENS Paris-Saclay

29 mars 2025

Du problème physique à la fonction image

Formulation du problème

Éléments mathématiques

La fonction image

Calculs théoriques et expériences sur le problème

Resolution Analysis

Stabilité : données bruitées

Stabilité : position des antennes bruitées

Introduction : Formulation du problème

- On cherche à estimer la position d'un objet inconnu z_{ref} de réflectivité ρ_{ref}
- On a n capteurs qui émettent un signal $f_n(t) = f(t - T_n)$ et reçoivent consécutivement un signal. On a $\hat{f}(\omega) = \mathbf{1}_{[\omega_0 - B, \omega_0 + B]}(\omega)$.
- Pour cela, on veut modéliser les données, concevoir une fonction d'imagerie et calculer sa robustesse
- Les capteurs transmettent et analysent le signal chacun leur tour, il est transmis dans un milieu homogène

n capteurs
 $x = (x_n, 0, 0)$

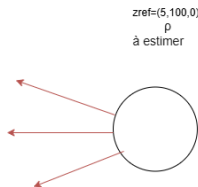
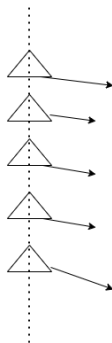


Figure – Problème à résoudre

- On modélise les données par $\hat{r}_n(\omega) = \rho \hat{G}_0(\omega, x_n, z_{\text{ref}})^2 \hat{f}_n(\omega)$.
- Rappel : $\hat{G}_0(\omega, x_n, z_{\text{ref}}) = \frac{1}{4\pi|x_n - z_{\text{ref}}|} \exp(i\omega|x_n - z_{\text{ref}}|)$
- Cela correspond à une équation d'onde avec une réflectivité $\rho = \rho_{\text{ref}}\delta(x - z_{\text{ref}})$.
- $\hat{G}_0(\omega, x_n, z_{\text{ref}})^2$ s'interprète comme la réception en x_n d'une onde réfléchiée en z_{ref} et issue de x_n .

On choisit comme fonction d'imagerie :

$$I(x) = \sum_{n=1}^N \int \overline{\hat{R}(\omega, x, x_n)} \hat{r}_n(\omega) d\omega \quad (1)$$

$$\hat{R}(\omega, x, x_n) = \hat{G}_0(\omega, x_n, z_{\text{ref}})^2 \hat{f}_n(\omega) \quad (2)$$

- Physiquement : corrélation entre le "bon" signal et le signal cherché
- Mathématiquement, grâce à Plancherel, on se ramène à un produit scalaire

Resolution analysis

On se place dans ce cadre :

$$B \ll \omega_0 \quad \text{et} \quad \lambda_0 \ll a \ll L \quad \text{où} \quad \lambda_0 = \frac{2\pi c_0}{\omega_0} \quad \text{et} \quad L = \left\| \mathbf{z}_{\text{ref}} - \frac{\mathbf{x}_N}{2} \right\|.$$

Un calcul direct donne :

$$\text{pour } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, I(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n|^2} \frac{1}{|\mathbf{x}_n - \mathbf{z}_{\text{ref}}|^2} \frac{1}{A_n(\mathbf{x})} \exp(2i\omega_0 A_n(\mathbf{x})) \sin(2B A_n(\mathbf{x})) \quad (3)$$

- selon l'axe x ($\mathbf{x} = \mathbf{z}_{\text{ref}} + \epsilon(1, 0)$), on obtient $I(x) = \text{sinc}\left(\frac{\omega_0 a}{L\epsilon}\right)$
- Selon l'axe y ($\mathbf{x} = \mathbf{z}_{\text{ref}} + \epsilon(0, 1)$), on obtient $I(x) = \text{sinc}(2B\epsilon) \text{sinc}\left(\frac{\omega_0 a}{2L}\epsilon\right)$

Résolution Analysis dans notre cas

- On trouve donc dans une analyse mathématique une largeur de $\frac{L}{a} \frac{\pi}{2\omega_0} = 2.5$ en x et $\frac{1}{2} \frac{\pi}{B} \approx 2$ en y.
- Numériquement, on utilise la fonction de green pour un milieu homogène et on intègre l'imaging function par la méthode des trapèzes.



Analyse de stabilité : Données bruitées

- On modélise maintenant les données par $\hat{r}_n(\omega) = \hat{r}_n(\omega) + \hat{b}_n(\omega)$ avec \hat{b}_n un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ^2 : bruit gaussien des récepteurs !
- On montre alors que $J(x) = I(x) + N(x)$ avec N un bruit gaussien complexe de fonction de covariance $c(x, x') = \sigma^2 \sum_w \sum_n \hat{R}(\omega, x, x_n) \hat{R}(\omega, x', x_n)$
- On regarde ∇I et $\nabla^2 I$ en z_{ref} pour trouver l'argmax de l'imaging function bruitée
- On trouve $E(|z_{ref} - \hat{z}|^2) = \frac{18}{4B^4} \sigma^2 M \frac{1}{N \rho_{ref}^2} (4\pi L)^4 w_0^2$

Notre fonction d'imagerie avait un maximum en z_{ref} de 10^{-7} .

On remarque les trois scénarios du cours :

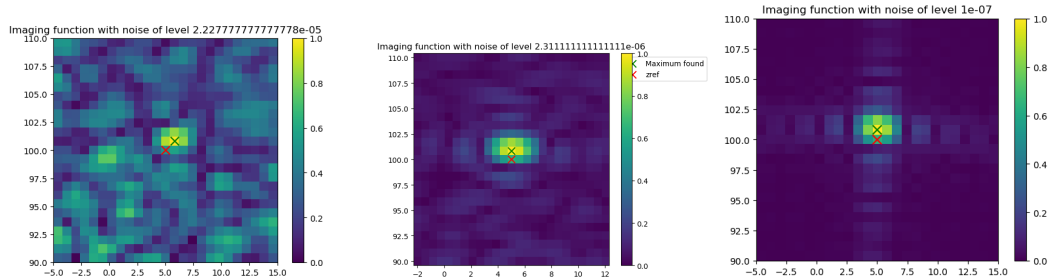


Figure – Trois scénarios de bruit sur les données

Stabilité : Position des antennes bruitée

- On suppose maintenant que les positions des antennes sont modélisés par $x'_n = x_n + \epsilon_n$ avec ϵ_n des gaussiennes dans R^3 . Nous n'avons pas pu aboutir à un résultat
- On a toujours mais avec la variable aléatoire $A_n(x) = |x_{n'} - z_{\text{ref}}| - |x_n - x|$

$$\text{pour } x \in R^3, I(x) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{|x - x_n|^2 |x_n - z_{\text{ref}}|^2} \exp(2iw_0 A_n(x)) \text{sinc}(2BA_n(x)) \quad (4)$$

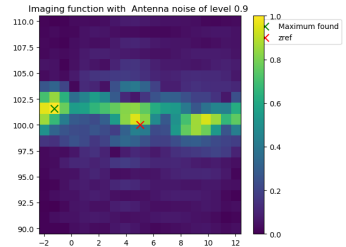
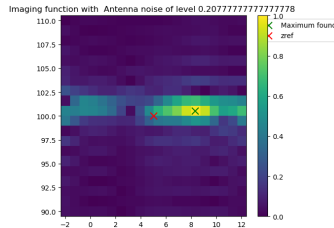
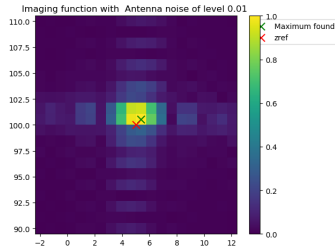
- pour trouver la résolution en x et y, On aurait pu approximer :

$$I(x) \approx \frac{1}{L^4} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp(2iw_0 A_s(x)) \text{sinc}(2BA_s(x)) ds$$

et utiliser les théorèmes sur les intégrales de processus à temps continus pour estimer l'erreur...

Analyse de stabilité : partie numérique

L'argmaximum se déplace uniquement selon l'axe x



- Vialard, F.-X., Risser, L., Rueckert, D., & Cotter, C. J. (2012). *Diffeomorphic 3D Image Registration via Geodesic Shooting Using an Efficient Adjoint Calculation*. *Int. J. Comput. Vis*, 97 :229–241.
- Beg, M. F., Miller, M. I., Trouvé, A., & Younes, L. (2005). *Computing large deformation metric mappings via geodesic flow of diffeomorphisms*. *IJCV*, 61 :139–157.