Komplekse tall
FE-MAT1001: Obligatorisk 2

av Gard Klemetsen
Student ID: 107212

Innhold

- Det komplekse planet

- Komplekse tall på kartesisk form, polar form og eksponential form

- Utregning av $\sqrt{i}$.

- Ekstra hvis det er tid til overs

Komplekse tall

Komplekse tall fremkommer i sammensetninger med reelle tall. Komplekse tall er en utvidelse av de reellee tallene som vi kjenner til. Komplekse tall er en tallemengde som inneholder de reelle tallene. Den vanligste måten å vise et komplekse tall på er via $\sqrt{-1}$. Vanligvis bruker man i isteden for $\sqrt{-1}$, fordi det er lettere å gjøre utregninger når vi representere det slik. Et komplekst tall kan representeres på flere former bla. kartesisk form, polar form og eksponentiell form.

Egenskaper til i

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$

$i^4 = (\sqrt{-1})^4 = i^2 * i^2 = (-1)(-1) = 1$

$i^5 = i^4 * i^1 = 1 * \sqrt{-1} = \sqrt{-1} = i$ osv.

Når i sin eksponent kan deles på 4 og svaret er et helt tall, så vet vi at tallet er 1.

Komplekse tall på kartesisk form

- Komplekse følger samme aritmetiske regler som reelle tall

- Kartesisk form er også kjent som grunnformen.

- Et komplekst tall kan representeres på denne formen

$Z = a + ib$

Regneregler

Addisjon av komplekse tall på kartsisk form

- Bruker vanlige regler, men man må få den reelle delen for seg selv og den imaginære delen for seg selv.

$Z_1 = a_1 + ib_1$, $Z_2 = a_2 + ib_2$

$Z_1 + Z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$

Her faktoriserer vi i utenfor en parantes for å skille mellom den reelle tallmengden og den imaginære delen. Vi kan nå sammenligne med grunnformen, $Z = a + ib$.

$i(b_1 + b_2) \equiv ib$ og $a_1 + a_2 \equiv a \longrightarrow a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2) \equiv a + ib$. Tallet er nå på kartesisk form og vi har løst oppgaven.

Multiplikasjon av komplekse tall på kartesisk form

$Z_1 * Z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)$

$a_1a_2 + a_1ib_2 + a_2ib_1 + b_1b_2i^2$

$a_1a_2 + a_1ib_2 + a_2ib_1 - b_1b_2$ fordi $i^2 = -1$

$a_1a_2 + a_1ib_2 + a_2ib_1 - b_1b_2$

Setter i utenfor en parantes. Slik at vi får den imaginære delen for seg selv og den reelle tallmengden for seg selv. $(a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$. Produktet står nå på grunnformen $Z = a + ib$

Den kompleks konjugerte

Den kompleks konjugerte har motsatt fortegn på den imaginære delen av tallet. $\overline{Z}$ = den kompleks konjugerte til et hvilket som helst komplekst tall Z. $\overline{Z}$, uttales Zbar. $Z = a + ib$, $\overline{Z} = a - ib$.

Divisjon av komplekse tall

Som ved matriseoppgaver, vet vi at tallet multiplisert med den inverse til tallet er 1. Som definisjon sier vi at $\frac{Z}{Z} = Z * \frac{1}{Z} = Z * Z^{-1} = 1$. Vi må finne ut hva Z^{-1}er for å kunne bruke divisjon på komplekse tall.

La oss prøve å multiplisere Z med den komplekse konjugerte til Z

$\bar{Z} * Z = (a + ib)(a - ib) = a^2 - iba + iba - i^2b^2 = a^2 - (-1)b^2 = a^2 + b^2$

$\bar{Z} * Z = a^2 + b^2$

Vi multipliserer med den kompleks konjugerte til Z, $\overline{Z}$ på begge sider av likningen $Z^{-1} * Z = 1$.

$Z^{-1} * Z = 1$

$Z^{-1} * Z * \bar{Z} = 1 * \overline{Z}$

Vi vet fra tidligere at $Z * \overline{Z} = a^2 + b^2$. Vi setter dette inn i likningen.

$Z^{-1}(a^2 + b^2) = \overline{Z}$. Så vet vi at $\overline{Z} = a - ib$, vi setter dette inn i likningen.

$Z^{-1}(a^2 + b^2) = a - ib$. Nå gjenstår det bare å dele på $(a^2 + b^2)$ på begge sider av likningen for å finne ett utrykk for den inverse til Z.

$Z^{-1} = \frac{\overline{Z}}{(a^2+b^2)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{\overline{Z}}{|Z|^2} \longrightarrow Z^{-1} = \frac{\overline{Z}}{|Z|^2}$

Definisjon av divisjon av 2 komplekse tall blir da

$\frac{Z}{Z} = Z * \frac{1}{Z} = Z * Z^{-1} = Z * \frac{\overline{Z}}{|Z|^2} = \frac{Z * \overline{Z}}{|Z|^2} = \frac{|Z|^2}{|Z|^2} = 1$

Kvadratet til modulen

$Z * \overline{Z} = |Z|^2$

$|Z|^2$ = kvadratet til modulen, hvor modulen er $|Z|$.

Eksempeloppgave

$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1+i}{1-i}$

$\frac{Z_1}{Z_2} = Z_1 * \frac{1}{Z_2} = Z_1 * Z_2^{-1} = Z_1 * \frac{\overline{Z_2}}{|Z_2|^2}$

$|Z|^2 = (1-i)\overline{(1-i)} = (1-i)(1+i)$

$\overline{Z} = \overline{(1-i)}$

Vi setter inn verdiene vi fant

$\frac{Z_1}{Z_2} = Z_1 * \frac{\overline{Z_2}}{|Z_2|^2} = (1+i) * \frac{(1+i)}{(1-i)(1+i)}$

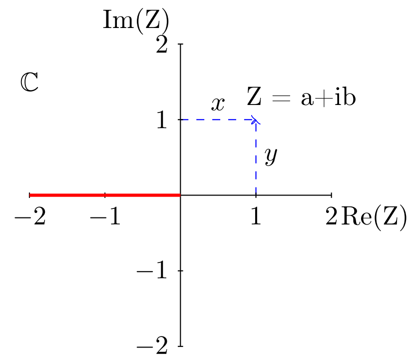
Så regner vi ut

$\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i+i+i^2}{1+i-i-i^2} = \frac{1+2i-1}{1-(-1)} = \frac{2i}{2} = i$

$\frac{1+i}{1-i} = i$

Det komplekse planet

Alle komplekse tall på formen $Z = a + ib$ kan representeres ved et punkt i et to-dimensjonalt kartesisk koordinatsystem. Den horisontale aksen kalles for den reelle aksen. Den vertikale aksen kalles for den imaginære aksen. Det komplekse tallet Z befinner seg i punktet (a, b).



Det komplekse tallet $Z \in \mathbb{C}$

Reelle delen $Re(Z) = x \in \mathbb{R}$

Den imaginære delen $Im(Z) = y \in Im$

$Z = a + ib = (x \in \mathbb{R}, y \in Im)$

Størrelsen på den imaginære delen er gitt av ib, og den reelle delen er gitt ved a. Firkanten som blir dannet med origo og de 3 punktene kalles for det komplekse planet $\mathbb{C}$. Koordinatsystemet tolkes som et vanlig koordinatsystem. Når vi skal finne det komplekse tallet i et kartesisk koordinatsystem, så må vi se på tallet representert på kartesisk form, $Z = a + ib$. Vi kan tenke oss at punktet a på den reelle aksen og punktet b langs den imaginære aksen kan omformuleres til tilhørende koordinater x og y. Da blir det komplekse tallet definert slik: $Z = x + iy$. Der x og y er reelle tall, men y definerer størrelsen på den imaginære delen av det komplekse tallet.

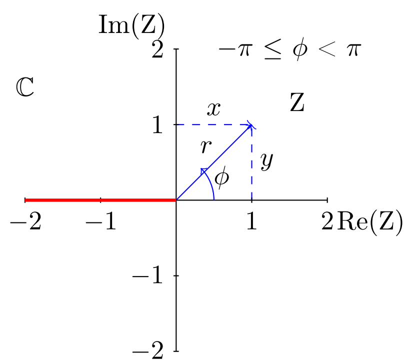
Som definisjon sier vi at den reelle delen til Z er definert som $Re(Z) = x$. Tilsvarende er den imaginære delen av Z definert som $Im(Z) = y$.

Y: Gir oss en størrelse på hvor mange i vi har og hvor langt oppover den imaginære aksen punktet befinner seg.

X: Den reelle delen av koordinatsystem. Dette er bare et reelt tall som ikke forteller noe om hvor stor i er, men gir oss et punkt langs den reelle aksen. Tallet Z befinner seg i punktet (x, y) i det kartesiske koordinatsystemet.

Komplekse tall på polar form

Polar form representerer et komplekst tall i et koordinatsystem vha. 1 fysisk lengde og vinkel i forhold til referanselinjen x.



I tegningen over kan man se at tallet Z blir representert av en vinkel ϕ og en fysisk avstand r. Vi må benytte trigonometri for å bevise at tallet også kan representeres på denne måten. Det jeg nå skal vise, kalles for koordinattransformasjon. Koordinattransformasjon går utpå å utlede en formel fra koordinater til en vinkel og en avstand i den retningen. Vi kan se at lengden r er den fysiske avstanden fra origo til det komplekse tallet Z. Den lengden er også lik hypotenusen i trekanten. Vi kan derfor benytte pytagoras for å finne lengden r.

$r^2 = x^2 + y^2 \longrightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} \longrightarrow$Dette er også likt: $Z * \overline{Z} = x^2 + y^2 = |Z|^2$

$|Z|^2 = x^2 + y^2 \longrightarrow |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Vi kan derfor si at avstanden $r = |Z|$.

Så må vi finne vinkelen ϕ, dette kan vi gjøre vha. cos, sin eller tangens.

$tan(\phi) = \frac{y}{x} \longrightarrow \phi = tan^{-1}(\frac{y}{x})$

Så må vi uttrykke lengdene x og y vha. cosinus og sinus.

$cos(\phi) = \frac{x}{r} = \frac{x}{|Z|} \longrightarrow x = |Z| * cos(\phi)$

$sin(\phi) = \frac{y}{r} = \frac{y}{|Z|} \longrightarrow y = |Z| * sin(\phi)$

La oss nå se på den kartesiske formen igjen $Z = x + iy$. Vi setter inn x og y verdiene uttrykt vi fant uttrykt ved sinus og cosinus.

$Z = |Z| * cos(\phi) + i * |Z| * sin(\phi)$

Vi kan faktorisere ut $|Z|$.

$Z = |Z|(cos(\phi) + isin(\phi)) \Leftrightarrow Z = r((cos(\phi) + isin(\phi))$

Vi har nå uttrykt det komplekse tallet på polar form. Det er også vanlig å bruke r istedenfor modulen til tallet.

Ett komplekst tall på polarform kan skrives på flere forskjellige måter

$Z = |Z| * (cos(\phi) + i * sin(\phi))$

$Z = r * (cos(\phi) + i * sin(\phi))$

$Z = \sqrt{x^2 + y^2} * (cos(\phi) + i * sin(\phi))$

Viktige ting å legge merke til

$Arg(Z) = \phi$. Argumentet til Z er vinkelen ϕ, denne vinkelen definerer i hvilken retning det komplekse tallet befinner seg. Denne vinkelen er alltid definert i radianer.

$r = lengden$. Lengden forteller hvor langt unna origo det komplekse tallet befinner seg. Denne lengden er alltid positiv, uansett hvilken retning.

Når vi jobber med komplekse tall på polar form må vi alltid sørge for å avgrense vinkelene. Hvis f.eks $\phi = \frac{\pi}{4}$ radianer og vi ikke har en avgrensing, så kan få flere mulige løsninger, $2\pi + \frac{\pi}{4}$ etc. Vanlig avgrensninger er $0 \leq \phi < 2\pi$, og $-\pi \leq \phi < \pi$. Hvis vi ikke definerer området hvor Arg(Z) kan være definert, så vil vi få uendelig mange løsninger pga. ArgZ ikke har noen begrensinger, så vet vi ikke om det er i første omdreing eller 2 osv.

Viktige regler for cosinus og sinus

$-sin(\phi) = sin(-\phi)$, kan sette minustegnet foran når vi har en negativ vinkel.

$cos(-\phi) = cos(\phi)$, cos til en negativ radianer er alltid positivt.

Komplekse tall på eksponentiell form

På eksponentiell form trenger vi en vinkel og en avstand for å kunne finne posisjonen til det komplekse tallet Z. Eksponentiell form er en mye lettere form å bruke enn polar form. Det sies at man bruker halvparten så lang tid på å finne ut av komplekse tall vha. eksponentiell form enn ved å bruke polar form.

Eulers formel

$e^{i*\theta} = cos(\theta) + i * sin(\theta)$

Eksponentialform

$re^{i*\theta} = r(cos(\theta) + i * sin(\theta))$. Dette kan beviss vha. Eulers formel.

$Z = cos(\theta) + i * sin(\theta)$

La oss nå finne kvadratet til modulen til Z.

$|Z|^2 = Z * \overline{Z}$

$Z = (cos(\theta) + i * sin(\theta))$

$(cos(\theta) + i * sin(\theta)) * (cos(\theta) - i * sin(\theta)) = cos^2(\theta) + sin^2(\theta)$

$|Z|^2 = cos^2(\theta) + sin^2(\theta)$

$|Z|^2 = cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$

Dette stemmer uansett hvilken vinkel vi velger å sette inn.

Vi kan derfor konkludere med at:

$|Z|^2 = cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$

Hva er den inverse til Z, når vi har tallet på eksponential form?

$Z^{-1} = \frac{1}{Z} = \frac{\overline{Z}}{|Z|^2} = \frac{\overline{Z}}{1} = \overline{Z}$

Fordi $|Z|^2 = cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$

$Z^{-1} = \overline{Z}$

Den inverse til Z

Den inverse til Z, $Z^{-1} = \overline{Z}$ ved eksponentiell form

Beviset for at et komplekst tall kan skrives på eksponentiell form

$Z * \overline{Z} = |Z|^2 = 1$

$e^x * e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$

$e^{i*\phi} = cos(\phi) + i * sin(\phi)$

Konklusjon

$Z = re^{i*\phi} = r(cos(\phi) + i * sin(\phi))$

Den kompleks konjugerte til et komplekst tall på eksponentiell form

- Den imaginære delen av tallet får motsatt fortegn

$\overline{e^{i*\phi}} = e^{-i*\phi} = cos(\phi) - i * sin(\phi) = \overline{Z}$

Hvordan uttrykker vi trigonometriske funksjoner på eksponentialform? $e^{i*\phi} = cos(\phi) + i * sin(\phi) = Z$. Vi kan løse dette ved vanlig linjereduksjon. Først summerer vi dem på både høyre og venstre side.

Cosinus uttrykt på eksponential form vha. Eulers formel.

$Z + \overline{Z}$

$e^{i*\phi} + e^{-i*\phi} = cos(\phi) + i * sin(\phi) + cos(\phi) - i * sin(\phi)$

$e^{i*\phi} + e^{-i*\phi} = 2cos(\phi)$

$cos(\phi) = \frac{1}{2}(e^{i*\phi} + e^{-i*\phi})$

Sinus uttrykt på eksponentialform vha. Eulers formel

Så gjør vi det samme på nytt, bare nå subtrahere vi på begge sider.

$Z - \overline{Z}$

$e^{-i*\phi} - e^{i*\phi} = cos(\phi) - i * sin(\phi) - (cos(\phi) + i * sin(\phi))$

$e^{-i*\phi} - e^{i*\phi} = -2isin(\phi)$

$-2isin(\phi) = e^{-i*\phi} - e^{i*\phi}$

$sin(\phi) = \frac{1}{2i}(e^{i*\phi} - e^{-i*\phi})$

Legg merke til at det er samme vinkel og samme lengde som benyttes både på polar og eksponentiell form.

$Z = re^{i*\phi} = r(cos(\phi) + i * sin(\phi))$

Det er mulig å bevise trigonometriske formler vha. Eulers formel

La oss se på $cos(a \pm b) = cos(a)cos(b) \mp sin(a)sin(b)$

Vi benytter uttrykket for cosinus som vi fant vha. Eulers formel

$cos(\phi) = \frac{1}{2}(e^{i*\phi} + e^{-i*\phi})$

$cos(a \pm b) = \frac{1}{2}(e^{i*(a+b)} + e^{-i*(a+b)}) = \frac{1}{2}(e^{i*a}e^{i*b} + e^{-i*a}e^{-i*b})$. Også vet vi at $e^{i*a} = cos(a) + isin(a)$. Vi legger dette inn i likningen, og summerer dem. Resultatet blir: $cos(a \pm b) = cos(a)cos(b) \mp sin(a)sin(b)$. Vi har nå bevist at det som står i formelsamlingene er mulig å bevise. Vi har bevist at komplekse tall kan brukes til å utlede andre formler!

Utregning av $\sqrt{i}$

$i = \sqrt{-1}$

$\sqrt{i} = i^{\frac{1}{2}}$

Vi vet at $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ på eksponentiell form, fordi på kartesisk form så ser det komplekse tallet slik ut: $Z = a + ib$.

Da må dette komplekse tallet se slik ut: $\sqrt{i} = 0 + 1 * i$. Dette betyr at vi bare flytter punktet opp langs den imaginære aksen. Da må vinkelen være $\frac{\pi}{2}$ og lengden til punktet må være 1. På samme måte kan vi da si at $\sqrt{i} = \sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}}$. Vi legger $2\pi n$ til ArgZ, siden dette er en kvadratisk likning, så er det muligheter for å få flere enn 1 løsning. Dette kan vi derfor sjekke ved å finne alle løsningene i en omdreining.

$\sqrt{i}_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi n)*\frac{1}{2}} = e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi n)}$

Vi gjør om $e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi n)}$ til polarform. $r(cos(\phi) + isin(\phi))$.

$\sqrt{i}_0 = 1(cos(\frac{\pi}{4} + \pi * 0) + isin(\frac{\pi}{4} + \pi * 0)) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

$\sqrt{i}_1 = 1(cos(\frac{\pi}{4} + \pi * 1) + isin(\frac{\pi}{4} + \pi * 1)) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$

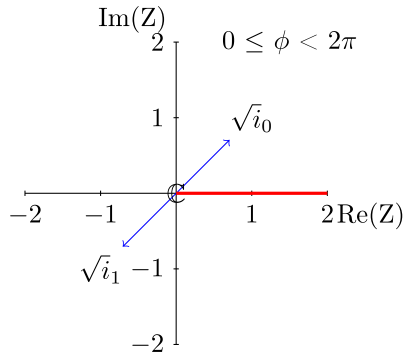
$\sqrt{i}_2 = 1(cos(\frac{\pi}{4} + \pi * 2) + isin(\frac{\pi}{4} + \pi * 2)) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

$\sqrt{i}_0 = \sqrt{i}_2$. Vi har gått en hel omdrening, og vi vet derfor at vi får 2 forskjellige løsninger når $n = 0$ og $n = 1$.

Løsningen blir

$\sqrt{i} = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)$

Nå kan vi sette dette inn i ett kartesisk koordinatsystem for å finne ut hvor $\sqrt{i}$ ligger.



Eksempeloppgaver

Hvordan gå fra kartesisk form til polarform og så til eksponentialform?

$Z = a + ib = r(cos(\phi) + i * sin(\phi)) = r(e^{i*\phi})$

Eksempel: $Z = 1 + i$ $\longrightarrow$polar form

Vi trenger en vinkel og vi trenger en lengde for å kunne uttrykke det komplekse tallet på polarform.

Vi har begrensningen: $0 \leq ArgZ < 2\pi$

$Z = 1 + i$, hvor $x = 1$ og $y = 1$.

$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = |Z| = \sqrt{2}$

$ArgZ = \phi = tan^{-1}(\frac{Y}{X}) = tan^{-1}(\frac{1}{1}) = \frac{\pi}{4}$

Vi setter så bare inn vinkelen og lengden vi fant. Vi har klart å representere det samme tallet på polar form.

$Z = \sqrt{2}(cos(\frac{\pi}{4}) + isin(\frac{\pi}{4})) = r(cos(\phi) + i * sin(\phi))$

For å gjøre det om til eksponentiell form, setter vi bare inn de samme verdiene i formelen.

$Z = r * e^{i*\phi} = r(cos(\phi) + i * sin(\phi))$ $Z =\sqrt{2}e^{i*\frac{\pi}{4}}$

Divisjon av 2 komplekse tall på kartesisk form

$Z = 1 - i$

$\frac{Z}{\overline{\overline{Z}}} = Z * \overline{Z}^{-1}$

$Z * Z^{-1} = (1-i) * Z^{-1} = (1-i) * \frac{\overline{\overline{Z}}}{|\overline{Z}|^2} = (1-i) * \frac{(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-2i}{2} = -i$

Nå har vi løst divisjon på kartesisk form. La oss se på det på eksponentialform.

$r = \sqrt{2}$ og $ArgZ = \frac{7}{4}\pi$

$Z = \sqrt{2} * e^{i\frac{7}{4}\pi}$

$\overline{Z} = \sqrt{2} * e^{-i\frac{1}{4}\pi}$

$\frac{Z}{\overline{Z}} = \frac{\sqrt{2}*e^{i\frac{7}{4}\pi}}{\sqrt{2}*e^{i\frac{1}{4}\pi}} = \frac{e^{i\frac{7}{4}\pi}}{e^{i\frac{1}{4}\pi}}$

Bruker brøk og potensregelen:

- Blir negativt opphøyd når vi flytter det opp og de multipliseres sammen.

$\frac{e^{i\frac{7}{4}\pi}}{e^{i\frac{1}{4}\pi}} = e^{i\frac{7}{4}\pi} * e^{-(i\frac{1}{4}\pi)} = e^{i\frac{7}{4}\pi - i\frac{1}{4}\pi} = e^{i\frac{6}{4}\pi} = e^{i\frac{3}{2}\pi}$

Svaret blir $e^{i\frac{3}{2}\pi}$, men hvor befinner dette tallet seg i koordinatsystemet?

$Z = e^{i\frac{3}{2}\pi} = 1 * e^{i\frac{3}{2}\pi}$

Dette betyr at lengden til punktet er |Z|=1. Vi vet også at vinkelen er $\frac{3}{2}\pi = 270 grader$. Dette betyr at $x = 0$ og at vi befinner oss på y-aksen. Den imaginære aksen. Det komplekse tallet ligger derfor i punktet $(0, -1)$ 270 grader fra referanselinjen.

Fra eksponential-form til polar-form til kartesisk-form direkte

$e^{i\phi} = r(cos(\phi) + i * sin(\phi))$

For å få dette på kartesisk form, multipliserer vi bare ut polarformen og setter det opp på formen $Z = a + ib$. Der vi setter den imaginære delen og den reelle delen hver for seg.

Der vi har et tall på eksponentiell form som ser slik ut: $r * e^{a+i\phi}$. Der a er ett reelt tall. Kan vi bruke denne definisjonen:

$re^{a+i\phi} = r(e^a * e^{i\phi})$

$r * e^{a+\phi*i} = re^a(cos(\phi) + i * sin(\phi))$

For den konjugerte

$r * e^{a+-i\phi} = re^a(cos(\phi) - i * sin(\phi))$

Ved addisjon/subtraksjon/multiplikasjon osv. av 2 komplekse tall på forskjellige former må vi få tallene på samme form før vi begynner å multiplisere dem.

$(1 + i) * e^{i\frac{\pi}{4}}$

Vi setter det komplekse tallet som er på kartesisk form på eksponentiell form

$\sqrt{2}e^{i*\frac{\pi}{4}} * e^{i*\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{(i*\frac{\pi}{4})+(i*\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i*\frac{\pi}{2}}$

Vinkelen blir $\frac{\pi}{2}$ og lengden på r = $\sqrt{2}$. Når vi vet avstand og i hvilken retning kan vi enkelt tegne dette inn i et koordinatsystem og finne det komplekse tallet, eller så kan vi bare multiplisere tallet på polarform.

Løse en likning vha. eksponentiell form

$Z^2 = 1$

Vi setter tallet på høyre side på eksponentiell form først.

$r = 1$ og $\phi = 0$

$Z^2 = 1 * e^{i*\phi}$

Nå legger vi $2\pi * n$ til $ArgZ$. Dette er lov, fordi vi har lyst til å finne flere løsninger i løpet av en omdreining. Variabelen n justerer vinkelen / Argz.

$(Z^2)^{\frac{1}{2}} = \left(e^{i(0+2\pi*n)}\right)^{\frac{1}{2}}$

$Z = e^{i*\pi*n}$

Nå kan vi finne de ulike løsningene ved å endre på variabelen n.

$Z_0 = e^{i*\pi*0} = e^0 = 1$

$Z_1 = e^{i*\pi*1} = e^{i*\pi} = cos(\pi) + i * sin(\pi) = -1 + 0 = -1$

$Z_2 = e^{i*\pi*2} = cos(2\pi) + i * sin(2\pi) = 1 + 0 = 1$

Som vi ser så har vi løst likningen for 3 mulige verdier for n. Det man burde legge merke til her er at $Z_0 = Z_3$. Dette betyr at vi har beveget ArgZ en hel omdreining, og vi har da funnet alle de mulige løsningene denne likningen kan ha.

$Z = (Z_0, Z_1) = 1, -1$

Nyttig å vite

Kvadrantene definerer områder for x og y aksen.

1. Kvadrant

I området: $0 - \frac{\pi}{2}$

2. Kvadrant

I området: $\frac{\pi}{2} - \pi$

3. Kvadrant

I området: $\pi - \frac{3}{2}\pi$

4. Kvadrant

I området: $\frac{3}{2}\pi - 2\pi$

Fra grader til radianer:

$\phi * \frac{\pi}{180}$

Fra radianer til grader:

$\phi * \frac{180}{\pi}$