# Matematikk
# DA-MAT1001
av Gard Klemetsen

## Kapittel 10.1
## Lineære likningssystemer og matriser

Begreper
Fri variable
- En variabel som kan være hvilket som helst reelt tall. (Alle irrasjonale og rasjonale tall)
- En fri variabel skrives ofte slik: $x \in R$.
- x sitt definisjonsområde er alle de reelle tallene.

Avhengig variabler
- En variabel som endrer verdi utifra hva de andre variabelene er.
- $y = 2x$
- y får en annen verdi for hver nye x-verdi.
- y er derfor avhengig av hva x er.

Kontinuerlig funksjon
- Funksjonen henger sammen, det finnes ingen asymptoter.

Lineær ligning
- $y = 2x$
- Funksjonen er av 1. orden, (ikke opphøyd). Det er derfor en rett linje.

Gauss-eliminasjon
- Er en algoritme for å løse sett sett med lineære likninger.
- En sum av 2 reelle tall har bare 1 løsning. Dersom 2 likninger i et system skal ha forskjellig svar, så er det ingen løsning.

Inhomogent likningssystem
- Systemet er inkosistent, dvs. ingen løsning, dersom det er minst en likning med alle koeffisienter foran de ukjente lik 0 og konstantleddet er forskjellig fra null.
- Systemet er ellers konsistent og har:
1. eksakt løsning dersom antall likninger er lik antall ukjente
2. uendelig mange løsninger dersom antall likninger er mindre enn antall ukjente.

Homogent lineært likningssystem

- Systemet er alltid konsistent (sammenhengende) da den trivielle løsningen, alle ukjente lik 0, vil passe.
- Systemet har ikke-trivelle løsninger dersom antall likninger er mindre enn antall ukjente.

Et lineært likningssystem kalles homogent hvis alle b'ene = 0, dvs. b er en nullvektor. Hvis b $\neq$ 0 kalles systemet inhomogent.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $L1$ | $a3*x1$ | $a2*x2$ | $a1*x3$ | $=$ | $b1$ |
| $L2$ | $a4*x1$ | $a5*x2$ | $a6*x3$ | $=$ | $b2$ |
| $L3$ | $a*m*1$ | $a*m*2$ | $a*m*n$ | $=$ | $bm$ |

Homogent:
$2x + 2y = 0$
$3x - 1y = 0$

Inhomogent:
$2x + 2y = 2$
$3x + 10y = 1$

Innsettingsmetoden/substitusjon
- Denne metoden funker på flere enn 2 ukjente også, men det viser seg at det tar veldig lang tid om vi skulle utføre denne metoden på likninger med mer enn 2 ukjente.
(1) $x + y = 1 \longrightarrow x = 1 - y$
(2) $x - 2y = 2$

Setter (1) inn i likning (2)

(2) $(1 - y) - 2y = 2 \longrightarrow 1 - 3y = 2 \longrightarrow -3y = 1 \longrightarrow y = -\frac{1}{3}$
Y settes inn i likning 1 for å finne x.

(1) $x = 1 - (-\frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$
$x = \frac{4}{3}$ og $y = -\frac{1}{3}$

Kan kontroll sjekkes ved å settes inn i likning (1) og (2).
(1) $x + y = 1$
$\frac{4}{3} + (-\frac{1}{3}) = 1$

(2) $x - 2y= 2$
$\frac{4}{3} - 2 * (-\frac{1}{3}) = 2$

## Forenkling av likningssystemer
- Vi fjerner ukjente, slik at vi står igjen med 1 ukjent.
- Målet er å få 1 ukjent per linje i likningssystemet.
- Effektiv metode på flere enn 2 ukjente.

- Metoden funker fordi vi gjør det samme på begge sidene av likningen.
- x antall ukjente i et ligningssett trenger x antall ligninger for å løses, eller så vil svaret vårt bli en funksjon

Linjereduksjon / Gauss-eliminasjon
- Først sette opp systemet på "ordnet" form.
- Det betyr at vi vil ha 1 ukjent helt til venstre og på en diagonal rekke nedover i systemet. En per linje.
- Dersom vi ser en av likningene bare har $x$ først i likningen, så kan det være hensiktsmessige å sette denne øverst.
- Dersom systemet er rotet: $2y + 2x = 2$ så ordnet vi likningen: $2x + 2y = 2$. Vi vil alltid ha x til venstre, så y som nr. 2 på neste linje osv.
- Vi fjerner alt under diagonalen og over diagonalen.

Operasjoner som kan utføres:
1. Man kan byttet om to ligninger, flytte dem opp eller ned
2. Man kan multiplisere hver ligning met et tall forskjellig fra null
3. Man kan addere et multiplum av en ligning med en annen

(1). $x + y + 5z = 6$
(2). $2x - 3y + 4z = 16$
(3). $4x + 2y - 5z = 3$

| | |
|---|---|
| L1 | $x + y + 5z = 6$ |
| L2 | $2x - 3y + 4z = 16$ |
| L3 | $4x + 2y - 5z = 3$ |

L2: L2-2L1
L3: L3-4L1

| | |
|---|---|
| L1 | $x + y + 5z = 6$ |
| L2 | $0 - 5y - 6z = 4$ |
| L3 | $0 - 2y - 25z = -21$ |

L2: (-1)L2

| | |
|---|---|
| L1 | $x + y + 5z = 6$ |
| L2 | $0 + 5y + 6z = -4$ |
| L3 | $0 - 2y - 25z = -21$ |

L3: 5L3+2L2

| | |
|---|---|
| L1 | $x + y + 5z = 6$ |
| L2 | $0 + 5y + 6z = -4$ |
| L3 | $0 + 0 - 113z = -113$ |

| | |
|---|---|
| L1 | $x + y + 5z = 6$ |
| L2 | $0 + 5y + 6z = -4$ |
| L3 | $0 + 0 + z = 1$ |

Så går vi oppover.

L1: L1-5L3
L2: L2-6L3

| | |
|---|---|
| L1 | $x + y + 0 = 1$ |
| L2 | $0 + 5y + 0 = -10$ |
| L3 | $0 + 0 + z = 1$ |

L2: $\frac{1}{5}L2$

| | |
|---|---|
| L1 | $x + y + 0 = 1$ |
| L2 | $0 + y + 0 = -2$ |
| L3 | $0 + 0 + z = 1$ |

L1: L1-L2

| | |
|---|---|
| L1 | $x + 0 + 0 = 3$ |
| L2 | $0 + y + 0 = -2$ |
| L3 | $0 + 0 + z = 1$ |

- Nå står det igjen 1 ukjent på hver linje.
- Vi har klart å fjerne alt utenom diagonalen.
- Vi tester så ved innsetting i de originale likningene for å se om vi har fått rett svar.

$(x, y, z) = (3, -2, 1)$

Linjereduksjon / Gauss eliminasjon
- Der svaret blir en funksjon
- Der likningssystemet ikke har noen løsning

Eksempel med ingen løsning

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $L1$ | $3x$ | $3y$ | $0$ | $=$ | $4$ |
| $L2$ | $3x$ | $-2y$ | $-3z$ | $=$ | $1$ |
| $L3$ | $0$ | $5y$ | $3z$ | $=$ | $2$ |

- Bruker fortsatt linjereduksjon som metode

L2: L2-L1

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $L1$ | $3x$ | $3y$ | $0$ | $=$ | $4$ |
| $L2$ | $3x - 3x$ | $-2y - 3y$ | $-3z - 0$ | $=$ | $1 - 4$ |
| $L3$ | $0$ | $5y$ | $3z$ | $=$ | $2$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $L1$ | $3x$ | $3y$ | $0$ | $=$ | $4$ |
| $L2$ | $0$ | $-5y$ | $-3z$ | $=$ | $-3$ |
| $L3$ | $0$ | $5y$ | $3z$ | $=$ | $2$ |

$L3$ : L3+L2

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $L1$ | $3x$ | $3y$ | $0$ | $=$ | $4$ |
| $L2$ | $0$ | $-5y$ | $-3z$ | $=$ | $-3$ |
| $L3$ | $0$ | $5y+(-5y)$ | $3z+(-3z)$ | $=$ | $2+(-3)$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $L1$ | $3x$ | $3y$ | $0$ | $=$ | $4$ |
| $L2$ | $0$ | $-5y$ | $-3z$ | $=$ | $-3$ |
| $L3$ | $0$ | $0$ | $0$ | $=$ | $-1$ |

$0 \neq -1$
Dette likningssystemet har derfor ingen løsninger.
Hver gang vi ender opp med et uttrykk som ikke er sant, så er ikke likningen løselig.

Eksempel der likningssystemet blir en funksjon

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $L1$ | $x$ | $-2y$ | $-5z$ | $-2w$ | $=$ | $-8$ |
| $L2$ | $2x$ | $-4y$ | $7z$ | $-4w$ | $=$ | $1$ |

L2: L2-2L1

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $L1$ | $x$ | $-2y$ | $-5z$ | $-2w$ | $=$ | $-8$ |
| $L2$ | $0$ | $0$ | $17z$ | $0$ | $=$ | $17$ |

L2: $\frac{1}{17}L2$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $L1$ | $x$ | $-2y$ | $-5z$ | $-2w$ | $=$ | $-8$ |
| $L2$ | $0$ | $0$ | $z$ | $0$ | $=$ | $1$ |

$z = 1$. Vi setter derfor inn at $z = 1$ i L1.

$x - 2y - 5(1) - 2w = -8$
$x - 2y - 2w - 5 = -8$
$x = -8 + 5 + 2y + 2w$
$x = 2y + 2w - 3$

Svaret på likningssystemet er derfor:
$x = 2y + 2w - 3$
x = en avhengig variabel
y og w = frie variabler. (Kan være hva som helst)
$y \in R$, $w \in R$

Dette likningssystemet har derfor uendelig mange løsninger. Det er også en lineær funksjon, så det blir en evig lang strek i en graf.

Kapittel 10.2
Matriser

Lineære likningssystemer på matriseform
- Likningssystemets koeffisientsmatrise
- Tallene foran x, y, z (koeffosientene) osv. utgjør tabellen/matrisen.
- Systemets utvidet matrise = Tabell av koeffsienter
- Gjør det mer oversiktlig

$$\begin{array}{cccccccc} L1: & 0 & 10 & -1 & 1 & : & 10 \\ L2 & 2 & -2 & -4 & 0 & : & -3 \\ L3 & 4 & 2 & 0 & 4 & : & 5 \\ L4 & 3 & 2 & 0 & 3 & : & 4 \\ | & x & y & z & w & | & \end{array}$$

Ekvalent med:

$0x + 10y - 1z + 1w = 10$
$2x - 2y - 4z + 0w = -3$
$4x + 2y - 0z + 4w = 5$
$3x + 2y + 0z + 3w = 4$

MATRISE ALGEBRA

Viktige huskeregler:
- Subtraksjon foregår på samme måte som addisjon. Vi må bare multiplisere matrisen med (-1) før vi adderer dem.
- Det er bare lov å summere matriser dersom dimensjonen er like store. $2 \times 2 + 2 \times 2$.
- Ved multiplikasjon av matriser, er det ikke alltid det er en ny definert matrise.
- Man kan multiplisere matriser med forskjellig dimensjon, men ikke addere og subtrahere.
- Det er ikke mulig å dividere matriser på hverandre.
- Multiplikasjon av et tall med en matrise, er tallet * alle rutene i matrisen.

- Må alltid multiplisere hver linje med hver kolonne.
- Ved multiplikasjon av 2 matriser, så må lengden på linja vi skal multiplisere, være like lang som lengden på kolonnen som den skal bli multiplisert med.
Eksempel:
$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ =Ikke definert.
- Blir ikke definert fordi vi får ikke multiplisert raden med kolonnen. Vi får bare multiplisert 1 gang.
Men i dette tilfellet er lengden på raden like lengden på kolonnen. Da er det mulig å multiplisere.

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1*2+2*1\\3*2+4*1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\10\end{bmatrix}$$

Dette er også lov:

$$\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2*1+1*3 & |2*2+1*4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+3 & 4+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 8\end{pmatrix}$$

Alltid tenk Linje*Kolonne.

Addisjon av matriser

- Addisjon av 2 matriser fører til en ny matrise som er like stor i antall rad og kolonner.
- $\equiv$=definert som

Addisjon av 2 matriser med samme dimensjon.

$2 \times 2 + 2 \times 2 = 2 \times 2$

- Gir samme dimensjon i svaret.
- $3 \times 3$ osv.. bruker samme definisjon.

Definisjon:

$$\begin{matrix}A & B\\C & D\end{matrix} + \begin{matrix}A1 & B1\\C1 & D1\end{matrix} \equiv \begin{matrix}A+A1 & B+B1\\C+C1 & D+D1\end{matrix} = Resultatmatrise$$

Eksempel

$2 \times 2$ Matrise

$$\begin{matrix}1 & 2\\3 & 4\end{matrix} + \begin{matrix}3 & 4\\1 & 2\end{matrix} = \begin{matrix}1+3 & 2+4\\3+1 & 4+2\end{matrix} = \begin{matrix}4 & 6\\4 & 6\end{matrix}$$

Multiplikasjon av matrise med et tall

- Alltid multiplisere med alle tall i hele matrisen.

$$2 * \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2*1 & 2*1\\2*1 & 2*1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 2\\2 & 2\end{bmatrix}$$

$2 =$ felles faktor for hele matrisen. Kan derfor sette 2 utenfor matrisen.

Subtraksjon av 2 matriser med samme dimensjon

- Multipliserer matrisen med -1 og adderer dem

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3 & 4\\1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}3 & 4\\1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-3 & -4\\-1 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+(-3) & 2+(-4)\\3+(-1) & 4+(-2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & -2\\2 & 2\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}-1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$$

Multiplikasjon av 2 matriser

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ =En vektor, også en kolonne.

$\begin{bmatrix}2 & 2\end{bmatrix}$ =En co-vektor, også en rad.

Multiplikasjon av en vektor og en co-vektor er et skalarprodukt
- Skalarprodukt er en regneoperasjon (multiplikasjon) mellom 2 vektorer.
- Skalarproduktet er alltid et reelt tall. Ikke en tabell/matrise
- En prikk $\cdot$viser at det er et skalarprodukt mellom 2 vektorer.
$\begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} = \vec{w}$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{v}$

Eksempel på skalarprodukt
$\begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{w} \cdot \vec{v}$
$= 2 * 1 + 2 * 1 = 4$

Definisjon av multiplikasjon mellom 2 matriser
$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a1 \\ b1 \end{bmatrix} = a * a1 + b * b1 = Skalarproduktet$

Multiplikasjon
- Linje*Kolonne + linje*kolonne
- Setter resultatet inn der linjen/raden og kolonnen "skjærer" hverandre. Der de deler et punkt.
$A \cdot B$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 * 3 + 2 * 1 & |1 * 4 + 2 * 2 \\ 3 * 3 + 4 * 1| & 3 * 4 + 4 * 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 13 & 20 \end{bmatrix}$

Se på det enkelte leddet:
Alltid linje*kolonne og ikke omvendt.
- Da er ikke resultatmatrisen definert
$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A1 & B1 \\ C1 & D1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A * A1 + B * C1 & A * B1 + B * D1 \\ C * A1 + D * C1 & C * b1 + D * D1 \end{bmatrix}$

Motsatt rekkefølge
$B \cdot A$
$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 * 1 + 4 * 3 & 3 * 2 + 4 * 4 \\ 1 * 1 + 2 * 3 & 1 * 2 + 2 * 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 22 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$

Svaret blir annereledes. Vi kan derfor konkluderer med at:
$A \cdot B \neq B \cdot A$
Rekkefølgen til objekter i en matrise er vesentlig.

Multiplikasjon av 2 matriser med forskjellig dimensjon
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 * 2 + 2 * 1 \\ 3 * 2 + 4 * 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$

Motsatt rekkefølge:
$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ =Ikke definert. Det er ikke mulig fordi: $\begin{bmatrix} 2 * 1 \\ 1 * 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ Vi får ikke multiplisert den andre kolonnen.
Linje * kolonne er ikke mulig her.

$\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2*1+1*3 & |2*2+1*4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 8\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix} = 1 \times 2$ Matrise

Hvordan konvertere en kolonne til en rad?
- Kalles for TRANSPONERE
- Element nr 1 i kolonnen blir element nr 1 i raden osv.
$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$ =Kovektor

Omvendt
$\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$
Gir den første matrisen igjen.

Definisjon:
$\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}B & A\end{bmatrix}$

Eksempel $2 \times 2$ Matrise
$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}$

Normalt likningssystem:
$L1 : x + y = 1$
$L2 : x - y = 1$

Likningssystemet på matriseform
$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
$A * \vec{x} = \vec{t}$

Der A = Likningssystemets koeffisientmatrise
$A = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$ =Likningssystemets koeffisientmatrise
$\vec{x} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ =En vektor, vi skal finne ut hvilke vektor som må multipliseres med A for å få en ny vektor (resultat).
$\vec{t} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ =Resultatvektoren

Det er mulig å løse likningssystemet på matriseform vha. en invers av matrisen A.

Den inverse er definert som:

$A^{-1}$ =Den inverse matrisen til A.
Vi multiplisere uttrykket med $A^{-1}$ på begge sider av likhetstegnet.
$A * \vec{x} = \vec{t}$
$A^{-1} * A * \vec{x} = \vec{t} * A^{-1}$
$A^{-1+1}\vec{x} = \vec{t} * A^{-1}$
$A^0\vec{x} = \vec{t} * A^{-1}$
$1\vec{x} = \vec{t} * A^{-1}$

Vi kan derfor finne vektoren $\vec{x}$ ved hjelp av den inverse.
$\vec{x} = \vec{t} * A^{-1}$

Hvordan finner vi den inverse til en matrise?
- Det er ikke alltid det finnes en invers av en matrise.
- Vi kan derfor sjekke ved hjelp av en matrise som blir kalt for 1.
- Matrisen 1 og matrisen vi skal finne den inverse av, må ha lik dimensjon.
2 ting må være oppfylt for at det den inverse faktisk finnes.

$A^{-1}A = 1 \leftrightharpoons A * A^{-1} = 1$
$A^{-1} * A = A * A^{-1} = 1$
Når vi har funne den inverse, må vi derfor alltid sjekke om dette stemmer ved å multiplisere den inverse matrisen med den originale matrisen i 2 rekkefølger, og resultatmatrisen må bli 1-matrisen begge gangene, ellers eksisterer det ikke en invers-matrise.

1-Matrisen ser slik ut:
$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Den har også flere dimensjoner, vi legger på 1 og 0 annenhver gang dersom vi har en større matrise.

For å finne den inverse til $A$ matrisen, må vi gjøre 2 ting.
Først må vi linjeredusere A for å finne 1-matrisen.

$\begin{pmatrix} A| & 1 \end{pmatrix}$ - Vi får $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ på venstre siden av likningen. Da finner vi ut matrisen til 1.

Også vet vi at $(1, A^{-1})$. Derfor er $1 = A^{-1}$.
Til slutt må vi sjekke at det finnes en invers vha. $A^{-1}A = AA^{-1} = 1$. Vi må multiplisere i begge rekkefølgene, dersom begge resultatmatrisen blir matrisen til matrise 1. Så kan vi konkludere med at vi har funnet den inverse.

Eksempel for å finne den inverse av en matrise.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A^{-1} =?$

Det er 2 måter:

Første metode:
Får enhetsmatrisen på venstrie side i $(A = 1)$
Så vet vi at når enhetsmatrisen er på venstre side så er $(1 = A^{-1})$.
Vi kan deretter bevise at dette faktisk er enhetsmatrisen ved : $A * A^{-1} = A^{-1} * A = 1$
Summen av $A * A^{-1}$ skal være enhetsmatrisen og $A^{-1} * A$ skal være enhetsmatrisen.

Andre metode:
$A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (Kof A)^T$

$\begin{pmatrix} A & 1 \end{pmatrix}$

$V.S = H.S$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 3 & 4 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Vi vil fjerne alle x-ene i linje 2.
$L2 : L2 - 3 * L1$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 4-3(2) & | & 0-3(1) & 1-3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & -2 & | & -3 & 1 \end{pmatrix}$
Så kan vi fjerne kolonne 2 i linje 1.
$L1 : L1 + L2$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & -2 & | & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+(-2) & | & 1+(-3) & 0+1 \\ 0 & -2 & | & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -2 & 1 \\ 0 & -2 & | & -3 & 1 \end{pmatrix}$
$L2 : -\frac{1}{2} L2$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & -2(-\frac{1}{2}) & | & -3(-\frac{1}{2}) & 1(-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -2 & 1 \\ 0 & 1 & | & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Vi har nå funnet matrise 1.
$A = 1$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -2 & 1 \\ 0 & 1 & | & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
$1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Vi vet at $(A^{-1} = 1)$. Så vi har nå funnet den inverse av matrisen til A.
$(A^{-1}|1)$
$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = A^{-1}$

Så må vi kontrollsjekke at dette stemmer ved; $A^{-1}A = AA^{-1} = 1$
$A^{-1} * A$
$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2*1+1*3 & |-2*2+1*4 \\ \frac{3}{2}*1-\frac{1}{2}*3 & \frac{3}{2}*2-\frac{1}{2}*4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Første stemmer. Vi sjekker nå motsatt rekkefølge.
$A * A^{-1}$

$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-2 & 1\\\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1*(-2)+2*\frac{3}{2} & |1*1+2*\frac{-1}{2}\\3*-2+4*\frac{3}{2} & 3*1+4*-\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2+3 & 1-1\\-6+6 & 3-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$
Siden $A^{-1}A = AA^{-1} = 1$ er oppfylt. Så kan vi konkludere med at vi har funnet den inverse matrisen.
$A^{-1} = \begin{pmatrix}-2 & 1\\\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$
Siden begge er oppfylt, har vi bevist at $A^{-1}$er den inverse matrisen til A.

Eksempel:
- Løs likningssystemet på matriseform:

$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
$A * x = T$
$x = A^{-1}T$
Vi sjekker først om det er mulig å bevise at $A^{-1}$ er den inverse av A.

$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$
$L2 : L2 - L1$

$\begin{pmatrix}1 & 1\\1-1 & -1-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0-1 & 1-0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}$
Vi deler $L2$ på $-2$
$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$
Vi fjerner y leddet i L1.
$L1 = L1 - L2$
$\begin{pmatrix}1 & 1-1\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-\frac{1}{2} & 0-(\frac{\bar{1}}{2})\\\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$
$A = 1$
$1 = A^{-1}$
$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$

Så multipliserer vi $A * A^{-1}$og omvendt.

$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} * \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1*1+1*1 & 1*1+1*(-1)\\ 1*1-1*1 & 1*1+(-1)*(-1)\end{pmatrix} =$
$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^{-1} * A$
$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1*1+1*1 & |1*1+1*(-1)\\ 1*1+(-1)*1 & 1*1+(-1)*(-1)\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
Vi har nå bevist at den inverse er $A^{-1}$.
$x = A^{-1}T$
$x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1*1+1*1\\ 1*1+1*(-1)\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$

$x = 1$ og $y = 0$. Dette kan settes inn i likningssystemet for å kontroll sjekke.

## Determinanter

- Brukes til å løse lineære likningssystemer
- Er en metode for å finne den inverse matrisen på en annen måte.
- Kof = kofaktor matrisen

$A * \vec{x} = \vec{t} \Rrightarrow \vec{x} = A^{-1} * \vec{t}$

Definisjon:
$A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (Kof(A))^T$

$\big|MATRISE\big|$ =Determinanten til matrisen.
$|A|$ = Det A = Determinanten til A

Ved 2x2 matriser:
$|A| = \begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix} \Longrightarrow A*D - B*C$
Vi må multipliserer diagonalene med hverandre og trekker fra den siste diagonalen.
$\begin{pmatrix}A & & B\\ & \times & \\ C & & D\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}+ & -\\ - & +\end{pmatrix}$

$Kof(A) = Kof\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}D & -C\\ -B & A\end{pmatrix}$
Forklart:
$Kof\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}D & -C\\ -B & A\end{pmatrix}$

Vi snur på diagonalene, og ser på fortegnsskjemaet:
$\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$, disse posisjonene ska ha samme fortegn som i kof(A).

- Vi holder over skjæringspunktet, tallet som står alene settes i dette skjæringspunktet, med det fortegnet som står i fortegnsmatrisen (fortegnsskjemaet).

Deretter transponerer vi.
$Kof(A)^T$
$\begin{pmatrix} D & -C \\ -B & A \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}$
$A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (KofA)^T$
Eksempel:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
Finn den inverse til A.

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} * KofA^T$
$|A| = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 * 4 - 2 * 3 = 4 - 6 = -2$
$KofA = Kof \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
$KofA^T = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
$A^{-1} = \frac{1}{-2} * \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & +1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
Nå har vi funnet den inverse, vi må likevel bevise at dette er den inverse ved å multipliser $A * A^{-1}$ og $A^{-1} * A$.

$\begin{pmatrix} -2 & +1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 * 1 + 1 * 3 & -2 * 2 + 1 * 4 \\ \frac{3}{2} * 1 + -\frac{1}{2} * 3 & \frac{3}{2} * 2 - \frac{1}{2} * 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -2 & +1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 * -2 + 2 * \frac{3}{2} & 1 * 1 + 2 * \frac{-1}{2} \\ 3 * -2 + 4 * \frac{3}{2} & 3 * 1 + 4 * -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 3 & 1 - 1 \\ -6 + 6 & 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Vi har bevist at $A^{-1}$er den inverse til $A$.

## Determinantene til større matriser

Vi kan regne ut determinanten av større matriser ved å :
- Starte med produktet av 1. element i øverste rad og determinanten av matrisen som framkommer ved å stryke raden og søylen som elementet tilhører,
- Så subtrahere produktet av 2. element i øverste rad og determinanten av matrisen som framkommer ved å stryke raden og søylen som elementet tilhører,

- Så addere produktet av 3. element i øverste rad og determinanten av matrisen som framkommer ved å stryke raden og søylen som elementet tilhører,
- og så videre for alle elementene i øverste rad, med subtraksjon og addisjon annenhver gang.

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix} \text{osv.}$$

Definisjon for hvordan regne ut determinanten til en matrise som har dimensjonen: $3 \times 3$

$$A = \begin{vmatrix} A11 & A12 & A13 \\ A21 & A22 & A23 \\ A31 & A32 & A33 \end{vmatrix}$$

- Vi kan velge hvilken som helst kolonne eller rad når vi skal finne determinanten. Viktigste er at vi bare forholder oss til denne raden eller kolonnene gjennom hele prossessen. Det kan være lurt å velge en rad eller kolonne med flest 0 i seg. Da blir utregningene mye enklere.
- Vi får samme svaret uansett

Determinanten til A:
$|A|$ =$A11*$Nedre 2x2 til høyre - $A12$*nedre 2x2 søyle på venstre og høyre side $+$ $A13$*Nedre 2x2 til venstre.
Vi multipliserer med determinantene til 2x2 matrisene som er i diagonalene til tallet vi ganger med.
- Det er annenhver gang + og -

Dette gir oss:

$$A11 \begin{vmatrix} A22 & A23 \\ A32 & A33 \end{vmatrix} - A12 \begin{vmatrix} A21 & A23 \\ A31 & A33 \end{vmatrix} + A13 \begin{vmatrix} A21 & A22 \\ A31 & A32 \end{vmatrix}$$

$$|A| = A11(A22 * A33 - A23 * A32) - A12(A21 * A33 - A23 * A31) + A13(A21 * A32 - A22 * A31)$$

Eksempel:
- Regn ut determinanten til matrisen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = Determinanten \text{ til matrisen}$$

$$1 * \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (2) * \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$1 * (0 * 2 - 1 * 3) - 2(-2 * 2 - 1 * 0) - 3(-2 * 3 - 0 * 0)$$

$$= 1(-3) - 2(-4) - 3(-6)$$

$= -3 + 8 + 18 = 23$

Finne determinanten til en $4 \times 4$ matrise
- Vi deler problemet opp i mindre deler, akkurat som i forrige eksempel.

Determinanten til matrisen
$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$
Fortegnsskjema
$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$
- Tar for oss ett av tallene. For eksempel $a_{11}$.Tallet i rad 1, kolonne 1.
- Utifra fortegnsskjema, så vet vi at dette tallet er positivt. Fordi $1 + 1 = 2 = Partall$.
$a_{11} = 1$

- Så holder vi over raden og kolonnen som vi valgte og ganger dette tallet med den nye $3 \times 3$ matrisen vi finner.
- Vi gjør det samme for alle tallene på denne raden. Også følger vi fortegnsskjemaet.

$$+1\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{vmatrix}\right) - (-\tfrac{1}{4})\left(\begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{vmatrix}\right) + (-\tfrac{1}{4})\left(\begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{vmatrix}\right) - 0\begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} \Rightarrow$$
$$\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{vmatrix}\right) + \frac{1}{4}\left(\begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{vmatrix}\right) - \frac{1}{4}\left(\begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{vmatrix}\right)$$
- De nye $3 \times 3$ matrisene deler vi så opp igjen til $2 \times 2$ matriser og følger fortegnsskjemaet.
$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$
For å gjøre det mer oversiktlig, velger jeg å finne determinanten til de 3 matrisen først, for å så summere dem.

$$\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{vmatrix}\right) \Rightarrow$$

$$+1*\left(\begin{vmatrix}1 & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & 1\end{vmatrix}\right)-0*\left(\begin{vmatrix}0 & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & 1\end{vmatrix}\right)+(-\tfrac{1}{4})*\left(\begin{vmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\end{vmatrix}\right)=1(1*1-((-\tfrac{1}{4})*$$
$(-\frac{1}{4})))-0+-\frac{1}{4}(0*(-\frac{1}{4})-(1*(-\frac{1}{4}))\Rightarrow$
$1*(1-\frac{1}{16}-\frac{1}{16})=\frac{7}{8}$

$$\frac{1}{4}\left(\begin{vmatrix}-\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1\end{vmatrix}\right)\Rightarrow$$
$$+\tfrac{1}{4}*\left(+(-\tfrac{1}{4})\left(\begin{vmatrix}1 & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & 1\end{vmatrix}\right)-(-\tfrac{1}{4})\left(\begin{vmatrix}0 & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & 1\end{vmatrix}\right)+0*\left(\begin{vmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\end{vmatrix}\right)\right)=\tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{1}{4}(1-(\tfrac{1}{16}))+\tfrac{1}{4}(0-(\tfrac{1}{16}))+\right.$$
$\frac{1}{4}(-\frac{1}{4}+\frac{1}{64}-\frac{1}{64})=-\frac{1}{16}$

$$-\frac{1}{4}\left(\begin{vmatrix}-\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0\\ 1 & 0 & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1\end{vmatrix}\right)\Rightarrow$$
$$-\tfrac{1}{4}\left(+(-\tfrac{1}{4})*\left(\begin{vmatrix}0 & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & 1\end{vmatrix}\right)-(-\tfrac{1}{4})\left(\begin{vmatrix}1 & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & 1\end{vmatrix}\right)+0\begin{vmatrix}1 & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & 1\end{vmatrix}\right)=-\tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{1}{4}(0-(\tfrac{1}{16}))+\tfrac{1}{4}(1-(\tfrac{1}{16}))\right)\Rightarrow$$
$-\frac{1}{4}(\frac{1}{64}+\frac{1}{4}-\frac{1}{64})=-\frac{1}{16}$

Summerer:
$\frac{7}{8}-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}=2*(\frac{7}{8})-\frac{2}{16}=\frac{14}{16}-\frac{2}{16}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}=0.75$

## Fortegnsskjemaet

$$\begin{bmatrix}+ & - & + & -\\ - & + & - & +\\ + & - & + & -\\ - & + & - & +\end{bmatrix} \text{ osv.}$$

Fortegnsskjemaet forteller oss om fortegnet vi må bruke for å finne determinanten. Men det er også mulig å finne fortegnet ved å finne posisjonen til tallet i raden og kolonnen tallet befinner seg i.

Tallet i rad 1 og kolonne 1 = 1.
$Rad + kolonne = 1 + 1 = 2$
2 = et partall, og vi vet derfor at det er $+$ tegn foran dette tallet når vi skal finne determinanten.

Mer om matriser
- Rad*kolonne

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=1*1+2*2+3*3=1+4+9=14$$

- Denne utregningen blir alltid et skalaprodukt. Fordi vi får en $1\times 1$ matrise: $\begin{bmatrix}1*1+2*2+3*3\end{bmatrix}$.
Der vi får en 1x1 matrise, vil svare derfor alltid bli et skalarprodukt.

- Under er lengden på linjen = lengden på kolonnen. Vi kan derfor regne denne ut.
- $2 \times 1$ * $1 \times 2$ gir en ny dimensjon i resultatmatrisen. $2 \times 2$
$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1*1 & 1*2\\2*1 & 2*2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}$$

Kofaktor = Koffisientfaktor

Det er 2 metoder for å finne den inverse av en vektor:
$A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (KofA)^T$ og $(A:1)->(1:A^{-1})$
Begge metodene må likevel kontrollsjekkes etter vi har funnet den, vi må også kunne bevise at det faktiske er den inverse:
$A^{-1}A$ =enhetsmatrisen og $AA^{-1}$ =enhetsmatrisen
Når begge disse er oppfylt, har vi bevist den inverse til $A$.

REGEL
- Hvis $|A| = 0$, determinante til A. Så er ikke $A^{-1}$ definert, altså den inverse finnes ikke.

## Siste del om matriser

- Vi kan velge hvilken linje eller kolonne som vi utvikler determinanten fra.
- Det er ikke mulig å finne determinanten til matriser som ikke er kvadratiske. Altså de som ikke har like mange linjer som kolonner.

Finne determinant:
- Vi velger en linje eller kolonne. Ikke diagonal, det er ikke lov. Matrisen må også være kvadratisk.
- Vi finner krysspunktet til det tallet på linja eller kolonnen, vi valgte. Vi tar så detta tallet ut, med fortegnet foran fra fortegnsskjemaet.
- Så multipliserer vi dette tallet med de determinanten til tallene som ikke står på samme linje eller kolonne som dette tallet.

Kofaktor
- Hvordan finne kofaktoren til en matrise og lettere kontrollersjekke determinanten / finne determinanten.
- Denne metoden kan også brukes til å kontrollsjekke at vi har regnet ut kofaktormatrisen riktig.
Det første vi gjør er å finne kofaktormatrisen ved hjelp av systemets koeffisientmatrise.
Deretter velger vi en linje eller kolonne fra koeffisientmatrisen og ganger denne med samme linje eller kolonne til kofaktormatrisen. Da skal vi kunne få samme determinant som vi fant tidligere, uansett hvilken linje eller rad vi velger. For å kontroll sjekke kofaktormatrisen, er det beste å sjekke alle linjene eller alle kolonnene, slik at alle tallene får en kontrollsjekk.
- Ved multiplikasjon så må linjen vi multipliserer være like lang som kolonnen vi multipliserer med. Linje x kolonne, ellers vil ikke den ny matrisen være definert.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = Skalarproduktet = \begin{bmatrix} 1*1+2*2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$, det er alltid skalarproduktet når vi ender opp med en matrise som er $1 \times 1$.

Eksempel:
$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
Vi skal finne den inverse til A, vha. kofaktormatrisen til systemets koeffisientmatrise. $A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (kofA)^T$

$KofA:$
- Vi deler opp determinantene til hvert tall vi finner, slik at vi lett kan sette dette inn i kofaktormatrisen etterpå.
- Vi starter på rad 1, kolonne 1 og jobber oss mot høyre, for å deretter gå til neste linje.
- Vi finner kofaktormatrisen ved å finne determinanten til den posisjonen vi er i og legger på fortegnet fra fortegnsskjemaet.

Rad 1:
$+\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
Rad 2:
$-\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
Rad 3:
$+\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
Deretter regner vi ut determinanten og setter dette tallet inn i tilsvarende posisjon.

$$\begin{bmatrix} +(1*2-1*1) & -(2*2-1*1) & +(2*1-1*1) \\ -(2*2-1*1) & +(1*2-1*1) & -(1*1-2*1) \\ +(2*1-1*1) & -(1*1-1*2) & +(1*1-2*2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Vi har nå funnet kofaktormatrisen. Vi kan nå finne determinanten ved å velge hvilken som helst linje eller kolonne fra systemets koeffisientmatrise og multiplisere med kofaktormatrisens tilsvarende linje/kolonne.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, KofA = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Flere eksempler på at dette fungerer:
Linje 1:
$|A| = 1*1+2*(-3)+1*1 = 1-6+1 = -4$
Kolonne 2:
$|A| = 2*(-3)+1*1+1*1 = -6+1+1 = -4$

Vanlig metode for å finne determinanten:
$|A| = +1 * (1 * 2 - 1 * 1) - 2(2 * 2 - 1 * 1) + 1(2 * 1 - 1 * 1) = 1 - 6 + 1 = -4$

Når vi etterpå har transponert kofaktormatrisen, så har vi funnet den inverse til $A$.Vi må etter det kontrollere vha. enhetsmatrisen $A * A^{-1} = A^{-1} * A = 1$.

Når vi har løst likningssystemets koeffisientmatrise vha. den inverse, setter vi det vanligvis opp slik:
$\vec{x} = A^{-1}\vec{i}$
$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \leftrightarrows (x, y, z) = (1, 2, 3)$

## Sammendrag av kapittelet

Trappeform
$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ =vanlig trappeform, vi har ikke fjernet den øvre delen av matrisen, og vi står ikke igjen med bare ledene enere. Vi skal alltid stå igjen med bare ledende 1'ere.

Redusert trappeform
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ = redusert trappeform fordi vi har fjernet den øvre delen og underdelen av matrisen, og vi står igjen med bare ledene enere.

Ikke trappeform:
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Hvis en likning består av bare 0'ere, så sløyfer vi den.

Hva betyr ordnet form?
Betyr at vi har x, y og z etterhverandre likt i alle likningene i systemet vårt. Når vi skal løse likningsystemer, må vi alltid sette de på ordnet form før vi begynner å regne ut.
Vi må ha de på en bestemt rekkefølge før vi gjør utregningene. Det blir lettere og lettere å lese.

2 måter for å finne den inverse til A.
Vi bruker matrisen til A for å få enhetsmatrisen på venstre side is systemet, når vi har fått den på venstr side så er høyre side lik den inverse til A. Vi må så sjekke vha. $A * A^{-1} = A^{-1} * A = 1$. Da har vi bevist at den inverse eksisterer.
- Dette gjøre vha. linjereduksjon/gauss-eliminasjon som er den eneste måten vi har lært å løse likningssystemer på, foreløpig.
$(A = 1) \longrightarrow (1 = A^{-1})$

Andre metode er vha. determinanten til matrisen og den transponerte kofaktormatrisen til matrisen vi skal finne den inverse til.
$A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (KofA)^T$, når vi har gjort dette bruker vi definisjon $A * A^{-1} = A^{-1} * A = 1$. Da har vi bevist at den inverse eksisterer.

Vi må finne den inverse for å kunne løse likningssystemer som står på matrise form, dette er en lettere metode enn å bruke gauss-eliminasjon. Vi finner svaret ved:
$A^{-1} * A * x = A^{-1} * b$
$x = A^{-1} * b$
Der x er vektoren som inneholder de ukjente verdiene bak koeffisientene. $x+y = 1$ etc.

I en matrise kan vi ikke bytte om på linjer fritt. Vi kan bytte om på linjer dersom det er et likningssystem på matriseform, altså med tallene som matrisen er lik, og vi kan bytte på linjer i et vanlig likningssystem. Men vi kan ikke bytte på linjer fritt i en matrise, fordi determinaten blir ikke lik.
Det er ikke mulig å finne determinanten til matriser som ikke er kvadratiske.
Dersom determinanten til en matrise = 0. Så er $A^{-1}$ ikke definert.
Det er heller ikke mulig å gange opp en matrise med et tall. For eksempel for å fjerne en brøk. Determinanten vil endre seg, og det blir feil.
I et vanlig likningssystem har vi lov til å bruke samme vanlige matteregler, vi kan multiplisere hver likning med et tall, så lenge vi gjør det på både venstre og høyre side.

## Kapittel 4
## Vektorer og komplekse tall
- Komplekse tall = sammensetning av tall
- Komplekse tall regnes ut på samme måte som reelle tall. De følger samme regneregler.

$x^2 - 1 = 0$
$x^2 = 1 \longrightarrow x = \pm\sqrt{1}$
- Gir 2 løsninger

$x^2 + 1 = 0$
$x = \pm\sqrt{-1}$
- Gir ingen reelle tall som oppfyller likningen.

$\sqrt{-1} = i$ er ikke et reellt tall, men et imaginært / tenkbart tall.
- Dette tallet fremkommer i kombinasjon med et reelt tall.

$i = \sqrt{-1}$
$i^2 = -1$
$(\sqrt{-1})^2 = (-1)^{\frac{1}{2}*2} = -1$

Eksempel:
$x^2 + x + 1 = 0$, bruker annengradsformelen
$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4*1*1}}{2*1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$
$x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$
- Ingen reelle tall gir løsning.

Enhetselementet for imaginære tall $= a * i$, $a \in R$
Man kan legge sammen reelle tall og imaginære tall.

$Z = a + bi$, $a \in R =$ et komplekst tall.
- Komplekse tall oppstår i sammensetninger med reelle tall.
Eksempel:
$x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$
$\frac{1}{2}(-1) = a$
$\frac{1}{2}(\pm\sqrt{-3}) = b * i$
$Z = a + bi$

$(x - x_+)(x - x_-) = 0$
$x_+ = a + bi$
$x_- = a - bi$

Eksempel med et komplekst tall:
$(1 + i)(1 - i) = 1 - i + i - i^2$
$= -i^2 + 1$
$i^2 = -1$
$-(-1) + 1 = 2$ er svaret på oppgaven.

Eksempel $\longrightarrow$ regner som om de komplekse tallene er reelle tall. De følger samme regler som reelle tall.
$(2 + i)(1 + 2i) = 2 + 4i + i + 2i^2 = 2i^2 + 5i + 2$
$2i^2 + 5i + 2 = 2(-1) + 5i + 2$
$-2 + 2 + 5i$
$= 5i$
- Vi samler de reelle tallene for seg og og de imaginære tallene for seg.
- Komplekse tall dukker naturlig opp i sammensetninger med reelle tall.

Komplekse tall:
- Sum og produkt
- Regning følger vanlig aritmetikk, men husk at $i^2 =$ -1

Komplekse tall:
- Visualisering og koordinatsystemer
-Reelle tall: et punkt på en tall-linje
-Komplekse tall: et punkt i planet.

-Regneoperasjoner kan da tolkes som vektor-operasjoner.
To mulige koordinatsystemer i planet:
-kartesiske koordinater og polar-koordinater

Komplekse tall på kartesisk form:
$z = a + ib$

Addisjon av komplekse tell på kartesisk form
$z_1 + z_2 =$
$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$
- Nå har vi ordnet set på kartesisk form $a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2) \equiv a + ib$

Multiplikasjon av komplekse tall på kartesisk form
$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)$
$= a_1a_2 + a_1ib_2 + a_2ib_1 + b_1b_2i^2 = a_1a_2 + a_1ib_2 + a_2ib_1 - b_1b_2$ fordi $i^2 = -1$
$a_1a_2 + a_1ib_2 + a_2ib_1 - b_1b_2$
$= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$
Produktet står nå på grunnformen $z = a + ib$
- På kartesisk form

$z = z_1z_2 = a + ib \Rightarrow z$ på kartesisk form

Hva skjer ved divisjon?
$\frac{Z_1}{Z_2}$ =? f.eks $\frac{1+i}{1-i}$
Som definisjon sier vi at $\frac{Z}{Z} = Z * \frac{1}{Z} = Z * Z^{-1} = 1$
Som ved matriser, så er det på samme form som den inverse. $A^{-1}A = 1$.

$\frac{1+i}{1-i} = (1+i)\frac{1}{1-i} = (1+i)(1-i)^{-1}$
Formelen $Z * Z^{-1} = 1$ kan hjelpe oss å løse dette problemet.
Vi må prøve å få Z til å ett reellt tall.

Den konjugerte til $\bar{z}$ er z men den imaginære delen har motsatt fortegn
- Legger merke til at det bare er den imaginære delen som får et annet fortegn
$Z = a + ib$
$\bar{Z} = a - ib$
$\bar{z}$, uttales Zbar.

$\bar{z} =$ den komplekskonjugerte til z.

Vi må finne ut hva $Z^{-1}$er for å kunne løse problemet.
$z^{-1} * z = 1$
$z * \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - iba + iba - i^2b^2 = a^2 - (-1)b^2 = a^2 + b^2$
$z^{-1} * z = 1$
$z * \bar{z} = a^2 + b^2$

$Z^{-1} * Z = 1$
Vi multipliserer med $\bar{z}$ på begge sider
$Z^{-1} * Z * \bar{Z} = \bar{Z}$
Vi vet at $z * \bar{z} = a^2 + b^2$
$Z^{-1}(a^2 + b^2) = \bar{Z}$
$\bar{Z} = a - ib$
$Z^{-1} = \frac{\bar{Z}}{(a^2+b^2)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{\bar{Z}}{|Z|^2}$

Definisjonen blir da:
$Z^{-1} = \frac{\bar{Z}}{|Z|^2}$

$Z * \bar{Z} = |Z|^2$
$|Z|^2 =$ kvadratet til modulen, hvor modulen er $|Z|$.

- Så deler vi på $|Z|^2$ for å få $Z^{-1}$ alene.
$Z^{-1} = \frac{\bar{Z}}{|Z|^2}$

Definisjonen blir da:
$\frac{Z}{Z} = Z * \frac{1}{Z} = Z * Z^{-1} = Z * \frac{\bar{Z}}{|Z|^2} = \frac{Z*\bar{Z}}{|Z|^2} = \frac{|Z|^2}{|Z|^2} = 1$

Eksempel:
$\frac{1+i}{1-i}$, $Z^{-1} = \frac{\bar{Z}}{|Z|^2}$

$\frac{Z}{Z} = Z * Z^{-1}$

$(1+i)(1-i)^{-1}$
$(1-i)^{-1} = Z^{-1} = \frac{\bar{Z}}{|Z|^2}$

$(1+i)\frac{(1+i)}{(1-i)(1+i)} = (1+i)\frac{(1+i)}{1+i-i-i^2} = (1+i)\frac{(1+i)}{1-i^2} = \frac{(1+i)(1+i)}{1-(-1)} = \frac{(1+i)(1+i)}{2}$

$\frac{1+i+i+i^2}{2} = \frac{i^2+2i+1}{2} = \frac{1}{2}(-1+2i+1) = \frac{1}{2}(2i) = \frac{2i}{2} = i$
$\frac{1+i}{1-i} = i$

$Z * Z^{-1}$
Hvor $Z^{-1} = \frac{\bar{Z}}{|Z|^2}$
$Z * \frac{\bar{Z}}{|Z|^2}$

Legg merke til:
$|Z|^2 = |1-i|^2 = (1-i)(1\bar{-}i) = (1-i)(1+i)$

Algebraens fundementale setning
- En hver likning av typen $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ..a_0 = 0$, kan alltid faktoriseres til $n-$lineære faktorer. $a_n(x-b_n)(x-b_{n-1})...(x-b) = 0$. Hvor b er røttene til likningen.

Oversikt over definisjoner

- Kartesisk form, polarform og eksponential form er 3 former å skrive komplekse tall på.

Egenskaper til i

- i er den imaginære delen av det komplekse tallet. Y styrer hvor stort dette tallet er.
- Vi bruker $i$ istedenfor $\sqrt{-1}$, fordi det er lettere å skrive det slik, og det blir lettere å legge det sammen.

$i = \sqrt{-1}$
$i^2 = -1$
$i^4 = (\sqrt{-1})^4 = i^2 * i^2 = (-1)(-1) = 1$
$i^5 = i^4 * i^1 = 1 * \sqrt{-1} = \sqrt{-1} = i$ osv.
Alle i som er opphøyd i et tall som kan deles på 4 er positive.

Mengden av komplekse takk skrives vanligvis som $C$, brukes når vi jobber med komplekse tall i et koordinatsystem.

- Denne mengden $C$, inneholder de reelle tallene $R$ som en delmengde, og innføringen av komplekse tall gir en naturlig utviding av begrepet reelle tall.
- Komplekse tall fremkommer i sammensetning med reelle tall.

Komplekse tall på kartesisk form

- Setter de reelle tallene og de imaginære tallene hver for seg.

$Z = a + ib$
Hvor a og b er reelle tall og i er den imaginære enheten.

Komplekse tall på polar form
$Z = r(cos(\Phi) + i * sin(\Phi)$

Komplekse tall på eksponential form
$e^{i*\Psi} = cos(\Psi) + i * sin(\Psi)$

Den kompleks konjugerte til et komplekst tall Z:

- Bare fortegnet til den imaginære delen endres til det motsatte.

$Z = a + ib$
$\bar{Z} = a - ib$

Produktet av et komplekst tall og dens konjugerte

- Vil alltid bli et reelt tall.

$Z * \bar{Z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - aib + aib - b^2 i^2 = a^2 - b^2 * i^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2.$

Modulen til Z

- $|Z|$ er absoluttverdien, men også modulen til Z.
- Den svarer geometrisk til lengden av linja fra 0(origo) til punktet som representere det komplekse tallet $Z$.
- $|Z|^2 = Z * \bar{Z}$

- I et koordinatsystem er også $|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, pytagoras for å finne lengden fra origo til det komplekse tallet $Z$.
- $|Z|^2 = x^2 + y^2 \longrightarrow hypotenusen^2 = katet1^2 + katet2^2$

Divisjon / den inverse
- Der et komplekst tall står under brøkstrøken, så gjør vi følgende:
$\frac{1}{Z} = Z^{-1} = \frac{\bar{Z}}{|Z|^2} = \frac{Zbar}{kvadratet-til-modulen}$
En annen definisjon som også fungerer:
$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z} * \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}}$ =vil også gi riktig svar.

Definisjon
$\frac{a}{Z} = \frac{reelt/komplekst}{komplekst} = a * \frac{\bar{Z}}{Z * \bar{Z}}$
- Begge metodene gir samme svar, så det er preference.
- Metodene gjelder når vi skal få et komplekst tall på kartesisk form.

## Det komplekse planet

- I et koordinatsystem
- Er planet vi får mellom x og y aksen ifra punktet Z, som er det komplekse tallet. Da får vi en rektangulær firkant som er et plan.
- Dette planet kaller vi for C. Det komplekse planet $C$.
- Vi tolker det komplekse koordinatsystem som på vanlig måte.

Når vi skal finne det komplekse tallet i et koordinatsystem, så ser vi på den kartesiske formen $Z = a + ib$.
Denne formen kan omformuleres til en posisjon på x- og y-aksen.
- $Z = x + i * y$, der x og y er reelle tall, men Y er avhengig av det komplekse tallet, mens x er fri.
- Vi finner derfor punktet på x-aksen som er den reelle aksen, og y som er den imaginære aksen(y).
- Y oppfattes som den imaginære delen av et komplekst tall. Y-aksen er derfor den imaginære aksen.

$Re(z) = x$, den reellen delen av Z = x.
$Im(z) = y$, den imaginære delen av Z = y.

$Z = a + ib$, a representere x-verdien og b representerer y-verdien.
Akser
x- aksen/horisontale aksen : den reelle aksen
y- aksen/vertikale aksen : den imaginære aksen.

## Plangeometri

Definisjon
$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ =hypotenusen som representerer lengden fra origo til punktet/ det komplekse tallet Z.
$|Z|$ = ser vi også på som en radius, $r$.

## Trigonometri

$Phi = \phi$ er en vinkel i radianer som vi ofte bruker når vi jobber med komplekse tall.
Pytagoras:
$hypotenus/r = \sqrt{x^2 + y^2}$hvor x og y er tilhørende $Z = x + y * i$

For å finne vinkelen i radianer:
$\phi = tan^{-1}(\frac{Y}{X})$ $\phi * \frac{180}{\pi}$= i radianer

Definisjon
$Z = |Z| * (cos(\phi) + i * sin(\phi))$
$Z = r * (cos(\phi) + i * sin(\phi))$
$Z = \sqrt{x^2 + y^2} * (cos(\phi) + i * sin(\phi))$
Alle 3 er samme definisjon.
Dette kalles for komplekse tall på polarform
Polarform:
$Z = r * (cos(\phi) + i * sin(\phi))$

Viktige regler for cosinus og sinus
$-sin(\phi) = sin(-\phi)$, kan sette minustegnet foran når vi har en negativ vinkel. Dette kan ikke gjøres med cos.
$cos(-\phi) = cos(\phi)$, cos til et negativt tall / radianer / grader er alltid positivt.

Fra grader til radianer:
$\phi * \frac{\pi}{180}$

Fra radianer til grader:
$\phi * \frac{180}{\pi}$

Definisjonsområdet er som regel oppgitt som $-\pi \leq \phi > \pi$. Men kan også ha andre definisjonsområder. Vi må derfor følge deg oppgaveteksten sier på akkurat området vinkelen er gyldig.

## Phi

$\phi$ = argumentet til det komplekse tallet, når vi har det komplekse tallet på polarform.
Skrives slik:
$\phi = Arg(Z)$

I et kartesisk koordinatsystem så har vi funksjonen $Z = x + i * y$.
Y: Forteller om mengden på hvor mange i vi har. Den gir oss en størrelse på hvor mange i vi har og hvor langt oppover y-aksen (vertikale aksen) (imaginære delen av koordinatsystem) som vi må gå opp.
X: Den reelle delen av koordinatsystem. Dette er bare et reelt tall. Forteller ikke noe om hvor stor I er, men forteller om posisjonen til det komplekse tallet Z.

Den grunnleggende formen = den kartesiske formen
$Z = a + ib$

## Kvadrantene i et koordinatsystem

- Kvadrantene definerer områder for x og y aksen.

1. Kvadrant
I området: $0 - \frac{\pi}{2}$

2. Kvadrant
I området: $\frac{\pi}{2} - \pi$

3. Kvadrant
I området: $\pi - \frac{3}{2}\pi$

4. Kvadrant
I området: $\frac{3}{2}\pi - 2\pi$

Polar form viser et komplekst tall i et koordinatsystem vha. 1 lengde og vinkel i forhold til x/referanselinjen som gir oss posisjonen Z. 1 fysisk avstand og en vinkel. Vi trenger å vite Arg(Z) argumentet til Z som er $\phi$, og modulen til $Z$. $|Z| = r$. Da kan vi representere et komplekst tall på polar form. Lurt å tegne opp grafen pga. begrensningene, $0 \leq \phi < 2\pi$.

Kartesisk form viser et komplekst tall i et koordinatsystem vha. 2 koordinater x og y som viser hva tallet er. 2 fysiske avstander.

## Koordinat transformasjon

- Sammenhengen mellom posisjonsdata oppgitt som (x, y) og (r, $\phi$)

$x = r * cos(\phi)$, $y = r * sin(\phi)$
$Z = x + i * y$
$Z = rcos(\phi) + irsin(\phi)$
$Z = r(cos(\phi) + isin(\phi))$
- Vi har utledet kartesisk form på polarform. Fra koordinater til en vinkel og en avstand.

Når vi jobber med komplekse tall på polar form må vi alltid sørge for å avgrense vinkelene.
Hvis f.eks $\phi = 45$ grader. Og vi ikke har en avgrensing, så kan vi ha flere svar. $360 + 45$ etc.
Vanlig avgrensninger er $0 \leq \phi < 2\pi$, og $-\pi \leq \phi < \pi$

## Eulers formel

$e^{i*\theta} = cos(\theta) + i * sin(\theta)$

- Kan blant annet brukes til å bevise flere trigonometriske formler og uttrykk.

## Komplekse tall på eksponential form

$re^{i*\theta} = r(cos(\theta) + i * sin(\theta))$
Vi kan se på $r(cos(\theta) + i * sin(\theta))$ som $Z$.
$Z = r(cos(\theta) + i * sin(\theta))$

La oss nå finne kvadratet til modulen til $Z$.
$|Z|^2 = Z * \bar{Z} = Z * Zbar$
$re^{-i\theta} = \bar{Z} = r(cos(\theta) - i * sin(\theta))$

$r(cos(\theta) + i * sin(\theta)) * r(cos(\theta) - i * sin(\theta)) = r^2(cos^2(\theta) + sin^2(\theta))$
$|Z|^2 = r^2(cos^2(\theta) + sin^2(\theta))$
$cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$

Vi kan derfor konkludere med at:
$|Z|^2 = r^2(cos^2(\theta) + sin^2(\theta))$
$|Z|^2 = r^2 * 1$
$|Z|^2 = r^2$ tar så roten på begge sider.
$|Z| = r$

Hva er den inverse til Z, når vi har tallet på eksponential form?
$Z^{-1} = \frac{1}{Z} = \frac{\bar{Z}}{|Z|^2} = \frac{\bar{Z}}{1} = \bar{Z}$
Fordi $|Z|^2 = cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$
$Z^{-1} = \bar{Z}$

Konklusjon:
Den inverse til Z, $Z^{-1} = \bar{Z}$ ved eksponential form

Bevise vha. Eulers formel
$Z * \bar{Z} = |Z|^2 = 1$
$e^x * e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$

$e^{i*\phi} = cos(\phi) + i * sin(\phi)$
Ved eksponential form trenger vi bare en vinkel for å kunne finne posisjonen til det komplekse tallet Z.
Man bruker halvparten så lang tid på å finne ut av komplekse tall vha. eksponential form enn å bruke trigonometri.

Konklusjon
$Z = e^{i*\phi} = cos(\phi) + i * sin(\phi)$

Hvordan uttrykker vi trigonometriske funksjoner på eksponentialform?
$e^{i*\phi} = cos(\phi) + i * sin(\phi) = Z$

$e^{-i*\phi} = cos(\phi) - i * sin(\phi) = Zbar$

Vi løser dette ved vanlig linjereduksjon
Først summerer vi dem på både høyre og venstre side.
$e^{i*\phi} + e^{-i*\phi} = cos(\phi) + i * sin(\phi) + cos(\phi) - i * sin(\phi)$
$e^{i*\phi} + e^{-i*\phi} = 2cos(\phi)$

Cosinus definert utifra eksponential form
$cos(\phi) = \frac{1}{2}(e^{i*\phi} + e^{-i*\phi})$

Så subtraherer vi linjene.
$e^{-i*\phi} - e^{i*\phi} = cos(\phi) - i * sin(\phi) - (cos(\phi) + i * sin(\phi))$
$e^{-i*\phi} - e^{i*\phi} = -2isin(\phi)$
$-2isin(\phi) = e^{-i*\phi} - e^{i*\phi}$

Sinus uttrykt på eksponentialform vha. Eulers formel.
$sin(\phi) = \frac{1}{2i}(e^{i*\phi} - e^{-i*\phi})$

## Uttrykke komplekse tall på eksponentialform

$e^{i*\phi} = cos(\phi) + i * sin(\phi)$ eksponentialform
$Z = r(cos(\phi) + i * sin(\phi))$ polarform

FORMEL, samme koordinater benyttes.
$Z = r(e^{i*\phi}) = r(cos(\phi) + i * sin(\phi))$

Kan bevises vha. eulers formel.
$cos(a \pm b) = cos(a)cos(b) \mp sin(a)sin(b)$
Slik: $cos(a \pm b) = \frac{1}{2}(e^{i*(a+b)} + e^{-i*(a+b)}) = \frac{1}{2}(e^{i*a}e^{i*b} + e^{-i*a}e^{-i*b})$
Også vet vi at: $e^{i*a} = cos(a) + isin(a)$. Dette gjøres for de resterende leddene og vi summerer!
Resultatet blir:
$cos(a \pm b) = cos(a)cos(b) \mp sin(a)sin(b)$
Vi har nå bevist at det som står i formelsamlingene er mulig å bevise. Vi har bevist at komplekse tall kan brukes til å utlede andre formler!

EKSAMEN:
- Fra kartesisk til polarform til eksponentialform, og omvendt.
- Ikke utlede formler

Hvordan gå fra kartesisk form til polarform og så til eksponentialform?
$Z = x + i * y = r(e^{i*\phi}) = r(cos(\phi) + i * sin(\phi))$

Eksempel
$Z = 1 + i$, skriv først på polarform. Vi trenger en vinkel og vi trenger en lengde for å kunne uttrykke det komplekse tallet på polarform. $0 \leq \phi < 2\pi$.

$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = |Z| = \sqrt{2}$
$ArgZ = \phi = tan^{-1}(\frac{Y}{X}) = tan^{-1}(\frac{1}{1}) = \frac{\pi}{4}$

$Z = \sqrt{2}(cos(\frac{\pi}{4}) + isin(\frac{\pi}{4})) = r(cos(\phi) + i * sin(\phi))$
- Nå har vi gjort det om til polarform.

$r(cos(\phi) + i * sin(\phi)) = r(e^{i*\phi}) = Z$
$Z = \sqrt{2}e^{i*\frac{\pi}{4}}$
- Nå har vi det på eksponentialform.

Divisjon av 2 komplekse tall på eksponentialform
$Z = 1 - i$
$\frac{Z}{\bar{Z}} = ?$
$\bar{Z}^{-1} = \frac{\bar{Z}}{|\bar{Z}|^2}$
$Z * \bar{Z}^{-1} = (1 - i) * Z^{-1} = (1 - i) * \frac{(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-2i}{2} = -i$
Nå har vi løst divisjon på kartesisk form. La oss se på det på eksponentialform.
Vi vet fra tidligere at:
$Z = \sqrt{2} * e^{i\frac{7}{4}\pi}$ og at:
$\bar{Z} = \sqrt{2} * e^{i\frac{1}{4}\pi}$
$\frac{Z}{\bar{Z}} = \frac{\sqrt{2}*e^{i\frac{7}{4}\pi}}{\sqrt{2}*e^{i\frac{1}{4}\pi}} = \frac{e^{i\frac{7}{4}\pi}}{e^{i\frac{1}{4}\pi}}$
Bruker brøk og potensregelen:
- Blir negativt opphøyd når vi flytter opp.
$\frac{e^{i\frac{7}{4}\pi}}{e^{i\frac{1}{4}\pi}} = e^{i\frac{7}{4}\pi} * e^{-(i\frac{1}{4}\pi)} = e^{i\frac{7}{4}\pi - i\frac{1}{4}\pi} = e^{i\frac{6}{4}\pi} = e^{i\frac{3}{2}\pi}$
Svaret blir: $e^{i\frac{3}{2}\pi}$, men hvor befinner dette tallet seg i koordinatsystemet?
$Z$ på eksponentialform $= r * e^{i\phi}$
$Z = e^{i\frac{3}{2}\pi} = 1 * e^{i\frac{3}{2}\pi}$
- Dette betyr at lengden til punktet er 1. Altså $|Z|$ som vi vet fra tidligere $= 1$. Lengden ut er derfor 1.
- Vi vet også at vinkelen er $\frac{3}{2}\pi = 270grader$. Dette betyr at $x = 0$ og at vi befinner oss på y-aksen. Den imaginære aksen.

På kartesisk form blir dette slik: $Z = x + y * i = 0 + -1 * i = -i$.
- 270 grader og 1 langs y-aksen og 0 langs x-aksen. Vi har løst oppgaven

VIKTIGE FORMLER
Når vi skal løse trigonometriske uttrykk, kan vi bruke følgende formler:
$cos(\phi) = \frac{1}{2}(e^{i*\phi} + e^{-i*\phi})$
$sin(\phi) = \frac{1}{2i}(e^{i*\phi} - e^{-i*\phi})$

$\overline{e^{i\phi}} = e^{-i\phi} = cos(\phi) - i * sin(\phi)$ =Den konjugerte til eksponential formen, den imaginære delen I får motsatt fortegn.
$e^{i*\phi} = cos(\phi) + i * sin(\phi)$

Fra eksponential-form til polar-form til kartesisk-form:
$1 * e^{1+1i} = 1(e^1 cos(1) + e^1 * i * sin(1))$
Legg merke til hvordan vi gjør det når vi har det på eksponentialform.
For å få dette på kartesisk form, multipliserer vi bare ut polarformen og setter det opp $Z = a + ib$, hvor a og b er reelle tall.

Generell definisjon:
$r * e^{i*\phi} = r * (e^1 cos(\phi) + e^1 i * sin(\phi))$
$r * e^{a+\phi*i} = r(e^a * cos(\phi) + e^a * i * sin(\phi))$

For den konjugerte
$r * e^{a+\phi*i-} = r(e^a * cos(\phi) - e^a * i * sin(\phi))$

$e^i \longrightarrow i * \phi$, Da kan vi tenke at det er 1 radianer. Altså $1 * \frac{\pi}{180}$.

Ved multiplikasjon av 2 komplekse tall på forskjellige former
$(1 + i) * e^{i\frac{\pi}{4}}$
Vi må få de på samme form. Vi setter det komplekse tallet på kartesisk form på eksponentialform.
$\sqrt{2}e^{i*\frac{\pi}{4}} * e^{i*\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i*\frac{\pi}{2}}$. Vinkelen blir $\frac{\pi}{2}$ og lengden på r $= \sqrt{2}$.
Dette kan tegnes inn i det komplekse planet.

Utifra planet ser vi $W * Z = \sqrt{2}i$. Altså bare langs y-aksen.

Faseforskyvning
- Vi har flyttet punktet 45 grader, vi roterte lengden / armen r 45 grader iforhold til dens tidligere posisjon.
- Dette gjorde vi ved å multiplisere de 2 tallene med hverandre.
- Hvis vi multipliserer tallene på nytt, men nå har W lengden 2 istedenfor, vil lengden på r dobles, men vinkelen som blir dannet blir ikke større. ArgZ vil derfor være uendret om uavhengig av om vi endrer på lengden til punktet. $ArgZ$.

$|Z|$ kan aldri være negativ.

$|Z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{Z * \bar{Z}}$ ?

Eksempel oppgave
$Z^2 = 1$ Løs likningen
Vi setter dette på eksponentialform først, vi bruker $2\pi$ som en standard vinkel.

$(Z^2)^{\frac{1}{2}} = (e^{i*2\pi*n})^{\frac{1}{2}}$
$Z = e^{i*\pi*n}$

$Z_0 = e^{i*\pi*0} = e^0 = 1$

$Z_1 = e^{i*\pi*1} = e^{i*\pi} = cos(\pi) + i * sin(\pi) = -1 + 0 = -1$
$Z_2 = e^{i*\pi*2} = cos(2\pi) + i * sin(2\pi) = 1 + 0 = 1$
Vi har altså 2 forskjellige løsninger.
$Z_0$ og $Z_1$ er 2 mulige løsninger til likningen vi hadde.
Det er derfor konkludert med at det er mulig å gjøre det på denne måten, når vi skal løse likninger med komplekse tall. Husk eksponentialform.

## Løse algebraiske likninger med komplekse tall

$Z^6$, er en 6-grads likning. Den kan totalt ha 6 løsninger.
vha. eksponentialform kan man bevise at dette stemmer.
$Z^n + a_n - 1$ gir n antall løsninger.
- Vil alltid ha n-løsninger i det komplekse planet.

Eksempel på hvordan man kan løse en algebraisk likning uten å bruke annengradsformelen.
$Z^2 + 2Z - 1 = 0$ er likningen. Vi prøver å sette dette opp på en annen form.
$(Z + b)^2 + C = 0$, vi multipliserer ut likningen.
$Z^2 + Z * b + Z * b + b^2 + C = 0$
$Z^2 + 2Zb + b^2 + C = 0$

Vi setter likningene like hverandre.
$Z^2 + 2Z - 1 = 0$
$Z^2 + 2Zb + b^2 + C = 0$
Vi ser så på hvert ledd, og setter disse lik hverandre.
$2Zb = 2Z \longrightarrow b = 1$, vi deler på $2Z$.
$b^2 + C = -1$, vi setter inn for b.
$1^2 + C = -1$
$C = -2$
Vi setter så disse verdiene inn i den andre likningen vår.
$(Z + b)^2 + C = 0$
$(Z + 1)^2 - 2 = 0$
$Z^2 + 2Z + 1 - 2 = 0$
$Z^2 + 2Z - 1 = 0$

Vi kan isteden løse det slik:
$(Z + 1)^2 - 2 = 0$
$(Z + 1)^2 = 2$
- Så setter vi 2 på eksponentialform
- Vi vet at vinkelen er 0 eller $2\pi$. Fordi tallet 2 viser bare til x-aksens verdier.

Vi legger på $2\pi * n$. Vi setter opprinnelig at vinkelen er 0 grader.
$(Z + 1)^2 = 2 * e^{i*(0+2\pi*n)}$
$Z + 1 = (2 * e^{i*(0+2\pi*n)})^{\frac{1}{2}}$
$Z + 1 = \sqrt{2}e^{i*(\pi*n)}$
$Z = -1 + \sqrt{2}e^{i*(\pi*n)}$

$Z_n = -1 + \sqrt{2}e^{i*(\pi*n)}$
Vi kan nå si at vi har løst likningen. Men, ofte kan man få spørsmålet; hvis hvilke svar n gir.
$Z_0 = -1 + \sqrt{2}e^{i*(\pi*0)} = -1 + \sqrt{2}$
$Z_1 = -1 + \sqrt{2}e^{i(\pi*1)} = -1 + \sqrt{2}(cos(\pi) + i * sin(\pi)) = -1 - \sqrt{2}$
$Z_2 = -1 + \sqrt{2}e^{i(\pi*2)} = -1 + \sqrt{2}(cos(2\pi) + i * sin(2\pi)) = -1 + \sqrt{2}$
Her ser vi at $Z_2 = Z_1$.Vi har derfor gått en hel rundt i koordinatsystemet.

Vi kan derfor konkludere med at likningen har 2 løsninger.
$\{Z_0, Z_1\}$
$Z_0 = -1 + \sqrt{2}$
$Z_1 = -1 - \sqrt{2}$

Ved annengradsformler er det mulig å løse det på denne måten.
$(Z + b)^2 + C = 0$.
Vanligvis ved annengradsformler, dersom vi har med komplekse tall å gjøre. Så vil vi få 2 løsninger, $Z$ og $Zbar$.

## Kort oppsummering av komplekse tall

Kartesisk form:
$Z = a + ib$, eller $Z = x + i * y$.
- Benytter 2 koordinater for å representere tallet Z i et punkt. $(x, y) = Z$
- 2 koordinater i det kartesiske koordinatsystemet. Derfor det kalles kartesisk form.

Akser
$Y$-aksen:
Er den imaginære delen. $y = Im(Z)$.
$X - aksen:$
Er den reelle delen. $x = Re(Z)$.

Den kompleks konjugerte
$Zbar = \bar{Z} = a - ib$
- Den imaginære delen får nytt fortegn

Kvadratet til modulen til et komplekst tall
$|Z|^2 = (a + ib)(a - ib) = Z * \bar{Z}$

Den inverse til $Z$. $Z^{-1}$. Kan forekomme når vi vi deler på et komplekst tall.
$\frac{1}{Z} = 1 * Z^{-1} = 1 * \frac{\bar{Z}}{|Z|^2}$

Lengden til et punkt i et koordinatsystem finner vi vha. av pytagoras. Vi kan finne lengden slik
$|Z|^2 = x^2 + y^2$

$Lengden = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Viktige ting
Tallet $i$ er ett komplekst tall. Fordi $i = \sqrt{-1}$. Det er ikke mulig å regne ut $\sqrt{-1}$ på vanlig måte.
$i = \sqrt{-1}$
$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$
$i^3 = i^2 * i = -1 * i = -i$
$i^4 = i^2 * i^2 = -1 * -1 = 1$

Komplekst tall på polarform
$Z = r(cos(\phi) + isin(\phi))$
Hvor $r = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
$ArgZ = \phi = tan^{-1}(\frac{y}{x})$
- Polarform uttrykker ett komplekst tall vha. en lengde til punktet og en vinkel/retning.
Hvor r $=$ lengden og $\phi$ =retningen.

Eksponentialform
$Z = r * e^{i*\phi}$
- Vi kan lett overføre fram og tilbake fra polarform og eksponentialform.
- Vi setter bare inn ArgZ $= \phi$ og lengden $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Trigonometri uttrykt ved eksponentialform
$sin(\phi) = \frac{1}{2i}(e^{i*\phi} - e^{-i*\phi})$
$cos(\phi) = \frac{1}{2}(e^{i*\phi} + e^{-i*\phi})$
Vha. disse formlene kan vi utvikle formler for cos og sin.
Blant annet:
$cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$ ALLTID.
$cos(a \pm b) = cos(a)cos(b) \mp sin(a)sin(b)$
$sin(a \pm b) = cos(a)sin(b) \pm cos(b)sina)$

Kompleks funksjon
$f(x) = a + ib$

## Kapittel ?
## Numeriske metoder

- Derivasjon, integrasjon
- Metoder for å integrere og derivere
- Nullpunkt, stigningstall, konstantledd, topp og bunnpunkt
- Vertikale, horisontale og skrå asymptoter.

Det er flere måter å vise en derivasjon på
$\frac{d(f(x))}{dx}$, $f(x)'$ og $\mathring{f}(x)$.

Grunnleggende definisjon av den deriverte
$f(x) = lim_{\triangle x \longrightarrow 0} \frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$
- Med denne formelen kan vi regne ut alle derivasjoner.
- Derivasjon = tangenten i et punkt sitt stigningstall.
- Vi kan sette $f^{\cdot\cdot}$(x)=0 for å finne toppunkt eller bunnpunkt. Dette går bare hvis den deriverte eksisterer.

Definisjonen blir utviklet fra:
$\frac{b}{a} = tan(a)$
$\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{(x_0+\triangle x)-x_0} = \frac{lengden-på-b}{lengde-på-a}$, samtidig lar vi $\triangle x$ gå mot null. Det er for å finne stigningstallet i punktet $x_0$.
Vi lar $\triangle x$ gå mot null. For når den er nærme null, så befinner vi oss i punktet hvor vi skulle finne den deriverte.
Svaret vi får kan bli $2x + \triangle x$ f.eks. Siden $\triangle x$ går mot null, så ser vi bort ifra den. Svaret blir da $2x$.

Kjerneregel av den deriverte
$(x^n)' = n * x^{n-1}$

Kjerneregel for derivasjon av et produkt mellom 2 funksjoner
$(u * v)' = u' * v + u * v'$

Derivasjon av en kvotient (brøk)
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \longrightarrow (\frac{u}{v})' = \frac{u'*v-u*v'}{v^2}$
$(\frac{u}{v})' = \frac{u'*v-u*v'}{v^2}$

Newton-Raphson's metode
- Går utpå å finne nullpunktet til en funksjon.

For å finne nullpunktet til en funksjon setter vi $f(x) = 0$.
$f(x) = A_0x + b_0$
$A_0x + b_0 = 0$ - for å finnet nullpunktene/punktet.

Nullpunkt = hvor funksjonen skjærer x-aksen og gir oss også løsningene til funksjonen.

Hvis vi har en funksjon med høy grad, feks. $x^8$, så er det potensielt 8 løsninger. Må ikke nødvendigvis være 8 løsninger.
- Dette et lettere å finne vha. Newton-Raphson's metode

Operasjoner
- Starter med en tilfeldig verdi langs x-aksen.
- Vi sier den er i nærheten av nullpunktet til funksjonen.

Tangenten til dette punktet vi nå har valgt, skjærer x-aksen nærme den faktiske skjæringen.

- Det nye punktet vi nå finner, tar vi så tangenten til engang til for å komme enda nærmere det faktiske skjæringspunktet.

Definisjonen ser slik ut med algebraiske verdier:
$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{Deriverte-til-f(x_{n-1})}$

Eksempel:
- Løs vha. Newtons-Raphson's metode
$f(x) = x^2 - 2$
- Altså finne det positive nullpunktet.
- Vi må velge en startverdi som vi tror er nærme nullpunktet.
- Hvis ikke dette punktet er nærme tar det bare flere utregninger før vi kommer til svaret.
- Vi må derfor gjøre flere operasjoner igjen, så det har ingenting å si hvilket punkt vi velger.

## Calculus

Newton - Raphson's metode
- Går utpå å finne nullpunktet, altså når y=0 eller $f(x) = 0$.
- Metoden går utpå å finne en approksimasjon til nullpunktet.
- Bra metode å benytte seg av, fordi det ikke finnes noen generell måte å finne nullpunkter til funksjoner som er større enn 5. grads polynomer.
- Dette er da en av metodene vi kan bruke isteden.

Metoden går utpå å velge ett punkt som vi tror er i nærheten av nullpunktet. Vi finner så tangenten til funksjonen i dette punktet. Så finner vi stigningstallet, vi finner så nullpunktet til tangenten. Nå har vi ett nytt punkt som er nærmere det nullpunktet vi skulle finne. Denne prosessen gjentas helt til vi har funnet nullpunktet eller en approximasjon til nullpunktet.

Stigningstallet til en tangent er gitt ved:
$Stigningstallet = \frac{motstående-katet}{hosliggende-katet}$. En tangent har en fast stigning, så hvor stor trekant vi velger å bruke vil ikke ha noe å si. Vi får fortsatt det samme stigningstallet.

Definisjon
$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_0)'}$
Vi gjentar så denne metoden til $x_{n+1} = x_n$ med 4 desimalers nøyaktighet.
Det er forutsatt at stigningstallet ikke er lik 0. Hvis stigningstallet i punktet er lik 0, så er funksjonen parallell med x-aksen. Det betyr at det eksisterer ett topp eller bunnpunkt i det punktet.

- Utfører prosessen helt til dette er oppfylt! Vi har da funnet ett av nullpunktene til funksjonen.

Eksempel på Newtons metode
$f(x) = x^2 - 2$
$f(x)' = 2x$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_0)'} \longrightarrow 2 - \frac{2^2-2}{2*2}$
Vi velger ett startpunkt 2.
$x_1 = 2 - \frac{2^2-2}{2*2} = \frac{3}{2} = x_2$
$x_2 = \frac{3}{2} - \frac{(\frac{3}{2})^2-2}{\frac{3}{2}*2} = x_3$
Slik fortsetter vi helt til $x_{n+1} = x_n$ med 4 desimalers nøyaktighet.
- Vi får en ny gjetning for hver iterasjon / gjennomgang av algoritmen. Denne gjetningen blir bedre og bedre for hver gang vi går igjennom regne prosessen.
- Vi kutter ut desimalene til 4 desimalers nøyaktighet, men vi må aldri runde av!!

## Flere numeriske metoder

- Finne areal under en graf fra et punkt (x-aksen) til et annet

Riemanns-summer
Definisjon

$f(x_1)$ = finne høyden til det første rektangelet / oppdelingen.
$f(x_{n-1})$ = for høyden til neste rektangel
$\triangle x = \frac{b-a}{n}$, n er antall oppdelinger vi skal gjøre

Høyre sum definisjon
$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)dx = f(x_i) * \triangle x$
$\triangle x(f(x_1) + f(x_2) + ...f(x_n))$

Venstre sum
$\sum_{i=1}^{n} f(x_i - 1)dx = f(x_i) * \triangle x$
$\triangle x(f(x_1) + f(x_2) + ...f(x_{n-1}))$

- Ved å bruke riemanns summer så kommer vi nærmere sannheten / faktiske svaret. Vi kommer nærmere og nærmere for hvor manger delområder vi velger.
- Det faktiske integralet / arealet kan vi finne ved vanlig integrasjon, men noen integrasjon er veldig avanserte og det kan derfor være like greit å bruke numeriske metoder.

F.eks funksjonen $f(x) = e^{-x^2}$

Riemanssum med middelverdi
$\sum_{i=1}^{n} \longrightarrow \frac{f(x_i - 1 + x_i)}{2} * \triangle x$
$\triangle x = x_i - x_{i-1}$

Trapesmetoden

- Bedre metode
Arealet av ett trapes er gitt ved: $\frac{h(a+b)}{2}$ hvor a og b er sidelengdene og h = $\triangle x$.

Generell definisjon
$\frac{1}{2}\triangle x(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + f(x_n))$
Hvor de midterste ledene blir multiplisert med 2, fordi de forekommer 2 ganger.
- Det er bare endepunktene som ikke blir "benyttet" 2 ganger.

Repetisjon, Newtons metode
$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

## Derivasjon, integraler og numeriske metoder

- Riemann summer er en andre metode for å finne arealet under en graf på.
- Ved integrasjon kan man finne arealet så lenge intervallet til grafen som vi skal finne arealet til befinner seg over x-aksen.

$F(x)$ =Den antideriverte
$\int f(x)dx$ =Integranden
Hvis man deriverer den $F(x)$, så får man integralet. $\int f(x)dx$

$F(x) = \int f(x)dx$ =det ubestemte integralet

Det bestemte integralet
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = Arealet$ under grafen, dersom grafen befinner seg over x-aksen.

Eksempel
$\int xdx = F(x)$= Den antideriverte. Den nye funksjonen $F(x)$ har egenskapen at når vi deriverer den, så får vi den opprinnelige funksjonen.

Det legges alltid på en integrasjons konstant $C$, når vi integrerer ett ubestemt integral (ingen begrensede områder).

$\int sin(x)dx = \frac{dF(x)}{dx} = -cos(x) + c$

Differensiallikninger er det viktigste vi kommer til å lære, vi starter med dette i uke 10.

$\frac{dF(x)}{dx} = sin(x)$ = en differensiallikning

Det bestemte integralet - Gir arealet
$\int_0^1 xdx = F(1) - F(0) = Arealet$ under grafen, fra x = 0 til x = 1.

Annen metode:
$F(x) = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}x^2 + C$

$\int_0^1 xdx = F(1) - F(0) = (\frac{1}{2}1^2 + C_0) - (\frac{1}{2}0^2 + C_0) = \frac{1}{2} + C_0 - C_0 = \frac{1}{2}$
Integrasjonkonstanten blir borte, det er derfor vi alltid må den med når det er ett ubestemt integral, men vi ser ikke på den når det er et bestemt integral, den er der, men den blir trukket ifra og vi kan se i bort ifra den når vi jobber med et bestemt integral.

- Det er forutsatt at integralet (området) er over x-aksen.

Riemann summer
- Erstatning for integrasjon. Brukes når integrasjon er vanskelig.
- Gir oss en tilnærming til det faktiske svaret / arealet. Men det er noen ganger godt nok å regne ut ca. hvor stort arealet er.
- Flere riemann summer / metoder
- Bestemte integraler av et areal så lenge grafer er over x-aksen ved hjelp av rektangler.
- Vi deler opp området a-b i små deler/partisjoner.
- Venstre, høyre og midtpunkt er 3 metoder vi kan benytter som en erstatning for integrasjon.

Venstre summer
- Deler opp området under grafen i partisjoner / rektangler.
- Starter i toppen fra venstre, øverste punkt fra venstre innenfor området a til b.
- Drar mot høyre i en breddeavstand på $\triangle x$.
Vanligvis sier man at $A \approx A1 + A2 + A3 + A4 + ..An$. Vi kan dele opp i så mange

Bredden $= \triangle x$. Dette kan man finne ut ved å vite punktene a og b, altså fra et punkt til et annet punkt.
$\frac{b-a}{n}$, hvor n er antall partisjoner vi skal utføre under grafen, altså antall rektangler under grafen som vi skal finne arealet til og summere sammen.

Høyden finner vi ved $f(x_0)$ i punktet som vi skal finne.
$A = \sum_{i=1}^{n} A_i = \triangle x * (f(x_0) + f(x_1) + ...f(x_n))$. Hvor $f(x_0) = f(a)$ og $f(x_1) = f(a + \triangle x)$
- Benytter venstre punkt på grafen.

Høyre summer
- Samme måte, men nå benytter vi høyre punkt på grafen.

Midtpunkt
- Benytter midtpunktet til grafen.

Alle 3 metodene er mulig å benytte, og det er også mulig å blande dem. Det er uansett en riemann sum.

- Alle metodene er en tilnærmning til det faktiske integralet/arealet.

Oppsummert
Venstre:
$\sum_{i=0}^{2} \triangle x * f(x_i)$

Høyre:
$\sum_{i=1}^{n} \triangle x * f(x_i)$

Midtpunkt
$\sum_{i=0}^{2} \triangle x * \frac{f(x_{i-1}+x_i)}{2}$ gjelder alltid for å finnen neste x-verdi.

$\triangle x =$ lik i alle tilfeller, men den endres dersom vi velger flere partisjoner/oppdelinger av områdene under grafen.

Gjennomsnittet av høyre og venstre sum
$\frac{venstre+h\phi yre}{2}$ =en bedre tilnærmning og likt trapesmetoden.

Gir en bedre tilnærmning til arealet til grafen, og gir det samme svaret som trapesmetoden gir.

Rektangelmetoden
- Midtpunkt $= x_0$ osv.
$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}(f(x_0) + f(x_1) + ..f(x_n))$
Hvor $x_0$ er midtpunktet der rektanglet treffer grafen. Hvis første punktet befinner seg i 0, og andre punktet befinner seg i 1 , så vil $x_0 = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$. Må dele på 2, for å finne midtpunktet til rektanglet.

Trapesmetoden
$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + ..f(x_n))$
- Denne definisjonen gjelder for alle trapesmetoder.
- $x_0$ er alltid a, og så er $x_1$ alltid $x_0 + \triangle x$. Dette må testes nøyere, ettersom vi ikke har gjort alle oppgavene i boka enda.

Repetisjon + bedre forklarte metoder

Rektangelmetoden
- Samme metode som midtpunkt metoden

Definisjon
- Arealet til en funksjon innenfor ett avgrenset område over x-aksen kan finnes slik:
$Arealet = \sum \triangle x * (f(x_1) + f(x_2) + ...f(x_n))$
- Hvor n er antall delintervaller.
$\triangle x = \frac{b-a}{n}$, hvor b og a er området som er avgrenset. $\int_a^b f(x)$.

$\triangle x$ = bredden til rektanglet.

Viktig å huske:
For å finne $x_0$ må vi vite startpunktet og $\triangle x$.
Når vi vet hvor startpunktet er og avstanden til neste rektangel, kan vi finne midtpunktet til rektangelen, ved:
$\frac{x_0+x_0+\triangle x}{2} = x_0$ =det første midtpunktet. Dette punktet setter vi inn i funksjonen for åfinne høyden til grafen i det punktet. Når vi har funnet det første midtpunktet, er det lett finne de resterende punktene.
$x_1 = x_0 + \triangle x$, vi legger på $\triangle x$ hver gang.
Dette gjøres helt til vi er nærme avgrensningen b. Altså siste punktet kan f.eks være $x_7$. Da må siste punktet befinne seg en halv $\triangle x$ fra avgrensingen. Hvis dette stemmer, da vet vi at vi har gjort det riktig.

Siste punktet skal være $x_7+$ $\frac{\triangle x}{2} = b$ . Dette gjelder bare for rektangelmetoden / midtpunktmetoden.

Rektangelmetoden / midtpunkmetoden benyttes ofte mer enn det venstre og høyre riemanns summer gjør. Dette er fordi denne er mer nøyaktig.

Ved høyre og venstre riemannsummer:
Da vil $\triangle x$ være $\frac{b-a}{n}$. Ved både venstre og høyre sum starter man i $x_0$ og legger til $\triangle x$ til de neste punktene. Så fortsetter man helt til man er 1 $\triangle x$ lengde fra den siste avgrensningen, denne må ikke taes med 2 ganger, fordi det siste punktet er lik høyde som det foregående. Lettest å se hvis man tegner det opp.

Trapesmetoden
$\sum \frac{\triangle x}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + f(x_n))$
Hvor $\triangle x = \frac{b-a}{n}$, og $x_0 = a$ og $x_n = b$. Første og siste punktene er høyden til punktet avgrensningene befinner seg i. Alle imellom blir multiplisert med 2, fordi høydene dere benyttes 2 ganger. Trapesmetoden er egentlig bare gjennsomsnittet av høyre og venstre riemanns sum. $\frac{høyre+venstre}{2}$.

Høydene i trapesmetoden finner man $n + 1$ ganger. Så $\frac{\triangle x}{2}$ skal multipliseres med n+1 funksjonsverdier, dette gjelder alltid, og leddene som er imellom skal alltid multipliseres med 2.

Generelt sett er $\triangle x$ bredden til rektangelene / trapesene vi benytter. Antall trapes/rektangler kan vi selv bestemme, vi velger en n-verdi som forteller om hvor mange rektangler vi vil benytte for å finne arealet. Så er også f(x$_n$) alle høydene til rektangelene som vi benytter. Vi trenger en høyde og en bredde for å finne et areal.

Eksempel en funksjon og vi velger at vi skal benytte 6 rektangler

- Vi vil få 6 høyder $f(x)$ og 6 bredder. Bredden mellom hvert rektangel er like, $\triangle x$.
Første punktet i midtpunkt finner man ved $\frac{x_0+x_0+\triangle x}{2} = x_0$. Og de neste punktene trenger man bare å legge til $\triangle x$.

I høyre/venstre riemannsum er $x_0 = a$ og de neste punktene finner man ved å legge til $\triangle x$.

Det er ingen regler som sier at vi ikke kan benytte høyre sum, venstre sum og midtpunktmetoden samtidig. Det er fortsatt en riemannssum uansett hvordan vi velger å gjøre det. I noen tilfeller kan det lønne seg å benytte forskjellige metoder til å finne arealet under en graf, som er avgrenset med x-aksen i punktene a og b.

Høyre:
- Høyre del av rektanglene tar på grafen

Venstre:
- Venstre del av rektanglene tar på grafen

Midtpunkt
- Midterste punkt på rektangelet tar på grafen.

Newtons Metode
- Når man benytter Newtons metode på en funksjon med flere en 1 nullpunkt, for eksempel $x^2$. Så vil newtons metode alltid finne nullpunktet som er nærmest det tallet vi gjettet på at nullpunktet befant seg i. Dette gjelder alle funksjoner med flere enn ett nullpunkt.

Grunnformen for derivasjon
- Kan benyttes til å løse alle derivasjoner

$f'(x)_{lim_{\triangle x->0}} = \frac{f(\triangle x+x)-f(x)}{\triangle x}$

Eksempel
$f(x) = x^2$

$f'(x) = \frac{(\triangle x+x)^2-x^2}{\triangle x} = \frac{\triangle x^2+2\triangle x*x+x^2-x^2}{\triangle x} = \frac{\triangle x(\triangle x+2x)}{\triangle x} = \triangle x + 2x$, $\triangle x$ går mot 0. $= 2x$

Trigonometriske funksjoner uttrykt ved eksponentiell form
$cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$
$sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

Riemannsummer repetisjon

Finne arealet i et avgrenset område under en funksjon $f(x)$. Området er delt inn fra a til b.
- Dette arealet kan vi finne ved å dele området i små delintervaller som vi kaller for n-delintervaller.
- Flere delintervaller gir et bedre svar og blir enda nærmere den faktiske løsningen som vi kan finne ved å integrere.
- Disse delintervallene, altså rektangelene som vi finner arealet av vha. riemannsummer har en bredde som er lik $\triangle x$ og en høyde som er funksjons verdien i de punktene vi velger, $f(x)$.

EKSAMENS NOTATER
Startverdier som skal settes inn i uttrykket for hver av dem
Høyre sum:
$x_0 = a + \triangle x$.
Siste punktet befinner seg i b.
Viktige å huske at høyre sum starter i x0 + $\triangle x$ og slutter i b.

Venstre sum:
$x_0 = a$
Siste punktet befinner seg i $b - \triangle x$.
Viktig å huske at venstre sum starter i a, og slutter i $b - \triangle x$.

Midtpunkt:
$x_0 = \frac{a+a+\triangle x}{2}$, vi deler rektangelen i 2, og setter inn dette punktet i funksjonen for å finne høyden.
I midtpunkt metoden / rektangelmetoden er alltid første x-verdi som vi setter inn i funksjonen $\frac{a+a+\triangle x}{2}$. Det siste punktet skal alltid befinne seg $\frac{x_n+b}{2}$. Altså $\frac{\triangle x}{2} = b - x_n$, hvor $x_n$= det siste punktet. $b = \frac{\triangle x}{2} + x_n$

Trapesmetoden
$x_0 = a$.
$\triangle x = \frac{\triangle x}{2}$

Uttrykket
n = delintervaller. Trapesmetoden skiller seg ut fra de andre ved at vi må bentter $n + 1$ antall funksjonsverdier i definisjonen for å finne arealet. Men denne gir et mye bedre resultat.
$\frac{\triangle x}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2))$

La oss si vi vet at løsningen på en oppgave er 0.3333, dette har vi løst ved å integrere. På eksamen er det mulig at vi får i oppgave å finne ut hvor stort arealet vi regnet ut vha. en av riemannsummene er iforhold til det virkelige svaret. Dette kan vi løse slik:

$\frac{0{,}1851}{0{,}3333} = 55\%$ av det løsningen faktisk er. Det betyr at 45 % av arealet ble ikke tatt med når vi streket opp rektangelene. Det er også mulig at dette arealet vi fant vha. riemannsummer er større enn det faktiske arealet. Så det er en del unøyaktighet, men jo flere delintervaller vi velger, jo nærmere det faktiske svaret kommer vi.

Newtons metode trenger betydelige færre iterasjoner for å finne nullpunktene enn det riemannsummene gjør.
- Newtons metode finner det nærmeste nullpunktet i forhold til gjetningen vår.
- Riemannsummer finner arealet under en avgrenset graf.

Python kode for trapesmetoden, høyre, venstre riemannsummer og midtpunkt står på eget dokument.

Til fredag skal vi gå igjennom simpsons metode, som er en metode som gir ett enda bedre svar enn trapesmetoden.
- Fram til nå har trapesmetoden vært den beste metoden for å finne arealet.

## Simpsons metode

Grunnleggende definisjon
$\sum \frac{\triangle x}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + ......2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n))$

Høyre og venstre summer overestimerer eller underestimerer det faktiske arealet som vi kan finne vha. integranden. Gjennomsnittet av høyre og venstre riemannsum gir oss det samme arealet som trapesmetoden gir oss. Dette gir en bedre tilnærmning.

Trapes
$\frac{\triangle x}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + f_n)$
Hvor $\triangle x = \frac{b-a}{n}$, og $x_0 = a$ og $x_n = b$. Første og siste punktene er høyden til punktet avgrensningene befinner seg i.
- Når vi benytter trapesmetoden blir antall funksjonsverdier alltid 1 større enn antall delintervaller n. Dette er fordi dette er den eneste metoden som benytter begge avgrensningene for rektangelene. Vanligvis benytter man bare første avgrensning, venstre sum eller siste avgrensning som er da er høyre sum. Trapesmetoden er gjennomsnittet av disse, og det beviser også at antall delintervaller n alltid er 1 mindre enn funksjonsverdier som vi skal multiplisere med.

Forenklet skrivemåte:
$f(x_n) \longrightarrow f_n$

Vi har behov for en bedre tilnærmning til arealet enn det høyre, venstre, midtpunkt og trapesmetoden gir oss. Alle disse metodene kan løses relativt lett i et programmeringsspråk, og det er ofte veldig vanlig å utføre slike utregninger i et programmeringsspråk. Fordi det kan fort bli svært vanskelig å gjøre flere enn 10 iterasjoner for hånd. En datamaskin kan utføre denne oppgaven på mindre enn ett sekund.

Simpsons metode gir en enda bedre approksimasjon til det faktiske arealet enn de andre metodene. Denne metoden benytter parabler, altså annengradsfunksjoner som enten krummer oppover eller nedover. Vi velger en annengradsfunksjon som passer inn i avgrensningen a til b. Denne metoden løser oppgaven best på pc.

Selvom trapesmetoden gir et relativt bra svar, dersom vi benytter nok partisjoner / rektangler til å finne arealet, så finnes det mange andre metoder som er bedre og mer komplekse.

Ved å finne en funksjon som er et 2. grads polynom som passer til f(x) mellom avgrensningen a og b. Dette kalles simpsons metode.
$g(x) = Ax^2 + Bx + C$ = Simpsons metode = 2. grads polynom.
Trapes benytter en linjær funksjon, mens simpson benytter ett 2. grads polynom.

## Simpsons metode

Grunnleggende definisjon
$\sum \frac{\triangle x}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + ......2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n))$

POLYNOMINTERPOLASJON
- Vi får oppgitte verdier til en funksjon, f.eks framvist i et koordinatsystem.
En linjær funksjon vil gi oss 2 ukjente verdier vi må finne. Ett 2. grads polynom gir oss 3 ukjente som vi må finne for å kunne vite hva funksjonen egentlig er.

Eksempel:
Vi får oppgitt at når x=1, så er y =1, og når x=4 så er y=2.
$f(x) = Ax + B$

Vi setter opp 2 likninger
(1)
$Ax + B = f(x) = y$
$A * 1 + B = 1$

(2)
$A * 4 + B = 2$

Denne likningen kan nå løses enten vha. gauss eliminasjon, eller så kan vi benytte likningssettet på matrise form. Da kan vi finne ut hva verdiene skal være.

$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$
$M * x = C$
$M^{-1} * M * x = M^{-1} * C$

$x = M^{-1} * C$

$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = M^{-1} * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
Vi må nå finne den inverse til M.
$M^{-1} = \frac{1}{|M|} * (KofM)^T$

$|M| = 1 * 1 - 4 * 1 = -3$

$KofM = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
$KofM^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$
$x = -\frac{1}{3} * \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} * \begin{bmatrix} 1 * 1 - 1 * 2 \\ -4 * 1 + 1 * 2 \end{bmatrix} = \frac{-1}{3} * \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$, A=$\frac{1}{3}$ og B=$\frac{2}{3}$
$f(x) = \frac{1}{3} * x + \frac{2}{3}$
Vi har nå klart å utvikle funksjonen, bare ved å vite 2 kontrollpunkter i koordinatsystemet. Vi kan nå sette inn de oppgitte verdiene for å sjekke at dette stemmer.
- Vi skal ende opp med rett linje mellom punktene siden dette er en linjær funksjon.

$f(1) = \frac{1}{3} * 1 + 1 = 1 = y$
- Vi har funnet den riktigte funksjonen.

Dette kan også gjøres på funksjoner som ikke er linjære.
- Da øker vi antall ukjente, $f(x) = Ax^2 + Bx + C$
- Vi får 3 ukjente, og vi får da også en 3x3 matrise som vi må finne den inverse til for å kunne løse. Vi trenger også 3 kontrollpunkter dersom det skal være mulig å utvikle en funksjon ut av de oppgitte punktene.
- Man kan også benytte insettingsmetoden, men det vil ikke lønne seg dersom man har flere enn 2 ukjente.

Polynominterpolasjon
- 2 kontroll punkt = 1. grads polynom
- 3 kontroll punkt = 2. grads polynom
- osv.

3 kontroll punkt, gir en funksjon med 3 ubestemte koeffisienter (ukjente). Vi kan løse dette ved å sette opp 3 likninger. Det kreves 3 likninger for å finne 3 ukjente. Dette igjen løser vi vha. den inverse til matrisen, linjereduksjon eller innsettingsmetoden.
Hele denne prosessen kalles for polynominterpolasjon. Vi gjør punkter i et koordinatsystem om til en funksjon.

Kontrollpunkter
- Punkter som styrer en linje

Simpsons metode med 2 delintervaller,
$A = \frac{\triangle x}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$, n=2, gir 3 funksjonsverdier vi må multiplisere med.

4 kontrollpunkter gir 3 delintervaller (ikke pensum)
$A = \frac{3\triangle x}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$

Boole's Regel, ikke pensum
5 kontroll punkter og 4 delintervaller
$A = \frac{2\triangle x}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$

Jo flere kontrollpunkter vi benytter, jo flere delintervaller får vi. Det betyr at jo flere kontrollpunkter vi har, jo bedre approksimasjon til det faktiske arealet. Dette er en algoritme som oftest benyttes på pc.

## Differensiallikninger

- Siste hoveddel av kurset og det viktigste emnet vi skal gå igjennom

En differensiallikning er en likning som inneholder en ukjent funksjon og den deriverte til denne funksjonen. Differensiallikninger har hjulpet oss å forstå store deler av fysikken.

$y(x)$ : "ukjent funksjon" som vi vil finne ut hva er.
Eksempel:
$sin(x) * y'''(x) - 2y'(x) = S$
Dette er en 3. grads differensiallikning

Vi skal bare se 1. grads og 2. grads differensiallikninger.

En generell 1. ordens linjær differensial likning
$y'(x) + P(x) * y(x) = O(x)$
- Hvor P og O er kjente funksjoner.

2. ordens differensiallikning
$A * y''(x) + By'(x) + Cy(x) = R(x)$
Dette er en 2. grads inhomogen differensiallikning.

A, B og C er konstanter. Likningen inneholder 3 grader. Det er funksjonen y vi skal finne, og det finnes den 2. deriverte, den deriverte og den vanlige funksjonen. Altså 3. grads.

Store deler av fysikken kan løses vha. 1 og 2. ordens difflikninger.
$F = ma$ er utviklet av en 2. grads difflikning.

## 1. Ordens differensiallikninger

$y' = 1$
$y =$ den ukjente funksjonen vi skal finne.
$y'=$ den deriverte til funksjonen vi skal finne, skal gi svaret 1.

Hva må y være for at den skal bli lik 1 når den deriveres?
$x' = 1$, $y(x) = x + c$
$y(x)' = 1$
Dette vet vi fordi vi vet hva som må deriveres for å få tallet 1.

Den generelle løsningen blir $y = x + C_0$, hvor C er en tilfeldig konstant. Denne likningen har uendelige mange løsninger, fordi vi kan sette inn ett hvilket som helst tall inn for integrasjonskonstanten $C$.
Den dervierte $y(x)' = 1$.

Initialverdi
- Initialverdi er at man setter inn en verdi for å få ett eksakt svar. Som i likningen over så har vi uendelig mange løsninger, men hvis vi setter inn en initialverdi så kan vi få ett svar på problemet.
$y(initialverdi) = 1$

Likningen som gir 1 løsning.
- Velger initalverdien 0.
$y(0)' = 1$, gir en løsning. Hva må funksjonen y være for å få tallet 1?
$x' = 1$, $y = x$

Dette gir en bestemt løsning. Vi må gi funksjonen en bestemt verdi for å få en løsning.

$y'(x) = 1$
- Vi kan gjette oss fram til en løsning, men vi benytter som regel lagranges definisjon. Vi finner en eksakt verdi ved å benytte leibniz definisjon.

$\int \frac{dy}{dx} dx = \int 1$
$\int \frac{dy}{dx} dx = x + C_0$

$y = \int 1 dx = x + C_0$

$\int \frac{dy}{dx}dx$, de slår hverandre ut, og vi ender opp med $y$. Når vi gjør det på begge sider.

$\int \frac{dy}{dx}dx = \int dy=$ integralet av den deriverte, = y. Fordi vi setter inn den deriverte $y'(x)$. Og vi skal finne integralet til den deriverte, altså gå tilbake. Den antideriverte. Da står vi igjen med y, fordi y er den antideriverte til $y'$.

Leibniz notasjon
$\frac{dy}{dx} = y'$
- En annen måte å skrive den deriverte til en funksjon på.
$\frac{dy}{dx}$ = den deriverte av funksjonen y, hvor x er den frie variabelen.
- Vi benytter veldig ofte Leibniz notasjon når vi holder på med differensiallikninger. Denne notasjonen er mest effektiv, og gjør difflikninger lettere å løse.

Hva betyr dx?
- dx er bare en notasjon, eller den forteller oss om bredden i et rektangel / en partisjon når vi skal finne areal under en graf fra a til b. $\int_a^b xdx$, så er dx en lite område vi måler, altså bredden. Denne er så ubetydelig liten at man kan se bort ifra den i mange tilfeller?

$\dot{y}$ =Newtons uttrykk for den deriverte. Bare en prikk over funksjonen.
$y'$ = Lagranges uttrykk for den deriverte. Benytter også $f'(x)$. y'en blir bare erstattet med en funksjon.

Eksempel
$x * y\text{'} = x^2$
- Kan gjøres på 2 måter, vi kan dele på x, og da ser vi at $y'$, må være x.
- Benytte definisjon for integrasjon.

Vi deler på x først.
$y' = x$
$\int \frac{dy}{dx}dx = \int x$
$y = \int xdx$
$y = \frac{1}{2}x^2 + C_0$
$y' = x$

Leibniz notasjon er den meste effektive metoden for å bli kvitt den deriverte.
$\int \frac{dy}{dx}dx = \int xdx$

Vi opphever $\frac{dy}{dx}dx$, så det står igjen y.
$y = \int xdx = \frac{1}{1+1}x^{1+1} + C_0 = \frac{1}{2}x^2 + C_0. = F(x)$ =Den antivderiverte til $y'$.
$\int xdx$ = Det ubestemte integralet, altså den antideriverte.

Vi må og burde sette inn svaret inn i likningen etterpå for å sjekke at vi har komme fram til riktig funksjon.
$x * (\frac{1}{2}x^2 + C_0)' = x^2$
$x * (x + 0) = x^2$
$x * x = x^2$

Eksempel
$y' = cos(x)$
$\int \frac{dy}{dx}dx = \int cos(x)dx$

$\int \frac{dy}{dx}dx$ slår hverandre ut. Fordi den er derivert.
$y = \int cos(x)dx$
$y = sin(x) + C_0$
$C_0$ er bare en integrasjonkonstant.

Vi kan tenke på det som:
Hva må funksjonen y være for at når vi deriverer funksjonen så får vi høyre side av likningen.
$y''$ = Den dobbeltderiverte. Hva må y være for at den skal gi høyre siden av likningen etter vi har derivert den 2 ganger?

## Euler's metode

- Benyttes for å håndtere 1. grda difflikninger

$\frac{dy}{dx} = f'(x)$
Benytter det bestemte integralet istedetfor ubstemt integral.
- Vi velger en avgrensning, feks a-b.

$\int_a^b \frac{dy}{dx}dx = \int_a^b f(x)dx$

$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dy}{dx}dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$

Også vet vi at integralet av en funksjonen som er avgrenset 2 punkter er lik det funksjonen i det første punktet minus funksjonen i det andre punktet.
$y(x_1) - y(x_0) = \int_a^b f(x)dx$
- Så antar vi at vi vet verdien til y i punkt a, $x_0$. Dak an vi finne funksjonsverdien til y i punktet $x_1$.

$y(x_1)$ er da gitt ved:
$y(x_1) = y(x_0) + \int_a^b f(x)dx$
Hvor vi vet hva $y(x_0)$ er.
På denne måten kan vi lage en algoritme, som utførerer n-antall iterasjoner.
Da kan vi finne alle punktene til en graf. Jo flere iterasjoner vi velger, jo flere punkter kan vi tegne inn. Jo større mellomrom mellom avgrensningene, altså $\triangle x = \frac{b-a}{n}$

$\triangle x = \frac{x_1 - x_0}{n}$, Hvis vi har store avstander mellom vært punkt vi skal finne, så blir det større unøyktighet. Dersom vi bruker en kort avstand, blir svaret mer riktig iforhold til det faktiske svaret.

Eulers metode
$y(x_1) = y(x_0) + \int_a^b f(x)dx$
Vi kan se på det siste leddet som et ledd vi kan utføre en riemannsum på, f.eks, høyre, venstre, midtpunkt. Trapesmetoden eller simpsons metode. Det spørs hvor nøyaktig vi skal utføre det. Prøv å kode Eulers metode med simpson eller trapes metoden i python.

Eulers metode går utpå å finne funksjonsverdier i et punkt, på denne måten kan vi lage en algoritme som utføres n-ganger og med en bredde lik delta X. Da kan vi tegne inn all punktene i python.

Det er derfor differensiallikninger ofte løses i python eller i et alternativ programmeringsspråk.

Jo mindre $\triangle x$ er, jo mer presis blir algoritmen til det faktiske svaret. Jo flere n-delintervaller jo mindre blir deltax, og jo bedre blir algoritmen. Når vi har funnet ett punkt, så adderer vi bare med bredden og finner funksjonsverdien nå i dette punktet.

Definisjon
$y(x_n) = y(x_{n-1}) + \triangle x * f_{n-1}$ - Gjelder ved 1 delintervall. n=1.

Dersom vi velger ett delinterval, blir algoritmen veldig enkel, men det blir stor unøyaktighet. La oss nå si denne algoritmen kjører 4 ganger, så får vi 4 punkter. $y(x_0)$ til og med $y(x_3)$. Da blir alle punktene litt ujevne.
Vi må øke antall delintervaller dersom vi vil ha ett mer nøyaktig svar.

## Differensiallikninger

Newton's 2. lov
$\sum F = ma$
Kan skrives på flere måter. Vi vet at akelerasjon er endringe av hastighet per tid.
$a = \frac{dv(t)}{dy} = -mg$ Fordi kraften virker i negativ retning. Ned mot jorda.
$\frac{dv(t)}{dy} = v'$
Vi kan derfor si at
$m * v' = -mg$
$v' = -g$
$v' = \frac{dv}{dt} = y(strekning)$

$\int \frac{dv}{dt} dt = \int -g dt$

$\int \frac{dv}{dt} dt = -g \int dt = -g(t+C) = -gt - gC = -gt + C$
$v = -gt + C$

$\int dt =$ er en funksjon som blir 1 når vi deriverer den. Når vi integrerer den blir den bare $t$.

$v = -gt + C$
Så får vi oppgitt at inital betingelsen er $v = 0$, $t = 0$ $v(t=0) = -g * t + C = C = 0$
$v(t) = -gt$
$C_0 = V_0 =$ startfarten
$v(t) = -gt + V_0$

$\frac{dy}{dt} = -gt + V_0$
$\int \frac{dy}{dt} dt = \int (-gt + V_0) dt$
$y(t) = -\frac{1}{2} g * t^2 + V_0 t + C_0$

Så får vi initial betingelsen
$y = h$, $t = 0$
$h = -\frac{1}{2} g * 0^2 + V_0 * 0 + C_0$
$h = C_0$
H = høyden.

$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 t + h$

Nå som vi vet alle funksjonene, kan vi sette inn forskjellige ting i newtons 2. lov
$\sum F = ma$
$\sum F = m \frac{dv}{dt}$ - 1. ordens diff-likning
$\sum F = m \frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt})$ - 2.orden diff-likning

2. grads diff-likninger kan deles opp i 2. 1 grads difflikninger.
- Splitter et problem til 2 mindre problemer.

2. grads:
$my'' = F$
$y'' =$ Den dobbeltderiverte. Hvor mange integrasjonskonstanter får vi?
1. grads er en enkelt derivert, vi får 1 integrasjonskonstant.
2. grads er en dobbeltderivert, vi får 2 integrasjonskonstanter.
3. grads får 3 integrasjonskonstanter.

## Separabel diff-likning

1. orden

$y(x)' = f(x)$, $y'(x) = f(x) * g(y)$

$y = \int y'dt$

$y'(x) = f(x) * g(x) \longrightarrow \int \frac{dy(x)}{dx} dx = \int f(x)dx + \int g(y)dy$

$y'(x) = f(x) * g(y)$ - Deler på $g(y)$
$\frac{1}{g(y)} * y'(x) = f(x) \longrightarrow \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} = f(x)$

$u' = f(x) \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = f(x)$
$\frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} = f(x)$
$\frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$
Så erstatter vi venstre side med en annen funksjon. $u = ln(g(y))$
$y'(x) = f(x) * g(y)$ multipliseres med $dx$ på hver side.
$\frac{dy}{dx} * dx = f(x) * g(y) * dx$ så deler vi på $g(y)$

$\frac{1}{g(y)} dy = f(x)dx$
Bruker integral på begge sider.
$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x)dx$
$ln(y) = \int f(x)dx$

Vi tar et eksempel med ekte funksjoner
$y' = x * y$ er det samme som $\Leftrightarrow y' = f(x) * g(y)$

$\frac{dy}{dx} * dx = x * y * dx$
$\frac{1}{y} dy = xdx$
$\int \frac{1}{y} dy = \int xdx$
$ln(y) + C_1 = \frac{1}{2}x^2 + C_2$
$ln(y) = \frac{1}{2}x^2 + C_2 - C_1$
$C_2 - C_1 = C_3$. Dette er bare konstante tall som ikke endres. Så vi vet ikke hva denne verdien er fordi vi ikke har noen initalbetingelse. Så dette er bare en sum av disse to tallene som vi enda ikke vet hva er.

$ln(y) = \frac{1}{2}x^2 + C_3$ - Benyterr $e$ og opphøyer begge sider.
$e^{ln(y)} = e^{\frac{1}{2}x^2 + C_3}$
$y = e^{\frac{1}{2}x^2} e^{C_3}$
$e^{C_3}$ = Et konstant tall. Så vi kaller dette tallet bare for C.
$y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$
- Dette er den generelle løsningen for funksjonen y. Denne funksjonen har uendelig mange løsninger, siden vi ikke vet om noen begrensninger og vi vet ikke hva C er. C kan vi finne dersom vi vet om initalverdiene.

Annet eksempel
$y' = \frac{1}{y} sin(x)$
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} sin(x)$ - multipliserer med y og dx

$ydy = sin(x)dx$
$\int ydy = \int sin(x)dx$
$\frac{1}{2}y^2 + C_0 = -cos(x) + C_1$
$y^2 = -2cos(x) + 2(C_1 - C_0)$
$2(C_1 - C_0) =$ ett konstant tall.
$y^2 = -2cos(x) + C_3$- Dette er løsningen på implisitt / indirekte form. Det mangler en operasjon før den er fullført.
$y = \sqrt{-2cos(x) + C_3}$ - Er den generelle løsningen. Kan settes inn i det opprinnelige uttrykket for å sjekke at det stemmer.

## Inhomogene 1. ordens differensiallikninger

Simpsons metode
- benytter alltid 2 delintervaller
$\frac{\triangle x}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + ....f_n)$

Python eksponentialfunksjon
import math
e = exp(1)
Samme som eulers tall $e$.

## 1. orden ordinære/ODE difflikninger

- Finnes 3 typer som vi skal gå igjennom.
- Dersom en difflikning er av type 2 eller 3, så kan man alltid reformere den til en type 1 likning.
- Type 1 likninger klarer vi å løse.

Type 1, 1. orden ODE
$\frac{du}{dx} = f(x)$
- Hvis difflikningen er på formen til type 1, så er difflikningen på kanonisk (naturlig form)
- Når likningen er på denne formen, kan vi finne hva funksjonen er vha. direkte integrasjon.
$du = f(x)dx$
$\int du = \int f(x)dx$
$u = \int f(x)dx - C_0$ - Den generelle løsningen

Type 2, 1.orden ODE / Separabel ODE
$\frac{du(x)}{dx} = f(x) * g(u)$
- Den inneholder 2 funksjoner som vi vet hva er.
- Vi skal finne funksjonen u.
- Dette er en separabel ODE, fordi vi kan separere alle funksjonsuttrykk på hver sin side.
- Så vi får alle kjente uttrykk på en side, og alle ukjente på den andre.

- u er den eneste ukjente funksjonen i dette tilfellet.

Vi separerer dem
$\frac{du}{dx} = f(x) * g(u)$, multipliserer med dx
$du(x) = f(x) * g(u) * dx$, så deler vi på $g(u)$
$\frac{1}{g(u)} du = f(x)dx$
$\int \frac{1}{g(u)} du = \int f(x)dx$
Så benytter vi vanlig integrasjon. Eksempel $g(u) = u$, $f(x) = x$
$\int \frac{1}{u} du = \int xdx$
$ln(u) + C_0 = \frac{1}{2}x^2 + C_1$
$ln(u) = \frac{1}{2}x^2 + C_1 - C_0$
$e^{ln(u)} = e^{\frac{1}{2}x^2 + C_1 - C_0}$
$e^{ln(u)} = e^{\frac{1}{2}x^2} * e^{C_1 - C_0}$
$e^{C_1 - C_0}$ =et hvilket som helst tall
$u = C * e^{\frac{1}{2}x}$
- Vi har nå løst den separable difflikningen av 1.orden.
- Dette er den generelle løsningen. Den gir altså uendelig mange funksjoner avhengig av hva C er.
C kan man finne for den faktiske løsningen, men da må man løse intitalverdiproblemet. Dette problemet kan løses dersom vi vet et punkt på grafen U og dens (x, y) koordinater. Vi trenger derfor en start verdi for å finne hva C er. La oss si at $u(0) = 2$

Vi løser dette problemet ved å sette inn verdiene i den generelle løsningen.
$2 = C * e^{\frac{1}{2} * 0^2}$
$2 = C$
Vi har løst problemet og vi har nå funnet den funksjonen som gir et svar, altså en riktig løsning.
$u = 2 * e^{\frac{1}{2}x^2}$

Type 3, 1. orden ODE
$\frac{dy}{dx} + P(x) * y = Q(x)$
Samme som
$y' + P * y = Q$
Hvor P og Q er kjente funksjoner.

Dette er en 1. ordens linjær inhomogen ODE / ordinær difflikning.
Det er bare 1. deriverte og ikke fler, det betyr at difflikningen er linjær.

Vi arbeider med 3 forskjellige 1. ordens ODE'er. Type 1, 2 og 3.
Ofte med generelle løsninger, trenger vi ikke gjøre mer enn å vise at en likning er lik integralet av en annen likning.

$u = C * e^{-\int P(x)dx}$

Dette er en generell løsning, og dersom vi ikke vet hva P(x) er, så er dette et godkjent svar. Men den er generell så lenge vi ikke har løst initalverdi problemet.

Vi kan løse intitalverdi problemet ved å vite en startverdi for x og y. $u(0) = 2$, u=2 og x=0.

Når vi har løst initalverdi problemet kan vi se at vi har funnet den spesielle løsningen for det tilfellet vi jobbet med.
Da kan vi skrive svaret slik:
$u(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x^2}$
Den oppfyller initalverdi kravene og det er da den spesielle løsningen.

Type 1
$\frac{du}{dx} = f(x)$
Naturlig/kanonisk form 1. grads difflikning

Type 2
$\frac{du}{dx} = f(x) * g(u)$
Separabel type 1. grads difflikning.
Separer likning på hver side for å få den på naturlig form. Alle x på den ene og u på den andre.
Når de er separererte er de på naturlig form og kan løses ved vanlig integrasjon.

Type 3
$\frac{du}{dx} + P * u = Q$
- Benytter en avhengig variabel for å løse denne. Vi vil prøve å få den på en annen form, helst type 1. Hvis vi får den på type 2 form så er det alltid mulig å få den på type 1 form.
Når Q=0, så er det en separabel likning.
$\frac{du}{dx} = -P(x)u$
- Den kan da løses ved å separere u og x, akkurat som man gjør med type 2.
- Type 3 likninger er egentlig bare fordekte type 1 likninger. Altså vi må gjøre dem om.

Hva gjør vi når Q ikke er lik 0?
- Vi må reformulere difflikningen. Vi må prøve å skrive den enten som type 2 eller 1.
- Når en difflikning er på type 3 form, kan vi ikke løse den før vi endrer hvordan den er satt opp. Type 1 eller type 2.

Fremgangsmåte / mal
$\frac{dy}{dx} + P(x) * y = Q$
Vi gjetter på at $y(x) = u * e^{-\int P(x)dx}$. Vi prøver å få den på en annen form slik, vha. en anne difflikning u.
Vi vil erstatte y med en annen funksjon.

Så er $\frac{dy}{dx} = y'$, så vi må finne ut hva den deriverte til y er.
Vi benytter produktregelen: $u'v + uv'$. u $= u$ og $v = e^{-\int P(x)dx}$
$y' = \frac{du}{dx} * e^{-\int P(x)dx} + \frac{d}{dx}(e^{-\int P(x)dx})u$

Vi setter så dette inn i original likningen.
$\frac{dy}{dx} + P(x) * y = Q$

Men hva er den deriverte til $e^{-\int P(x)dx}$?
$e^v$, $v = -\int P(x)dx$
$e^v = v * e^v$
Derivert:
$e^{-\int P(x)dx} = -\int P(x)dx * e^{-\int P(x)dx}$

$\frac{d}{dx}(-\int P(x)dx * e^{-\int P(x)dx}) = -P(x) * e^{-\int P(x)dx}$ fordi vi deriverer og skal antiderivere samtidig, og da slår de hverandre ut.

Vi setter nå inn
$\frac{dy}{dx} = Q - P(x) * y$
$y' = Q - P * y$
$\frac{du}{dx} * e^{-\int P(x)dx} + \frac{d}{dx}(e^{-\int P(x)dx})u - P * u * e^{-\int P(x)dx} = Q$

Eksempel
$\frac{dy(x)}{dx} + P(x) * y(x) = Q(x)$
$y = e^{-\int P(x)dx} * (\int e^{\int P(x)dx} * Q(x)dx + C_0)$
- Generell løsning for alle type 3 likninger.
Vi kan nå benytte innsetting av funksjonene, hvis vi vet P(x) og $Q(x)$.

Eksempel
$2y' - x * y = 1$
Dette er en type 3 likning fordi den kan bringes over til en annen type ved å reformulere den.
Det er det som kjennetegner en type 3 likning.

Vi deler på 2 for å få den på riktig form. Altså type 2.
$y' - \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}$
Her ser vi at $P(x) = -\frac{1}{2}x$ og $Q(x) = \frac{1}{2}$
Vi setter dette bare inn i den generelle løsningen.
$y = e^{-\int -\frac{1}{2}xdx} * (e^{\int -\frac{1}{2}xdx} * \frac{1}{2}dx + C_0)$
Så regner vi ut
$y = e^{+\frac{1}{4}x^2} * (\frac{1}{2}\int e^{-\frac{1}{4}x^2} + C_0)$
- Dette er den generelle løsningen.

Mal for løsning

$y' - \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}$
$y = e^{-\int Pdx} * u = e^{-\int Pdx}(\int e^{\int Pdx} * Qdx + C_0)$

1. Første steg, regne ut integralene etter vi har satt inn verdiene for P og Q.
$e^{-\int Pdx} = e^{-\int -\frac{1}{2}xdx} = e^{\frac{1}{4}x^2 + C_1}$
$\int Pdx = \int -\frac{1}{2}xdx = -\frac{1}{4}x^2 + C_2$
Vi trenger ikke å ta med C fordi vi får flere C som går sammen til å bli en konsant C.

2. Setter så inn
$y = e^{\frac{1}{4}x^2}(\int \frac{1}{2} * e^{-\frac{1}{4}x^2}dx + C_0)$
$y = e^{\frac{1}{4}x^2}x * (\frac{1}{2}\int e^{\frac{-1}{4}x^2}dx + C_0)$
Dette er den generelle løsningen.

Annet eksempel
$-y' - 2y = x$
Ganger med -1
$y' + 2y = -x$
$P(x) = 2$
$Q(x) = -x$
Setter inn direkte, fordi vi vet at det er en type 3 likning, pga formen den står på.

$y = e^{-2x} * (-\int e^{2x}xdx + C_0)$
Dette er den generelle løsningen.

Type 3 MAL
1. Få den på standard type 3 form først (gange eller dele slik at den står på riktig form og y' er positiv)
2. Regn ut integralene som er mulig
3. Før dette inn i den generelle løsningen
$\frac{dy(x)}{dx} + P(x) * y(x) = Q(x)$
$y = e^{-\int P(x)dx} * (\int e^{\int P(x)dx} * Q(x)dx + C_0)$ - Generelle løsningen

Integrasjonsteknikk
Delvis integrasjon
- Vha. produktregelen

$\int u * vdx$
$(uv)' = u'v + uv'$ Derivasjon av produktet til 2 funksjoner.
Vi snur på formelen
$u'v = (uv)' - uv'$ Setter inn i et ubestemt integral
$u'vdx = \int((uv)' - uv')dx$
$u'vdx = uv - \int uv'dx$

Eksempel
$\int xe^{2x}dx$
$\int u'vdx = uv - \int uv'dx$
$v = x$, $u' = e^{2x}$ og da blir $u = \frac{1}{2}e^{2x}$
$v' = 1$
Vi setter inn
$\int u'vdx = \frac{1}{2}e^{2x} * x - \int \frac{1}{2}e^{2x} * 1dx$
$\int u'vdx = \frac{1}{2}e^{2x} * x - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx$
$\int u'vdx = \frac{1}{2}e^{2x} * x - \frac{1}{2}\frac{1}{2}e^{2x}$
$\int u'vdx = \frac{1}{2}e^{2x} * x - \frac{1}{4}e^{2x}$
Slik kan vi løse integrasjonene, og da kan vi også få en mer generell løsning for en oppgave.
$\int P(x) = -2x$
$\int Q(x) * P(x) = \frac{1}{2}e^{2x} * x - \frac{1}{4}e^{2x}$
Vi kan nå sette denn inn i en type 3 likning.
$y = e^{-2x}(-(\frac{1}{2}e^{2x} * x - \frac{1}{4}e^{2x}) + C_0)$
$y = -\frac{1}{2}e^{-2x+2x}x - \frac{1}{4}e^{2x-2x} + Ce^{-2x}$
$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + Ce^{-2x}$
Nå er dette den generelle løsningen til difflikningen. Denne kan få en spesiell løsningen dersom vi vet initalverdiene.

## Numerikk med Eulers metode av 1. grads difflikninger

$y' + y^2 = 2$
Dette er en 1. grads difflikning, fordi det er en enkelt derivert, men den er ikke linjær, fordi $y^2$.

1. ordens difflikninger kan gi en tilnærmet løsning av difflikninger
$\frac{dy}{dx} = f(x)$
- Setter opp det bestemte integralet
$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dy}{dx}dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$
$y(x_1) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$
$y(x_1) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$
Hvor $x_1 = x_0 + \triangle x$ og $x_0 = x_0$.
Dette er tilnærmet lik:
$y(x_1) = y(x_0) + \triangle x * f(x_0)$
$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

Generelt for eulers metode
$y(x_n) = y(x_{n-1}) + \triangle x * f(x_{n-1}, y_{n-1})$

Hvor f.eks.
$f(x, y) = x + y$
f(x, y) er bare en funksjon med 2 avhengige variabler. Så den benytter 2 variabler for å finne sine funksjonsverdier.

Naturlig form, type 1
$y' = f(x)$
$\frac{dy}{dx} = f(x)$

Separabel, type 2
$\frac{dy}{dx} = f(x) * g(y)$
- Er en fordekt type 1 difflikning, som kan gjøres om til type 1 form.
- Den separeres og gjøres om til type 1.

I praksis utføres slike likninger slik:
$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$
- Så tar man integralet på begge sider.

Type 3
$\frac{dy}{dx} + P(x)dx = Q(x)$
- Kan bringes på formen til type 1

Hvis $Q(x) = 0$, da er likning inhomogen.
Da får vi den på formen til type 2.

Hvis $Q(x)$ ikke er like 0. Da er likning homogen. Da prøver vi å få den på formen til type 1.

På eksamen kan vi få overgang fra type 3 til type 1.

I praksis setter vi bare inn likningen inn i malen vi har

Mal
$\frac{dy}{dx} + P(x)g(y) = Q(x)$
$y = e^{-\int Pdx}(\int Q(x) * e^{\int Pdx} + C)$
Så regner vi ut integralene og finner funksjonen y.
C gjelder for alle integrasjonskonstantene før de er løst. De sammenslåes.

Integrende faktor i dette tilfellet er $\int Pdx$.

## Forskjellige integrasjoner og derivasjon som er nyttige å kunne

$\int -\frac{1}{y^2}dy = \int -y^{-2}dy = \frac{1}{1+(-2)}y^{-2+1} + C = -y^{-1} + C = -\frac{1}{y} + C$

Integrasjon av $x * e^{-ln(x)}$
$\int x * e^{-ln(x)}dx = \int x * e^{ln(x^{-1})}dx$
Vi flytter opp $-1ln(x) = ln(x^{-1})$. Da kan vi fjerne $e$ og $ln$
$\int x * x^{-1}dx = \int x * \frac{1}{x}dx = \int 1dx = x + C$

Derivasjon av $e^x$

$e^{2x} = 2e^{2x}$

Integrasjon av $e^{2x}$
$\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

Delvis integrasjon. Brukes når vi skal finne den antideriverte funksjonen av 2 funksjoner som multipliseres med hverandre.
Bygger på produktregel for derivasjon. Der vi har 2 funksjoner multiplisert med hverandre.
F.eks $(f(x) * g(x))'$ hvor $f(x) = u$ og $g(x) = v$
$(uv)' = u'v + uv'$

Benytter så integralet på begge sider
$\int (uv)' = \int u'v + \int uv'$

Integralet av $\int (uv)' = uv$. Fordi integralet av noe som er derivert er lik seg selv. De nuller hverandre ut.
$uv = \int u'v + \int uv'$

Snur på likningen
$\int uv' = uv - \int u'v$
Dette er formelen for delvis integrasjon
$\int uv' = uv - \int u'v$

Tar et eksempel.
$\int 4xe^x dx$
- Vi må bestemme oss for u og v.
Vi velger oss en u og v.
$u = 4x$
$v' = e^x$
$v = e^x$
$u' = 4$

Så setter vi inn i $\int uv' = uv - \int u'v$
$\int 4x * e^x = 4x * e^x - \int x * e^x dx$
$= 4x * e^x - \int 4 * e^x dx$
$= 4x * e^x - 4\int e^x dx$
$= 4x * e^x - 4e^x + C$
Det fungerer fordi $\int uv'$ gir oss den samme funksjonen $\int 4x * e^x$. Da vil det fungerer å bruke delvis integrasjon.
$\int uv' = uv - \int u'v$

## 2. ordens differensiallikninger

- Kan løses vha. at vi kan brekke opp likningen i 2, 1. ordens differensiallikninger.

- Så kan vi løse dette likningssystemet og til slutt ender vi opp med en type 3 difflikning som vi kan løse med malen vi har lært.

Type 3
$y' + Py = Q$
- Hvor P og Q er kjente funksjoner / verdier

Mal for løsning
$y = e^{-\int Pdx}(\int Qe^{\int Pdx}dx + C)$

2. ordens difflikninger er av samme type, men inneholder en 2. derivert også
Eksempel
$y'' + Py = Q$

Likninger som inneholder alle 3 ledd og er inhomogen (ikke lik 0) kan se slik ut
$Ay'' + By' + Cy = R$

Ulike notasjoner som kan hjelpe med å løse difflikninger
$y' = \frac{dy}{dx}$ Leibniz notasjon
Kan også skrives $\frac{d}{dx}y$
Det betyr den deriverte av y, med hensyn på x. X er altså den frie variabelen og y er funksjonen.

Vi kan benytte en differensialoperator
$\frac{dy}{dx} = Dy$
D er operatoren

Enkel 2. ordens difflikning
$y'' = -g_0$
$\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = -g_0$
$D * Dy = -g_0$
$D^2y = -g_0$
Ved hjelp av differensialoperatorer står vi igjen med $D^2$.
- Dette er bare en annen form å skrive den deriverte på, som kan hjelpe oss å løse ulike difflikninger.

Disse operatorene kan også faktoriseres.
$y' + Ay = 0$
$Dy + Ay = 0$
$(D + A)y = 0$ Nå er den faktorisert
Vi må beholde y på høyre side av faktorene, ellers kan det bli regne feil.

Eksempel med 2.ordens difflikning
$y'' + 2y' + y = 0$

Vi benytter oppskriften
1. Gjør om til differensialoperatorer
2. Faktoriserer
3. Se om vi kan finne en funksjon u, som gjør at vi ender opp med et likningssystemet bestående av 2 ukjente.
4. Løser så likningen som består av 1 ukjent
5. Setter inn i den andre likningen og vi ender opp med en 1.ordens type 3 likning.
6. Benytter så malen for type 3 likninger og setter inn og løser denne.

$D^2y + 2Dy + y = 0$ - Diffoperatorer
$(D^2 + 2D + 1)y = 0$
Vi benytter så 2. gradsformelen for å finne faktorene.
$(D + 1)(D + 1)y = 0$

Utifra dette kan vi nå sette opp 2. difflikninger.
1. $(D + 1)y = u$
2. $(D + 1)u = 0$

Vi løser likningen med 1 ukjent først, alltid! Ellers får vi problemer når vi skal begynne å integrere.

2.
$(D + 1)u = 0$
$Du + u = 0$
$Du = -u$
$\frac{du}{dx} = -u$
Dette er en type 1 likning?
$du = -udx$
$du = -udx$ Vi deler så på u, vi vil få u og x på hver side.
$\frac{1}{u}du = -dx$
$\int \frac{1}{u}du = \int -dx$
$ln(u) + C = -x + C$
$u = Ce^{-x}$ - Benytter opphøyer alt i e på begge sider.

Setter inn i likning 1.

1.$(D + 1)y = u$
$(D + 1)y = Ce^{-x}$
$Dy + y = Ce^{-x}$
Dette er en type 3 likning, som vi nå løser vha. malen.

$y = e^{-\int Pdx}(\int Q * e^{\int Pdx}dx + C)$
Hvor $P = 1$ og $Q = Ce^{-x}$

Vi løser først hvert enkelt integral før vi setter inn, for å gjøre det enklest mulig.

$e^{-\int 1dx} = Ce^{-x}$
$e^{\int 1dx} = Ce^{x}$

$\int Q * e^{\int Pdx} dx$
$\int Ce^{-x} * Ce^{x} dx = \int dx = x + C$

Setter så inn
$y = Ce^{-x}(x + C + C)$
$y = e^{-x}(Cx + C_1)$

Differensialoperatorer
Her er en 2.ordens homogen differensiallikning
$Ay'' + By' + Cy = 0$

Vi kan benytte diffoperatorer til å faktorisere dem.
$AD^2y + BDy + Cy = 0$
$(AD^2 + BD + C)y = 0$
Vi kan så benytte 2.grads formelen til å finne de 2 nullpunktene. Vi finner de 2 løsningene for D.
Dette tallet kan også være ett komplekst tall, og dersom dette er tilfelle, kan man fortsatt løse likningen. De imaginære tallene kan fortsatt regnes på med vanlig aritmetikk.

$(D + E)(D + E)y = 0$
Når vi så til slutt finner løsningen ved å løse 2 likninger, kan vi så sette det inn i malen, fordi da står vi igjen med en type 3 likning.
Når vi så har løst denne, står vi igjen med en del imaginære tall. Disse vil vi prøve å fjerne og dette kan vi gjøre ved å prøve å omforme dem til polarfarm vha. eulers formel. Deretter er det mulig å fjerne dem, men dette skal vi se mer på senere.

Eulers formel
$r * e^{i\phi} = r(cos(\phi) + i * sin(\phi))$

Eksempel hvor vi får "fjernet" de imaginære tallene.
Etter vi har løst type 3 difflikningen står vi igjen med:
$y = C_2e^{aix} + C_1e^{-aix}$
Vi liker ikke at den inneholder komplekse tall. Vi omformer den til polarform først.

$y = C_2(cos(aix) + isin(aix)) + C_1(cos(-aix) + isin(-aix))$
$C_1(cos(-aix) + isin(-aix)) \Leftrightarrow C_1(cos(aix) - isin(aix))$

$y = (C_2 + C_1)(cos(aix) + (C_2 - C_1)(isin(aix))$

Vi antar så videre at $C_1$ og $C_2$ er komplekse tall, men at de er kompleks konjugerte av hverandre.
$C_1 = a + ib$
$C_2 = a - ib$

$C_2 = \bar{C_1}$

Så regner vi ut:
$C_2 - C_1 = a - ib - (a + ib) = a - a - ib - ib = -2ib$

$C = a$
Konklusjon
Finnes 2 komplekse tall som gjør uttrykket bestemt av 2 reelle tall.

$y = (C_2 + C_1)(cos(aix) + (C_2 - C_1)(isin(aix))$
$y = Acos(aix) + Bsin(ax)$ - Konklusjonen

Inhomogen difflikning $!= 0$
$y'' - a^2 y = x^2$

Homogen difflikning $= 0$
$y'' - a^2 y = 0$

## 2. ordens differensiallikninger

## - Siste del av pensum

- Håndtere 2. ordens difflikninger som inneholder komplekse tall
- Håndtere 2. ordens difflikninger som er inhomogen. Altså ikke lik 0.

Det finnes 3 mulige representasjoner av 2. ordens difflikninger

En mulig løsning er vha. imaginære tall.
En annen er via polarform.
Den siste er svingelikningen. $Csin(ax + x_0)$

Digresjon
Det er mulig å bevise at $sin(a + b) = cos(a)sin(b) + cos(b)sin(a)$ vha. Eulers formel.
Hvor a og b er vinkler / radianere

Eulers formel
$re^{ia} = r(cos(a) + isin(a))$
$re^{-ia} = r(cos(a) - isin(a))$

Fremgangsmåte
$e^{i(a+b)} = cos(a + b) + isin(a + b)$

Vi vet at
$sin(a) = \frac{1}{2i}(e^{ia} - e^{-ia})$
Så benytter vi eulers formel på begge leddene og regner ut, på samme måte kan vi benytte 2 vinkler. Slik:
$sin(a+b) = \frac{1}{2i}(e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)})$ Så bruker vi potensreglene.
$sin(a+b) = \frac{1}{2i}(e^{ia}e^{ib} - e^{-ia}e^{-ib})$ Benytter så eulers formel på alle disse 4 leddene. Vi omgjør dem til polarform.
$sin(a+b) = \frac{1}{2i}((cos(a) + isin(a)) * (cos(b) + isin(b)) - (cos(a) - isin(a)) * (cos(b) - isin(b))$
Ved å regne ut dette, kommer vi fram til at:
$sin(a+b) = cos(a)sin(b) + cos(b)sin(a)$

Uttrykke difflikninger fra fysiske situasjoner
Et eksempel er pendelen
Likningen vi komemr fram til er: $\phi(t) = Asin(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \phi_0)$
Her er $\phi$ en funksjon av tiden t. Denne likningen kan gi oss de fremtidige posisjonene til pendelen utifra at vi vet om tilstanden dens etter en viss tid t. Dersom systemet ikke påvirker av noen ytre forandringer kan vi vite hva som skjer med pendelen.

2. ordens homogene difflikninger
$y'' - a^2y = 0$ - Er ett eksempel på en slik likning. Den er lik 0, når alle leddene som inneholder y står på venstre side. Dersom denne var inhomogen ville den sett f.eks slik ut:
$y'' - a^2y = 1$, hvor 1 er en funksjon, som ikke har noe med funksjonen y å gjøre. Den settes derfor på høyre side av likningen.

Vi kan benytte diffoperatorer for å løse ett slikt problem.
$(D^2 - a^2)y = 0$
Ved å nå benytte 2.grads formelen på $(D^2 - a^2)$ ender vi opp med:
$(D-a)(D+a)y = 0$
Vi kan nå genere 2 likninger utifra dette, slik at vi løser 2. første ordens difflikninger.
(1)
$(D-a)u = 0$

(2)
$(D+a)y = u$
Vi løser likning 1 med hensyn på u, og setter dette inn i likning 2.
Den første likningen vi løser er en separabel, vi må altså separere u fra den andre funksjonen som befinner seg i uttrykket.
Ved innsetting får vi en type 3 likning når vi skal løse likning 2.
Da benytter vi bare malen for en type 3 likning, og vi har løst problemet.

Et eksempel på en løsning kan være

$y = \frac{C}{2a}e^{ax} + C_1 e^{-ax}$ - Hvor C og C1 er integrasjonskonstanter som følger med. Dette er derfor bare den generelle løsningen. Hvis vi skal finne den spesielle løsningen trenger vi å vite om 2 av den tilstander. Initialverdiene.
Eksempelvis: $y'(0) = -7$ og $y(0) = 7$.
Dette betyr at $y' = -7$ når $x = 0$ og $y = 7$ når $x = 0$.

For å finne den første integrasjonskonstantens verdi, setter vi inn i likningen: $(D + a)y = u$ som er en type 3 likning.
$y' + ay = u$, hvor den første integrasjonskonstanten henger med fra funksjonen U. Feks $Ce^x$. Når vi har funnet denne konstanten, så benytter vi den generelle løsningen til å finne den siste konstanten.
$y = \frac{C}{2a}e^{ax} + C_1 e^{-ax}$ Vi setter inn den integrasjonsverdien vi fant og de oppgitte initialverdiene vi får oppgitt. Altså $C_1$.
Hvilke av disse konstantene som er riktige, må man bare følge med på utregningen, og se hvilke av de som havner hvor. Slik at man ikke setter inn for feil integrasjonskonstant.

Ikke pensum:
- Utlede malen for å løse differensiallikninger som er på type 3 form.

Systemer med flere løsninger
$C_2 e^{ax} + C_1 e^{-ax} = y$
- Denne løsningen kan alltid skrives på en annen måte, slik:
$(A + B)e^{ax} + (A - B)e^{-ax}$
Hvor $C_2 = (A + B)$ og $C_1 = (A - B)$
Ved å benytte matriser, og dens determinant, kan vi se at det er lov å definere det slik:
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_1 \end{bmatrix}$
Determinanten til den første matrisen er : $1 * -1 - 1 * 1 = -2$
Vi deler så opp:
$(A + B)e^{ax} + (A - B)e^{-ax}$
$Ae^{ax} + Be^{ax} + Ae^{-ax} - Be^{-ax} = y$
$B(e^{ax} - e^{-ax}) + A(e^{ax} + e^{-ax}) = y$
$2A(\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}) + 2B(\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}) = y$
$cosh(ax) = (\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2})$ - Fra definisjon
$sinh(ax) = (\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2})$ - Fra definisjon
$2Acosh(ax) + 2Bsinh(ax) = y$

cosh = kosinushyperbolicus
sinh = sinushyperbolicus

2. ordens inhomogene differensiallikninger
Inhomogene difflikninger kan se slik ut:
$Ay'' + By' + Cy = R(x)$

Den er ikke lik 0, vi har ett ledd som ikke består av / inneholder funksjonen y på noen som helst måte. Denne separerer vi på høyre side, og vi har en inhomogen difflikning.

Et eksempel
$y'' + a^2y = 1$ - Letteste formen for en 2. ordens inhomogen difflikning.
Vi setter opp som vanlig den karakteristiske likningen og vi finner ut vha. 2. gradsformelen:
$(D^2 + a^2)y = 1$
$D = + - ai$
$(D + ai)(D - ai)y = 1$

Vi setter så opp 2 likninger. Legger merke til at begge to kan løses vha. type 3 malen. Hovedforskjellen mellom inhomogene og homogene difflikninger er at vi ender opp med 2 likninger som er på type 3 form når vi arbeider med inhomogene, mens med homogene er det bare en av likningene som ender opp som type 3.

Benytter altså samme logikken som ved homogene 2. ordens difflikninger.
De er vanskeliger, pga. man flere flere integrasjoner å utføre.

Vi setter inn i malen 2 ganger. Ved inhomogene difflikninger blir det nesten alltid 2 type 3 difflikninger som vi må løse vha. malen.

Generell løsning og komplekse tall kan kan skrives på andre måter
Et eksempel er den utregnede inhomogene difflikningen:
$y'' + a^2y = 1$
Har funnet ut at:
$y = \frac{1}{a^2} + \frac{C_0}{2ai}e^{aix} + C_1e^{-aix}$
Den komplimentere løsningen:
$\frac{C_0}{2ai}e^{aix} + C_1e^{-aix} \longleftarrow y'' + a^2y$
Den partikulære løsningen:
$\frac{1}{a^2} \leftarrow 1$
Den partikulære løsningen forteller oss hva som må til for at likningen skal være lik 1.

Den generelle løsningen blir da:
$y_c'' + a^2y_c = y_p$
$y = y_p + y_c$

Se på de 3 generelle løsningene som inneholder komplekse tall som man kan omforme dem til.
Polarform, generell løsning og den siste hvor man finner konstanter og regner ut alle leddene man får av den polar formen.

Se litt mer på de partikulære og komplementære løsningene

$y = y_p + y_c$

$y_p =$ den partikulære løsningen
Denne løsningen inneholder ikke integrasjonskonstanter. Dersom likingene inneholder ett ledd uten integrasjonskonstanter så er den inhomogen.

$y_c$ =den komplementære løsningen. Denne inneholder alltid integrasjonskonstanter. Denne delen av løsningen tilsvarer den homogene løsningen til likningen. Hvis den var homogen, ville y vært lik den komplementære løsningen.

Delvis integrasjon
$\int u'vdx = uv - \int uv'dx$

Eksempel, $xe^x$:
$v = x$
$u = e^x$
$xe^x - \int e^x * dx$
$xe^x - e^x + C$

Spesielt eksempel
Ta med på eksamen
$\int xe^{-x} =$? Benytte delvisintegrasjon

$v = x$
$v' = 1$
$u = e^{-x}$
$u' = -e^{-x}$

Vi setter dette inn i definisjonen
$\int u'vdx = uv - \int uv'dx$

$u' = -e^{-x}$ så vi får et annet integral enn det faktiske integralet vi skulle finne. Vi må derfor trikse litt og multiplisere med -1 på begge sider.

$\int -e^{-x}xdx = e^{-x}x - \int e^{-x} * 1dx$
$-\int e^{-x}xdx = e^{-x}x - (-e^{-x}) + C$

Vi har nesten løst problemet, vi må bare multiplisere med -1 på begge sider for at integrasjonen skal stemme med det uttrykket vi opprinnelig ville finne ut av. Som var $\int xe^{-x} =$?.
$\int e^{-x}xdx = -e^{-x}x - e^{-x} + C$

Mer om sinh og cosh

$sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Integralet $\int sin(x)e^x dx$ kan løses på en annerledes måte vha. delvis integrasjon.
$u = e^x$, $u' = e^x$
$v = sin(x)$, $v' = cos(x)$
$\int u'vdx = uv - \int uv'dx$ - setter inn

$\int sin(x)e^x dx = sin(x)e^x - \int cos(x)e^x dx$
Vi får ett nytt integral $\int cos(x)e^x dx$ som vi igjen kan benytte delvis integrasjon på.
$\int cos(x)e^x dx$
$u = e^x$,$u' = e^x$
$v = cos(x)$, $v' = -sin(x)$ - Setter inn
$\int cos(x)e^x dx = cos(x)e^x - \int -sin(x)e^x$
$\int cos(x)e^x dx = cos(x)e^x + \int sin(x)e^x$ Vi ser nå tilbake og setter inn.

$\int sin(x)e^x dx = sin(x)e^x - \int cos(x)e^x dx$
$\int sin(x)e^x dx = sin(x)e^x - (cos(x)e^x + \int sin(x)e^x)$
$\int sin(x)e^x dx = sin(x)e^x - cos(x)e^x - \int sin(x)e^x$
Vi flytter integralet over på den andre siden.
$\int sin(x)e^x dx + \int sin(x)e^x dx = sin(x)e^x - cos(x)e^x$
$2\int sin(x)e^x dx = sin(x)e^x - cos(x)e^x$
Vi deler så på 2.

$\int sin(x)e^x dx = \frac{sin(x)e^x - cos(x)e^x}{2} + C$ - Er det endelige ubestemte integralet. Vi må huske å legge på en C. De Cene vi får sammenslåes, dersom det skulle være tvil, vi legger den bare på helt til slutt.

## Finne en funksjon / likning utifra oppgitte punkter

Vi får oppgitt punktene $(1, 1)$ og $(4, 2)$
Dette er betingelsene for funksjonen f(x) må oppfylle for at vi skal kunne lage en linjær funksjon.
Vi trenger 2 punkter med oppgitte verdier for å kunne finne en linjær funksjon.
Vi trenger derfor 3 punkter for å finne en annen grads funksjon, dersom det var dette vi skulle finne.

Grunnen til det er at vi får en likningssett med 2 ukjente når vi har en linjær funksjon med 2 oppgitte punkter, og vi får ett likningssett med 3 ukjente for en annen grads funksjon.

Vi vet at den grunnleggende definisjonen for en linjær 1. grads likning er slik:
$f(x) = Ax + b$
En annengrad ser slik ut:
$f(x) = Ax^2 + Bx + C$

$f(x) = Ax + b$
Vi setter opp 2 likninger, vi har koordinatene $(1, 1)$ og $(4, 2)$ x=1 da er y=1 og x=4 da er y=2
Vi setter inn y verdiene og x verdiene i sine respektive likninger
$1 = A * 1 + b$
$2 = A * 4 + b$

1.
$1 = A * 1 + b$
$1 - b = A$ Så setter vi inne for A i likning 2.

$2 = A * 4 + b$
$2 = (1 - b)4 + b$
$2 = 4 - 4b + b$
$-2 = -3b$
$b = \frac{2}{3}$

Setter inn i likning 1 igjen.
$1 - b = A$
$1 - \frac{2}{3} = A$
$A = \frac{1}{3}$

Funksjonen vår blir da slik:
$f(x) = Ax + b$
$f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$
Ferdig

Spesiell delvis integrasjon
$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$ - Kan løses ved hjelp av substitusjon

Vi setter $u = 1 + \sqrt{x}$
Den deriverte av u er:
$\frac{du}{dx} = 0 + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$
$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ Vi vil få dx alene, slik at vi kan sette inn for dx etterpå.
$2\sqrt{x}du = dx$
- Men her får vi et problem, fordi $\sqrt{x}$ har ingenting med u å gjøre. Og vi skal løse integralet med hensyn på u. Så vi må finne ut hva u er.
Vi snur på likningen. $u = 1 + \sqrt{x}$
$\sqrt{x} = u - 1$

$2(u - 1)du = dx$
$\int \frac{1}{u}2(u - 1)du$

Vi løser så integralet med hensyn på noe annet, altså u.

$\int \frac{1}{u}2(u-1)du = \int(\frac{2u}{u} - \frac{2}{u})du$ - Splitter opp i 2 integraler.
$2\int du - 2\int \frac{1}{u}du = 2u - 2ln|u| + C$

Til slutt setter vi inn for $u = 1 + \sqrt{x}$.
$2(1+\sqrt{x}) - 2ln|1+\sqrt{x}| + C$ er svaret på integralet.

Eulers metode
- Benyttes for å finne en graf som er tilnærmet den faktiske løsningen.
- Brukes på difflikninger der vi ikke vet hva løsningen er.

Definisjonen
$y = y_{n-1} + h * f(x,y)$

Vi er nødt til å vite et punkt på grafen for i det hele tatt kunne benytte metoden.

F.eks
$y' = 2x + y$
- Får oppgitt en verdi for x og y.

$y_{n+1} = y_n + h * f(x,y)$

Hvor $f(x,y) = 2x + y$. Det er en funksjon som er avhengig av 2 variabler.

PENSUMLISTE
- Linjær algebra
- Komplekse tall
- Numeriske metoder / python
- Difflikninger