MATEMATIKK 2 OG STATISTIKK

av Gard Klemetsen

Lineær algebra, følger og rekker

Eksempel på en følge
$\{1,2,3,4,5\}$
$e^x \equiv 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 ...$

Likningssystem
$x + 2y + 3z = 3$
$4x + 5y + 6z = 2$
$7x + 8y + 9z = 3$

Likningssystemet på matrise form
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ =Koeffisientmatrisen
$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} =$ Vektorer

Vektorer og enhetsvektorer

Skalarproduktet

$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x^2 + y^2 + z^2$
Dette er skalarproduktet. Det skal alltid bli et tall når vi regner ut, altså ikke en ny vektor / matrise.

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = x* \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y* \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z* \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x*\vec{e}_x + y*\vec{e}_y + z*\vec{e}_z$$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ =en enhetsvektor $= \vec{e}_x$ som har en lengde på 1 langs x-aksen.

$$\vec{r} * \vec{r} = |\vec{r}|^2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x^2 + y^2 + z^2 = |\vec{r}|^2$$

$|\vec{r}|^2$= normen til r-vektor

Ortogonale enhetsvektorer

$\vec{e}_x * \vec{e}_x = |\vec{e}_x|^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$

$\vec{e}_x * \vec{e}_x = 1$ - Betyr at det er en ortogonal enhetsvektor.
$|\vec{e}_y|^2 = 1$
$|\vec{e}_z|^2 = 1$

Enhetsvektorer er ortogonale dersom de er uavhengig av hverandre (at den ene vektoren/funksjonen ikke kan benyttes til å beskrive den andre). De står derfor vinkelrett på hverandre, dette er lettest å forestille seg i et 2D eller 3D vektorsystem.

Enhetsvektorer er ortonormale hvis de står vinkelrett på hverandre.

$\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$: Spenner ut et 3D vektorrom som vi kaller for V.
DimV=3=Antall lineært uavhengige enhetsvektorer.
$\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ er et av flere underrom av $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$. Dette underrometer bare todimensjonalt.

Geometrisk fortolkning av vektorer

- I et kartesisk koordinatsystem. Vi har et punkt, som har 2 koordinater. Vi kan velge hvor vektoren skal starte, men som regel starter den i origo og går ut til punktet. Avstanden ut til punktet er gitt ved :
$|\vec{r}|^2 = x_0^2 + y_0^2$, hvor x og y er avstanden ut langs hver sin tilhørende akse.
$\vec{r}$ er en posisjonsvektor som er dekomponert i x_0 og y_0 koordinatene.
$\vec{r} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ er en vektor, denne vektoren kan plasseres hvor som helst i det kartesiske koordinatsystemet, fordi det ikke er noen informasjon om hvor vektoren skal starte ifra, det eneste kravet er at x skal gå mot x-aksen og y mot y-aksen (multiplisert med enhetsvektoren til den tilhørende aksen).

Skrives ofte gjerne også slik, av pytagoras.
$|\vec{r}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$

$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$ =2D vektorrom
$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ =1D vektorrom. Fordi vektoren ikke går i retning av noen av de andre aksene.

Lineær transformasjon

4. Forskjellige transformasjoner
Translasjon
Skalering
Refleksjon
Rotasjon

Eksempel på en lineær transformasjon
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*1+2*1 \\ 3*1+4*2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$
$f(x) = y$
Dimensjonen er beholdt. Altså 2D. $T : V- > V$
Samme vektorrommet.

Generelt om lineære transformasjoner

- Lineære transformasjoner er at vi gjør noe med en vektor / lineær funksjon som gjør at den endrer seg / endrer form.
$\vec{g} = \lambda * \vec{t} + \vec{b}$
Generalisert sier vi at:
$\vec{g} = \lambda * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \vec{t} + \vec{b}$

$\vec{t}$ er vektoren som vi skal transformere.
$\vec{g}$ er resultatvektoren vi ender opp med etter transformasjonene.
λ spiller rollen som ett koordinat (posisjonsdata)
$\vec{b}$ har bare noe å si dersom vi skal parallellforskyve/translere vektoren $\vec{t}$.

Translasjon / parallellforskyvning

$\vec{b}$ er en vektor som kan flytte den originale vektoren. Denne vektoren har som en funksjon å flytte en vektor til en fast posisjon. Hver gang denne benyttes, så kalles dette for en translasjon. Legg merke til at det er mulig å utføre flere lineære transformasjoner på en vektor/funksjon på engang. Det er derfor mulig å f.eks rotere, reflektere, skalere og translere en vektor samtidig.

Vanligvis kan vi skrive vektoren som en funksjon av x. Altså $f(x) = y$.
Da blir dens vektor $\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, hvor x bestemmer lengden langs x-aksen og y bestemmer lengden langs y-aksen.
Translasjon vil si å forflytte et legeme uten at det roteres, slik at legemets enkelte punkter beskriver fullstendig like og parallelle, rette eller krumme baner.

Vi kan sette det opp slik:
$\vec{g} = \lambda * \vec{t} + \vec{b}$, hvor g er den nye vektoren, og b er forflyttelsesvektoren, og t er vektoren vi opprinnelig hadde.
Eksempel med tall:

Vi vet at $\vec{r} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = x * \vec{t}$
$\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_0 = 0$ og $y_0 = 1$.
$\vec{b}$ forteller om høyden til forskyvningen i dette tilfellet

$\vec{g} = \lambda * \vec{t} + \vec{b}$
$\lambda = 1$ i dette tilfellet.

$\vec{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ = den nye vektoren som går fra origo og til punktet tuppen på den kopierte vektoren. Det betyr at vi vet at $y_0 = 1$ og vi vet ved $f(1) = y$ = sluttpunktet til vektoren, fordi vi vet jo allerede lengden på den kopierte vektoren, altså x-verdien. Så vi vet når og hvor vektoren starter og slutter. $f(x) = y$.

Eksempel der vi skal lage en vektor utifra hva vi ser i koordinatsystemet. Dette er ett 2D koordinatsystem, så da må vektoren som dannes være $\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, hvor x og y bestemmer avstanden i deres egen retning. Vi kan se på det som en funksjon og som en vektor.
$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix}$, fordi $f(x) = y$. Og i dette tilfelle så er x og y begge to 1.
$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
$\vec{r} = x * \vec{t}$

$|\vec{t}|^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
$|\vec{t}| = \sqrt{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ =normen til $\vec{t}$.

Skalering

- Endre lengden på vektorens komponenter. Det er mulig å endre y-komponenten og ikke endre x-komponenten.

$M = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\vec{g} = M * \vec{t} + \vec{b}$
- Utifra hva M er, så kan vi skalere vektoren for vårt eget behov.

M er transformasjonsmatrisen (matrisen som vi må multiplisere vektoren med for å få den nye resultatvektoren).

Eksempel: $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $\vec{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ - Vi halverer vektoren i både x og y retning.

Ingen translasjon, altså $\vec{b} = 0$
$\vec{g} = M * \vec{t} + \vec{b}$
$\vec{g} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
Noe som betyr at hvis vi hadde tegnet dette inn grafisk, så ville vektorens lengde i x og i y-retning vært halvert.

Skalere ulikt (forlenget i x og forminsket i y-retning)

$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, ingen translasjon.
$\vec{g} = M * \vec{t} + \vec{b}$
$\vec{g} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
- Vi har nå transformert/skalert vektoren, slik at den strekker seg lengre i x-retning enn i y-retning. Den er skalert til å bli lengre i en retning, og mindre i en annen. Dette er fullt mulig å gjøre.

Refleksjon

$\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Dette er utgangspunkts vektoren, $\vec{r}$.
Den nye vektoren vi ender opp med etter refelksjonen er $\vec{R}$.
$\vec{R} = M * \vec{r} + \vec{b}$
- Ingen translasjon i dette tilfellet, $\vec{b} = 0$.

$\vec{R} = M * \vec{r}$
$\vec{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
- Nå går den nye vektoren i positiv x-retning og i negativ y-retning. Denne er derfor reflektert om x-aksen.

Det finnes 3 mulige rotasjoner.
Refleksjon om x-aksen: $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Refleksjon om y-aksen: $M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Refleksjon om diagonalen: $M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
- Husk at det er mulig å rotere først om y-aksen og så om diagonalen osv, men det vil bli det samme som om vi gjorde en operasjon.
- Det er også mulig å benytte translasjon samtidig, eller benytte noen av de andre transformasjonene.

Transformasjonsmatrisen M

- M er transformasjonsmatrisen, det er den som transformerer den originale vektoren.
$\vec{R} = M * \vec{t} + \vec{b}$

Rotasjoner i planet (2D er det vi nøyer oss med)

Ved rotasjon er transformasjonsmatrisen M, dekomponert, det betyr at vi kan rotere i forhold til flere retninger.

$M = M_x + M_y = \begin{bmatrix} cos(\phi) & -sin(\phi) \\ sin(\phi) & cos(\phi) \end{bmatrix}$

$M_x = \begin{bmatrix} cos(\phi) & 0 \\ sin(\phi) & 0 \end{bmatrix}$, $M_y = \begin{bmatrix} 0 & -sin(\phi) \\ 0 & cos(\phi) \end{bmatrix}$

$\vec{r} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y}$

Den nye matrisen $\vec{T} = M * \vec{t} + \vec{b}$, ingen tranlasjon i dette eksempelet, vi setter inn.

$\vec{t_x} = x\vec{e_x} = x * (M_x + M_y) * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$R\vec{t} = x * (M_x + M_y) * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y(M_x + M_y) * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$R\vec{t} = x(\begin{bmatrix} cos(\phi) & 0 \\ sin(\phi) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -sin(\phi) \\ 0 & cos(\phi) \end{bmatrix}) * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y(\begin{bmatrix} cos(\phi) & 0 \\ sin(\phi) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -sin(\phi) \\ 0 & cos(\phi) \end{bmatrix}) * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$R\vec{t} = x * \begin{bmatrix} cos(\phi) & 0 \\ sin(\phi) & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y * \begin{bmatrix} 0 & -sin(\phi) \\ 0 & cos(\phi) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x * M_x * \vec{e}_x + y * M_y * \vec{e}_y$

$R\vec{t} = x * \begin{bmatrix} cos(\phi) \\ sin(\phi) \end{bmatrix} + y * \begin{bmatrix} -sin(\phi) \\ cos(\phi) \end{bmatrix}$

Generelt sier vi derfor at:

$\vec{Rt} = x * \begin{bmatrix} cos(\phi) \\ sin(\phi) \end{bmatrix} + y * \begin{bmatrix} -sin(\phi) \\ cos(\phi) \end{bmatrix}$

Hvor x og y, er komponentene / avstanden langs x og y aksen til den opprinnelige $\vec{t}$ vektoren.

Merk hvor viktig det er å ha ortogonale basisvektorer i denne sammenhengen. Hvis basisen ikke er ortigonal vil ikke $M_x * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $M_y * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ være lik $\vec{0}$.

Dette kalles for stive rotasjoner.
Generelt gjelder:
$R = \begin{bmatrix} cos(\phi) & -sin(\phi) \\ sin(\phi) & cos(\phi) \end{bmatrix}$ for alle rotasjoner.

REPETISJON AV REKKER

Taylor definisjon

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{(n)!} * (x-a)^n$

Mclaurin definisjon

- $a = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{(n)!} * (x-0)^n$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{(n)!} * (x)^n$

Betinget konvergens definisjon
En rekke som ikke er absolutt konvergent, trenger ikke å være konvergent. Men en rekke som er absolutt konvergent innenfor et intervall, vil alltid være konvergent i det samme intervallet.

Hvis en rekke ikke er absolutt konvergent, men konvergent, så er rekken betinget konvergent innenfor intervallet, og utenfor intervallet ville den divergert. Det vil si at:

Hvis rekken hadde bare inneholdt absolutte verdier, så ville den divergert mot uendelig, hvis den ikke hadde absolutt verdier, så ville den konvergert mot en verdi mellom disse konvergensintervallet når n går mot uendelig. Altså den ville konvergert mot en verdi som befinner seg i intervallet.

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Fortsette å lese her.

Egenverdiproblemet

- Finne egenverdi og egenvektorer tilhørende egenverdiene til den tilhørendem matrisen.

$A = matrise$

- Handler om å finne hvilken vektor $\vec{r}$ som oppfyller betingelsen:

$A * \vec{r} = \lambda * \vec{r}$
Det kan eksistere flere muligheter.
$\vec{r_i}$ forskjellige løsninger og λ_i forskjellige.

Egenverdiproblemet går utpå å finne hvilke vektorer og λ som passer inn.

Eksempel
$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \vec{r_i} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
Vi skal finne x, y og lambda.
$A * \vec{r} = \lambda * \vec{r}$
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Fremgangsmåten er som følger:
$A * \vec{r} = \lambda * \vec{r}$
$(A - \lambda) * \vec{r} = \vec{0}$
Hvor $(A - \lambda * enhetsmatrisen) = B$ (en ny matrise).

$B * \vec{r} = \vec{0}$
Vi benytter så den inverse til B
$B^{-1} = \frac{1}{|B|} * Kof(B)^T$
Vi må se på når determinanten er lik 0.

$\vec{r} = B^{-1} * \vec{0}$
Vi setter så inn og regner ut.
$|B| = |(A - \lambda * 1)| = | \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} | = | \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} | = |B|$
$= (1-\lambda)(1-\lambda) - (1 * 1) = 1 + \lambda^2 - 2\lambda - 1$
Så må vi se på når determintanten er lik 0.
$1 + \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$
$\lambda^2 - 2\lambda = 0$
$\lambda(\lambda - 2) = 0$
$\lambda = 2$ og $\lambda = 0$
Så setter vi inn λ i det originale uttrykket, for å finne hvilken vektor som passer.
λ_1 :
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} x+y \\ x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$
Dette kan vi se på som 2 likninger.
$x + y = 2x$
$x + y = 2y$
Vi kan ut ifra dette se at $x = y$. I begge likningene.
$y = x$
$x = y$

λ_2 :
Så må vi også sjekke den andre løsningen.
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
x og $y = 0$. Altså vektoren er lik $= \vec{0}$
Dette er den andre løsningen.

Når vi utfører slike oppgaver, er det som regel bare å følge oppskriften, det eneste kravet er at:
$(A - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = B$ og $|B| = 0$

I slike oppgaver er det også mulig å få uendelig mange forskjellige vektorer, sånn som i den første løsningen.
$x = y$, gir uendelig mange vektorer. (En uendelig lang linje / punkter).

Diagonalisering

Eksempel oppgave
$A * \vec{r} = \lambda * \vec{r}$
$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$B = A - \lambda * 1$
$\vec{r} = B^{-1} * \vec{0}$

$B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{bmatrix}$
Så må vi se på når determinanten $= 0$.
$|B| = 0$
$(5-\lambda)(2-\lambda) - (-2)(-2)) = 10 - 5\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$
Ved å benytte annengradsformelen, så får vi at $\lambda_1 = 6$ og $\lambda_2 = 1$.
Vi har nå funnet egenverdien til vektoren $\vec{r}$ og matrisen A. Vi kan nå finne egenvektoren $\vec{r}$ som passer til egenverdien og matrisen A.

Vi setter inn for λ_1 og λ_2
$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
Vi får da 2 likninger
$5x - 2y = x$
$-2x + 2y = y$
- Vi løser så hver likning separat, dersom de er like, så betyr det at vi har funnet en egenvektor.

λ_1 :
1.
$5x - 2y = x$
$4x = 2y$
$2x = y$

2.
$-2x + 2y = y$
$-2x = -y$
$2x = y$
Det betyr at vi har bevist at den ene egenvektoren er $\vec{r_1} = x * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
Vi gjør så det samme med den andre egenverdien vi fant.

λ_2 :

$5x - 2y = 6x$
$-2x + 2y = 6y$
1.
$-2y = x$
2.
$-2x = 4y$
$-2y = x$

Da vil den andre egenvektoren være: $\vec{r_2} = x * \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vi kan så sjekke om disse vektorene er ortogonale. Vi multipliserer begge egenvektorene vi fant med hverandre.
$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -2 + 2 = \vec{0}$
Dersom denne er 0 så er de ortogonale, altså de er 90 grader på hverandre. Hvis de blir 1, så er de enhetsvektorer.

Egenvektor dersom begge linjene er like.

Normere vektorer:

Skalarproduktet skal være lik 1.

Gjelder for alle ortogonale kolonne matriser:

$M^{-1} = M^T$ - Kolonne vektorer står vinkelrett på hverandre.

For å dobbelsjekke må vi benytte regelene:
$R^{-1} * R = 1$
$R * R^{-1} = 1$

Diagonalisering

$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
$A * \vec{r} = \lambda * \vec{r}$
$B = A - \lambda * 1$
$\vec{r} = B^{-1} * \vec{0}$
$B^{-1} = \frac{1}{|B|} * kof(B)^T$

Et krav er at $|B| = 0$
$B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - \lambda & -2 \\ -2 & 2 - \lambda \end{bmatrix}$
$|B| = (5 - \lambda)(2 - \lambda) - (-2)(-2) = \lambda^2 - 7\lambda + 6$
$\lambda_1 = 6$
$\lambda_2 = 1$

Vi har nå funnet 2 egenverdier, vi kan nå finne egenvektorene ved å sette inn for begge løsningene i det originale uttrykket.

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Så ser vi på hver linje, vi kan løse det vha. av gauss eliminasjon eller bare se på en linje (vi er bare ute etter forholdet).

$5x - 2y = 6x$

$-2y = x$

$x = -2y$

$\vec{r_1} = y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Løsning 2

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$5x - 2y = x$

$-2y = -4x$

$y = 2x$

$\vec{r_2} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Vi kan så sjekke om disse vektorene er ortogonale.

$\vec{r_1} * \vec{r_2} = y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}^T * y \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -2 + 2 = 0$

Siden skalarproduktet mellom dem er lik 0, så er de ortogonale.

Normering av vektorer

- Hvordan normerer man en vektorer?

Norm og modul gjør det samme. $|\vec{r}| = modul = norm$

For alle ortogonale matriser så gjelder det at $M^{-1} = M^T$

Kolonne vektorene står vinkelrett på hverandre!

$R^{-1} = R^T = \begin{bmatrix} cos & sin \\ -sin & cos \end{bmatrix}$, til en vinkel ϕ.

Prosedyrer for å finne egenverdier og egenvektorer, med eksempler.

Diagonalsering

$M_{ortogonal} = \begin{bmatrix} x1 & x2 \\ y1 & y2 \end{bmatrix}$

Hvor hver kolonne er en vektor. Disse vektorene er normerte, altså 1 lang og står vinkelrett på hverandre.

Kan vi alltid skrive M som kolonner med normerte egenvektorer? - Nei, men vi kan alltid få det til når den opprinnelige matrisen vår A er symetrisk.

En matrise er alltid symmetrisk når det samme på hver side av diagonalen er like.
Eksempel:
$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, hvor -2 og -2 er på hver sin side av diagonalen. Dette gjelder for alle kvadratiske matriser. Altså $n \times n$ matriser.

Definisjon for å diagonalisere
$A * M = M * D$
Hvor D er matrisen vi må finne for å diagonalisere matrisen A.
$M^{-1} * A * M = M^{-1} * M * D$
$M^{-1} * A * M = 1 * D = D$

Definisjonen blir da:
$M^{-1}AM = D$, for å finne den diagonaliserte matrisen D. Det at den er diagonalisert betyr egentlig bare at det finnes en matrise M som består av de 2 egenvektorene til A, som gjør at hvis vi multipliserer dem ut, så vil vi få egenverdiene til matrisen A på diagonalen til i matrisen D. Altså vi finner egenverdiene direkte hvis vi vet hva egenvektorene er.

Vi kan også finne A på samme måte, men vi må gange med M^{-1} på høyre side på begge sider av likningen, og M på venstre, for å fjerne transformasjonsmatrisen M på den andre siden av likningen.

$A = MDM^{-1}$ for å finne A.

Gitt A og vi kan konstruere matrisen M, deretter kan vi bringe A over på en diagonal form som matrisen D. Dette kalles for DIAGONALISERING. A går over til å bli en diagonalisert matrise D, ved hjelp av matrisen M. Den diagonaliserte matrisen D inneholder egenverdiene i diagonalen og 0 i de andre posisjonene. Disse egenverdiene tilhører sin korresponderende matrisen M sine kolonne vektorer. Disse kolonne vektorene er egenvektorer som tilhører egenverdiene.

NB! A er diagonaliserbar fordi A har 2 lineært uavhengige egenvektorer. Når M består av normerte egenvektorer sier vi at A er ortonormal og diagonaliserbar.

NB! $M^{-1}AM = D$, D er similar til A, altså den er lignende.

Similaritetstransformasjon
A er diagonalisert vha. en similaritets transformasjon.

Basisskifte og koordinattransformasjon
- Handler om å beskrive en vektor i ett koordinatsystem, og så skifte basisen vha. en matrise M, slik at den nå er beskrevet i et annet koordinatsystem.

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$\vec{x_1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{x_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

De er ortogonale. Dette kan testes ved $x_1^T * x_2 = 0$

$M * \vec{x_1} = \vec{x}$

Ved å ta x med M så har vi byttet basis for vektoren, vi får vektoren uttrykt på nytt i det vanlige kartesiske koordinatsystemet.

$M = \begin{bmatrix} x1 & x2 \\ y1 & y2 \end{bmatrix}$, her kan vi se på hver kolonnoe som en egenvektor. Altså matrisen M består av 2 kolonner, hvor hver kolonne er en egen vektor. Vi kan angi basiser for vektorene, og vi kan bytte basisen vektorene befinner seg i. Altså vi kan gå ifra et koordinatsystem til et annet.

Transformasjonsmatrisen M kan brukes til å bytte basisen til vektoren.

$M * \vec{x}' = \vec{x}$

Ved å multipliser M med x så har vi byttet basis for vektoren, her går vi ifra det merkede x' koordinatsystemet til det det kartesiske koordinatsystemet. Det er den samme vektoren, men den er nå uttrykt vha. en annen basis. Ofte kan vi komme borti vektorer som er i "feil" basis, og da må vi bytte dem over til en basis som gir mer mening for oss.

På samme måte kan vi bytte basis fra det kartesiske koordinatsystemet til et annet koordinatsystem.

Fra det merkede til det kartesiske koordinatsystemet:

$M * \vec{x}' = \vec{x}$

Fra det kartesiske koordinatsystemet til det merkede koordinatsystemet:

$\vec{x}' = M^{-1} * \vec{x}$

Det er dette som kalles for ett basisskifte

Vi kan se på M som en katalog over mengden av $\{\vec{x_1}, \vec{x_2}\}$uttrykt i $\{x, y\} - basisen$. M er en katalog over dekomponeringen av x og y i det kartesiske koordinatsystemet.

$\vec{x1}$ og $\vec{x2}$ er uavhengige av dekomponeringen. Når vi velger 2 ulike dekomponeringer, så vil det finnes en mekanisme ("former") som knytter disse sammen. Det er matrisen M som står for denne jobben.

Repetisjon og fremgangsmåte

1. Finne egenverdiene vha. formelen $A * \vec{x} = \lambda\vec{x}$

Vi må se på når determinanten er 0.

$Ax - \lambda\vec{x} = \vec{0}$
$\vec{x}(A - \lambda * 1) = \vec{0}$
Vi har lov til å multiplisere med enhetsmatrisen hvor vi vil. Den endrer ikke på selve verdiene, men den er nødvendig for at vi skal kunne trekke ifra A. De må være i samme vektorrom / dimensjon.
$A - \lambda * 1 = B$ (ny matrise)
$\vec{x} = B^{-1}\vec{0}$
Så ser vi på når $|B| = |A - \lambda * 1| = 0$, fordi $B^{-1} = \frac{1}{|B|} * kofB^T$
2. Finne egenvektorene
Verdiene vi så finner, er egenverdiene til matrisen A. Så kan vi finne forholdet mellom x og y. Dette gjør vi rett og slett med vanlig linje reduksjon, altså vi setter inn i den originale likningen og løser på hensyn av x og y.

Diagonalisering repetisjon og bassiskifter

$M^{-1}AM = D$
Translateres / parallellforskyve alle koordinatsystemer. Vi kan dekomponere i forhold til et koordinatsystem.
Skifte av basis:
$M * \vec{x}' = \vec{x}$
- Det er mulig å ende opp med et annet koordinatsystem når vi løser egenverdiproblemet. Derfor er det nødvendig med et basisskifte.

Transformasjonsmatrisen M kan brukes til å gjøre flere endringer på en vektor.
$\vec{G} = M * \vec{g} + \vec{b}$
- $\vec{b}$ vektor kan parallellforskyve matrisen.
- M kan rotere, speile/refleksjon, skalere vektoren $\vec{g}$. Resultatvektoren er $\vec{G}$.

Man kan endre basis på en vektor vha. en koordinattransformasjon.
Ulike formler man kan benytte for å endre basisen til en vektor:
$x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y')$
$y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y')$
Dette er koordinatlinjer til en valgt matrise. Vi kan utvikler formler når vi jobber med basisskifte, og disse kan vi benytte for å lettere finne hvilke koordinater vektoren har i et annet valgt koordinatsystem.
Dette er formler for å oversette / transformere koordinatene fra et k. system til et annet. Hvis vi kjenner til de merkede koordinatene, kan vi finne de vha. koordinat transformasjons posisjonsdataen i det kartesiske k. systemet.

$\vec{R} = M * \vec{R}'$
$\vec{R}' = M^{-1}\vec{R}$
Hvor M er satt opp med ortonormale vektorer. $M^{-1} = M^T$ - vi kan derfor lese av den inverse matrisen til M direkte.
Ofte er det nødvendig å vite også gradene fra x-aksen og opp til vektoren og lengden på vektoren.
Lengde:

$|r| = \sqrt{x^2 + x^2}$
Grader:
$a = tan^{-1}(\frac{y}{x})$

Skalarproduktet og k. transformasjoner

$R = \vec{R^T} * \vec{R} = Rx^2 + Ry^2 =$ lengden til R og også normen til R. Det er også modulen til R (fra komplekse tall teoremet).

Annen basis - generelt
$M^T * M = 1$, enhetsmatrisen.
$\vec{R^T} * M^T M * R = R! = R_x^2 + R_y^2 =$ normen

Sier at skalarproduktet er invariant under en koordinattransformasjon (den endrer seg ikke). Den blir derfor beholdt under transformasjonen, det gir også mening, fordi skalarproduktet mellom vektoren og dens transponerte versjon, er jo lengden til vektoren. Lengden skal jo ikke endres under en koordinattransformasjon, den skal forbli den samme, og vektoren skal forbli lik. Skalarproduktet er likt før og etter k. transformasjonen.

Kvadratiske former

- For oss betyr det å finne kjeglesnittet.
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ - en lengde på en vektor.
Fra koordinattransformasjoner vi har gjort i matte 1.
$x = rcos(phi)$
$y = rsin(phi)$

Ellipse:
$x^2 + 4y^2 = 1$

Sirkel eksempel
$5x^2 + 5y^2 = 48$
$5x^2 - 4xy + 5y^2 = 48$
Den kvadratiske formen oppstår når det er multiplikasjon mellom 2 punkter. x og y.
Kvadratiske former kan derfor skrives som et skalarprodukt.
$x^2 + y^2 = R^2$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R^2$$
- Vi kan putte inn enhetsmatrisen hvor vi vil.
$5x^2 - 4xy + 5y^2 = 48$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R^2 = 48$$
Hvis vi regner ut dette ender vi opp med det opprinnelige funksjonsuttrykket.
$Q =$ et funksjonsuttrykk for å finne punkter til en kvadratisk form. Setter vi inn x og y verdier og prikker hele veien, vil vi kunne få en eller annen kvadratisk

form i koordinatsystemet vårt. Dette er viktig dersom man skal jobbe med datagrafikk.

$Q = \vec{x}^T * A * \vec{x}$
I dette tilfellet blir det en 2D figur. Men det går også ann å utvide til en $3x3$ matrise for eksempel. Da får vi bare mere jobb å gjøre.

Formel for $2x2$ matrise på slike oppgaver:
$Q = \vec{x}^T * A * \vec{x}$
I slike oppgaver får man ofte oppgitt Q, altså funksjonsuttrykket. Vi kan få i oppgave å finne matrisen A som gir dette funksjonsuttrykket.
Formel for å finne matrisen A:
$5A^2 + 5B^2 - 4C = Q$
$\begin{bmatrix} A & \frac{C}{2} \\ \frac{C}{2} & B \end{bmatrix}$, hvor $C = xy$, $A = x$ og $B = y$.

Symetriske matriser

- Har ortogonale egenvektorer

Kjeglesnitt

Mange forskjellige kvadratiske former
1. Sirkel $5x^2 + 5y^2 = 48$
2. Ellipse $x^2 + 4y^2 = 1$
3. Parabel
4. Hyperbel

- Dette er de 4 kvadratiske formene vi skal jobbe mest med.
- Det må derfor pugges hvilke kvadratiske former som er hva. Altså hvilket funksjonsuttrykk Q som tilsvarer de de forskjellige kvadratiske formene.

$Q = \vec{x}^T A * \vec{x}$

Diagonalisere / similiaritetstransformasjon
Ortogonal matrise, $M^T = M^{-1}$

Oppskrift for å løse slik oppgaver.
1. Finn egenverdiene, når vi har funnet egenverdiene har vi også funnet den diagonaliserte matrisen D.
2. Finn den diagonaliserte matrisen D.
$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, dette kan hjelpe oss til å finne uttrykket. Som vi husker så er $M^{-1}AM = D$ og $Q = \vec{x}^T A * \vec{x}$.
3. Sett så inn i uttrykket for å finne Q.

I samme slengen så sier man at $x^T * D * x = Q$. Slik

Selvom vi jobber mye med kvadratiske former, så skal alle oppgavene, og de oppgavene vi får på eksamen løses rent algebraisk. Det betyr at vi ikke skal bry oss om hvordan det ser ut, bare gjøre regneoperasjonene riktig.

Rekker

- Taylor / McLauren - rekker
- Konvergens
- Konvergensjons intervall
- Konvergenstester

Funksjon
$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 ... + x^n = \sum_{n=0}^{\infty^{uendelig}} x^n$

Fakultet
$5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 =$

Generell formel for Mclaurin - rekker

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} * x^n$
- Dette er grunnoppskriften som vi alltid bruker, vi ser på den deriverte i flere stadier, altså under forskjellige n. Vi kan derivere n-ganger, og så ser vi på når x=0. Dette kan gjøres på sin, cos og flere andre funksjonsuttrykk, vha. samme type oppskrift.

En rekke kan utføres uendelig mange ganger, og jo flere ganger vi utfører rekka (med en ny n og summerer dem sammen) jo mer nøyaktig vil resultatet blir. Slike mclaurin rekker er derfor bare en lineær approksimasjon til funksjoner. Blir altså ikke helt nøyaktig.

e^x som en mclaurin rekke - Grunnoppskriften, benytt alltid formelen.
1. Vi starter med å se på hva de forskjellige deriverte er ved forskjellig n, og ser på hva verdien er når x = 0.
$f^{(n)}(0)$, hvor vi alltid ser på uttrykket når $x = 0$.
$n = 0 : f(0) = e^0 = 1$
$n = 1 : f^1(0) = e^0 = 1$
$n = 2 : f^2(0) = e^0 = 1$
2.
Vi ser nå ett slags mønster. Vi kan nå begynne å uttrykke denne funksjonen som en rekke.
- Det gjør vi enkelt og greit bare ved å sette inn i formelen.
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} * x^n$ - Slik har vi nå omgjort e^x til en rekke, som også gir de samme løsningene. Vi må bare utføre operasjonene nok ganger før vi trekker riktig verdi med god nok nøyaktighet.

Repetisjon + absolutt konvergens, divergens og forholdstester

Mcalurin rekker definisjon
$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} * x^n$

Eksempelvis kan vi finne Mclaurin rekken for $f(x) = e^{2x}$

Vi starter med samme fremgangsmåte, vi må se på den deriverte i punktet x=0 for flere n-verdier.

$n = 0 : f^0(0) = e^{2*0} = 1$
$n = 1 : f^1(0) = 2 * e^{2*0} = 2$
$n = 2 : f^2(0) = 4 * e^{2*0} = 4$
Nå ser vi at det er ett mønster denne rekken følger.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} * x^n$
$f(x) = e^{2x} \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} * x^n$

Vi vet at $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$ osv. Vi har da funnet ett uttrykk som vi kan sette inn i rekken.
$f(x) = e^{2x} \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} * x^n$, vi har funnet en rekke som representerer funksjon $f(x)$.

Vi kan nå sette inn en x-verdi og så utføre n-antall summering (jo flere ledd vi summerer (n) jo bedre nøyaktighet oppnår man). Hvis man går uendelig mange ganger, så skal verdien være lik som å sette det rett inn i funksjonsuttrykket.

Generelt for funksjoner som består av Eulers tall

$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$
Hvor $u = Kx$, der $K =$ en hvilken som helst konstant.
Også ved Te^u, der T er en konstant, kan vi sette denne foran summetegnet.

Definisjon
$Te^{Kx} = T\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Ku)^n}{n!}$

$e^{ix} = e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$
$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$

Feil-estimering og LAGRANGES RESTLEDD

$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} * x^n$
- Denne rekka gir en tilnærming til en verdi til en funksjon i ett gitt punkt x. Dette er en Mclaurin rekke.
For ett mer nøyaktig uttrykk:
$f(x) = \sum_{n=0}^{r} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} * x^n + R(x)$

Hvor $R(x)$ er de resterende leddene. Altså vi går fra $n = 0$ til r. Ved r så stopper vi rekka, og vi kaster de resterende summene, fordi vi kan jo ikke la rekke ga uendelig mange ganger når vi skal komme fram til et svar. Vi må derfor bestemme hvor nøyaktig $f(x)$ skal være.

Feil estimatet / den resterende summen for en Mclaurin rekke, viser seg å være:
$R(x) = \frac{f^{r+1}(c)}{(r+1)!}x^{(r+1)}$
- Hvor c ligger mellom 0 og x. $R(x)$ starter i $r + 1$, fordi hovedrekka går til og med r. Vi må derfor starte rekka til R på det neste leddet.

For en Taylor rekke:
$f(x) = \sum_{n=0}^{r} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} * (x - n)^n + R(x)$
Restleddet blir tilsvarende: $R(x) = \frac{f^{r+1}(c)}{(r+1)!}(x - a)^{(r+1)}$
Hvor c ligger mellom a og x.

Divergsjon
- Betyr at rekken går mot uendelig.
- Divergsjonsområde er hvilke x-verdien som gjør at rekken går mot uendelig.

Konvergsjon
- Betyr at rekken går mot en verdi
- Konvergsjonsintervall er for hvilke x-verdien rekken går mot en verdi. For eksempel $-1 < x < 5$

Eksempel:
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \approx 2$ etter uendelig mange summeringer

Et eksempel med feil estimering

Regn ut e^1 med 3 desimalers nøyaktighet.
$f(x) = \sum_{n=0}^{r} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} * x^n + R(x)$
For å få en 3 desimalers nøyaktighet. Så må $R(x) < \frac{1}{1000}$,tilsvarende for 2 desimalers nøyaktighet $R(x) < \frac{1}{100}$
Vi kapper av etter det $"r" - te$ leddet
Vi vet at e^1 er ca $2,7$ et eller annet. Vi kan derfor si at $e^c < 3$
Vi setter all informasjon vi vet opp.

$\frac{e^c}{(r+1)!} < \frac{3}{(r+1)!} < 10^{-3}$
Vi prøver så å finne en verdi r, slik at vi vet hvor mange ganger vi skal summere leddene.
$r = 5 : \frac{3}{(5+1)!} < 10^{-3} :\ 0,025$ er ikke mindre enn 10^{-3}
$r = 6 : \frac{3}{(6+1)!} < 10^{-3} : \frac{1}{1680} < 10^{-3}$. Dette er sant, og det betyr at vi får en 3 desimalers nøyaktighet ved at $n = 6$.

Vi setter så opp rekken vår med summe tegn på nytt. (Vi har nå bevist at vi får en 3 desimalers nøyaktighet med n=6.
$e^1 = \sum_{n=0}^{6} \frac{1}{n!} x^n$ med 3 desimalers nøyaktighet. Gjelder bare for når $x = 1$.

Konvergens

$S \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n$
Minste krav er at a_n konverger mot 0, ellers vil ikke S eksistere. Da vil den bare iterere uendelig, og aldri bli ett fast tall.
$\frac{lim}{n->\infty} a_n = 0$

Absolutt konvergens
Vi sier at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer absolutt når $|\sum_{n=0}^{\infty} a_n|$
Altså vi ser på absoluttverdien av den. Absolutt konvergens kan være 2-2+2-2, den konvergerer mot både 0 og 2.

Kriterium for absolutt konvergens:
Vi benytter oss av forholdstesten.
$|\frac{a(x)_{n+1}}{a(x)_n}| < 1.$ når $n- > \infty$

Eksempel, skal se om rekken konverger.
Vi benytter forholdstesten.

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$?

Vi setter inn
$|\frac{\frac{1}{(n+1)!} * x^{n+1}}{\frac{1}{n!} x^n}| < 1$
Så forkorter vi, dette er en brudden brøk.

Ender opp med:
$\frac{1}{n+1} |x| < 1$ hvor x er alle R tall.

Siden $\frac{1}{n+1}-$ >0, når $n-$ >uendelig. Så konvergerer rekken. Betingelsen er oppfylt, og vi vet at rekken går mot 0.

Forholdstesten

- Tester for absolutt konvergens.
$|\frac{a(x)_{n+1}}{a(x)_n}| < 1$ når $n- > \infty$.
Fremgangsmåte:
1. Sett inn for funksjonen, og regn så ut / forenkle uttrykket så mye som mulig.
2. Dersom rekken konvergerer, så kan vi finne hvilker verdier for x, som gjør at testen er mindre enn 1, altså når den konvergerer.
3. Dette kalles for konvergensintervallet.
4. Det hender at alle x-verdier er konvergerer mot en verdi også, dette må vi lese av forholdstesten. Vi må se på når n blir uendelig stor, hvilken verdi vil da uttrykket gå imot.

5. På denne måten, hvis vi får oppgitt en rekke, kan vi se om den er en representasjon av alle verdier på x eller ikke.

Fakultetsberegning spesielt:

$(2n+2)! = (2n)!(2n+1)(2n+2)$
Tilsvarer
$9! = 7!(7+1)(7+2) = 7! * 8 * 9 = 8! * 9$

Konvergensintervallfor en Taylor rekke

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n \sqrt{n}} * (x-2)^n$
Vi skal finne hvilke x-verdier som får $f(x)$ til å konvergere, og hvilke x-verdier som får $f(x)$ til å divergere.

$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$. Benytter forholdstesten.

$\frac{(-1)^n}{4^n \sqrt{n}} * (x-2)^n$. Vi ser på den absoluttkonvergensen, så vi kan rett og slett bare se vekk ifra $(-1)^n$
$\frac{(x-2)^n}{4^n \sqrt{n}}$

$|\frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{4^{n+1}\sqrt{n+1}}}{\frac{(x-2)^n}{4^n\sqrt{n}}}| => |\frac{\frac{(x-2)^n(x-2)}{4^n*4\sqrt{n+1}}}{\frac{(x-2)^n(x-2)}{4^n*\sqrt{n}}}| => \frac{(x-2)^{n+1}}{4^{n+1}\sqrt{n+1}} * \frac{4^n\sqrt{n}}{(x-2)^n}$
$\frac{(x-2)^{n+1}}{4^{n+1}\sqrt{n+1}} * \frac{4^n\sqrt{n}}{(x-2)^n} => \frac{(x-2)^n(x-2)4^n\sqrt{n}}{4^n*4\sqrt{n+1}*(x-2)^n} = \frac{(x-2)\sqrt{n}}{4\sqrt{n+1}}$

$|\frac{(x-2)\sqrt{n}}{4\sqrt{n+1}}| < 1$,
Vi skal nå finne hvilke verdier for x, som gjør at rekken konvergerer

$|\frac{(x-2)\sqrt{n}}{4\sqrt{n+1}}| < 1$
$|x-2| < \frac{4\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$
$|x-2| < 4\sqrt{\frac{n+1}{n}}$
$|x-2| < 4\sqrt{1+\frac{1}{n}}$
1. Så ser vi på når $n- > \infty$.
Da ser vi at $\sqrt{1+\frac{1}{n}}$ går mot 0.
Vi ser derfor bort ifra dette leddet.

Så ser vi på 2 tilfeller.
1.
$|x-2| < 4$
$x < 6$

2. Hvor $|x-2|$ kan være negativt.
$-|(x-2)| < 4$
$-x+2 < 4$

$-2 < x$

Vi har nå funnet konvergensområdet til funksjonen.
$f(x)$ konvergerer når $-2 < x < 6$.
Hvis vi setter opp en x-aksen, så kan vi tegne opp denne og streke av konvergsintervallet og også statere hvor funksjonen vil divergere.

På eksamen må dette bevises at det er sant, det kan vi gjøre med den samme fremgangsmåten. Det viktigste leddet er når man må se på når leddet som inneholder n går mot uendelig. Her må man tenkte på hva dette leddet blir, før man tar en avgjørelse om hvor den konvergerer.

Absolutt potensrekker

Forholdstesten

$\frac{lim}{n->\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$
Finne x-verdiene som oppyller denne betingelsen $\frac{1}{\infty} -> 0$.
Når man har forenklet uttrykket så må man se på begge løsningene.
F. eksempel. $|x-2| < 1 => x-2 \; v \; -(x-2)$

Konvergensradius finner vi når vi har løst denne ulikheten.
La oss si vi ender opp med at $-1 < x < 5$.
Konvergensradiusen i dette tilfelle er fra sentrum til en av endepunktene, hvor endepunktene er -1 og 5.
$radiusen = \frac{1+5}{2} = 3$.

Forholdstest eksempel
$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2*3^n}$
Vi setter inn i testen.
$|\frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)^2 3^{(n+1)}}}{\frac{(x-2)^n}{n^2 3^n}}| => \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)^2 3^{(n+1)}} * \frac{n^2*3^n}{(x-2)^n} = \frac{(x-2)^{n+1} n^2*3^n}{(n+1)^2 3^{(n+1)}(x-2)^n} = \frac{(x-2)^n*(x-2)^1*n^2*3^n}{(n+1)^2*3^n*3^1*(x-2)^n} =$
$\frac{n^2*(x-2)^1}{(n+1)^2*3} < 1$.
$|\frac{n^2*(x-2)^1}{(n+1)^2*3}| < 1$
$|n^2(x-2)| < (n+1)^2 * 3$
$|(x-2)| < \frac{3*(n+1)^2}{n^2}$
$|(x-2)| < \frac{3n^2+6n+3}{n^2}$
- Her må vi starte med å se på når n går mot uendelig. Altså leddene som deler på n, når n er uendelig stor vil disse leddene bli 0.
$|(x-2)| < \frac{3n^2+6n+3}{n^2}$
$x-2 < \frac{3n^2}{n^2} + \frac{6n}{n^2} + \frac{3}{n^2}$
$x-2 < 3 + \frac{6}{n} + \frac{3}{n^2}$
Her vil $\frac{6}{n}$ og $\frac{3}{n^2}$ blir 0 når n går mot uendelig.

$|x-2|<3$
1. $x<3+2$, $x<5$

2. $-(x-2)<3$
$-x+2<3$
$-1<x$

Her ser vi at rekken konvergerer når $-1<x<5$. Rekkens konvergensradius er da $\frac{1+5}{2}=3$.
Enklere. $a<x<b->\frac{b-a}{2}$ =konvergensradiusen.

Konvergens

Konvergent rekke, et konvergent produkt eller et konvergent uekte integral.

Absolutt konvergens

Teormet sier at en absolutt konvergent rekke er konvergent.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kalles absolutt konvergent dersom $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$

En rekke som er konvergent, men ikke absolutt konvergent, kalles betinget konvergent.
$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$

Hva skjer i endepunktene til konvergensintervallet f.eks $-1<x<5$?

Vi kan sette inn for $x=-1$, og se hva som skjer. $f(-1)=\sum\frac{(-1-2)^n}{n^2*3^n}=\frac{(-3)^n}{n^2*3^n}=\frac{(-1)^n(3)^n}{n^2*3^n}=\frac{(-1)^n}{n^2}$

$\frac{(-1)^n}{n^2}$, går mot 0, når n går mot uendelig. Det betyr at den konvergerer på endepunktet. $x=-1$.'

Når en uendelig rekke nærmer seg en bestemt sum når n$\rightarrow\infty$, sier vi at rekken konvergerer.
Når en uendelig rekke ikke nærmer seg en bestemt sum når n$\rightarrow\infty$, sier vi at rekken divergerer.

Eksempel ved å se på Høyre Riemannssum
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$
Vi benytter oss av integrasjon
$\int_1^{\infty}x^{-2}dx=lim_{\overline{t->\infty}}\int_1^t x^{-2}dx$
$=-\frac{1}{x}]_1^t=\frac{-1}{t}-(-\frac{1}{t})=-\frac{1}{t}+1$

Se på når $t->\infty$, H.R.S konverger og det betyr at $f(-1)$ eksisterer. H.R.S=endelig.
$x=-1$ $f(-1)$ eksister.

Løse vanskelige integraler ved å gjøre om til rekker først

Eks.

$\int_0^x e^{-T^2} dT = E$

Dette bestemte integralet er vanskelig å løse, men hvis vi først gjør det om til en rekke, og så ser på forskjellige verdier for n, så kan vi integrere alle de små leddene. Den antideriverte er vanskelig å finne i dette tilfellet.

$f(x) = e^{-T^2}$, kan derfor sees på som en rekke.

Vi følge slavisk definisjonen:

$Ke^u = K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} u^n$

$e^{-T^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} (-T^2)^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} (-1)^n (T^{2n})$

Vi setter så inn for n-verder for å finne ett mønster.

$n = 0$: - $\frac{(-1)^n (T^{2n})}{n!} = 1$

$n = 1$: - $\frac{(-1)^1 (T^{2*1})}{1!} = \frac{-T^2}{1!}$

$n = 2$: - $\frac{(-1)^2 (T^{2*2})}{2!} = \frac{T^4}{2!}$

$n = 3$: - $\frac{(-1)^3 (T^{2*3})}{3!} = -\frac{T^6}{3!}$

Vi kan nå løse integralet med hensyn på rekkens verdier isteden for å løse det selve ubestemte integralet.

- Her er det lurt å ta med fakultetsberegningen, for å gjøre det lettere å se etter ett mønster.

$\int_0^x e^{-T^2} dT = \int_0^x (1 - \frac{T^2}{1!} + \frac{T^4}{2!} - \frac{T^6}{3!} + \frac{T^8}{4!} .....) dT$

Så løser man integralet, men husk å ta med fakultetsberegningen

$\int_0^x (1 - \frac{T^2}{1!} + \frac{T^4}{2!} - \frac{T^6}{3!} + \frac{T^8}{4!} .....) dT = T - \frac{1}{3} T^3 + \frac{1}{5} \frac{T^5}{2!} - \frac{1}{7} \frac{T^7}{3!} + \frac{1}{9} \frac{T^9}{4!} ...]_0^x$

Nå kan vi se på mønsteret og prøve å utdanne en rekke for dette beste integralet.

Det ene leddet inneholder x istedenfor T og det andre leddet = 0. Så det blir trukket ifra 0.

$T - \frac{1}{3} T^3 + \frac{1}{5} \frac{T^5}{2!} - \frac{1}{7} \frac{T^7}{3!} + \frac{1}{9} \frac{T^9}{4!}]_0^x$

Her blir det $(2n + 1)n!$ i nevneren.

Vi setter det inn slik.

$\int_0^x e^{-T^2} dT = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n * x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$, vi har bevist at vi kan løse vanskelig integraler vha. rekker.

Rekke representasjon av intgralet til funksjonen e^{-T^2}.

Mclaurin, med 3 desimalers nøyaker:

Skriver opp rekka med verdier av n til vi får en brøk med $\frac{1}{1000}$ eller mer. Så summerer vi, og da har vi den nøyaktigheten vi var ute etter.

Mclaurin definisjon

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{(n)!} * x^n$

Viktige huske regler for å danne rekker

I situasjoner der vi skal danne en uendelig rekke og funksjonen som vi skal danne en rekke av, har den egenskapen at den blir 0 for annenhver verdi n. Så kan vi benytte $(2n)!$ og x^{2n}, dette gjør at rekken vi lager hopper over disse verdiene.

For å danne en rekke som oscillerer mellom en negativ og positiv verdi for annenhver verdi av n, så kan vi benytte oss av $(-1)^{n-1}$, denne er svært nyttig og vil gjøre at rekken bytter mellom negativ og positiv verdier for hvert ledd i rekken.
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} * x^{2n}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n)!} * x^{2n}$
Dette er en rekke for $f(x) = cos(3x)$.
Denne vil få følgende verdier:
$(n = 0) = 1$
$(n = 1) = 0$
$(n = 2) = -9$
$(n = 3) = 0$
$(n = 4) = 81$
Som vi kan se så er ikke verdiene i rekken lik 0 bare annenhver gang. Vi må derfor legge på $(2n)!$ og x^{2n}, altså vi hopper over leddene som blir lik 0.

Integraltesten

- Går utpå å finne ut om rekken konvergerer.

Hvis $\int_{n}^{\infty} f(x)dx$ konvergerer så konverger også rekken.
Integraltesten går utpå å integrere funksjonen, hvis denne konvergerer så konvergerer også rekken.

Eksempel:
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^2}$

$\int_{1}^{\infty}(\frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2})dn = \int_{1}^{\infty}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})dn$
$ln(n) - \frac{1}{n}]_{1}^{\infty}$
$ln(\infty) - \frac{1}{\infty} - (-ln(1) - \frac{1}{1}) = ln(\infty) - 0 + 0 + 1 = ln(\infty) + 1$
$ln(\infty) + 1$
- Vi ser her at rekka divergerer fordi denne går mot uendelig, og ikke mot en verdi.

Kapittel 14, 15 og 16

Z-transformasjon
Laplace-transformasjon
Fourier-rekker

Z-transformasjon

Ser på et lodd som henger i en fjær, med en fjærkonstant k og en masse m. Vi velger positiv retning oppover, siden fjæra er dratt ut en strekning fra hvileposisjonen som er lik x, men da i negativ retning, blir denne kraften en negativ kraft. Vi vet ikke akselerasjonen til klossen, men det vi vet er at den har flyttet seg en viss strekning fra hvileposisjonen. Vi kan defrfor si at $a = x''$, hvor x er dobbelt derivert.
$\sum -kx = ma$
$\sum -kx = mx''$
Dette er en 2. grads differensiallikninger som vi kan løse vha. en karakteristisk likning.
$-kx = mx''$
$mx'' + kx = 0$
$x'' + \frac{kx}{m} = 0$
$x\lambda^2 + \frac{kx}{m}$
$x(\lambda^2 + \frac{k}{m}) = 0$

$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$
$\lambda = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}}$
$\lambda = \pm 2i$

$x(t) = acos(2t) + bsin(2t)$
Hvor $t = 0$
$x(t) = acos(2t)$
$x(t) = 0,2cos(2t)$

Svingeintervallet $= T = \pi$
Frekvensen er $= \frac{1}{T} = \frac{1}{\pi}$
Amplituden (høyden til toppen) fra x-aksen $= A$
Vinkelfrekvensen (antall radianere per sekund)$= w$
$w = \frac{\#radianer}{sekunder} = 2\pi * f$
$\#radianer$ står for antall radianere.

f_s =samplingstiden $= \frac{1}{T_s} = \frac{8}{\pi}$
- Antall samplinger vi utfører på ett svingeintervall (en bølgelengde).

Tallfølge forekommer når vi lager signalet
$\{0,2\ 0,16\ 0\ -0,1...\}$

$x_n = x(n * T_s)$

Z-transformasjon

Definisjon:
Z-transformasjon av følgen.... $y_{-3}, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2 ....$
Definert som:
$Y(z) = Z^3 y_{-3} + Z^2 y_{-2} + Z^1_{y-1} + 1 * y_0 + Z^1 y_{-1} + Z^2 y_{-2}$
$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z^{-n}_{y_n}$

Enhetspuls

- $x_n = 1$ for $n = 0$ og 0 ellers.
Følgen ser slik ut $\{1, 0, 0, 0, 0...\}$
Enhetspuls z-transformasjoneny blir da:
$x(z) = y_0 = 1$ fordi de andre leddene er lik 0.

Tallfølge:
$y(n) \rightarrow y(z)$
$y(z) \rightarrow y(n)$

Enhetssprang følge
$y_n = \{1$ for $n >= 0$, og 0 ellers$\}$.
$Y(z) = 1 + Z^{-1} + Z^{-2} + Z^{-3}$
$\sum_{n=0}^{\infty} (Z^{-1})^n$
Her er også $Y(z) = \frac{1}{1-Z^{-1}} = \frac{1}{Z-1}$
$|Z^{-1}| < 1$ og $|Z| > 1$

$a_{n+1} = a_n * k$
$a \sum_{n=0}^{\infty} k^n = \frac{1}{1-k}$ er en divergerende rekke
$|k| < 1$

$\{Y_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6..\}$
$y_n = n$

Z-transformasjonen til denne $y(n)$.
$Y(z) = 1 * Z^{-1} + 2 * Z^{-2} + 3 * Z^{-3} + ...$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ dersin |k|<1.
For $|x| > 1$ og $|x^{-1}| < 1$

$f(x) = x^{-1} \frac{1}{x^{-1}-1} = -x^{-1} * \frac{1}{1-x^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^{-1})^n$
$1 + x + x^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$
$f'(x) = g'(x)$
$f(x) = g(x)$
$1 + 2x + 3x^2 + ... = \frac{1}{(1-x)^2}$
$|x| < 1$ for konvergens

Teoremer

Tabell 14.1

$Z\{ax_n + by_n\} = aX(z) + bY(z)$
Teorem 14.2 Forskyvning av en tallfølge
$Z\{y_{n-k}\} = Z^{-k} * Y(z)$
Teorem 14.3
$z\{y_{n+1}\} = z * Y(z) - zy_0$
$z\{y_{n+2}\} = z^2 * Y(z) - z^2 * y_0 - z * y_1$

Eksempel, n antall måneder for en innsetning I i banken med en rente $r\% = \frac{R}{100}$
$y_n ? n \geq 1$
$y_0 = I$
$y_1 = y_0 + y_0 * \frac{R}{100} = (1 + \frac{R}{100}) * y_0$
$y_2 = y_1 + y_1 * \frac{R}{100} = (1 + \frac{R}{100})^2 * y_0$
$y_n = (1 + \frac{R}{100})^n * y_0$
$I = 5 * 10^3 = y_0$
$R = \frac{3}{100}$
$y_n = 5 * 10^3(1 + \frac{3}{100})^n = 5 * 10^3(1,03)^n$

$y_{n+1} = 1,03 * y_n$

Z-transformasjon
$Y(z) = z * Y(z) - z * y_0$
$= z * Y(z) - z * 5 * 10^3$
$= z * Y(z) - z * 5 * 10^3 = 1,03 * Y(z)$
$(z - 1,03)Y(z) = 5z$
$Y(z) - z * Y(z) = 5z$
$z - 1,03$
$Y(z) = \frac{5z}{z-1,03} = 5\frac{z}{z-1,03}$

$y_n = a^n \Leftrightarrow \frac{z}{z-a}$

Z-transformasjon mer generelt
$y_{n+1} \to Y(z)$
Hvor $Y(z)$ er Z-transformasjonen
$y_{n+1} \to y_n$ kan være vanskelig, og det er derfor noen ganger lurt å gå den andre veien via z-transformasjonen.
$y_{n+1} \to Y(z) \to y_n$

Eksamens oppgave
Løs initialverdi problemet
$y_{n+1} = -2y_n - 3$ for $n \geq 0$ gitt at $y_0 = 1$.
Løsning:
Forsøker å bruke z-transformasjon

$Z\{y_{n+1}\} = zY(z) - zy_0$
$zY(z) - z * 1 = -2Y(z) - \frac{3z}{z-1}$

$Y(z)(z+2) = \frac{-3z}{z-1} + z$
$Y(z) = \frac{-3z}{(z-1)(z+2)} + \frac{z}{z+2}$
$Y(z) = \frac{-3z+z(z-1)}{(z-1)(z+2)} = \frac{-3z+z^2-z}{(z-1)(z+2)}$
Funnet transformasjonen.
$Y(z)$ så bruker vi den inverse transformasjonen
$Y(z) = \frac{-3z+z(z-1)}{(z-1)(z+2)}$
$\frac{Y(z)}{z} = \frac{(z-1)-3}{(z-1)(z+2)} = \frac{z-4}{(z-1)(z+2)}$
Benytter så delbrøkoppspaltning (REPETISJON)

$\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+2} = \frac{z-4}{(z-1)(z+2)}$
$A(z+2) + B(z-1) = z-4$

Setter så $z = -2$
$0 + B(-2-1) = -6$
$B = \frac{-6}{-3} = 2$

Setter så $z = 1$
$A(1+2) = 1-4$
$A = -1$

Setter så inn
$\frac{Y(z)}{Z} = \frac{-1}{z-1} + \frac{2}{z+2}$
$Y(z) = -1\frac{z}{z-1} + 2\frac{z}{z+2}$
$y_n = -1 + 2(-Z)^n$

Absolutt konvergens

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n}$
- Bytter mellom + og -
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} dn = ln(n)]_1^{\infty} = ln(\infty) - ln(1)$
$ln(\infty)$ betyr at den divergerer.

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$ divergerer
$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$ konvergerer mot mindre enn 1.
Men med absolutt verdi ville den divergeret, den konvergerer derfor betinget, men ikke absolutt.

Definisjon for absolutt konvergens
1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$
2. En rekke som ikke konvergerer absolutt, konvergerer betinget.
Eksempel:
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergerer betinget.

Absolutt konvergens er at summene av alle leddene uansett rekkefølge på leddene er likt. Det oppstår ingen problemer når man har absolutt konvergens.

Alternerende og absolutt konvergens

Kapittel 14 Transformasjoner og Fourierrekker

Matematikk og musikk
Frekvens = $\frac{1}{T}$
Vinkelfrekvens = $\frac{rad}{T}$
$f = \frac{1}{T} = \frac{w}{2\pi}$

14.2 Z-Transformasjon

Kapittelet tar for seg 4 viktige forhold:
1. Operatoren z^{-1}
2. En ny transformasjon
3. En ny metode til å løse en differenslikning
4. Transferfunksjonen til et filter

- Brukes ofte for å løse "differenslikninger". Løsningene er tallfølger.

Når vi har en formel for det n-te leddet i en følge, kan vi regne ut alle leddene (hvis vi ønsker) og vi kan ofte bestemme om den konvergerer eller divergerer. I anvendelse
r der en følge er løsning på et problem, får vi ofte oppgitt følgen på en annen måte, nemlig som en differenslikning.

Definisjon av en differenslikning
En differenslikning (for en følge) er en likning som angir hvordan hvert ledd i en følge (fra et visst ledd av) kan beregnes ved hjelp av de foregående leddene i følgen. Hvis man bare trenger de k foregående leddene (der k $\in$ N) kalles den en k-te ordens differenslikning.

Eksempel: $x_{n+1} = 3x_n^2 - n + 1$, $n \geq 0$

Definisjon 14.1
Z-transformen til følgen ..., $y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1 y_n$... av tall er rekken
$Y(z) = ... + y_{-2}z^2 + y_{-1}z^1 + y_0 z^0 + y_1 z^{-1} + ... = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n z^{-n}$

$Y(z)$ er altså z-transformen til følgen $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$. En annen notasjon er $Z\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Prosessen å omforme en følge kalles for z-transformasjon. Når vi senere angir en følge ved $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, så betyr det underforstått at alle koefisientene y_{-1},y_{-2} osv er lik 0.

Tabell 14.1 er oppgitt på eksamen, denne tabellen brukes når vi skal z-transformere.

Dersom følgene $\{x_n\}$ og $\{y_n\}$ har z-transformene $X(z)$ og $Y(z)$ henholdsvis og a og b er konstanter, da er
$Z\{ax_n + by_n\} = aX(z) + bY(z)$

Her er en del z-transformasjoner hentet fra tabellen 14.1 i boka.

$y_n = \{1(n = 0)$ og $0(n > 0)\}$ da er $Y(z)$ (transform resultatet) $= 1$.

$y_n = K * 1 \Leftrightarrow K * \frac{z}{z-1}\ |z| > 1.$

$y_n = ka^n$(a er konstant)$\Leftrightarrow k\frac{z}{z-a}$

$y_n = n \Leftrightarrow \frac{z}{(z-1)^2}$

For fler, se i tabellen. Denne blir oppgitt, så må ikke pugges, men burde gjøres oppgaver slik at man har et bilde av hvordan man skal bruke dem.

La $\{y_n\}$ være en følge og k en konstant. Følgen $\{y_{n-k}\}$, forsinket k enheter, har en z-transform gitt ved:
$Z\{y_{n-k}\} = z^{-k} * Z\{y_n\}$

La $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ være en følge med z-transform $Y(z)$. Da er
1. $Z\{y_{n+1}\} = z * Y(z) - z * y_0$
2. $Z\{y_{n+2}\} = z^2Y(z) - z^2y_0 - z * y_1$

Dette teoremet er ment for å løse differenslikninger. Før vi gir os i kast med differenslikninger, må vi forstå invers z-transform.

Invers z-transformasjon

$Y(z) -> y_n$
Handler om å gå tilbake til den originale funksjonen. Dette kan gjøres ved å først forkorte uttrykket og så se på tabellens høyre side og finne dens tilsvarende ledd på nytt. Ofte møter man på problemer med delbrøkoppspaltning når man skal finne y_n (den inverse matrisen til $Y(z)$).

Eksempler:
$Y(z) = \frac{z^3+4z^2+5}{z^3} = \frac{z^3}{z^3} + \frac{4z^2}{z^3} + \frac{5}{z^3}$
$Y(z) = 1 + 4z^{-1} + 5z^{-3}$
Så bruker vi tabellen for å finne den inverse z-transformasjonen.
Formen for følgen vi nå finner, kan man lese direkte fra tabellen. $y_0 * z^0 + y_1 * z^{-1} + y_2 * z^{-2} + y_3 * z^{-3}$
Vi setter inn for konstantene og z^{-2} på riktig posisjon
$y_n = Z^{-1}\{Y(z)\} = \{1, 4, 0, 5, 0, 0....\}$

Test for å se om en rekke er alternerende konvergent

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$
Betingelser som må være oppfylt
$a_n = (-1)^n b_n$
$a_n = (-1)^{n+1} b_n$
$b_n \geq 0$
1. $lim_{n->\infty} b_n = 0$
2. $\{b_n\}$ må synke.
Hvis dette er oppfylt, så betyr det at erekken er betinget konvergent, men ikke nødvendigvis absolutt konvergent.

Eksempel
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$
1. Vi deler opp rekken i 2 deler (faktoriserer)
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} * \frac{1}{n+2}$
Så sier vi at ($a_n = (-1)^{n+1}$ og $b_n = \frac{1}{n+2}$)

Vi ser så på betingelsene.
1. $lim_{n->\infty} b_n = 0$
2. $\{b_n\}$ må synke.
$b_n = \frac{1}{n+2}$
1. $lim_{n->\infty} b_n = \frac{1}{\infty+2} = 0$
2. b_n synker for hver gang n øker, brøken blir mindre og mindre.
Vi kan derfor konkludere med at rekken konvergerer betinget konvergent.
Vi kan også benytte forholdstesten, til å sjekke om rekken konvergerer absolutt.

Forholdstesten

La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, være en rekke. Vi ser på grensen $lim_{n \longrightarrow \infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = L$.
Dersom:
1. $L < 1$, så konvergerer rekken.
2. $L > 1$, så divergerer rekken.
3. $L = 1$, så gir ikke testen noen konklusjon.
Hvis $L = 1$, så må vi bruke en annen test for å finne ut om den er betinget konvergent eller ikke. Den er ikke absolutt konvergent.
Teorem:
En rekke som konvergerer absolutt, er alltid konvergent.

Repetisjon av polynomdivisjon og delbrøkoppspaltning

Polynomdivisjon eksempel med Z-transformasjon

$y_n = 4n$ og $\{6y_{n+2}\}$
Finn z-transformasjonen til $\{6y_{n+2}\}$
Konstanten foran y_{n+2}, kan vi se bort ifra når vi skal finne z-transformasjonene, denne konstanten setter vi bare foran uttrykket etterpå.
$Z\{6y_{n+2}\} = 6 * Z\{6y_{n+2}\}$

Fra ett teorem i boka: $Z\{y_{n+2}\} = z^2Y(z) - z^2y_0 - zy_1$
Hvor $Y(z)$ er z-transformasjonen til y_n.
$Z\{6y_{n+2}\} = 6(z^2Y(z) - z^2y_0 - zy_1)$
$Y(z) = Z\{4n\} =$ fra tabellen ser vi at, $Z\{4n\} = 4\frac{z}{(z-1)^2}$
$y_n = 4n$
$y_0(n = 0) = 4 * 0 = 0$
$y_1(n = 1) = 4 * 1 = 4$
Vi setter alt inn
$Z\{6y_{n+2}\} = 6(z^2 4\frac{z}{(z-1)^2} - 0 - 4z)$
$Z\{6y_{n+2}\} = 24(\frac{z^3}{(z-1)^2} - z)$
Her ser vi at vi får en høyere grad i telleren enn i nevneren, vi må derfor utføre en polynomdivisjon.

Polynomdivisjon demonstrasjon
$\frac{z^3}{(z-1)^2} = \frac{z^3}{z^2-2z+1}$
$(z^3)/(z^2 - 2z + 1) = z + \frac{2z^2-z}{(z-1)^2}$
$-(z^3 - 2z^2 + z)$
$Rest : 2z^2 - z$
Vi setter så tilbake i uttrykket nå som vi vet at $\frac{z^3}{z^2-2z+1} = z + \frac{2z^2-z}{(z-1)^2}$

$Z\{6y_{n+2}\} = 24(z + \frac{2z^2-z}{(z-1)^2} - z)$
$Z\{6y_{n+2}\} = 24(\frac{2z^2-z}{(z-1)^2})$
Vi har nå funnet z-transformasjonen til $6y_{n+2}$.

Delbrøkoppspaltning og polynomdivisjon

1. Man skal benytte seg av delbrøkoppspaltning dersom $\frac{a^n}{b^{n+1}}$,tellerens grad $<$ nevnerens grad. Da må vi først faktorisere det som står i nevneren, dersom dette er mulig, kan vi foreta en delbrøkoppspaltning.
2. Polynomdivisjon skal utføres når $\frac{a^{n+k}}{b^n}$, hvor k er større enn eller lik 0. Altså telleren er av større eller lik grad som nevneren.

Både delbrøkoppspaltning og polynomdivisjon kan hjelpe oss å gjøre vanskelige funksjonsuttrykk om til funksjonsuttrykk som er spaltet opp og forenklet. På denne måten er det lettere å utføre integrasjoner / derivasjoner og transformasjoner som z-transformasjon og laplace transformasjon. De er derfor ett viktig verktøy i dette kapittelet.

Delbrøkoppspaltning, 4 forskjellige tilfeller.
1. Vanlig tilfelle
2. Tilfelle hvor vi deler på 2 like faktorer i nevneren
3. Tilfelle hvor den ene faktoreren er av høyere grad i nevneren
4. Tilfelle hvor vi har flere enn 2 faktorer i nevneren

Eksempel på et tilfelle hvor den ene faktoren er av høyere grad i nevneren.
$\frac{5x+2}{x^3+2x^2} = \frac{5x+2}{x^2(x+2)}$
$\frac{Ax+B}{x^2} + \frac{C}{x+2} = \frac{5x+2}{x^2(x+2)}$
Multipliserer med felles faktor
$(Ax + B)(x + 2) + Cx^2 = 5x + 2$
Setter inn for $x = -2$.
$0 + 4C = -8$
$C = -2$

Setter så inn for $x = 0$
$(Ax + B)(x + 2) + -2x^2 = 5x + 2$
$(0 + B)(0 + 2) + -2 * 0 = 0 + 2$
$B = 1$

Så setter vi inn for en hvilken som helst x-verdi som ikke er lik 0 eller -2.
$x = 3$
$(3A + 1)(5) + -2 * 3^2 = 5 * 3 + 2$
$15A + 5 - 18 = 15 + 2$
$A = \frac{17+13}{15}$
$A = \frac{30}{15} = 2$
Legg merke til at vi kunne satt inn en hvilken som helst x verdi som ikke er lik 0 eller -2. Vi ville uansett fått det samme svaret.

- La oss si vi vil prøve å forenkle dette uttrykket fordi vi skal transformere det på en eller annen måte.

$\frac{1}{x(x-2)}$

Invers z-transformasjon eksempel

Løse en differenslikning vha. z-transformasjon og invers z-transformasjon

Regel ang. 2. gradsformelen

- Når vi skal faktorisere
$Ax^2 + Bx + C = 0$
C finner man ved å multiplisere faktorene med hverandre.
B finner man ved å summere faktorene.
Eksempel
$x^2 - 5x + 4 = 0$
$C = (-1) * (-4) = 4$
$B = (-1) + (-4) = -5$
Dersom dette er korrekt, vet vi at $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$

Laplace definisjoner og formler

- Laplace transformasjon kan utføres på hvert enkelt ledd, men utføres det på høyre side, så skal det utføres på venstre side også.

Med hver enkelt ledd, så menes det at man kan transformere hvert ledd som er knytta sammen av bare ett + eller - tegn.

$L(f(t)) = F(s)$ - Laplace transformasjon
$L^{-1}L(f(t)) = L^{-1}F(s)$
$f(t) = L^{-1}F(s)$ - Som er den inverse laplace transformasjonen.

Nyttige transformasjoner å huske
- Benyttes der derivasjon kan være vanskelig å utføre før man benytter seg av transformasjonen, eller der denne ikke derivasjonen ikke er oppgitt / mulig å gjøre, som for eksempel i en differensiallikning.

Alle konstanter foran vil følge med under transformasjonen. $k = konstant$.
$L(ky) = kL(y)$
$ky \longrightarrow kL(y)$
$f(t) = f$
$L(f(t)) = F(s)$
$L(f') = s * L(f) - f(0)$
$L(f'') = s^2L(f) - s * f(0) - f'(0)$

Eksempel for å løse en differensiallikning vha. laplace transformasjon
$y'' - 6y' + 5y = 0$
$y(0) = 0$
$y'(0) = 4$

Vi benytter oss av definisjonen for den andre og første deriverte. Vi kan utføre transformasjonen på hvert enkelt ledd. Det er $L(y)$ vi først og fremst skal finne når vi skal løse differensiallikninger.

For å løse en differensiallikning vha. laplace transformasjon så må man utføre følgende mal.

1. Transformer hvert enkelt ledd først, vha. definisjonen eller direkte vha. tabellen.
$y'' - 6y' + 5y = 0$
$y'' = s^2 * L(y) - 0 * s - 4$
$-6y' = -6(s * L(y) - 0)$
$5y = 5L(y)$
2. Vi setter så inn i likningen
$y'' - 6y' + 5y = 0$
$s^2 * L(y) - 0 * s - 4 - 6(s * L(y) - 0) + 5L(y) = 0$
3. Så løser vi med hensyn på $L(y)$, det er denne vi skal finne, fordi dette er laplace transformasjonen.
$L(y)(s^2 - 6s + 5) = 4$

$L(y) = \frac{4}{s^2-6s+5} = \frac{4}{(s-5)(s-1)}$ fra 2. gradsformelen.
4. Utfør en delbrøkoppspaltning eller en polynomdivisjon dersom dette er nødvendig.

$A(s-1) + B(s-5) = 4$, $s = 1$
$B = -1$

$A(s-1) + B(s-5) = 4$. $s = 5$
$4A = 4$
$A = 1$

$L(y) = \frac{4}{s^2-6s+5} = \frac{4}{(s-5)(s-1)} = \frac{1}{s-5} - \frac{1}{s-1}$
5. Vi har nå forkortet så mye som det er mulig, vi kan nå utføre en invers z-transformasjon for å finne y, fra definisjonen skal dette være mulig. Vi må bare benytte oss av laplace transformasjonen på begge sider. Vi må også se disse verdiene fra tabellen som vi får oppgitt på eksamen. Det er ikke meningen å huske på disse.
$L^{-1}L(y) = L^{-1}(\frac{1}{s-5} - \frac{1}{s-1})$
$y = L^{-1}(\frac{1}{s-5} - \frac{1}{s-1})$
6. Fra tabellen så løser vi differensiallikningen.
$k * e^{at} = k * \frac{1}{s-a}$
$-\frac{1}{s-1} = -e^t$
$y = e^{5t} - e^t$, $t \geq 0$
Vi har løst differensiallikningen vha. laplace transformasjon. Vi kan kontrollere dette ved å dobbelt derivere, og derivere for å så sette inn i det originale uttrykket. Dersom vi ender opp med 0=0, så har vi løst difflikningen korrekt.

Laplace transformasjon
- Brukes på kontinuerlige signaler

Z-transformasjon
- Brukes på diskret / diskontinuerlige signaler.

Laplace transformasjon definisjon
$L(af(x) + bg(t)) = aF(s) + bG(s)$
Dette betyr hovedsaklig at vi kan utføre Laplace transformasjon på begge sider av likhetstegnet, men vi må ikke utføre transformasjonen på alle leddene i en omgang, vi kan dele opp og utføre transformasjonen på hvert enkelt ledd, og konstanter som står foran blir tatt med videre. Hvert ledd separert av + og - kan sees på som ett ledd.

Fourierrekker kapittel 14.4

14.7
En stykkvis kontinuerlig funksjon har følgende fourierrekke
$f(x) = \{T = 2L$ og $-L \leq x < L$

$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n sin(\frac{n\pi}{L}x)]$
Fourierkoeffisientene bestemmes av integralene
$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$
$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)cos(\frac{n\pi}{L}x)dx$ hvor n=1,2,3....
$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$ hvor n=1,2,3....

Oddefunksjoner og like/jevnefunksjoner

- Produktet mellom en oddefunksjon og en likefunksjon er alltid en oddefunksjon.
- Produktet mellom 2 like gir en like funksjon. Produktet mellom 2 odde, gir en oddefunksjon.

Definisjon av oddefunksjon

- Oddefunksjon er speilet motsatt på andre siden av y-aksen.

En funksjon er en oddefunksjon hvis $f(-x) = -f(x)$ for alle x-verdier i definisjonsmengden.
Et eksempel er potensfunksjon x^3.

Innenfor fourierrekker, så vil en oddefunksjon bety at fourierkoeffisienten $b_n = 0$. Det er integralet som inneholder sinusfunksjonen.

Fourierrekken til en like funksjon / jevn funksjon vil da se slik ut
$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n cos(\frac{n\pi}{L}x)]$, $b_n = 0$

Definisjon av en jevn funksjon

- En jevnfunksjon er symmetrisk om y-aksen.

En funksjon er en jevn funksjon hvis $f(-x) = f(x)$ for alle x-verdier i definisjonsmengden.
Eksempel er polynomet $x^4 + x^2 - 1$

Innenfor fourierrekker, så vil en jevn funskjon bety at fourierkoeffisienten $a_n = 0$. Det er integralet som inneholder cosinusfunksjonen.

Fourierrekken til en like funksjon / jevn funksjon vil da se slik ut
$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}[b_n sin(\frac{n\pi}{L}x)]$, $a_n = 0$

Fouriertransformasjon

Eulers formel
$e^{i\phi} = cos(\phi) + isin(\phi) = (1)$
$e^{-i\phi} = cos(\phi) - isin(\phi) = (2)$

(1) − (2)
$e^{i\phi} - e^{-i\phi} = cos(\phi) + isin(\phi) - (cos(\phi) - isin(\phi))$
$e^{i\phi} - e^{-i\phi} = 2isin(\phi)$
$sin(\phi) = \frac{1}{2i}(e^{i\phi} - e^{-i\phi}) = i\frac{1}{2}(e^{-i\phi} - e^{i\phi})$
Flipper stykket og setter i på utsiden er også lov.

(1) + (2)
$e^{i\phi} + e^{-i\phi} = cos(\phi) + isin(\phi) + (cos(\phi) - isin(\phi))$
$e^{i\phi} + e^{-i\phi} = 2cos(\phi)$
$cos(\phi) = \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi})$

Vi kan sette dette inn i fourierrekken
$T = 2L$
$\phi = nw_0x$
$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n sin(\frac{n\pi}{L}x)]$
Nå erstatter vi sinus og cosinus leddene med cos og sin uttrykt vha. eulers formel.
$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) + i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(e^{-i\phi} - e^{i\phi})$

Vi får nå nye komplekse koeffisienter
$c_0 = \frac{1}{2}a_0$
$c_1 = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$
$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$

Sluttrekken blir slik:
$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\phi}$
$\phi = nw_0x$
Vi kan sette inn for $c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-i\phi}dx$

Kontinuerlig fouriertransformasjon

- Fouriertransformasjonen til en vilkårlig funksjon
$F(f) = F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx$
dersom integralet konvergerer.

Definisjon 14.6

De kontinuerlige funksjonene $g(x)$ og $h(x)$ er ortogonale for $a \leq x < b$ dersom
1.$\int_a^b g(x) * h(x)dx = 0$
2. $\int_a^b g^2(x)dx = d^2 \neq 0$ og $\int_a^b h^2(x)dx = e^2 \neq 0$
Normen til funksjonene er henholdsvis d for g og e for h.

Fourierrekker og koeffisienter

Fourierrekke
$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(\frac{n\pi}{L}t) + b_n sin(\frac{n\pi}{L}t)$

Koeffisientene i rekken
$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t)dt$
$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t)cos(\frac{n\pi}{L}t)dt$, $n = 1, 2, 3..$
$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t)sin(\frac{n\pi}{L}t)dt$, $n = 1, 2, 3..$

EKSTRA:

Laplacetransformasjon repetisjon

Laplacetransformasjon er en transformasjon fra tidsplanet til frekvensplanet

1. deriverte
$L(f') = s * L(f) - f(0)$
$L(f'') = s^2L(f) - sf(0) - f'(0)$

Z-ransformasjon repetisjon

Z-transformasjon konverterer et diskret-tidssignal, som er en sekvens av ekte elle komplekse tall, til en kompleks frekvens representasjon.
Z-transformasjon kan sees på som et diskre-tids ekvalent til Laplace transformasjon.

Fouriertransformasjon

Gjennomgang av kapittel 14

Frekvens, svingetid og vinkelfrekvens
$f(t) = Acos(\omega t)$
$A =$amplituden
$\omega =$vinkelfrekvens
Svingetiden $T = \frac{1}{f} = \frac{2}{\omega}$
Frekvensen $= f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

Eksempel
$f(t) = 5cos(\frac{2\pi}{3}t) - 2cos(\frac{2\pi}{3}t)$
$\omega = \frac{2\pi}{3}$
$T = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3$
$f = \frac{1}{3}$

Delbrøkoppspaltning med 2 like røtter

Eksempel:
$\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$
Dersom det er 3 like røtter:
$\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$

Osv.

Delbrøkoppspaltning med høyere grad og flere enn 2 faktorer

$\frac{x-6}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2}$
- Blir samme tankegangen her

Invers Fouriertransformasjon

$F^{-1}(F(w)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dw$

Fouriertransformasjon kan bruykes til å løse differensiallikninger, vi må bare vite hva $F(f')$ og $F(f'')$ er.
Definisjon for den deriverte
- Bare å sette rett inn, når vi vet at $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx$
$F(f'(x)) = -iwF(w)$
$F(f''(x)) = -w^2F(w)$

Noen nyttige formler fra tabell 14.17 og 14.16
$F(a * f + b * g) = aF(f) + bF(g)$
Hvor f og g er funksjoner.

1. $F(f(a * x)) = \frac{1}{|a|}F(\frac{w}{a})$ $a! = 0$
2. $F(f(x-a)) = e^{-iaw} * F(w)$, $a \in R$
3. $F(e^{iaw}f(x)) = F(w-a)$,$a \in R$
4. $F(f(-x)) = F(-w)$ $a \in R$

Foldingsproduktet / Konvolusjonsproduktet

Hvis $h(x) = f * g$
$F(h) = F(f) * F(g)$
$H(w) = F(w) * G(w)$

Regel
$F(f(t) * g(t)) = F(w) * G(w)$
$F(f(t)g(t)) = \frac{1}{2\pi}F(w) * G(w)$

Enhetspulsfølgen og enhetssprangfølgen og funksjonene deres
Foldingsproduktet
Parallell forskyvning

Løse differenslikninger vha. z-transformasjon

Eksempel:
$y_{n+2} - 4y_{n+1} - 12y_n = 0$, $n \geq 0$.
$y_0 = 2$
$y_1 = 4$

Fremgangsmåte
1. Z-transformer begge sider av likningene og alle ledd vha. tabellen og definisjonene vi har lært.

$z^2Y(z) - 2z^2 - 4z - 4(z * Y(z) - 2z) - 12Y(z) = 0$
2. Faktoriser, vi skal finne $Y(z)$.
$Y(z)(z^2 - 4z - 12) = 2z^2 - 4z$
3. Bruker 2. grads formelen og faktoriserer så mye som mulig både over og under brøken.
$Y(z) = \frac{z(2z-4)}{(z+2)(z-6)}$
4. Så bruker vi trikset med å isolere $\frac{Y(z)}{Z}$ for å løse differenslikningen / finne den inverse
$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2z-4}{(z+2)(z-6)}$
5. Benytter så delbrøkoppspaltning. Ender da opp med:
$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{z-6} + \frac{1}{z+2}$
6. Multiplisere så Z inn igjen.
$Y(z) = \frac{z}{z-6} + \frac{z}{z+2}$
7. Utfører så den inverse transformasjonen, ved å se på tabellen.
$Z^{-1}(Y(z)) = y_n = 6^n + (-2)^n$
Vi har løst differenslikningen.

Legg merke til at vi ikke MÅ isolere $Y(z)$ med z, men dette gjør hele prosessen med delbrøkoppspaltning mye enklere!

Løse differensiallikninger vha. laplace transformasjon

Eksempel: $y'' - 6' + 5y = 0$, $y(0) = 0$ $y'(0) = 4$
1. Bruk laplace transformasjon på begge sider av differensiallikningen. Benytt tabellen som hjelp.
$s^2L(f) - s * 0 - 4 - 6(s * L(f) - s * 0) + 5 * L(f) = 0$
2. Faktoriser akkurat som ved z-transformasjon
$L(f)(s^2 - 6s + 5) = 4$
3. Bruk 2. gradsformelen og
$L(f) = \frac{4}{s^2-6s+5} = \frac{4}{(s-1)(s-5)}$
4. Benytt delbrøkoppspaltning
$L(f) = \frac{1}{s-5} - \frac{1}{s-1}$
5. Bruk så tabellen for å finne den inverse laplace transformasjonen.
$L^{-1}L(f) = f(t) = e^{5t} - e^t$, hvor $t \geq 0$.

Løse differensiallikningssystemer

Skriv ned eksempel, oppgave 18.A

Rekker reptisjon

Bestemme konvergensintervallet og konvergensradius

Eksempel:
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2 3^n}$

Benytter forholdstesten
$lim_{n \to \infty} |\frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)^n 3^{n+1}}}{\frac{(x-2)^n}{n^2 3^n}}| = \frac{1}{3} \frac{n^2}{(n+1)^2} * |x-2| = \frac{1}{3}|x-2|$
Rekken konvergerer dersom $\frac{1}{3}|x-2| < 1$
Vi ender så opp med:
$|x-2| < 3$
1.
$-x+2 < 3$
$x > -1$
2.
$x-2 < 3$
$x < 5$

Konvergensintervallet blir:
$-1 < x < 5$

Vi må så utforske hva som skjer i endepunktene, -1 og 5. Dette kan gjøres ved å sette inn for $x = -1$ og $x = 5$ i rekken. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2 3^n}$
1.
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1-2)^n}{n^2 3^n} = \frac{(-3)^n}{n^2 3^n} = \frac{(-1)^n}{n^2}$
2.
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5-2)^n}{n^2 3^n} = \frac{3^n}{n^2 3^n} = \frac{1}{n^2}$
Her ser vi at når $x = 5$, så blir rekkens sum $\frac{1}{n^2}$, denne konvergerer mot 0. Dette betyr også at det andre endepunktet konvergerer.
$lim_{n \to \infty} |\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}| = \frac{1}{(n+1)^2} * \frac{n^2}{1} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2+2n+1}$ =Ser på når n går mot uendelig.
$\frac{\infty^2}{\infty^2+2*\infty+1}$= Den går altså mot 0, fordi 1 og $2*\infty$ er så ubetydelig smått når $n- > \infty$.

Det finnes to hovedtyper signaler som inneholder informasjon (lyd, bilde etc) – analoge og digitale (diskrete)

Analoge signaler

Et analogt signal er et kontinuerlig signal som viser hvordan en fysisk størrelse varierer med tiden. At signalet er kontinuerlig betyr at grafen til signalet er sammenhengende (uten sprang). Når vi bruker ordet signal, tenker vi (oftest) på en elektrisk størrelse. Det kan være spenning, strøm, elektriske feltstyrke eller magnetisk flukstetthet.

Digitale (diskrete) signaler

Et analogt signal inneholder verdier ved alle tidspunkt. Det betyr at det inneholder uendelig mange signalverdier. Det byr opplagt på problem hvis signalet skal lagres. Et eksempel på analog lagring er ei grammofonplate. Dybden på spor i plata representerer signalverdien. Når plata spilles, vil stiften svinge opp og ned i takt med signalverdien. Denne svingingen kan så gjøres om til elektrisk spenning ved hjelp av induksjon.

Problemet kan også løses ved først å digitalisere signalet. Det betyr at en tar vare på et tilstrekkelig antall signalverdier ved en prosess som kalles sampling. En registrerer signalverdier (samplingsverdier) i det analoge signalet med et fast tidsintervall, samplingsperiode, Ts. Den tilhørende frekvensen (antall samplinger per sekund), er samplingsfrekvensen: $f_s = \frac{1}{T_s}$

Fordelere med diskrete signaler
• Det er krevende å lagre analoge signaler, siden de har en verdi for alle tidspunkt. Magnettape, grammofonplate og bilder er eksempler på analoge lagringsmedier. Det er etter hvert blitt enkelt (og billig) å lagre verdiene til digitale signaler.
• Digitale signaler kan også kopieres uten forringelse, i motsetning til analoge.
• Dersom signalet skal behandles i en datamaskin, må det være digitalisert.

Løse differensiallikningssystemer vha. Laplace transformasjon

Eksempel 18.A i boka. 14.3
$(1) : y_1' = y_2$
$(2) : y_2' = 4y_1 - 3y_2$
$y_1(0) = 6$
$y_2(0) = 1$

Vi benytter oss av regelen om at man kan bruke Laplace transformasjon på begge sider av likningen, og dermed også bruke laplace transformasjon på hvert eneste ledd på hver side.
(1)
$sL(y_1) - 6 = L(y_2)$

(2)
$sL(y_2) - 1 = 4L(y_1) - 3L(y_2)$

Dette løser vi på vanlig måte, vi finner først den ene transformasjonen, feks. $L(y_1)$ og setter så dette inn i den andre likningen og finner $L(y_2)$. Så setter vi dette inn igjen i den første likningen for å finne $L(y_1)$. Når dette er gjort, kan vi benytte invers transformasjon på begge sider av likningen for å finne y_1 og y_2. Diff.likningssystemet er da løst.

Signaler

Det finnes to typer signaler som frakter informasjon-. Analoge og digitale signaler.
Forskjellen mellom analoge og digitale signaler er at analoge er kontinuerlige elektriske signaler, mens digitale er ikke kontinuerlige elektriske signaler. På analoge signaler så benytter man laplace transformasjon. På digitale signaler, benytter man z-transformasjon.

Kapittel 15
Sannsynlighetsregning og spillteori

15.1
Kombinatorikk

- Antall forskjellige muligheter fra en mengde, hvor disse mulighetene er delt etter gitte regler.

Summeregelen
Dersom en prosedyre P_1, kan gjøres på n_1 antall måter og en prosedyre, P_2 på n_2 måter, og ingen prosedyrer kan utføres samtidig, så er det i alt $n_1 + n_2$ - antall måter å utføre en av prosedyrene (enten P_1 eller P_2) på.

Se på antall muligher m_t ved et eksempel:
3 forretter
5 hovedretter
4 desserter
Mengden av antall retter er $3 + 5 + 4 = 12$ forskjellige retter.
Velge en middag $1 + 1 + 1 = 3$

Produktregelen

Antall muligheter $m_t = 3 * 5 * 4 = 60$ forskjellige kombinasjoner av middager.
Antall utfall m_t i et k-etapper forsøk, med m_i mulige utfall i etappe nr i.
$m_t = m_1 * m_2 .... * m_k$

Fakultet
$n!$ =n-fakultet
$n! = n(n-1)!$ Rekursiv beskrivelse
$0! = 1$ og $1! = 1$
$5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1$

Ordnet utvalg med gjentagelse/tilbakelegging

- OUMG
- Rekkefølgen har betydning
- Huskeregel for OUMG er $AB \neq BA$. Betyr at rekkefølgen ting skjer, er bestemt.
- Gjentakelse er tillat
- Da blir totalt antall utvalg $n * n * n = n^k$

n = forskjellige utvalgene
k = størrelsen på sammensetningen
$m_t = n^k$ - Gjelder bare for OUMG

Ordnet utvalg uten gjentagelse/tilbakelegging

$m_t = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
$nPr = m_t$, hvor k =faktorer = antallet de skal kombineres med. For eksempel skal 3 kuler kombineres i 2 og 2 par.

Eksempel
$P(n,k) = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = nPr = \frac{n!}{(n-k)!}$
$P(50,2) = \frac{50!}{(50-2)!} = \frac{50*49*48!}{48!} = 50*49$
Gjelder bare for OUuG

Ikke-ordnet utvalg uten gjentagelse/tilbakelegging

$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = m_t$
Eksempel:
Gruppe på 3 skal settes sammen av 15 elever. Vi kan derfor ikke gjenta personer, fordi da får vi flere like grupper som kombinasjoner.
Ikke ordnet utvalg betyr at rekkefølgen elevene blir trukket inn i grupper ikke har noe å si, men de samme gruppene kan ikke forekomme flere ganger.
$C(15,3) = \frac{15!}{3!(15-3)!} = m_t = \frac{15!}{6*12!} = \frac{15*14*13*12!}{6*12!} = \frac{15*14*13}{6}$ mulige kombinasjoner.

Eksempel
10 menn og 15 kvinner skal deles opp i grupper som består av 2 menn og 3 kvinner.
Vi kan se på dette som 2 grupper, $C(10,2)$ og $C(15,3)$.

Produktregelen:
$C(10,2) * C(15,3) = m_t$

Stokastiske forsøk

1) Vi kjenner bare til mulige utfall
2) Forsøket kan gjentas

Kaste en terning er et stokastisk forsøk
Vi vet at utfallsrommet $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.
$S = utfallsrommet$ til forsøket.
S = en sikkert hendelse (hendelsen inntreffer alltid når vi kaster terningen).
Mengden S er diskret og endelig. Altså den har et området og den inntreffer ikke alltid på likt.

$\emptyset$ = den tomme mengden og kalle for umulige hendelser.

En hendelse
- Ett eller flere utfall i utfallsrommet

$A = \{1\}$ = Hendelsen hvor det minste tallet forekommet. A er en delmengde av S og er derfor også en hendelse.
En hendelse inntreffer hvis resultatet av forsøket blir et av utfallene.
$B = \{2, 4, 6\}$ = Hendelsen hvor partall inntreffer

Eksempel:
Terningen viser 4 øyne, da har hendelsen B inntruffet.

Diskret og uendelig utfallsrommet
Dersom S er et kontinuerlig utfallsrom er det også uendelig.

Begreper og tegn
$A \subseteq S$ =delmengde
$A \cup S$ =union = utfallsrommet finnes i A eller S.
$A \cap S$ =snitt = utfallene som fiunnes i A og S
$A \cap B = \emptyset$ =disjunkt, de har ingenting til felles. Mengden som de danner er ikke eksisterende og vil aldri inntreffe som en hendelse.
$\bar{A}$ =komplement, det som ikke er i delmengden A, altså alt annet enn det som er i A.

Sannsynlighetsfunksjon

$P = Probability$
$P(A)$ = sannsynligheten for at A inntreffer
Terning, $P(A) = \frac{1}{6}$

Sannsynligheten for at ett utfall i utfallsrommet inntreffer = 1. Altså 100%.

$P(A_1UA_2U...A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ...P(A_n)$. Gjelder hvis ingen utfall kan forekomme.
Dersom A_1, A_2... A_n er disjunkte.

Hvis A snitt A_1= $\emptyset$, så vil dette fungere. Dersom dette ikke er sant, at en delmengde er en del av en annen mengde, så vil dette tallet bli høyere enn 1.. Dette blir feil.

Eksempel på et stokastisk forsøk som skal gjøres n-ganger
For en hendelse A er:
Relativ frekvens = $\frac{antall-ganger-A-har-intruffet}{n}$
Den relative frekvensen går mot $P(A)$ når n går mot uendelig stor. Altså uendelig mange forsøk.

Fouriertransformasjon gjennomgang litt grundigere

14.5
Oppgave 3.A
$f(x) = e^{-x}$ når $x > 0$ og 0 ellers.
Fouriertransformasjon til $f(x) = F(f) = F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx$
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-iwx}dx$
Det bestemte integralet går fra 0 til uendelig, fordi funksjonsverdien er 0 når x ikke er større enn 0.
$\int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-iwx}dx = \frac{1}{-iw-1}e^{(-iw-1)x}]_0^{\infty}$
$\frac{1}{-iw-1}e^{(-iw-1)x}]_0^{\infty} = \frac{1}{-iw-1}e^{(-iw-1)\infty} - (\frac{1}{-iw-1}e^{(-iw-1)0}) = -\frac{1}{(iw+1)e^{(iw+1)\infty}} - (-\frac{1}{iw+1}e^{0}) = 0 + \frac{1}{iw+1} = \frac{1}{iw+1}$

$F(w) = \frac{1}{iw+1} = \frac{1}{1+iw}$

Oppgave 3.B
Bestem fourierspektret til $F(w)$.
$F(w) = \frac{1}{1+iw} = \frac{1}{Z} = Z^{-1}$
1. Vi prøver så å finne ett annet uttrykk for Z^{-1}
$Z^{-1} = \frac{Zbar}{|Z|^2} = \frac{Zbar}{Z*Zbar} = \frac{1-iw}{(1+iw)(1-iw)} = \frac{1-iw}{w^2+1}$ =Vi gjør det om til kartesisk form og deler den $Re(F)$ og $Im(F)$ hver for seg.
$Z^{-1} = \frac{1}{1+iw} = \frac{1}{w^2+1} - \frac{wi}{w^2+1}$, delt opp på kartesisk form.

Fourier spekteret finner vi så ved å finne modulen til $|Z|$.
$|Z| = \sqrt{ReZ^2 + ImZ^2} = \sqrt{(\frac{1}{w^2+1})^2 + (-\frac{w}{w^2+1})^2} = \sqrt{\frac{1}{(w^2+1)^2} + \frac{w^2}{(w^2+1)^2}} = \sqrt{\frac{1}{(w^2+1)^2} + \frac{w^2}{(w^2+1)^2}} = \sqrt{\frac{1+w^2}{(w^2+1)^2}} = \sqrt{(w^2+1)(w^2+1)^{-2}} = \sqrt{\frac{1}{(w^2+1)}} = \frac{1}{\sqrt{w^2+1}}$
Fourierspekteret er da $|Z| = \frac{1}{\sqrt{w^2+1}}$

Oppgave 3.C
Bestem fasevinkelen til $F(w)$.
Fasevinkelen til $F(w)$ kan vi finne vha. Argumentet til $F(w)$.
$Arg(F(w)) = \phi$
$tan(\phi) = \frac{ImF}{ReF}$
$\phi = tan^{-1}(\frac{ImF}{ReF}) = tan^{-1}(\frac{-\frac{w}{w^2+1}}{\frac{1}{w^2+1}}) = tan^{-1}(-\frac{w}{w^2+1} * \frac{w^2+1}{1}) = tan^{-1}(-w) = -tan^{-1}(w)$
Fasevinkelen $\phi = -tan^{-1}(w)$

Viktige fortegnsregler for sin, cos og tan.
$cos(-\pi) = cos(\pi)$ danner likefunksjoner
$sin(-\frac{\pi}{2}) = -sin(\frac{\pi}{2})$ danner oddefunksjoner
$tan(-\frac{\pi}{4}) = -tan(\frac{\pi}{4})$

Fourierspekter

Finner man ved å finne modulen til Z. Da må først uttrykket være på kartesisk form. $|Z| = \sqrt{reZ^2 + imZ^2}$

Fasevinkelen
Finner ved $ArgZ = \phi$. $tan(\phi) = \frac{ImF}{ReF}$.

En brøk som blir slik at man har ett utrykk multiplisert med $0/0$, skal deriveres over og under brøken for å finne for eksempel hva fourierspekteret kan være.

Eksempel:
$F(w) = \frac{2*i*sin(w*\pi)}{w^2-1} = Z$
Når $w = 1$ eller $w = -1$ så vil vi få $0/0$.
$\frac{2*i*sin(1*\pi)}{1^2-1} = \frac{2i*0}{0}$, dette funker ikke, så vi må derivere for å se hvor funksjonen er gyldig.
Vi deriverer oppe og nede hver for seg, med hensyn på w.
$2i\pi cos(w\pi)$ og $2w$
$\frac{2i\pi cos(w\pi)}{2w}$ så setter vi inn for 1 igjen.
$\frac{2i\pi cos(\pi)}{2} = -i\pi$
Dette betyr at fourierspekteret til $F(w) = -iw$ og iw, fordi vi kan også sette inn for -1.

Sannsynlighet

Ordnet utvalg
- Ordnet utvalg betyr at rekkefølgen hendelsene forekommer har betydning. Altså $AB \neq BA$.
- Et ordnet utvalg er et utvalg der ordningen (eller rekkefølgen) spiller en rolle.
3 forskjellige pakker deles ut blant 6 personer, maks 1 pakke per person. På hvor mange måter kan pakkene deles ut?
Antall kombinasjoner blir da $6 * 5 * 4 = 120$ forskjellige muligheter, $= m_t$.
Legg merke til at her ville det vært bare 20 forskjellige muligheter om bare 3 personer skulle velges ut til å få en pakk hver (hvis pakkene var like).
Det er derfor viktig at vi velger riktig utvalg. Men siden pakkene er forskjellige, så er det flere muligheter.
Dette eksempelet er ett ordnet utvalg uten tilbakelegging.

Uordnet utvalg
- Uordnet utvalg betyr at rekkefølgen hendelsene forekommer ikke har betydning. Altså $AB = BA$ og dette er bare 1 mulig hendelse og ikke 2 forskjellige.
- Et uordnet utvalg er et utvalg der ordningen (eller rekkefølgen) ikke spiller noen rolle.
Uordnet utvalg benyttes når man ikke vil at flere grupper skal være like. La oss si det skal dannes grupper på 2 og 2, hvem som blir valgt først vil ikke ha noe å si, det er fortsatt den samme gruppen. Det blir derfor færre utvalg. Det er det samma om Kari og Martin er på gruppe og Martin og Kari. Dette er den samme gruppen, og dersom vi skulle finne antall mulige grupper bestående

av 2 personer som kunne settes sammen av totalt 15 personer, måtte vi valgt uordnet utvalg.

Forskjellige måter å finne antall muligheter på i forhold til forskjellige situasjoner / oppgaver.

Ordnet utvalg med tilbakeleggelse
- Rekkefølgen har noe å si og vi legger tilbake noe. Det kan altså trekkes på nytt.
$P(n, k) = n^k$
Hvor n = det totale antallet vi kan plukke ifra og k = antall vi skal legge sammen. For eksempel trekke 2 baller.

Ordnet utvalg uten tilbakeleggelse
$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$
Hvor n = det totale antallet vi kan plukke ifra og k = antall vi skal legge sammen. For eksempel trekke 2 baller. Da kan den samme ballen bli trukket igjen, men samme her at det er ordnet utvalg. Rekkefølgen har noe å si, AB er ikke det samme som BA, altså dette er 2 forskjellige muligheter.

Uordnet utvalg uten tilbakelegging
$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Betyr at rekkefølgen ikke har noe å si. $AB = BA$, og det blir derfor også mye færre muligheter.
Hvor n = det totale antallet vi kan plukke ifra og k = antall vi skal legge sammen.
Dette tilfellet er veldig spesielt, men det benyttes når man skal danne grupper av noe hvor rekkefølgen ikke har noe å si. For eksempel en gruppe på 15 studenter, og det skal dannes 1 gruppe av 3 studenter som skal være leder for ett prosjekt. Da vil ABC være det samme som BAC, altså den samme gruppen kan ikke være en hendelse flere enn 1 gang, uansett hvilken rekkefølge de befinner seg i. På denne måten får vi mye færre muligheter.

15.4 Regneregler i sannsynlighetsregning

Utfallsrommet S er alle mulige hendelser. Hvis A er en delmengde av S, så er $P(S) = P(A) + P(\bar{A})$
Fordi $P(A)$ og $P(\bar{A})$ er 2 disjunkte mengder. De har ingen ting til felles. $S = A \cup \bar{A}$ = alle mulige hendelser.
$P(S) = 1$ da er også $P(S) = P(A) + P(\bar{A}) \longrightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Sannsynligheten for komplement hendelsen er
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ hvor A er en hendelse i utfallsrommet S.

Eksempel:

To vanlige terninger kastes etter hverandre. Hva er sannsynligheten for at summen er minst fire?
Ettersom summen av antall øyne når man kaster 2 terninger går fra 2-12, så er det lettere å benytte komplementhendelsen $\bar{A}$.
Vi skal finne ut sannsynligheten for at summen er minst 4. Altså komplementhendelsen er alle hendelser som gir 3 øyne.
$\bar{A}$ =1-1, 1-2, 2-1 $m_t = 3$ tilfeller som gir øyne mindre enn 4. $P(A)$ er sannsynligheten vi skal finne og $P(\bar{A}) = \frac{3}{36}$
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
$P(A) = 1 - P(\bar{A})$
$P(A) = 1 - \frac{3}{36} = \frac{11}{12}$

Sannsynligheten for unionen av to hendelser

- Alle de forskjellige hendelsene to mengder inneholder = union.
- Union er enten A eller B.
- $P(A \cup B)$ er sannsynligheten for at enten A eller B inntreffer.

La A og B være to hendelser i utfallsrommet S. Sannsynligheten for unionen av dem er:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Vi trekker ifra snittet, fordi unionen av 2 hendelser er bare unike verdier fra begge mengdene.
Dersom A og B er disjunkte, at de ikke har noen felles delmengde $P(A \cap B) = 0$.

Eksempel:
En urne inneholder 5R, 4G og 8S kuler. En kule trekkes tilfeldelig, hva er sannsynligheten for at kule er rød eller svart?
$m_t = 17$
$P(R \cup S) = P(R) + P(S) - P(R \cap S)$
$P(R \cap S) = 0$
$P(R \cup S) = P(R) + P(S)$
$P(R \cup S) = \frac{5}{17} + \frac{8}{17} = \frac{13}{17}$

Eksempel 2:
En kortstokk med 52 kort, finn sannsynligeten for å trekke spar- eller et bildekort.
$P(S) = \frac{13}{52}$ og $P(B) = \frac{12}{52}$ $P(B \cap S) = \frac{3}{52}$, 12 bildekort totalt i en kortstokk.
$P(S \cup B) = P(S) + P(B) - P(S \cap B)$
Sannsynlighetn for at enten spar eller ett bildekort blir trekt er:
$P(S \cup B) = \frac{13}{52} + \frac{12}{52} - \frac{3}{52} = \frac{22}{52}$
Hendelsen S og B er ikke disjunkte, fordi det er mulig å trekke spar som også er et bildekort.

La A, B og C være tre hendelser i ett utfallsrom S. Sannsynligheten for union av dem er:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

15.5 Betinget sannsynlighet

Starter med ett eksempel:
En høgskoleklasse ble mappeevaluert i fagene matematikk og programmering. 85 % stod i matematikk, 80% i programmering og 75% i begge to. Hva er sannsynligheten for at en vilkårlig valgt student:
1. Består i matematikk eller programmering
2. Består i matematikk og stryker i programmering.
3. Stryker i begge?
$P(A)$ =sannsynligheten for at eleven stod i matematikk
$P(B)$ =sannsynligheten for at eleven stod i programmering.

Her må vi først analysere teksten og finne ut hva slags uttrykk vi skal finne.
1. Består i matematikk eller programmering betyr at vi må finne sannsynligheten for unionen av dem.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(A \cup B) = \frac{85}{100} + \frac{80}{100} - \frac{75}{100} = \frac{9}{10}$

2. Består i matematikk og stryker i programmering. Her må vi tenke litt lurt. 2 betingelser må være oppfylt, så da kan vi med engang tenke på snittet mellom de 2 situasjonene. Vi kan da snu på unionsformelen. Og nå skal vi finne $P(A \cap \bar{B})$.
$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{85}{100} - \frac{75}{100} = 0.10$

3. Stryker i begge? Vi må finne $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.
$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{9}{10} = 0.10$

Betinget sannsynlighet

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Finner hva er sannsynligheten for at A inntreffer, når B allerede har skjedd.

Eksempel:
Hva er sannsynligheten for å få en sum på minst 10, når 1 terning kastes to ganger etter hverandre og første kast gir terningkast 4.
Utfallsrommet blir $P(B) = \{4-1, 4-2, 4-3, 4-4, 4-5, 4-6\}$.Det er bare 1 av kombinasjoene som kan gjør at summen blir 10, ettersom det er 6 mulige utfall, så blir sannsynligheten for at A(Få en sum på 10) skjer når B allerede har vist 4 øyne $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Dette ser vi direkte.

Eksempel:
En boks inneholder 5R og 4G baller. To baller trekkes etter hverandre uten å bli lagt tilbake. Hva er sannsynligheten for at andre ball er rød når den første ballen var grønn?
$m_t = 9$

$P(B) = P(Gr\phi nn) = \frac{4}{9}$
$P(A \cap B)$: Finner vi ved at det er totalt $5 * 4$ trekkserier av totalt $9 * 8$.$= \frac{20}{72}$
$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{20}{72}}{\frac{4}{9}} = \frac{5}{8}$

Multiplikasjonsteoremet
$P(A|B) * P(B) = P(A \cap B)$
$P(A \cap B) = P(A|B) * P(B)$
Dersom a og b er henderlser med sannsynlighet ulik 0, så er:

Dersom utfallsrommet S består av disjunkte hendelser $B_1, B_2..B_n$ har vi for en hendelse A at.
$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + ...P(B_n) * P(A|B_n)$

Baye's formel
$P(A \cap B) = P(B) * P(A|B)$
$P(B \cap A) = P(A) * P(B|A)$
Setter så høyre siden lik hverandre, dette kan vi fordi: $P(A \cap B) = P(B \cap A)$
$P(B) * P(A|B) = P(A) * P(B|A)$
Denne formelen kan vi snu på som vi vil og bruke til vårt eget formål. Vi får da at:
$P(B_i|A) = \frac{P(B_i) * P(A|B_i)}{P(A)}$
Hvor $i = 1, 2...n$ Vi kan finne sannsynligheten for at alle B_i inntreffer når hendelsen A har hendt.
Hendelsene må være disjunkte, snittet mellom dem er tomt.

Uavhengige hendelser
Hendelsene er uavhengige dersom $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$. For eksempel en terning og et pengestykke kastes.Hva er sannsynligheten for at terningen viser 4 øyne og pengestykke krone? Vi må vite om hendelsene er uavhengige av hverandre.
$P(A \cap B) = \frac{1}{6} * \frac{1}{2} = \frac{1}{12} =$ snittet / sannsynligheten for at begge inntreffer.

Denne formelen kan utvides dersom det er flere uavhengige hendelser.
$P(A_1 \cap A_2 \cap ...A_n) = P(A_1) * P(A_2) * P(A_3) * ....P(A_n)$

Viktigste fra kapittel 15.1-15.6
- Bayes formel
- Hypergeometrisk fordeling
- Binomisk fordeling

Bayes formel
- Beskriver sannsynligheten for en hendelse, basert på ulike betingelser som kan ha noe med hendelsen å gjøre.

- Brukes når man vil finne sannsynligheten for at noe skjer, dersom noe allerede har skjedd, men formelen kan også snues på.

$P(A|B)$ - Er sannsynligheten for at A skjer når B allerede har skjedd.

$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)*P(A|B_i)}{P(A)}$
$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + ...P(B_n)P(A|B_n)$
Hvor $P(A)$ kan settes inn dersom det er flere hendelser som kan ha skjedd og vi prøver å finne sannsyligheten for $P(B_i|A)$

Eksempel:
3 forskjellige maskiner har samme arbeidsoppgave, men maskinene brukes ikke like mye.
Maskin R_1 står for 50% av produksjonen, R_2 står for $\frac{1}{5}$ og R_3 står for $\frac{3}{10}$.
Sannsynligheten for at en maskin har ødelagt et produkt er:
$R_1 = \frac{1}{100}$
$R_2 = \frac{2}{100}$
$R_3 = \frac{3}{100}$
Nå får vi oppgitt at et produkt er defekt, hva er sannsynligheten for at R_1 ødela produktet?
Da må vi tenke at vi skal finne sannsynligheten for at R_1 ødela produktet, når feilen allerede har oppstått.
Vi bruker Bayes teorem, og vi vet at $P(F|R_1) = \frac{1}{100}$, altså at det er 1% sjanse for at det forekommer en feil når R_1 jobber med produkter.
På samme måte vet vi at $P(R_1) = 50\%$, fordi det er 50% sannsynlig at R_1 jobber med produkter.
$P(R_1|F) = \frac{P(R_1)*P(F|R_1)}{P(R_1)*P(F|R_1)+P(R_2)*P(F|R_2)+P(R_3)*P(F|R_3)}$

Her er det bare å plotte inn for verdiene og vi vil få svaret.

Hypergeometrisk fordeling

- Benyttes når sannsynligheten for noe endrer seg for hver gang vi utfører ett forsøk. (For eksempel ved loddtrekning), altså ingen tilbakelegging.

Definisjonen:
$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$\frac{\binom{n}{k} * \binom{N-n}{K-k}}{\binom{N}{k}}$$

N =antall muligheter / valg
K =antall uttrekninger / forsøk
n =antall gunstige valg (antall personer vi vil skal vinne loddtrekning)

k =antall riktige trekninger, altså hvor mange av mengden n skal vinne loddtrekningen.

Binomisk fordeling

- Benyttes når sannsynligheten er like stor for hver gang vi utfører ett forsøk. For eksempel et terningkast.
- Binomisk er med tilbakelegging. (Lik sannsynlighet ved hver trekning).

Definisjon:
$\binom{n}{k} * P^k * (1-P)^{n-k}$
$P = probability$ =sannsynligheten for at det skjer (som også er like stor for hver trekning).
n =antall gunstige muligheter
k =mengden gunstige vi skal finne sannsynligheten for skjer.

Uavhengige hendelser

To hendelser kalles uavhengige dersom utfallet i den ene ikke påvirker utfallet i den andre.
Når A og B er uavhengige så er:
$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

Kapittel 16
Statistikk

f_i er frekvensen. Frekvensen er antall forekomster av en hendelse eller et måling.
v_i er verdien på målingen.

Gjennomsnittet
$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} f_i * v_i$
Hvor f_i er frekvensen og v_i er verdien på målingene.
På denne måten får vi summert alle målingene på en lettere måte og kan finne gjennomsnittet av målingene.

Salgs eksempel

- Forventet at tallene er i stigende rekkefølge.

Salgstall = Hvilke tall som forekommer
Frekvens = Antall ganger et salgstall forekommer
Relativ frekvens = $\frac{frekvens}{totaltantall(n)(salg)}$ er % andelen av forekomsten. Hvis vi kaster en mynt 10 ganger og får 8 mynt. Så er den relative frekvensen for å få mynt 80%. Den relative frekvensen nærmer seg den faktiske sannsynligheten dersom totalt antall forsøk går mot uendelig

Kumulativ frekvens = Salgstallene er i stigende rekkefølge, og den kumulative frekvensen til hvert av tallene er frekvensentil salgstallet, og summen av de foregående frekvensene til de lavere salgstallene. Kumulativ frekvens sier noe om hvor mange salg som forekom. La oss si at 5 butikker solgte 40 varer hver seg. Frekvensen er 5, og så solgte 3 andre butikker 50 varer hver seg som er enda bedre. Da er den kumulative frekvensen 8 for butikkene som solgte 50 varer. Det betyr at det er 8 butikker som solgte 51 varer eller mindre.

Relativ kumulativ frekvens = Det samme som kumulativ frekvens, men gir en prosentoversikt over situasjonen. Da kan man se hvor mange butikker i % som solgte mindre enn ett visst antall produkter. $= \frac{kumulativfrekvens}{totaltantallsalg(n)}$. Den kumulative frekvensen er alltid n altså totalt antall salg i siste kolonne. Og prosenten til den relative kumulative frekvensen er alltid 1 i den siste kolonnen (summeringen).

Median
Dersom antall målinger n er et partall, må vi finne i stigende rekkefølge de 2 miderste tallene og summere dem og dele på 2 for å finne medianen. Dersom antall målinger n er ett oddetall, så er medianen lik det miderste tallet.

Typetallet
- Er tallet som forekommer flest ganger i målingene.

Beliggenhetesmål
- Er for eksempel median, typetall, gjennomsnittsbeløpet.

Kvartilbredden
$Q_3 - Q_1$ =Kvartilbredden
- Hvor Q_1 er medianen i første kvartal. Altså medianen av første halvparten av målingene.
- Q_3 er medianen i tredje kvartal. Vi finner median på vanlig måte, men vi ser på tallene hver for seg.

GJENSTÅENDE
Forventningsverdi diske og kontinuerlig HYPERGEOMETRISK
Varians diskret og kontinuerlig
Kombinere sannsynligheten for 2 hendelser.
Annen sannsynlighet for hver gang noe trekkes.
Bestemme fordelingsfunksjoner
GUNSTIGE/MULIGE
Punktsannsynlighet
Standardavvik
Binomisk
Sannsynlighetstetthet
Antall muligheter, rekkefølgen har ikkenoe å si.
P^k, sannsynligeten for å trekke riktig k ganger. Lik sannsynlighet for hvert trekk.

Stokastisk variabel

En stokastisk variabel er et begrep i sannsynlighetsteori og sannsynlighetsregning. Det er en funksjon som tilordner verdier til elementer i utfallsrommet til et tilfeldig eksperiment. For eksempel kan en stokastisk variabel beskrive utfallet av et terningkast, og de mulige utfallene er da elementene i mengden $\{1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6\}$.

Eksempel

En terning kan gi 6 mulige utfall. Dette gir utfallsrommet S = { 1,2,3,4,5,6 }. Dette innføres en (stor) X som representer dette utfallsrommet før terningen kastes. X er foreløpig bare funksjonen X, men vi vet før kastet hvilke ulike verdier X kan få. Derfor kalles den en stokastisk variabel, den kan anta en av flere ulike verdier, men det er før forsøket er utført uvisst hvilken.

Hvis X er en funksjon, og x er et måleresultat vil utrykket X = x bety at X antar verdien x. For hvert utfall (kast) knyttes X til en enkelt verdi fra utfallsrommet. $P(X = x)$ hvor x er et tall trukket ut av en gitt mengde.

Empirisk varians

Varians er et mål på variasjon.
$\sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$
μ er en kjent størrelse som skal være oppgitt. Denne verdien antar man stemmer, den baserer seg på erfaring (ofte veldig lang) og man har da kommet fram til at man ikke taper noe på å tallsette μ.

Empirisk standardavvik

$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}$

Utvalgsvarians

Utvalgsstandardavvik

Modelltilpassing og sentralgrenseteoremet

Normalfordeling

For å finne «mønster av tilfeldighet», bruker vi noe som heter normalfordeling, eller the error function. Funksjonen gir en veldig karakteristisk kurve som ser ut som en bjelle. Internasjonalt bruker vi betegnelsen bell curve. Normalfordeling er statistikkens viktigste fordeling, og dette henger sammen med et matematisk resultat som kalles for sentralgrenseteoremet. Teoremet sier at en sum av uavhengige og identisk fordelte tilfeldige variabler går mot en normalfordeling når antallet går mot uendelig. Dette resulterer altså i at normalfordelingen med stor nøyaktighet kan brukes til å beskrive mange hendelser i naturen og samfunnet.

μ – forventningsverdi, gjennomsnittet
σ^2– fordelingens standardavvik, bredden på kurven

Sentralgrenseteoremet

Sentralgrenseteoremet er fundamentalt i statistikkfaget.
Man har en populasjon med forventning μ og standardavvik σ .
Man trekker ut n stikkprøver fra populasjonen.

Dersom n er stor vil sannsynlighetsfordelingen til stikkprøvene anta en tilnærmet normalfordeling med forventning μ og standardavvik $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. (tilnærmingen blir bedre med økende n)

REPETISJON

Lineære transformasjoner, egenverdier og egenvektorer

Hva betyr det, når determinanten er lik 0?

$|A| = 0$, betyr at A^{-1} ikke eksisterer.
Fordi $A^{-1} = \frac{1}{|A|} * Kof(A)^T$ og vi kan ikke dele på 0.

When the determinant of a square matrix A is zero, A is not invertible. This is a crucial test that helps determine whether a square matrix is invertible, i.e., if the matrix has an inverse. When it does have an inverse, it allows us to find a unique solution, e.g., to the equation $Ax = b$ given some vector b.

When the determinant of a matrix is zero, the system of equations associated with it is linearly dependent; that is, if the determinant of a matrix is zero, at least one row of such a matrix is a scalar multiple of another.

When the determinant of a matrix is nonzero, linear system it represents is linearly independent

When the determinant of a matrix is zero, it rows are linearly dependent vectors, and its columns are linearly dependent vectors.

Gjennomgang av pensum

TRANSFORMASJON

Eksempel på rotasjon om et punkt og hvordan vi skal flytte geometriske former konstruert av vektorer i et plan. Slik at formen er ivaretatt.

Vi har 3 koordinater $A(3,1)$, $B(1,4)$, $C(1,1)$. Til sammen danner disse 3 en trekant i planet.
Vi skal rotere trekanten 90 grader med klokka. Altså 90 grader i - retning. Vi skal også rotere om punktet A.
Oppgaven går ut på å finne transformasjonsmatrisen M som må benyttes ved $\vec{A'} = M * \vec{A}$ for hver eneste punkt.

For å finne transformasjonsmatrisen M, så må vi tenke at vi flytter punktet A til origo, deretter roterer vi vektoren 90 grader med rotasjonsmatrisen og så flytter vi punktet tilbake. Altså motsatte verdier av hva A hadde. Vi gjør dette på A, fordi det er A trekanten skal roteres om.

$M = T_1 * R * T_2$, hvor T_1 og T_2 er 2 matriser som flytter punktet.

$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & [3] \\ 0 & 1 & [1] \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, legg merke til at vi har lagt inn punktet A i denne matrisen.
Fordi vi vil flytte punktet til origo først.
$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, her skal vi flyttet punktet tilbake og vi legger derfor inn -A.
$R = \begin{bmatrix} cos(-90) & -sin(-90) & 0 \\ sin(-90) & cos(-90) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, utvider denne matrisen, men siden det er bare i 2D planet vi skal rotere om, legger vi bare inn 1.
$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
LINJE * KOLONNE
$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1+3 \\ -1 & 0 & 3+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Transformasjonsmatrisen M som vi må kan benytte vil rotere hver vektor 90 grader med klokka og om punktet A. Vi prøver å se på de nye koordinatene ved $A' = M * A$ hvor A, B og C er vektorene. Vi må også utvide vektorene til å få dem til å passe med matrisen. Dette gjør vi ved å slenge på 1 på siste ledd.

$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$,$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vi må så multiplisere hver vektor (koordinat) med M.
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3+4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, som vi ser her så er punktet A likt som tidligere. Dette er et godt tegn, ettersom vi skal rotere om punktet A. Resten av utregningene utføres ikke her og nå.
$B' = M * B$, B' er den nye vektoren etter transformasjonen.
$C' = M * C$, –"–

Lagranges restledd

Det viser seg at man kan finne Restleddet når n går mot uendelig for mclaurin rekker ved:
$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$, hvor c ligger mellom 0 og x.

For taylorrekker så gjelder:
$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, hvor c ligger mellom a og x.
- Det blir addert +1 på n, fordi vi vil finne fram til og med dette leddet. Altså restleddet er etter den n-verdien vi har valgt, det er dette vi vil fjerne fra svaret vårt når vi skal ha svaret med en viss nøyaktighet.

Det er slik at $C =$ mellom 0 og x, og x er gitt i oppgaven. For eksempel e^x, og vi skal finne e^1 med 10^{-4} desimalers nøyaktighet.

Eksempel
$sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$
Oppgaven går utpå å estimere $sin(75grader)$ også likt $sin(\frac{5}{12}pi)$ med en 10^{-4} desimalers nøyaktighet.

Vi vet fra definisjonen at
$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$
Fra mclaurin sin definisjon vet vi at $c =$ mellom 0 og x. Vi vil gjerne tippe på en x som er så nær som mulig. Her er $f^{n+1}(c) = sin^{n+1}(x)$ og $c < x$. Altså $\frac{5}{12}pi.$ og $x = \frac{5}{12}pi$, $c = \frac{5}{12}pi.$
Vi vet også at $R_n(x) < 10^{-4}$

$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} < 10^{-4}$
Vi får da en likning som ser slik ut:
$\frac{sin^{n+1}(\frac{5}{12}pi)}{(n+1)!}(\frac{5}{12}pi)^{n+1} < 10^{-4}$

Her setter vi inn for ulike n-verdier, starter på $n = 1$.
Verdiene vi får skal sees på som absolutte verdier, slik at med engang svaret vi får er $< 10^{-4}$. Så har vi kommet fram til riktig n. La oss si at vi finner ut at ved $n = 10$ og $n = 11$ så har svaret like mange desimalers nøyaktighet. Da kan vi sette denne verdien til rekken slik:

$sin(\frac{5}{12}pi) = \sum_{n=0}^{11} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\frac{5}{12}pi)^{2n+1}$, hvor n går fra 0 - 11. Vi summerer altså bare 12 ledd før vi har en nøyaktighet vi er fornøyde med, alts 4 desimalers nøyaktighet.
Skal komme flere eksempler om Lagranges restledd senere. Stor sannsynlighet for å få dette på eksamen.

Integraltesten

- Går utpå å finne ut om rekken konvergerer eller divergerer.
- Brukes også til å sjekke hva som skjer i endepunktene til en konvergerende rekke.

Hvis $\int_n^\infty f(x)dx$ konvergerer så konverger også rekken.
Integraltesten går utpå å integrere funksjonen, hvis denne konvergerer så konvergerer også rekken.

Eksempel:
$\sum_{n=1}^\infty \frac{(n+1)}{n^2}$ er rekken vi har. Vi undersøker om den konvergerer.

Vi gjør først uttrykket enklere.
$\int_1^\infty (\frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2})dn = \int_1^\infty (\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})dn$
- Integrerer med hensyn på n. Hvor n sin begrensning er gitt av rekka. n går fra 1 til uendelig.

$ln(n) - \frac{1}{n}]_1^\infty$
$ln(\infty) - \frac{1}{\infty} - (-ln(1) - \frac{1}{1}) = ln(\infty) - 0 + 0 + 1 = ln(\infty) + 1$
$ln(\infty) + 1$
- Vi ser her at rekka divergerer fordi denne går mot uendelig, og ikke mot en verdi.

Hvis vi ender opp med en verdi her, så vet vi at rekka går mot denne verdien.

***Hvis vi undersøker endepunkter, så må vi velge x-verdien (endepunktet) og så integrere rekken med hensyn på n.

Finne egenverdi og egenvektorer

Definisjon:
Hvor x er egenvektoren og λ er egenverdien tilhørende egenvektoren. Og x-vektor ikke er lik 0, så sier vi at:
$Ax = \lambda x$. Egenverdien λ kan være både ett reelt og komplekst tall.

Vi har lov til å multiplisere λ med enhetsmatrisen I.
$Ax = \lambda Ix$. Flytter så alt over til venstre side.
$Ax - \lambda Ix = 0vek$
$(A - \lambda I)x = 0vek$

Det er det samme om vi skriver $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ eller $(\lambda I - A)\vec{x} = \vec{0}$
Tilsvarende $(A - \lambda I) = 0$ eller $(\lambda I - A) = 0$.
Resultatet blir det samme.

Husk at det finnes uendelig mange egenvektorer for hverλ.
Dette likningssettet må derfor ha uendelig mange løsninger, og det vet vi er mulig bare dersom determinanten til matrisen $= 0$.
(Vi ender opp med en ny matrise som vi må regne ut determinanten til).

Egenverdien til en matrise gjør at det finnes uendelige mange egenvektorer til den tilhørende matrisen, og egenverdien kan bare eksistere når determinanten er 0.

$det(A - \lambda I) = 0$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, finn egenvektormatrisen P og den diagonaliserte matrisen D slik at $A = P^{-1}DP$.
1. Her må vi finne begge egenverdiene og deretter finne egenvektorene. Egenvektorene står i kolonnene til matrisen P og tilsvarende egenverdi i samme kolonne står i matrise D.
Først finner vi egenverdiene fra $det(A - \lambda I) = 0$.

$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
$(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = 0$
La oss kalle den nye matrisen for B, feks.
$B = \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 4 \\ 2 & 1 - \lambda \end{bmatrix}$
$|B| = 0$. Så regner vi ut determinanten til B.
$(3 - \lambda)(1 - \lambda) - 4 * 2 = 0$
$3 - 3\lambda - \lambda + \lambda^2 - 8 = 0$
$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$
$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$.
Vi har funnet begge egenverdiene til matrisen A. Vi kan nå finne egenvektorene.
Ved at vi vet egenvektorene, vet vi også hva den diagonaliserte matrisen D er.
$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, det har ikkenoe å si om vi velger -1 eller 5 i første posisjon i matrisen. Vi må bare huske på at hvis egenverdien -1 står i første kolonne i D, så må også den tilhørende egenvektoren være den første kolonnen i matrisen P.

Vi får nå et likningssett med 2 likninger. Hvor hver likning løses for seg selv. Vi skal finne egenvektorene som bygger opp matrisen P.

$A\vec{x} = \lambda_n \vec{x}$ hvor $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

For $\lambda_1 = -1$ gir en tilsvarende egenvektor.
$A\vec{x} = \lambda_1 \vec{x}$
$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \lambda_1 \vec{x}$
$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -1 * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
Vi ser på linjen som likning 1 og samme for likning 2.
Likning 1: $3x_1 + 4x_2 = -x_1$
Likning 2: $2x_1 + x_2 = -x_2$
Vi skal få samme løsning for begge likningene. Alt vi er ute etter er ett forhold mellom dem, og vi må aller først bestemme oss for hvilken verdi vi velger å løse den for.

$(1): x_2 = -x_1$
$(2): x_2 = -x_1$
Den tilsvarende egenvektoren blir da: $x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 5$
$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 5 * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
Vi ser på linjen som likning 1 og samme for likning 2.
Likning 1: $3x_1 + 4x_2 = 5x_1$
Likning 2: $2x_1 + x_2 = 5x_2$
$(1): x_1 = 2x_2$
$(2): x_1 = 2x_2$

$\lambda_1 = -1$ gir en tilsvarende egenvektor.
$A\vec{x} - \lambda_1 \vec{x} = \vec{0}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 3+1 & 4 \\ 2 & 1+1 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0}$
$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$(1): 4x_1 + 4x_2 = 0$
$x_1 = -x_2$

$(2): 2x_1 + 2x_2 = 0$
$x_1 = -x_2$
Første egenvektor tilhørende λ_1 er da $x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
Vi kan se på det slik: $x_1 = -x_2$. Vi setter derfor inn -1 for x_1. Og $x_2 = x_2$ alltid. Vi kunne valgt omvendt, det ville ikke hatt noe å si.

$\lambda_2 = 5$
$\begin{bmatrix} 3-5 & 4 \\ 2 & 1-5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$(1): -2x_1 + 4x_2 = 0$
$x_1 = 2x_2$
$(2): 2x_1 - 4x_2 = 0$
$x_1 = 2x_2$
Andre egenvektor tilhørende λ_2 er da $x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Fordi vi velger å se på x_2.
Vi kan se på det slik: $x_1 = 2x_2$. Vi setter derfor inn 2 for x_1. Og $x_2 = x_2$.

Vi har nå funnet matrisen P og matrisen D.
$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, tilhørende egenvektor matrise $P = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
Vi har nå teknisk sett løst oppgaven, vi kan kontrollsjekke ved å finne $P^{-1} = \frac{1}{|P|} * Kof(P)^T$ og deretter løse likningen.
$A = P^{-1}DP$, hvis vi ender opp med samme matrise A som oppgaven ga oss, så vil det si at vi har funnet riktig egenverdier og egenvektorer.

Konvergensintervall og konvergensradius
Av en forholdstest kan man finne ut for hvilke verdier av x, rekken til funksjonen $f(x)$ konvergerer (går mot et tall).
Et eksempel: $-4 < x < 2$. Dette er konvergensintervallet.

Konvergensintervallet:
$b < x < a$

Konvergensradiusen vil alltid være positiv og er definert slik:
$|\frac{a-b}{2}|$

Eksempel:
$-4 < x < 2$ har konvergensradiusen $|\frac{2-(-4)}{2}| = \frac{6}{2} = 3$

Sannsynlighet (Hypergeometrisk fordeling ++)

11 elever, 6 trekninger. 2 personer vil reise sammen, det samme vil 2 andre. De to parrene går sammen og lager en deal. Dersom de til sammen får 2 eller 3 trekninger så trekker de om hvem av parrene som skal reise. Dersom alle 4 blir trukket, så reiser alle sammen.

Finn sannsynligheten for at alle 4 får reise. Hypergeometrisk siden man kan ikke bli trukket på nytt.
$\frac{(n,k)*(N-n,K-k)}{(N,K)}$
$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Her er $n = 4$ fordi antall gunstige trekninger er 4. $k = 4$ fordi vi vil at 4 stykker av mengden på 4 skal vinne. $N =$ antall elever $= 11$.
$K = 6$, fordi det er totalt 6 trekninger. Det som skjer her er:
$\frac{4C4*(11-4)C(6-4)}{11C6}$

$4C4 = 1$, det betyr at alle 4 skal få et lodd hver seg. (100%).
Dette blir multiplisert med antall andre muligheter. Produktregele.
Dette er fordi vi vil ha antall gunstige utfall / mulige.
$(11-4)C(6-4) : 7C2$

Så skal vi finne sannsynligheten for at ett av parene får reise.
$\frac{P(x=2)+P(x=3)}{2} + P(x = 4)$.
Dette blir det samme prinsippet som istad. Men vi må summere sannsyngliheten for å få 2 riktige og 3 riktige trekk og dele dem på 2 pga. avtalen dems. Deretter $+$ på sannsynligheten for at alle 4 blir trukket.

Standard normalfordeling

Normalfordeling og standardavvik. Den gaussiske normalfordeling er en modell som beskriver mange fordelinger av realistiske data på en god måte. Teoretisk er normalfordelingen definert ved en spesiell type funksjoner, en eksponentialfunksjon. Grafen til denne funksjonen blir en klokkeformet, symmetrisk kurve.
$N(\mu, \sigma^2) \sim G(z) =$
Hvor verdien av $G(z)$ erstattes med tilhørende verdi fra tabellen for standard normal fordeling, og dette er da sannsynligheten.

Spesielt eksempel der $G(z)$ er oppgitt. Vi skal finne ut hvilket standardavvik som må til for at vi skal ha 95% sannsynlighet for at standardavvik er på maks 1. I dette eksempelet er forventningsverdien lik 100. Så vi skal finne hvilket standardavvik som må til for å oppnå en 95 % sannsynlighet.

$P(99 < x < 101)$ - Gir sannsynligheten for at noe skjer innenfor ett gitt område.

Definisjoner
$G(z) = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$P(a < x < b) = G(\frac{b-\mu}{\sigma}) - G(\frac{a-\mu}{\sigma})$

$P(99 < x < 101) = G(\frac{101-\mu}{\sigma}) - G(\frac{99-\mu}{\sigma})$
Setter det opp som en likning.
$0.95 = G(\frac{101-100}{\sigma}) - G(\frac{99-100}{\sigma})$
$0.95 = G(\frac{101-100}{\sigma}) - G(\frac{99-100}{\sigma})$
$0.95 = G(\frac{1}{\sigma}) - G(\frac{-1}{\sigma})$

$-G(\frac{-1}{\sigma}) = 1 - G(\frac{1}{\sigma})$
$0.95 = G(\frac{1}{\sigma}) - 1 + G(\frac{1}{\sigma})$

$0.95 + 1 = 2G(\frac{1}{\sigma})$
$\frac{1.95}{2} = G(\frac{1}{\sigma})$
$0.975 = G(\frac{1}{\sigma})$ - Gjør om via tabellen her.

$1.96 = \frac{1}{\sigma}$
$\sigma = \frac{1}{1.96} = 0.51$

Eksponential fordelingen

Mere om matriser og basiser

Rangen til en matrise er det største antallet lineært uavhengige rader eller kolonner i matrisen.
http://www.matematikk.net/matteprat/viewtopic.php?t=22579
Skrive ned

GJENSTÅENDE
Mer om Lagranges restledd
Kvadratiske former
Mere sannsynlighet og statistikk
Rang, basis, rekkerom, dimensjon og nullrommet. (MATRISER).
Finne egenvektor, egenverdi, diagonaliseringsmatrisen og egenvektormatrisen.
Forholdstesten og integraltesten

REPETISJON

Lineær uavhengighet av vektorer.
Om det er lin.uavhengige betyr at den ene ikke kan uttrykke den andre. (man kan ikke uttrykke den ene vektoren ved å plusse eller gange med tall)
Jeg mener dette kan bevises med 2 angrepsmetoder: (gjerne nevn hvis det er flere innlysende metoder; og gjerne vis det ved tegning, da hadde jeg vært evig takknemlig).

Testing av egenverdi:
Sjekke at en λ verdi er en egenverdi til en matrise gjøres slik:
$|A - \lambda 1| = 0$
Hvis dette er oppfylt, så er λ en egenverdi til matrisen.

Testing av egenvektor:
For å sjekke om en vektor er en egenvektor til en matrise A, så må vi sette in og regne ut.
$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

Dersom forholdet blir det samme, altså at $L1$ får samme svar som $L2$ så vet vi at vi har funnet egenvektoren. Selv ved å bare benytte oss av λ og uten å vite egenverdien?

Diagonalisering
$A = PDP^{-1}$ og $A^3 = PD^3P^{-1}$
Hvor diagonalen i matrisen D består av egenverdiene til matrisen A og matrisen P består av de korresponderende egenvektorene i tilsvarende kolonner i forhold til D.

Det er mulig å teste om matrisen A er diagonaliserbar ved å sjekke hvilke egenverdier vi får av $|A - \lambda 1| = 0$.
Hvis den bare har 1 egenverdi, så er den ikke diagonaliserbar, fordi det kreves 2 lineært uavhengige egenvektorer.

Hvis vi får oppgitt egenvektorene til A, så kan vi teste om A er diagonaliserbar ved å teste om egenvektorene er lineært uavhengige.
Det kan vi gjøre ved å teste om skalarproduktet mellom dem er lik 0.
Rekkefølgen har ingenting å si.
$u^T * v = 0$. Hvis dette er oppfylt så betyr det at vi kan danne matrisen P, hvor hver vektor er en kolonne i matrisen. Vi kan da også direkte finne egenverdiene fra matrisen D, den diagonaliserte matrisen ved $P^{-1}A * P = D$.
Egenvektorene i matrisen P danner også basisen for egenrommet til egenverdien. Så hver av vektorene danner en egen basis.

Vi vet da også at $P^{-1} = P^T$ og $P * P^T = 1$, $P^T * P = 1$.
Hvis A er en symmetrisk matrise så er den diagonaliserbar dersom den har 2 forskjellige egenverdier. Hvis den har 2 forskjellige egenverdier, så blir de tilhørende egenvektorene ortogonale. Det vil si at $u^T * v = 0$ og $P^{-1} = P^T$.

En matrise A er ortogonal diagonaliserbar bare hvis A er en symmetrisk matrise og alle dens egenverdier er relle verdier.
$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 \\ 2 & 1 & x \end{bmatrix}$, er symmetrisk når man ser bort ifra diagonalen, og ser på om begge sider er like på tvers av denne.

En matrise A er også diagonaliserbar dersom den har n lineært uavnhengige egenvektorer v_n og med tilhørende egenverdier λ_n. Da kan vi danne matrisen P bestående av disse egenvektorene $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_n \end{bmatrix}$ og den diaogaliserte matrisen
$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$.
Vi kan teste om egenvektorene er lineært uavhengige ved å teste kombinasjonene av alle skalarproduktene mellom dem. Dette produktet skal være likt 0, fordi

de skal være linært uavhengige. Egenverdiene må også være forskjellige dersom dette skal være mulig. Da er også $P^{-1} = P^T$ og $P^{-1} * P = 1$ og $P * P^{-1} = 1$.

Ortonormalisering
$P = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
Vi finner ut om vektorene er ortogonale.
$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 * -3 + 3 * 4 = 0$
De er ortogonale og lineært uavhengige siden skalarproduktet er 0.

Vi kan så ortonormalsere dem. Dette gjøres ved å finne lengden til begge vektorene, i dette tilfellet er de like.
$|v| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$
Vi deler så matrisens vektorer på 5, fordi vi vil gjøre at lengden på hver vektore er lik 1. Da er vektorene ortonormaliserte.
En vektor er ortonormalisert når den er ortogonal og har lengden 1.

$\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ og $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$
Gir den nye matrisen $P = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
Vektorene er ortonormaliserte.

Kvadratiske former

Se sammenhengen begge veier:

Vi vet at $x^T * A * x = Q$. Hvor Q er et polynom.

Vi får oppgitt $Q = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$
Vi skal finne matrisen A ved at vi vet dette. Vi kan da sette opp likningen hvor da $x - vektoren$ må være $1x3$ vektor, fordi vi har 3 ledd i polynomet. Denne regelen gjelder alltid, altså at det er avhengig av hvor mange ukjente polynomet består av.
$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} \\ A \\ \\ \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = Q$
$x^T * A * x = Q$

Vi kan tenke på matrisen slik:

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} x1x1 & x1x2 & x1x3 \\ x1x2 & x2x2 & x2x3 \\ x1x3 & x2x3 & x3x3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Hvor de midterste tomme rutene er matrisen A. Vi kan se direkte av polynomet hvilke konstanter som skal hvor i matrisen A.
$Q = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$
Vi ser på første $2x_1^2$, det betyr at x_1 må ganges med seg selv x_1, eneste måten å få til dette er hvis ganger dem med hverandre i matrisen. Så vi setter en strek der og der skal altså konstanten inn.

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}$$

Samme gjelder for de resterende

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

hvor $x_3 * x_3$ har konstanten 1. Alle de resterende leddene er lik 0, ford vi har ingen verdier i polynomet med dem.
x_1x_2 forekommer 2 ganger i matrisen. Og det er da hensiktsmessig og dele konstanten på 2. Slik at vi får halvparten i hver posisjon i cellen.
$2x_1x_2/2 = 1$. Så 1 skal inn i begge plassene hvor dette forekommer.

Omforming av kvadratiske former

$x^TAx = Q$

Eksempel med å gang en $1x3$ med $3x3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+2+3) & (2+4+6) & (1+2+3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 6 \end{bmatrix},$$

blir en ny $1x3$ matrise. Og det gjør det mulig å gange med vektoren x i $x^TAx = Q$.

Det går ann å multiplisere alle matriser så lenge vi ganger *linje* med *kolonne* og linjen er like lang som kolonnen vi ganger med.

Spesielle delbrøksoppspaltninger

- Med flere like faktorer og er man ender opp med 0 og en mindre faktor.

Eksempel på hvor den ene faktoren bare forsvinner.
$\frac{s-2}{(s-1)(s-2)} = \frac{A}{(s-2)} + \frac{B}{(s-1)}$
$s - 2 = A(s-1) + B(s-2)$
Setter $s = 2$

$0 = A$
Setter så $S = 1$
$1 - 2 = B(1 - 2)$
$B = 1$

Ender opp med at
$\frac{s-2}{(s-1)(s-2)} = \frac{0}{(s-2)} + \frac{1}{(s-1)} = \frac{1}{(s-1)}$

Eksempel med flere faktorer:
$\frac{1}{x^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3}$

BASIS

En basis for R^n er en samling vektorer v1, v2, . . . , v_n som er lineært uavhengige og som utspenner hele R^n (dvs. at enhver vektor i Rn kan skrives som en lineærkombinasjon av v1, v2, . . . , vp).

En basis R^n har alltid nøyaktig $n-elementer$. En samling av vektorer $v_1, v_2..v_n$ er en basis HVIS og BARE HVIS den reduserte trappeformen til matrisen som dannes $A = [v_1, v_2...v_n]$ er identitetsmatrisen 1. Altså $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Matrisen A dannes ved å la vær vektor være en kolonne i matrisen A. De må være av samme dimensjon.

En basis for et rom i matematikk er en mengde objekter som kan brukes til å generere alle objekter i rommet. Måten objektene genereres på fra objekter i basisen vil avhenge av strukturen i rommet, det vil si hvilke regler som gjelder for å kombinere objekter og på den måten danne nye objekter.

Basisskifte eksempel

Homogene koordinater

Translasjoner kan ikke uten videre uttrykkes som produktet av en 2x2 matrise med koordinatvektoren (x, y). Det finnes en løsning på dette problemet: homogene koordinater. Det går ut på at man bruker ett ekstra koordinat, 1, slik at koordinatvektoren til et punkt er $(x, y, 1)$ istedenfor (x, y). Dette nye punktet blir de homogene koordinatene til punktet.

Eksempel der man innføre translasjon på en matrise
Vektoren $(1, 2)$ får de homogene koordinatene:
$(1, 2, 1)$ og settes inn i translasjonsmatrisen slik: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

KORT OPPSUMERT TRANFORMASJONER

Translasjon
Et punkt $P = (3, 3)$ kan flyttes til et nytt punkt $(8, 5)$ ved å forskyve vektoren i x og i y retning.
$x_2 = x_1 + 5$
$y_2 = y_1 + 2$
Generelt sier vi at
$v' = v + b$ hvor b flytter ett enkelt punkt.
Vi kan se på vektoren slik også:
$\vec{x}' = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} tx \\ ty \end{bmatrix}$
Hvor tx og ty er hvor langt man skal flytte vektoren i både x og y retning, fra det opprinnelige punktet.

Skalering
For å skalere en vektor
$\vec{x}' = a * M * \vec{x}$
Hvor a er bare en skalering / forstørring / forminskning. Vi kan prøve å doble avstanden i x og y retning. Det er også mulig å skalere forskjellige i både x og y retning. Vi skalerer punktet $(1, 1)$
$\vec{x}' = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ Vi har fordoblet avstanden i x og i y retning. Vi kan også forminske ved å gange med en brøk.

Rotasjonsmatrisen som skal ganges
$R = \begin{bmatrix} cos & -sin & 0 \\ sin & cos & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ med homogene koordinater.
Homogene koordinater går utpå å skrive en posisjonsvektor slik:
- Vi legger på en ekstra 1.
$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$. Når vi har gjort dette kan vi skrive alle basisoperasjonene som multiplikasjon mellom en 3x3 matrise og en 1x3 vektor.

Translasjon:
$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & tx \\ 0 & 1 & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$
$\vec{x}' = M * \vec{x}$
Og tx og ty er punktet avstanden vi skal flytte vektorene $\vec{x}$ i x og y retning.
For å flytte ett punkt

GENERELT
P2=M·P1

der P1 og P2 er uttrykt i homogene koordinater. Den tredje koordinaten, 1-tallet, trenger vi ikke bekymre oss. Vi forsøker ikke å gi noen geometrisk forklaring av denne. Hele vitsen med homogene koordinater er å standardisere matematikken i transformasjonene. Den tredje koordinaten forblir uforandret ved de grunnleggende transformasjonene og, som vi skal se senere, ved kombinasjoner av dem. Modulen Homogenisering drøfter temaet litt nærmere.

Enhetssprangfølgen
$= \{1, 1, 1, 1, 1, 1...\}$

Enhetspulsfølgen
$= \{1, 0, 0, 0, 0..\}$

Diracs deltafunksjon

Multipliseres deltafunksjonen med en vilkårlig funksjon f(x) og integeres så produktet over hele den reelle tall-linjen, gir det verdien av denne funksjonen i origo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(x) f(x) = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(x) f(x) = f(0)$$

Definisjon av oddefunksjon

- Oddefunksjon er speilet motsatt på andre siden av y-aksen.

En funksjon er en oddefunksjon hvis $f(-x) = -f(x)$ for alle x-verdier i definisjonsmengden.
Et eksempel er potensfunksjon x^3.

Innenfor fourierrekker, så vil en oddefunksjon bety at fourierkoeffisienten $b_n = 0$. Det er integralet som inneholder sinusfunksjonen.

Fourierrekken til en like funksjon / jevn funksjon vil da se slik ut
$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n cos(\frac{n\pi}{L}x)]$, $b_n = 0$

Definisjon av en jevn funksjon

- En jevnfunksjon er symmetrisk om y-aksen.

En funksjon er en jevn funksjon hvis $f(-x) = f(x)$ for alle x-verdier i definisjonsmengden.
Eksempel er polynomet $x^4 + x^2 - 1$

Innenfor fourierrekker, så vil en jevn funskjon bety at fourierkoeffisienten $a_n = 0$. Det er integralet som inneholder cosinusfunksjonen.

Fourierrekken til en like funksjon / jevn funksjon vil da se slik ut
$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}[b_n sin(\frac{n\pi}{L}x)]$, $a_n = 0$

BASISSKIFTE EKSEMPEL

Fra standard basis til ny basis. Hvor basisen er gitt av matrisen A med vektorene $\{v1, v2...vn\}$.
$\vec{x}' = A^{-1} * \vec{x}$

For å gå fra en basis tilbake til standard basis.
$\vec{x} = A * \vec{x}'$

Hvis vi har en basis A og vi vet hvordan vektoren ser ut i standard basis, så kan vi finne den nye vektoren i den nye basisen ved hjelp av linjereduksjon og løse for de ukjente komponentene.

$A * \vec{x}' = \vec{x}$
Dette er likningen som gjør at vi kan gå fra en basis A til standard basis. Vi trenger ikke å bruke den andre likningen, vi kan isteden løse for de ukjente i matrisen A.
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ for eksempel. Så kan vi løse med hensyn på x' og y' ved hjelp av linjereduksjon feks.

Eksempel. Vi har 2 vektorer som danner en basis B.
$B = \{V_1, V_2\}$
$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Disse vektorene er ikke lineært avhengige fordi det ikke finnes en konstant k som kan multipliseres med den ene vektoren for å danne den andre. De er med andre ord ikke parallele, og de kan derfor sammen danne en basis B.

Basisen B kan bli satt opp som en matrise. Denne matrisen viser seg også å være mulig å benytte for å skifte mellom basiser.
$B = \begin{bmatrix} \\ V_1 & V_2 \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.
Vi får så oppgitt vektoren $[a]_b$. Denne vektoren er representert av basisen B. Derav $[]_b$.
$[a]_b = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}$
Vi kan utvide a for å vise at den er repsentert av basisen B. Generelt sier vi at:

$a_B \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_n \end{bmatrix}$ =a vektor i B sin basis.

$B = \begin{bmatrix} | & | & | \\ V_1 & V_2 & V_n \\ | & | & | \end{bmatrix}$ = Basisen B som består av ortogonale lineært uavhengige vektorer i kolonnene.

$a = \begin{bmatrix} | & | & | \\ V_1 & V_2 & V_n \\ | & | & | \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_n \end{bmatrix} = c_1 * V_1 + c_2V_2 + c_nV_n$

$[a]_b = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}$

Vi kan da si at

$\vec{a} = c_1V_1 + c_2V_2$ hvor $c_1 = 7$ og $c_2 = -2$

$\vec{a} = 7 * V_1 - 2 * V_2$

Gå fra en basis til standard basis:

$\vec{a} = B * [a]_b$

Derfor er også

$\vec{a} = \begin{bmatrix} | & | \\ V_1 & V_2 \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix} = V_1 \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} + V_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$

Generelt er fra en basis til standard basis:

$A = B * A'$ hvor A merket er vektoren representert i den gamle basisen B.

For å finne A' A merket, så må vi gå andre veien.

$B^{-1} * A = A'$ Men legger merke til at vi må vite om basisen som A skal representeres i før vi gjør noe.

Enhetsvektorene

$\vec{x} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ | & | & | \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e_3}$

Vi kan ta ett eksempel. Dette går utpå å at vi skal reprsentere x vektor i standard basis, la oss si vi allerede har de nrepresentert i standard basis og vil representere den i standard basis på nytt bare for å gjøre det enkelt. Vi vet at i standard basis er det enhetesvektorene som danner basisen. $e_x = (1, 0, 0)$ osv.

Fra en basis tilbake til standard basis:

$\vec{x} = M * \vec{x'}$ og la oss si at $\vec{x'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\vec{x} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ | & | & | \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$

Direkte utregning:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ved å dele opp alle leddene:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ | & | & | \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e_3}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

FRA STANDARD BASIS TIL NY BASIS:
$\vec{x}' = M^{-1} * \vec{x}$

FRA EN BASIS TIL STANDARD BASIS:
$\vec{x} = M * \vec{x}'$

Her ser vi basisen B og vi ser

Viktig huskeregel
Vektorene som basisen består av MÅ være lineært uavhengige, men de må ikke være ortogonale. (Stå normalt på hverandre).

For å teste om 2 vektorer er ortonormale:
$v^T * b = 0$. Hvis dette er oppfylt er de lineært uavhengige og står normalt på hverandre.

For å teste om 2 vektorer kan danne en basis, så må vektorene være lineært uavhengige. De må ikke være vinkelrett på hverandre.
Det at 2 vektorer er lineært uavhengige, går utpå at det ikke finnes en konstant k som gjør at den ene vektoren kan representere den andre vektoren. Så vi kan derfor si at for at 2 vektorer skal danne en basisskifte matrise, eller danne en basis i det hele tatt. Så må $k\vec{x}$ være forskjellige fra $\vec{b}$. Altså $k\vec{x}! = \vec{b}$ hvor x og b er de 2 vektorene som skal lage basisen. Vi kan si det så enkelt at de ikke kan være paralelle / like.

For alle ortogonale matriser så gjelder
$M^T = M^{-1}$
Det kan sjekkes ved å ta
$v_1^T * v_2 = 0$. Hvis den består av 2 vektorer, hvis den består av 3, må alle sammen ganges sammen minst en gang, rekkefølge nhar ikke noe å si, og alle skal bli lik 0 for å være ortogonal.

På samme måte så skal
$M * M^{-1} = 1$
$M^{-1} * M = 1$

Da blir det også
$M^T * M = 1$ og $M * M^T = 1$

KVADRATISKE FORMER PUGGE
$Q =$ polynomet for sirkel: $x^2 + y^2 = a^2$
$Q =$ polynomet for ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
$Q =$ polynomet for en parabel: $y^2 = 4ax$
$Q =$ hyperbel: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
$x^T A * x = Q$

Gjenkenne kjeglesnitt, polynomer:

Sirkel
$Q = ax_1^2 + ax_2^2 + ...$
Sirkel er ett spesialtilfelle av en ellipse, hvor det er like langt ut til tuppen av hver sirkel i begge retninger. Derfor er konstantene like store (a). Det er også et positiv ledd mellom dem.
Kjenntegn:
$-$like konstanter
$-$positive

Ellipse
$Q = ax_1^2 + bx_2^2 + ...$
Kjenntegn:
- Forskjellige konstanter a og b
- Begge er positive

Parabel
$Q = ax_1^2 + bx_2...$
Kjenntegn:
- Parabel ($y = x^2$). Funksjonen blir en opp ned bue som snur oppover når den skjærer y-aksen.
- x_1^2 er kvadratisk, og det andre leddet er ikke kvadratisk. Kan være både negative og positive konstanter.

Hyperbel
- $Q = ax_1^2 - bx_2^2....$
Kjennetegn:
- Begge ledd er kvadratiske
- Kan være negative og positive konstanter. (Skiller den fra ellipse)

Kan gjøre om ved å finne egenverdiene til matrisen A.
La oss si vi har polynomet: Q: $3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 = k$ hvor k bare er en konstant.

Dette polynomet kan forenkles slik at man lettere kan se at det er ett polynom for en sirkel.
$\lambda_1(x_1')^2 + \lambda_2(x_2')^2 = k$

Flerskifte av BASIS
Fra en basis som ikke er standard til en annen som ikke er standard går man først via standard
Betyr generelt at, vi får oppgitt 2 basiser. M og E feks.
Vi skal gå fra basis M til basis E. Dette må gjøres i 3 ledd. Først må vi gå til standard basis fra M og så til E etterpå.
Vektoren A skal bytte basis.

Først går vi fra basis M til standard slik:
$M * A = A'$ - Når er A representert i standard basis.

Så kan vi gå til basis E. Når man bytter basis fra standard må man ta i bruk den inverse.
$E^{-1} * A' = A''$ - Da er A'' vektoren representert i basis E.