

Дифференциальная геометрия

Кривые и поверхности

А.Л.Шелепин

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	
ГЛАВА 1. ВЕКТОРНЫЕ И АФФИННЫЕ ПРОСТРАНСТВА	
§1. Векторное пространство (напоминание)	
§2. Евклидово пространство (напоминание)	
§3. Обобщенные векторное и смешанное произведения	
§4. Аффинное пространство	
ГЛАВА 2. КРИВЫЕ	
§1. Определение кривой	
§2. Векторные функции скалярного аргумента	
§3. Регулярность. Длина кривой	
§4. Эквивалентность кривых	
§5. Кривые единичной скорости	
§6. Касание плоских кривых. Соприкасающаяся окружность	
§7. Репер и уравнения Френе плоской кривой	
§8. Кривизна и натуральные уравнения плоской кривой	
§9. Локальное строение плоских кривых (особые точки)	
§10. Некоторые плоские кривые	
§11. Кривые Безье	
§12. Кривые общего вида	
ГЛАВА 3. ПОВЕРХНОСТИ	
§1. Вектор-функции векторного аргумента. Дифференциал отображения	
§2. Определение поверхности	
§3. Примеры поверхностей	
§4. Поверхности Безье	
§5. Первая фундаментальная форма. Внутренняя геометрия поверхностей	
§6. Замена параметров. Изометричность поверхностей	
§7. Внешняя геометрия поверхностей. Основной оператор гиперповерхности	
§8. Главные направления и кривизны. Линии кривизны	
§9. Локальное строение гиперповерхностей	
§10. Нормальная кривизна. Асимптотические линии	
§11. Движение репера вдоль поверхности. Коэффициенты связности	
§12. Ковариантное ускорение. Геодезические	
§13. Параллельность и параллельный перенос	
§14. Поля на поверхностях. Ковариантное дифференцирование	

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальная геометрия изучает геометрические объекты методами дифференциального и интегрального исчисления и имеет множество применений в физике, технике, прикладной математике.

Дифференциальная геометрия начала развиваться в тесной связи с математическим анализом, который сам в значительной степени вырос из задач геометрии. А ряд геометрических понятий предшествовал соответствующим понятиям анализа. Так, понятие касательной предшествовало понятию производной, понятие площади и объёма — понятию интеграла. Одновременно с возникновением дифференциального и интегрального исчисления в начале 18 века были исследованы свойства ряда кривых. Как самостоятельная дисциплина дифференциальная геометрия начала оформляться в работах Л.Эйлера и Г.Монжа в конце 18 века.

Теория кривых и поверхностей в основном сформировалась к концу 19 века. Теория кривых была построена на основе ортогонального репера, связанного с кривой, чье поведение описывается уравнениями Френе-Серре (1847) и их обобщением на n -мерный случай (К.Жордан, 1874). Основы теории поверхностей в ее современном виде были заложены К.Ф.Гауссом (“Общие исследования о кривых поверхностях”, 1828). Большую роль в дальнейшем развитии дифференциальной геометрии сыграло построение неевклидовой геометрии (Н.Лобачевский, Я.Бояи, К.Ф.Гаусс), которое привело к понятию риманова пространства (Б.Риман, 1854).

С этого момента дифференциальная геометрия перестает быть наукой только о кривых и поверхностях в евклидовом пространстве и начинается развитие новых ее областей и установление связей с теорией групп и топологией. А без таких ее разделов, как теории римановых и псевдоримановых пространств, расслоенных пространств и связностей в них невозможно представить себе современную теоретическую физику.

Настоящее пособие написано на основе семестрового курса, читаемого автором в РГТУ МИРЭА на протяжении более 10 лет для направления “прикладная математика и информатика” в третьем семестре. Курс включает в себя теорию кривых и поверхностей. Эта теория важна как с точки зрения различных приложений, так и является основой для понимания современных разделов дифференциальной геометрии. Настоящее пособие, предназначенное для технологического университета, имеет определенный уклон в сторону исследования конкретных геометрических объектов.

В качестве дополнительной литературы можно рекомендовать указанные ниже книги. Книга С.В.Сизого содержит современное развернутое изложение классической дифференциальной геометрии – теории кривых и поверхностей. В учебнике А.П.Нордена (где по понятной причине изложение несколько старомодно) можно найти много интересных разобранных примеров. В книге Э.Г.Позняка и Е.В.Шикина освещается более широкий круг вопросов, но менее подробно. “Современная геометрия” охватывает еще более широкий круг вопросов, в том числе достаточно продвинутых.

Для тех, кто хорошо воспринимает материал “на слух”, есть курсы проекта teach-in.ru под общим названием “Классическая дифференциальная геометрия”. Здесь собраны видео лекций и семинаров нескольких авторов, читавшихся в разные годы, отличающиеся манерой изложения и степенью подробности рассмотрения отдельных разделов.

Библиографический список

Сизый С.В. Лекции по дифференциальной геометрии. – М: Физматлит, 2007. 376 с.

Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия: первое знакомство. – М.: Едиториал УРСС, 2003. 408 с.

Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. – М: Наука, 1984. 760 с.

Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии. – М.: Физматлит, 1958. 244 с.

ГЛАВА 1. ВЕКТОРНЫЕ И АФФИННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§1. Векторное пространство (напоминание)

Начнем с напоминания об основных ранее изучавшихся в курсе линейной алгебры и аналитической геометрии понятиях и оговорим используемые в дальнейшем обозначения.

Векторное (или линейное) пространство – это непустое множество L , на котором введены 2 операции:

сложение векторов, $\vec{x} + \vec{y} \in L$;

умножение на число, $\alpha\vec{x} \in L$;

удовлетворяющие ряду условий (аксиом) – коммутативности и ассоциативности сложения, наличия нулевого и противоположного элементов, ассоциативности умножения на число, дистрибутивности.

Элементы пространства L называются “векторами”. Если $\alpha \in \mathbb{R}$, то L – вещественное пространство, если $\alpha \in \mathbb{C}$, то L – комплексное.

Для векторных пространств можно ввести ряд важных понятий:

Размерность – максимальное число линейно независимых элементов.

Базис – максимальная линейно независимая система (или полная линейно независимая система).

Линейная оболочка системы векторов: $S = \{\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^k\}$ – множество всех возможных линейных комбинаций векторов.

Разложение вектора \vec{x} по базису: $\vec{x} = \sum_{i=1}^m \vec{e}_i x^i = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n] \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{bmatrix} = \beta X.$

Замена базиса: $\beta' = \beta T$, T – матрица перехода.

Вектор можно разложить как по старому, так и по новому базису: $\vec{x} = \beta X = \beta' X' = \beta T X'$, откуда в силу единственности разложения по базису $X = T X'$, $X' = T^{-1} X$. Т.е. координаты X преобразуются с помощью матрицы, обратной матрице перехода.

Арифметическое векторное пространство $\vec{\mathbb{R}}^m$ – это пространство размерности m над полем \mathbb{R} действительных чисел, $\vec{\mathbb{R}}^m = \left\{ \begin{bmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{bmatrix} \middle| x^i \in \mathbb{R} \right\}$. Обозначение \mathbb{R}^m без стрелочки мы оставим для аффинного пространства. Стандартный (канонический) базис в $\vec{\mathbb{R}}^m$:

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \vec{e}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ориентация.

Вспомним про правые и левые тройки векторов в трехмерном пространстве и дадим следующее определение.

О. Два базиса называются *одинаково ориентированными*, если $\beta' = \beta T$ и $\det T > 0$. Стандартный базис считается положительно ориентированным.

Обозначения Эйнштейна.

Договоримся, что если в записи встречаются одинаковые индексы на разных уровнях (внизу и вверху), то по этим индексам производится суммирование, например $x_i y^i = \sum_i x_i y^i$, $g_{ij} x^i y^j = \sum_{i,j} g_{ij} x^i y^j$. Обозначения эти весьма удобны, в особенности при записи громоздких выражений.

§2. Евклидово пространство (напоминание)

Евклидово пространство — линейное пространство с заданным на нем скалярным произведением (симметричной положительно определенной билинейной формой) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$.

С помощью скалярного произведения могут быть определены длины и углы:

$$|\vec{x}| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}, \quad \cos \phi = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{|\vec{x}| |\vec{y}|}.$$

Матрица Грама системы векторов — матрица G с элементами $g_{ij} = \langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle$.

Если $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ образуют базис, то скалярное произведение $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = g_{ij} x^i y^j$, где x^i и y^j — координаты векторов в этом базисе.

Элементы матрицы Грама в этом случае удовлетворяют условиям:

- 1) $g_{ii} > 0$,
- 2) $g_{ij} = g_{ji}$,
- 3) G положительно определена (удовлетворяет критерию Сильвестра).

На m векторах в \mathbb{R}^m можно построить m -мерный параллелепипед, называемый *параллелотопом*, частными случаями которого в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 являются параллелограмм и параллелепипед.

Объем параллелотопа, построенного на векторах $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$

$$V = \sqrt{\det G}.$$

Эту формулу легко проверить в случае, если $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ образуют ортогональный базис:

$$\det G = \det \begin{bmatrix} \langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \langle \vec{a}_2, \vec{a}_2 \rangle & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \langle \vec{a}_n, \vec{a}_n \rangle \end{bmatrix} = |\vec{a}_1|^2 |\vec{a}_2|^2 \dots |\vec{a}_n|^2 = V^2.$$

§3. Обобщенные векторное и смешанное произведения

В трехмерном пространстве, кроме скалярного произведения, мы рассматривали еще векторное и смешанное произведения. Аналогичные построения могут быть проведены и в \mathbb{R}^m , но участвовать в них будут уже не 2 и 3 вектора, а $m-1$ и m соответственно.

Рассмотрим набор из m векторов $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ и составим из их координат определитель $\det[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m]$. В \mathbb{R}^3 этот определитель 3×3 задает смешанное произведение $\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3$ и равен объему параллелепипеда, построенного на векторах \vec{a}_i . Найдем квадрат этого определителя в \mathbb{R}^m :

$$\begin{aligned} (\det[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m])^2 &= \det[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m]^T \det[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m] = \det [[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m]^T [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m]] \\ &= \det \begin{bmatrix} \langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle & \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle & \dots & \langle \vec{a}_1, \vec{a}_m \rangle \\ \langle \vec{a}_2, \vec{a}_1 \rangle & \langle \vec{a}_2, \vec{a}_2 \rangle & \dots & \langle \vec{a}_2, \vec{a}_m \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{a}_m, \vec{a}_1 \rangle & \langle \vec{a}_m, \vec{a}_2 \rangle & \dots & \langle \vec{a}_m, \vec{a}_m \rangle \end{bmatrix} = V^2. \end{aligned}$$

Мы получили определитель матрицы Грама системы векторов $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$, равный квадрату объема параллелотопа, построенного на этих векторах. Соответственно, $|\det[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m]| = V$, знак определителя задается ориентацией системы векторов (рис. 1). Т.о., определитель,

составленный из координат m векторов, задает аналог **смешанного произведения** – скалярную функцию от m векторов в \mathbb{R}^m :

$$\vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \vec{a}_m = \det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m].$$

О. Обобщенным векторным произведением линейно независимых векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{m-1} \in \mathbb{R}^m$ назовем вектор $\vec{N} \in \mathbb{R}^m$, обладающий следующими свойствами:

1. \vec{N} перпендикулярен векторам $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{m-1}$,
2. $|\vec{N}| = \sqrt{\det G}$, где G – матрица Грама системы векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{m-1}$,
3. $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{m-1}, \vec{N}$ образуют базис положительной ориентации.

Обозначение: $\vec{N} = \vec{x}_1 \times \vec{x}_2 \times \dots \times \vec{x}_{m-1}$.

Согласно данному определению, длина вектора $|\vec{N}| = \sqrt{\det G}$, то есть она численно равна объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{m-1}$.

В частности, при $m = 3$ длина численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{x}_1, \vec{x}_2 , а, следовательно, в этом случае \vec{N} является обычным векторным произведением.

Т.о., вектор \vec{N} является многомерным аналогом векторного произведения в трехмерном пространстве. В случае $m = 2$ указанная конструкция дает вектор, перпендикулярный данному $a = (a^1, a^2)^T$, $\vec{N} = (-a^2, a^1)^T$.

Нахождение координат вектора \vec{N} , являющегося обобщенным векторным произведением для $m = 2, 3, 4$, производится путем подсчета определителей:

$$\begin{vmatrix} a^1 & \vec{e}_1 \\ a^2 & \vec{e}_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & \vec{e}_1 \\ a^2 & b^2 & \vec{e}_2 \\ a^3 & b^3 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 & \vec{e}_1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & \vec{e}_2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & \vec{e}_3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & \vec{e}_4 \end{vmatrix}$$

Как и в трехмерном случае, в \mathbb{R}^m мы будем использовать эту конструкцию для нахождения вектора, перпендикулярного $m - 1$ данному.

§4. Аффинное пространство

Мы уже привыкли работать с векторными пространствами. Однако кривые и поверхности мы обычно представляем себе как некоторое множество точек, которых в векторном пространстве нет. Для построения полноценной геометрии одних векторов недостаточно, и ниже мы определим понятие аффинного пространства, включающего как точки, так и вектора.

О. Аффинным пространством называется тройка $(V, \vec{V}, +)$, где V – множество точек, \vec{V} – векторное пространство, “+” – операция откладывания вектора от точки, причем:

- 1) $\forall p \in V, \forall \vec{x} \in \vec{V} \exists! q : q = p + \vec{x}$.
- 2) $\forall p, q \in V \exists! \vec{x} : q - p = \vec{x}$ (существует единственный вектор, соединяющий две данные точки).
- 3) $\forall p \in V, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \vec{V} : p + (\vec{x} + \vec{y}) = (p + \vec{x}) + \vec{y}$.

Отметим, что знак “+” здесь используется в двух разных смыслах – при сложении векторов и при откладывании вектора от точки.

Обозначение $q - p$ для вектора, соединяющего точки p и q , при желании можно заменить на более привычное \overrightarrow{pq} . Приведенные выше аксиомы интуитивно понятны и представляются вполне

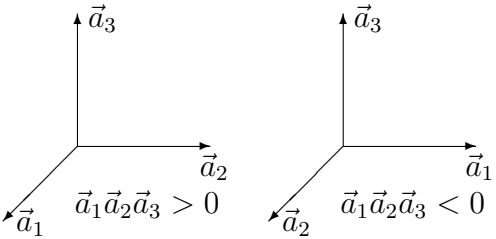


Рис. 1. Ориентация базисов в \mathbb{R}^3

естественными – фактически, мы ими пользуемся еще в школе. Аксиомы 2), 3) равносильны одной аксиоме треугольника $(p - q) + (q - r) = p - r$, см. рис. 2.

Термин “аффинное” происходит от лат. *affinis* – соприкасающийся, близкий, смежный.

О. Размерностью аффинного пространства $(V, \vec{V}, +)$ называется $\dim \vec{V}$.

О. Репером в аффинном пространстве $(V, \vec{V}, +)$ называется упорядоченный набор $(p, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m)$, где p называется началом координат, а $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m)$ – базис \vec{V} . Термин “репер” происходит от французского *repère* – “знак, исходная точка”.

В качестве точки p можно взять начало координат – точку $O(0, \dots, 0)$, а в качестве базиса – стандартный базис $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ пространства \mathbb{R}^m . Договоримся называть репер $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ стандартным.

О. Координатами точки q в репере $(p, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m)$ называются координаты вектора \vec{pq} в базисе $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m)$.

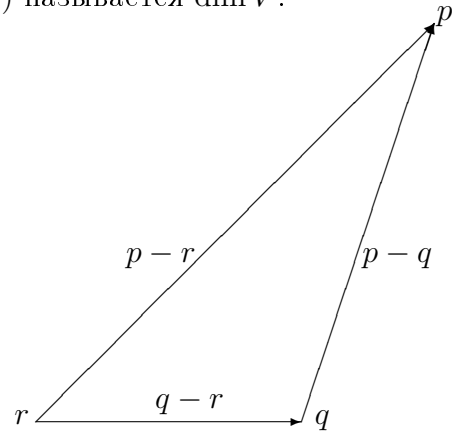


Рис. 2. Аксиома треугольника

О. Аффинное пространство $(V, \vec{V}, +)$, называется *евклидовым*, если \vec{V} – евклидово пространство.

Аффинное евклидово пространство является метрическим (т.е. в нем задано расстояние между точками). Расстояние между точками p и q определяется как длина вектора: $|\vec{pq}|$.

Рассмотрим теперь преобразования в аффинном пространстве $(V, \vec{V}, +)$.

О. Отображение $f : V \rightarrow V$ называется **аффинным преобразованием**, если $\forall p \in V$ и $\forall \vec{x} \in \vec{V}$

$$f(p + \vec{x}) = f(p) + \hat{A}\vec{x},$$

где $\hat{A} : \vec{V} \rightarrow \vec{V}$ – линейный оператор. Возьмем в качестве т. P начало координат O , тогда для любой точки $x = O + \vec{x}$ аффинное преобразование запишется как $f(x) = f(O) + \hat{A}\vec{x}$. Видно, что аффинное преобразование полностью определяется сдвигом начала координат $f(O)$ и линейным оператором \hat{A} . Если оператор \hat{A} обратим, то аффинное преобразование будет являться биекцией.

О. Изометрией называется аффинное отображение, сохраняющее расстояние между точками.

Выше расстояние между точками мы определили как длину вектора, соединяющего эти точки, $|A(p) - A(q)| = |p - q| = |\vec{pq}|$. Как мы знаем из линейной алгебры, преобразования, сохраняющие скалярное произведение и длину вектора – это ортогональные преобразования, матрица ортогонального оператора $A^T = A^{-1}$ или $A^T A = I$, откуда $\det A = \pm 1$. Входящие в аффинные преобразования сдвиги точек $A(p)$ и $A(q)$ на $f(O)$ длину вектора $|A(p) - A(q)|$ также не меняют.

Таким образом, изометрия состоит из сдвигов (они же трансляции), вращений ($\det A = 1$), отражений ($\det A = -1$) и их композиций. Сдвиги и вращения образуют **движения** аффинного пространства. Само название “движение” связано с тем, что взяв какое-то тело, мы, не деформируя его (сохраняя углы и расстояния) можем его двигать – перемещать и поворачивать. Отражения же стоят несколько особняком (сколько не маши правой рукой, левой она не станет, разве только в зеркале) и в строгом смысле к движениям не относятся. Тем не менее, иногда их включают и тогда движения делят на два класса – собственные (сдвиги и повороты) и несобственные (включающие отражения).

ГЛАВА 2. КРИВЫЕ

§1. Определение кривой

Каждый еще со школы имеет во многом интуитивное представление о том, что такое кривая. Однако, если мы хотим серьезно изучать кривые, надо иметь их строгое определение. Как же дать определение кривой?

1 попытка. Определим кривую как график функции, $\Gamma = \{(x, y) | y = f(x), x \in (a, b)\}$. Конечно, Γ – это кривая. Но не всякая линия есть график однозначной функции – даже окружность не подпадает под такое определение.

2 попытка. Вспомним аналитическую геометрию и рассмотрим множество точек, удовлетворяющих уравнению $F(x, y) = 0$. Если $F(x, y)$ – многочлен, то соответствующие линии – алгебраические кривые. Многочлены 1-й и 2-й степени – прямая и кривые второго порядка (эллипс, гипербола, парабола).

Однако, функции, имеющие счетное множество нулей, задают лишь набор отдельных точек:

$$x^2 + y^2 + 1 = 0, \text{ решение } \emptyset;$$

$$x^2 + y^2 = 0, \text{ решение – т. } (0, 0);$$

$$\sin^2 x + \sin^2 y = 0, \text{ решение – точки } (\pi k, \pi n), k, n \in \mathbb{Z}.$$

Попробуем теперь определить линию как множество точек, удовлетворяющих уравнению $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ – гладкая функция 2-х переменных с несчетным множеством нулей, т.е. как прообраз нуля при отображении F :

$$F^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | F(x, y) = 0\}.$$

Но всегда ли мы получим объект, удовлетворяющий нашему интуитивному представлению о кривой?

$$\text{Пример. } F(x, y) = \begin{cases} \exp \frac{1}{1-x^2-y^2}, & x^2 + y^2 > 1 \\ 0, & x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

Прообраз нуля – круг $x^2 + y^2 < 1$, см. рис.3. Он, конечно, мало похож на кривую. Более того, произвольное замкнутое множество точек на плоскости можно задать уравнением вида $F(x, y) = 0$. Имеет место

Т. Уитни (б/д). Пусть $M \subset \mathbb{R}^2$ – произвольное замкнутое множество точек на плоскости. Тогда \exists всюду гладкая функция $F(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что $M = F^{-1}(0)$.

Мы видим, что отнюдь не каждое уравнение вида $F(x, y) = 0$ задает линию. Для задания линии необходимы дополнительные условия.

Прообраз нуля $F^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | F(x, y) = 0\}$ является линией, если выполнены условия теоремы о неявной функции: $F(x, y)$ – гладкая, множество $M = F^{-1}(0) \neq \emptyset$ и $\text{grad } F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right) \neq \bar{0} \quad \forall m_0 \in M$. Тогда для точки $(x_0, y_0) \in M$ существует окрестность, в которой M представляет собой график гладкой функции $y = y(x)$ или $x = x(y)$.

На практике, линии достаточно часто задаются уравнением $F(x, y) = 0$, но получающееся при таком подходе определение является достаточно громоздким и не самым простым как для понимания, так и распространения на \mathbb{R}^n .

Попробуем теперь представить себе линию как траекторию движущейся точки. Такое представление хорошо соотносится с нашим интуитивным пониманием кривой, причем не только в \mathbb{R}^2 , но и в \mathbb{R}^n . Примерами таких траекторий являются:

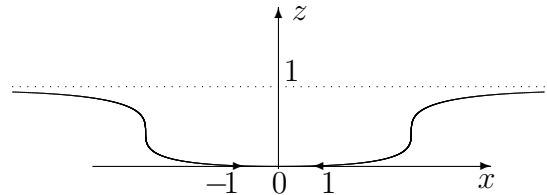


Рис. 3. График функции $z = F(x, 0)$

прямая $x = x_0 + lt, y = y_0 + mt$, или $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{q}t$, $-\infty < t < \infty$;
 эллипс $x = a \cos t, y = b \sin t$, $0 < t < 2\pi$ (окружность при $b = a$);
 гипербола $x = a \operatorname{ch} t, y = b \operatorname{sh} t$, $-\infty < t < \infty$.

Каждому значению параметра t отвечает точка на линии. Если представлять себе кривую как траекторию, то параметр t – это время.

Учитывая сказанное выше, будем рассматривать, следуя К.Жордану¹, **линию как траекторию движущейся точки**.

О. Гладкой кривой в аффинном пространстве \mathbb{R}^m называется гладкая вектор-функция $\alpha(t) : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$.

О. Множество $\alpha(I) = \{\alpha(t) | t \in I\}$ называется **образом кривой** $\alpha(t)$ в пространстве \mathbb{R}^m .

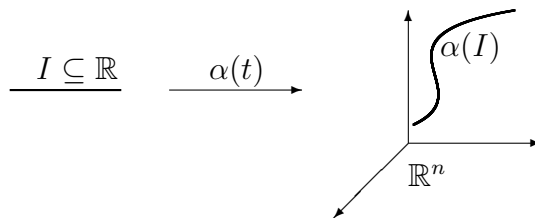


Рис. 4. Кривая как отображение $\alpha(t)$

Иными словами, кривая – это гладкое отображение интервала $I \subseteq \mathbb{R}$ в множество точек аффинного пространства.

§2. Векторные функции скалярного аргумента

Пусть $\vec{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ – непрерывная векторная функция скалярного аргумента (вектор-функция),

$$\vec{x}(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^m(t))^T,$$

где t – параметр, а $I \subseteq \mathbb{R}$ – открытый интервал, т.е. множество одного из видов (a, b) , $(-\infty, b)$, (a, ∞) , $(-\infty, \infty)$.

О. Пусть $t \in I$ и $t + \Delta t \in I$. Предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \dot{\vec{x}},$$

если он существует, называется *производной вектор-функции* \vec{x} в точке t , а вектор-функция \vec{x} дифференцируемой в т. t .

О. Вектор-функция $\vec{x}(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется *гладкой*, если все ее координатные функции $x^k(t)$ имеют на I непрерывные производные сколь угодно высокого порядка. (Класс C^∞).

Вектор-функция $\vec{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ принадлежит классу гладкости C^k , если имеет непрерывные производные до k -го порядка включительно.

Рассмотрим скалярное произведение $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$.

Утверждение 1.

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \left\langle \frac{d\vec{x}}{dt}, \vec{y} \right\rangle + \left\langle \vec{x}, \frac{d\vec{y}}{dt} \right\rangle$$

Доказательство:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = g_{ik} x^i(t) y^k(t), \quad \frac{d}{dt} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = g_{ik} \left(\frac{dx^i}{dt} y^k + x^i \frac{dy^k}{dt} \right) = \left\langle \frac{d\vec{x}}{dt}, \vec{y} \right\rangle + \left\langle \vec{x}, \frac{d\vec{y}}{dt} \right\rangle.$$

Утверждение 2.

$$\text{Если } \vec{x}(t) \neq \vec{0} \quad \forall t \in I, \text{ то } \frac{d}{dt} |\vec{x}(t)| = \frac{d}{dt} \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \frac{2 \langle \vec{x}, \dot{\vec{x}} \rangle}{2 \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}} = \frac{\langle \vec{x}, \dot{\vec{x}} \rangle}{|\vec{x}|}.$$

Утверждение 3.

$|\vec{x}(t)| = c = \text{const} \Leftrightarrow \forall t \in I : \vec{x}(t) \perp \dot{\vec{x}}(t)$ – производная вектора постоянной длины ему

¹Камиль Жордан – французский математик (1838-1922).

ортогональна.

Доказательство: $|\vec{x}(t)| = c \Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = c^2 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{x}, \dot{\vec{x}} \rangle + \langle \dot{\vec{x}}, \vec{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \dot{\vec{x}}, \vec{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x}(t) \perp \dot{\vec{x}}(t).$

§3. Регулярность. Длина кривой.

Поскольку разница между точками является вектором, то

$$\dot{\alpha}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t}$$

– вектор. Предельное положение секущей прямой, проходящей через точки $\alpha(t + \Delta t)$, $\alpha(t)$ при $\Delta t \rightarrow 0$ – касательная прямая, см. рис.5. Следовательно, $\dot{\alpha}(t)$ является направляющим вектором касательной в момент времени t и одновременно – вектором (мгновенной) скорости в точке $\alpha(t)$.

Если $\dot{\alpha}(t_0) \neq \vec{0}$, то уравнение касательной в точке t_0 имеет вид

$$p = \alpha(t_0) + u \dot{\alpha}(t_0),$$

где p – произвольная точка касательной, $u \in \mathbb{R}$ – параметр.

Посмотрим теперь, что может произойти в точке, где производная $\dot{\alpha}(t) = \vec{0}$. Это точка остановки – в ней скорость перемещения по кривой $|\dot{\alpha}(t)|$ обращается в ноль.

Пример.

Кривая $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2; \alpha(t) = (t^2, t^3)^T$.

Нетрудно заметить, что $x^3 = y^2$ или $y = \pm\sqrt{x^3}$ – это так называемая полукубическая парабола.

$\dot{\alpha}(t) = (2t, 3t^2)^T$; $\dot{\alpha}(0) = (0, 0)^T$, а значит $\alpha(0) = (0, 0)^T$ – точка остановки. В ней (см. рис.6) направление движения меняется на противоположное, это точка возврата. Мы видим, что поведение кривой в точках, где $\dot{\alpha}(0) = \vec{0}$, достаточно сложно и их лучше изучать отдельно.

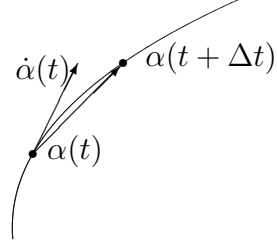


Рис. 5. Секущая и касательная

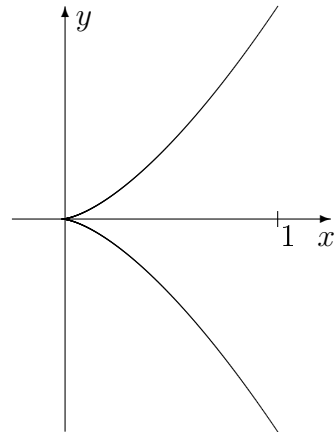


Рис. 6. Полукубическая парабола

О. Гладкая кривая $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется **регулярной** в момент $t \in I$, если $\dot{\alpha}(t) \neq \vec{0}$. Кривая $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется регулярной на интервале I , если она регулярна $\forall t \in I$.

Цитата из книги (С.В.Сизый. Лекции по дифференциальной геометрии): “Регулярные кривые – это храбрые джигиты, которые на интервале I нигде не тормозят” (точнее – нигде не останавливаются).

Определим теперь длину кривой. Разобьем временной интервал I на промежутки Δt_k , v_k – скорость на k -м участке. Пройденный путь $l = \lim_{\max|\Delta t_k| \rightarrow 0} \sum_k |v_k| \Delta t_k = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)| dt$.

О. Длиной $l[\alpha]$ кривой $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется интеграл от модуля скорости этой кривой:

$$l[\alpha] \Big|_a^b = \int_a^b |\dot{\alpha}(t)| dt. \quad (1)$$

Если кривые заданы уравнениями в декартовых или полярных координатах, то, дифференцируя по параметру и подставляя в формулу (1), получим:

$$y = y(x) : \quad \alpha(x) = (x, y(x))^T, \quad l[\alpha] \Big|_a^b = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx,$$

$$r = r(\varphi) : \quad \alpha(\varphi) = (r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi)^T, \quad l[\alpha] \Big|_a^b = \int_a^b \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi.$$

§4 Эквивалентность кривых

Очевидно, что среди различных вектор-функций (кривых) есть много с одинаковыми образами. Их точки проходят этот образ с разными скоростями. Здесь мы попробуем разбить множество всех кривых на *классы, имеющие одинаковые образы*.

О. Пусть $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $\beta(\theta) : J \rightarrow \mathbb{R}^m$ – две гладкие кривые. Кривая β получается из кривой α **заменой параметра** φ , если \exists гладкое отображение φ такое, что:

1. $\varphi : J \xrightarrow{\text{на}} I$, т.е. φ – сюръекция (образ J есть все I)
2. $\dot{\varphi}(\theta) \neq 0 \quad \forall \theta \in J$
3. $\beta(\theta) = \alpha(\varphi(\theta)) \quad \forall \theta \in J$

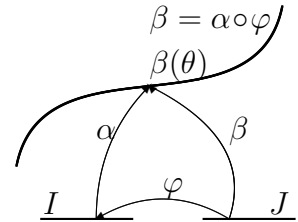


Рис. 7. Замена параметра

Т. Бинарное отношение между кривыми “быть связанной заменой параметра” является отношением эквивалентности (т.е. рефлексивно, симметрично, транзитивно).

Доказательство:

- рефлексивность
очевидна: $\varphi : I \xrightarrow{\text{на}} I$, где $\varphi(\theta) = \theta$ – тождественное отображение, $\dot{\varphi} = 1$
- симметричность
 $\dot{\varphi}(\theta) \neq 0 \Rightarrow \varphi(\theta)$ – монотонна \Rightarrow отображение φ биективно $\Rightarrow \exists \psi = \varphi^{-1}$, производная $\dot{\psi} = \frac{1}{\dot{\varphi}} \neq 0$ и конечна
- транзитивность
 $K \xrightarrow{\phi} J \xrightarrow{\varphi} I$, $\varphi(\phi(\theta))$ – биективное отображение.

О. Кривые, связанные заменой параметра, называются **эквивалентными кривыми**.

Соответственно, классы эквивалентных кривых иногда называют “непараметризованными кривыми”, а конкретные вектор-функции (которые мы называем “кривыми”), “параметризованными кривыми”. Непосредственно из определения следует, что эквивалентные кривые имеют одинаковые образы, но могут различаться скоростью и направлением движения по ним точки.

О. Две кривые $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^m$ называются **положительно эквивалентными**, если они связаны заменой параметра $\varphi : J \rightarrow I$ и $\dot{\varphi}(\theta) > 0 \quad \forall \theta \in J$ (другими словами – если замена сохраняет направление движения).

Пример. Три кривые $\alpha(t), \beta(\theta), \gamma(\tau) : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$, определенные на одном и том же интервале $(0, 1)$:

- 1) $\alpha(t) = (t, t)^T$, $\dot{\alpha}(t) = (1, 1)^T \neq \vec{0} \quad \forall t \in I$,
 2) $\beta(\theta) = (\theta^3, \theta^3)^T$, $\dot{\beta}(\theta) = (3\theta^2, 3\theta^2)^T \neq \vec{0} \quad \forall \theta \in J$,
 3) $\gamma(\tau) = (1 - \tau, 1 - \tau)^T$, $\dot{\gamma}(\tau) = (-1, -1)^T \neq \vec{0} \quad \forall \tau \in K$.

Кривые эквивалентны: $t = \varphi(\theta) = \theta^3$, $\varphi : J \rightarrow I$; $t = \psi(\tau) = 1 - \tau$, $\psi : K \rightarrow I$. Первые две кривые положительно эквивалентны: $\dot{\varphi}(\theta) = 3\theta^2 > 0$, $\dot{\psi}(\tau) = -1 < 0$.

Т. Свойство регулярности и длина кривой инвариантны относительно замены параметра.

Доказательство:

- регулярность

Пусть $\alpha(\varphi(\theta)) = \beta(\theta)$, α – регулярна (т.е. $\dot{\alpha} \neq 0$) \Rightarrow
 $\dot{\beta}(\theta) = \alpha'_{\varphi}(\varphi(\theta)) \cdot \dot{\varphi}(\theta) \neq 0 \Rightarrow \beta(\theta)$ – регулярна.

- длина

$$\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

$$\beta : [a_0, b_0] \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

$$\varphi(a_0) = a, \quad \varphi(b_0) = b,$$

$$\ell[\beta] = \int_{a_0}^{b_0} |\dot{\beta}(\theta)| d\theta = \int_{a_0}^{b_0} \left| \frac{d}{d\theta}(\alpha(\varphi(\theta))) \right| d\theta = \int_{a_0}^{b_0} |\alpha'_{\varphi}(\varphi(\theta))| \dot{\varphi}(\theta) d\theta = \int_a^b |\alpha'_{\varphi}(t)| dt = \ell[\alpha].$$

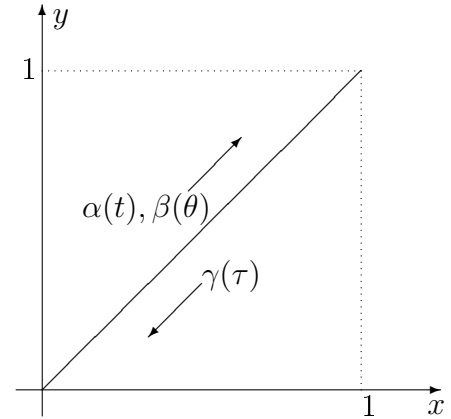


Рис. 8. Эквивалентные кривые

§5 Кривые единичной скорости

Итак, мы установили, что множество всех кривых разбивается на классы положительно эквивалентных кривых. Каждый представитель класса имеет один и тот же образ. Теперь мы выберем из каждого класса по одному представителю, а именно, кривую, у которой точка равномерно движется по образу кривой.

О. Кривая $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется **кривой единичной скорости**, если $|\dot{\alpha}| \equiv 1$ на I .

Наглядный образ отображения, отвечающего кривой единичной скорости: вкладываем гибкий (но нерастяжимый!) шнурок в \mathbb{R}^m .

Свойства кривых единичной скорости.

1. регулярность $|\dot{\alpha}| \equiv 1 \neq 0$

2. $\ddot{\alpha} \perp \dot{\alpha}$ т.к. $|\dot{\alpha}| = \text{const}$, см. рис. 9 (производная вектора постоянной длины ему \perp)

3. $\ell[\alpha] = \int_a^{a+s} |\dot{\alpha}| dt = \int_a^{a+s} 1 dt = t|_a^{a+s} = s$, где s – длина дуги.

Т. Всякая регулярная кривая положительно эквивалентна некоторой кривой единичной скорости.

Доказательство: Пусть $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ регулярна и $t_0 \in I$.

Длина дуги $s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{\alpha}(\theta)| d\theta$ – некоторая функция от t ,

$$\dot{s} = |\dot{\alpha}(t)| > 0 \Rightarrow$$

отображение $s(t)$ взаимно однозначно $\Rightarrow \exists s^{-1} = \varphi(s) : J \rightarrow I$, $\varphi(s(t)) = t$, $\frac{d\varphi}{ds} \dot{s} = 1$.

Рассмотрим замену параметра $t = \varphi(s)$ и новую кривую $\beta(s) = \alpha(\varphi(s))$, у которой параметр – длина дуги

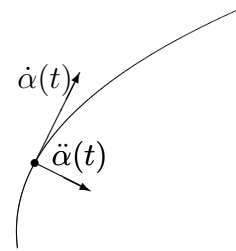


Рис. 9. $\ddot{\alpha} \perp \dot{\alpha}$ при $|\dot{\alpha}| \equiv 1$

$s. \forall s \in J \quad \dot{\varphi}(s) = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\dot{s}} = \frac{1}{|\dot{\alpha}(t)|} > 0$, т.е. $\beta(s) = \alpha(\varphi(s))$ – положительно эквивалентные кривые. Далее, $|\dot{\beta}(s)| = |\alpha'_{\varphi}(\varphi(s))\dot{\varphi}(s)| = |\dot{\alpha}(t)|\frac{1}{|\dot{\alpha}(t)|} = 1$, т.е. $\beta(s)$ – кривая единичной скорости.

Итак, чтобы из регулярной кривой $\alpha(t)$ получить кривую единичной скорости, надо заменить ее параметр на длину дуги $s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{\alpha}(\theta)| d\theta$.

О. Кривая $\beta(s)$ называется **натурально параметризованной**, если параметром является длина дуги кривой, отсчитанная от некоторой точки этой кривой.

§6 Касание плоских кривых. Соприкасающаяся окружность

Говорят, что две кривые касаются в некоторой точке, если они имеют в этой точке общую касательную прямую. Очевидно, касание это может быть различным – какие-то кривые долго идут “рядом”, а какие-то сразу “разбегаются” в разные стороны.

Выпишем сначала уравнения касательных при различном задании линии.

1. Линия – образ гладкой кривой $\alpha(t) = (x(t), y(t))^T$.
Уравнение: $p(u) = \alpha(t_0) + u\dot{\alpha}(t_0)$ или в развернутой записи $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}$,
где $\dot{\alpha}(t_0)$ – направляющий вектор касательной.
2. Линия – график гладкой функции $y = f(x)$, т.е. образ кривой $\alpha(t) = (t, f(t))^T$.
Уравнение: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$ или, после исключения параметра u ,
 $y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$.
3. Линия – прообраз нуля функции $F(x, y)$, $F(x, y)$ – гладкая и $\text{grad } F \neq \bar{0}$ в точках $F^{-1}(0)$.
Дифференцируем $F(x(t), y(t)) \equiv 0$, получаем $F'_x \cdot \dot{x} + F'_y \cdot \dot{y} = 0$ или, что тоже самое, $\langle \text{grad } F, \dot{\alpha}(t) \rangle = 0$, т.е. направляющий вектор касательной перпендикулярен градиенту.
Уравнение: $F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$.

Количественную меру того, насколько “похожи” кривые в окрестности точки касания, дает понятие касания k -го порядка.

О. Кривая $\alpha(t)$ в т. $t_0 \in I$ имеет с линией $F^{-1}(0)$ **касание порядка k** , если для функции $f(t) = F(\alpha(t))$ выполнены условия:

$$f(t_0) = 0, f'(t_0) = 0, \dots, f^{(k)}(t_0) = 0, f^{(k+1)}(t_0) \neq 0.$$

Условие $f(t_0) = 0$ – это условие того, что обе кривые проходят через одну точку (при $f(t_0) = F(\alpha(t_0)) = 0$ точка $\alpha(t_0)$ лежит на линии $F(x, y) = 0$). Условие $f'(t_0) = 0$ – это условие касания. Саму функцию $f(t)$ можно трактовать как меру отличия указанных кривых в окрестности точки касания. При касании порядка k эта мера отличия есть бесконечно малая величина k -го порядка, $f(t) = o(t - t_0)^k$.

В частности, если взять две функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$, то для них $f(t) = y_1(t) - y_2(t)$, и при касании k -го порядка в т. x_0 их разложения в ряд Тейлора в этой точке должны совпадать до k -го порядка включительно.

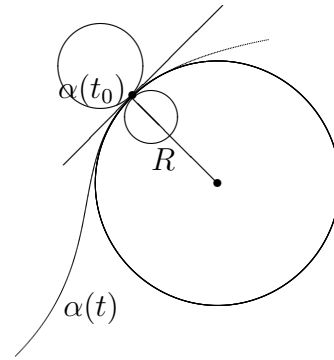


Рис. 10. Касающиеся окружности и соприкасающаяся окружность

Теперь мы можем дать определения соприкасающейся окружности и кривизны кривой.

О. Окружность, имеющая в некоторой точке $\alpha(t_0)$ кривой $\alpha(t)$ порядок касания не ниже второго, называется **соприкасающейся**. Радиус окружности R называется *радиусом кривизны* в точке $\alpha(t_0)$, а центр окружности – *центром кривизны* в точке $\alpha(t_0)$. Абсолютное значение кривизны определяется как $1/R$.

На рисунке 10 в точке $\alpha(t_0)$ построены касательная, соприкасающаяся окружность радиуса R и еще две касающиеся кривой окружности с порядком касания один.

§7 Репер и уравнения Френе плоской кривой

Рассмотрим плоскую регулярную кривую $\alpha(t)$. В каждой точке, определяемой значением параметра t , у нее есть единичный вектор касательной $\tau(t)$ и единичный вектор нормали $\nu(t)$ (обозначения – τ от латинского tangential (касательный) и ν от normal). Можно представить себе, как при изменении параметра t пара $(\bar{\tau}, \bar{\nu})$, образующая ортонормированный базис, “ползет” по кривой (отсюда часто употребляемый термин “подвижный репер вдоль кривой”).

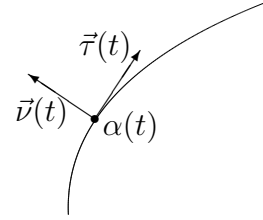


Рис. 11. Репер Френе

О. Репер $(\alpha(t); \bar{\tau}(t), \bar{\nu}(t))$ называется **репером Френе плоской регулярной кривой** $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, если $\forall t \in I$:

- 1) $\bar{\tau}(t)$ сонаправлен с вектором скорости $\dot{\alpha}(t)$,
- 2) пара $(\bar{\tau}(t), \bar{\nu}(t))$ образует ортонормированный базис положительной ориентации.

Пара $(\bar{\tau}(t), \bar{\nu}(t))$ без начальной точки – базис Френе, причем, согласно данному определению $|\bar{\tau}(t)| = |\bar{\nu}(t)| = 1$, $\langle \bar{\tau}(t), \bar{\nu}(t) \rangle = 0$.

Для кривой единичной скорости $\alpha(s)$ (s – длина дуги) имеем: $\bar{\tau}(s) = \dot{\alpha}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))^T$, $\bar{\nu}(s) = (-\dot{y}(s), \dot{x}(s))^T$, причем пара $(\bar{\tau}(t), \bar{\nu}(t))$ положительно ориентирована: $\begin{vmatrix} \dot{x} & -\dot{y} \\ \dot{y} & \dot{x} \end{vmatrix} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = |\dot{\alpha}|^2 = 1 > 0$.

Т. Френе-Серре. Пусть $\alpha(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ – кривая единичной скорости. Тогда существует гладкая скалярная функция $k(s) : I \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\forall s \in I$:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\alpha}}(s) = \bar{\tau}(s) \\ \dot{\bar{\tau}}(s) = k(s)\bar{\nu}(s) \\ \dot{\bar{\nu}}(s) = -k(s)\bar{\tau}(s) \end{cases} \quad (2)$$

Эти уравнения называются **уравнениями Френе**². Функция $k(s)$ называется кривизной кривой $\alpha(s)$.

Доказательство:

1) $|\bar{\tau}| \equiv 1 \Rightarrow \bar{\tau} \perp \dot{\bar{\tau}}$ (как производная вектора постоянной длины) $\Rightarrow \dot{\bar{\tau}} \parallel \bar{\nu} \Rightarrow$ и \exists скалярная функция $k(s)$ такая, что $\dot{\bar{\tau}} = k(s)\bar{\nu}$. Домножим последнее равенство на $\bar{\nu}(s)$:

$\langle \dot{\bar{\tau}}, \bar{\nu} \rangle = k(s)\langle \bar{\nu}, \bar{\nu} \rangle = k(s) \Rightarrow k(s)$ – гладкая функция как скалярное произведение гладких функций.

2) аналогично, $|\bar{\nu}| \equiv 1 \Rightarrow \dot{\bar{\nu}} \perp \bar{\nu}, \dot{\bar{\nu}} = m(s)\bar{\tau}(s)$

²Уравнения Френе независимо получили французские математики Жан Фредерик Френе (1816-1900) в 1847г (опубликованы в 1852г.) и Жозеф Альфред Серре (1819-1885) в 1851г. Ранее, в 1831г., эквивалентные им соотношения для скалярных произведений (вида $\langle \dot{\bar{\tau}}, \bar{\nu} \rangle = -\langle \dot{\bar{\nu}}, \bar{\tau} \rangle = k$) были для трехмерных кривых получены Иоганном Бартельсом (1769-1836) во время его работы в Казанском университете.

3) $\langle \vec{\tau}, \vec{\nu} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{\vec{\tau}}, \vec{\nu} \rangle + \langle \vec{\tau}, \dot{\vec{\nu}} \rangle = 0$, подставляя из пункта 1) и 2) получаем:
 $\langle k(s)\vec{\nu}, \vec{\nu} \rangle + \langle \vec{\tau}, m(s)\vec{\tau} \rangle = 0, k(s) + m(s) = 0 \Rightarrow m(s) = -k(s)$.

Матричная форма уравнений Френе:

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{\tau}} & \dot{\vec{\nu}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\tau} & \vec{\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{bmatrix}$$

Уравнения Френе – это разложение скоростей (производных векторов базиса Френе) по базису Френе.

Т.к $\dot{\vec{\tau}}(s) = k(s)\vec{\nu}(s)$, то $|\dot{\vec{\tau}}| = |k(s)|$, т.е. $k(s)$ – величина скорости вращения касательного вектора. Чем больше кривизна, тем быстрее поворачиваются ее касательный и нормальный векторы (они жестко связаны) при равномерном движении вдоль кривой.

Сам вектор $\dot{\vec{\tau}} = \ddot{\alpha}$ называют вектором кривизны кривой единичной скорости – его длина равна кривизне, а направление совпадает с направлением нормали $\vec{\nu}$.

Рассмотрим теперь **линии постоянной кривизны**.

Т. Пусть $\alpha(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ – кривая единичной скорости, $k(s)$ – ее кривизна, $M = \alpha(I)$ – образ кривой на плоскости. Тогда:

- 1) $k = 0 \Leftrightarrow M$ – прямая или ее часть.
- 2) $k = \text{const} \neq 0 \Leftrightarrow M$ – окружность радиуса $\frac{1}{|k|}$ или ее часть.

Доказательство:

$$1) k = 0 \Rightarrow \ddot{\alpha} = \dot{\tau} = k\nu = \vec{0}. \text{ Интегрируем: } \int_{s_0}^s \ddot{\alpha} ds = \dot{\alpha}(s) - \dot{\alpha}(s_0) = \vec{0} \Rightarrow \dot{\alpha} = \text{const}.$$

$$\text{Еще раз интегрируем: } \int_{s_0}^s \dot{\alpha} ds = \dot{\alpha}(s_0) \int_{s_0}^s ds = \dot{\alpha}(s_0)(s - s_0) = \alpha(s) - \alpha(s_0).$$

Мы получили $\alpha(s) = \alpha(s_0) + \dot{\alpha}(s_0)(s - s_0)$ – уравнение прямой.

Обратное очевидно (два раза дифференцируем уравнение прямой, $\ddot{\alpha} = 0 \Rightarrow k = 0$).

$$2) k = \text{const} \neq 0. \text{ Рассмотрим точку } p(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k}\vec{\nu}(s).$$

$$\dot{p}(s) = \frac{d}{ds}(\alpha(s) + \frac{1}{k}\vec{\nu}(s)) = \dot{\alpha}(s) + \frac{1}{k}\dot{\vec{\nu}}(s) = \vec{\tau}(s) + \frac{1}{k}(-k\vec{\tau}(s)) = 0.$$

Т.е. точка $p(s) = \text{const} = p_0$ – неподвижна $\Rightarrow \alpha(s) - p_0 = -\frac{1}{k}\vec{\nu}(s)$, откуда $|\alpha(s) - p_0| = \frac{1}{|k|}$, т.к. $|\vec{\nu}(s)| = 1$. Т.е. все точки кривой находятся на расстоянии $1/|k|$ от точки $p_0 \Rightarrow \alpha(s)$ – окружность радиуса $R = \frac{1}{|k|}$.

Докажем обратное: Имеем $\alpha(s) = p_0 - \vec{\nu}(s)R$ – уравнение окружности радиуса R .

$$\dot{\alpha}(s) = -R\dot{\vec{\nu}}(s) = \vec{\tau} \Rightarrow \dot{\vec{\nu}}(s) = -\frac{1}{R}\vec{\tau}(s) \Rightarrow \frac{1}{R} = k.$$

Зная кривизну, легко найти радиус и центр **соприкасающейся окружности** (рис. 12). *Радиус соприкасающейся окружности*

$$R = |\alpha(s_0) - p(s)| = \frac{1}{|k(s_0)|}.$$

Центр соприкасающейся окружности – точка

$$p(s_0) = \alpha(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}\vec{\nu}(s_0)$$

называется *центром кривизны* кривой $\alpha(s)$ в момент s_0 .

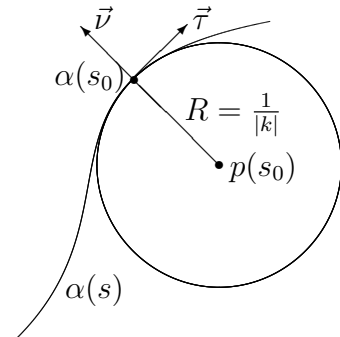


Рис. 12. Соприкасающаяся окружность

Уравнения Френе произвольной плоской кривой.

Выше мы рассматривали кривые единичной скорости, теперь перейдем к произвольным регулярным кривым.

Единичный касательный вектор кривой $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\tau(t) = \frac{\dot{\alpha}(t)}{|\dot{\alpha}(t)|}$.

Пусть $\alpha(t) = \beta(s(t))$, где $\beta(s)$ — кривая единичной скорости.

Т.к. $s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{\alpha}(t)| dt$, то $\dot{s}(t) = |\dot{\alpha}(t)|$. Касательный вектор $\vec{\tau}_\alpha(t) = \vec{\tau}_\beta(s(t))$, $\dot{\vec{\tau}}_\alpha(t) = \dot{\vec{\tau}}_\beta(s(t))\dot{s}(t) = \dot{\vec{\tau}}_\beta(s)|\dot{\alpha}(t)|$. Аналогично находим $\dot{\vec{\nu}}$.

Используя уравнения Френе для кривой единичной скорости для $\vec{\tau}_\beta(s), \vec{\nu}_\beta(s)$, получим:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = |\dot{\alpha}(t)|\vec{\tau}(t) \\ \dot{\vec{\tau}}(t) = |\dot{\alpha}(t)|k(t)\vec{\nu}(t) \\ \dot{\vec{\nu}}(t) = |\dot{\alpha}(t)|(-k(t))\vec{\tau}(t) \end{cases} \quad (3)$$

§8 Кривизна и натуральные уравнения плоской кривой

Нахождение кривизны плоской кривой.

Т. Кривизна плоской кривой $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ дается формулой

$$k = \frac{\det[\dot{\alpha} \ddot{\alpha}]}{|\dot{\alpha}|^3}. \quad (4)$$

Для ее вывода найдем определитель $\det[\dot{\alpha} \ddot{\alpha}]$. Пусть $\alpha(t) = \beta(s(t))$, где $\beta(s)$ — кривая единичной скорости. Считаем, используя соотношение $\dot{s}(t) = |\dot{\alpha}(t)|$ и уравнения Френе:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \beta'_s(s(t))\dot{s}(t) = \vec{\tau}(s(t))|\dot{\alpha}(t)|, \\ \ddot{\alpha}(t) &= \frac{d}{dt}(\vec{\tau}(s(t))|\dot{\alpha}(t)|) \\ &= \vec{\tau}'_s(s(t))\dot{s}|\dot{\alpha}(t)| + \vec{\tau}(s(t))\frac{d}{dt}|\dot{\alpha}(t)| = \vec{\nu}(s(t))k|\dot{\alpha}(t)|^2 + \vec{\tau}(s(t))\frac{d}{dt}|\dot{\alpha}(t)|. \end{aligned}$$

Мы получили разложение вектора $\ddot{\alpha}$ по базису Френе — на касательную и нормальную составляющие. Далее,

$$\det[\dot{\alpha} \ddot{\alpha}] = \det[|\dot{\alpha}|\vec{\tau}, |\dot{\alpha}|^2k\vec{\nu} + \frac{d}{dt}|\dot{\alpha}(t)|\vec{\tau}] = \det[|\dot{\alpha}|\vec{\tau}, |\dot{\alpha}|^2k\vec{\nu}] = |\dot{\alpha}|^3k \det[\vec{\tau} \vec{\nu}] = |\dot{\alpha}|^3k,$$

откуда и следует приведенная выше формула.

Пример. Найти кривизну кривой $\alpha(t) = (t, t^3)^T$. Что происходит с центром кривизны при изменении ее знака?

Эта кривая — кубическая парабола, $\det[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}] = 6t$, кривизна $k = \frac{6t}{(1+9t^4)^{3/2}}$ меняет знак в точке перегиба при переходе через $t = 0$. При стремлении к точке $(0, 0)$ радиус $R = 1/|k|$ соприкасающейся окружности увеличивается, центр кривизны уходит на бесконечность, а при переходе через $(0, 0)$ он оказывается уже с другой

стороны кривой. Если знаки кривизны в двух точках различаются, то в этих точках соприкасающиеся окружности (и соответственно центры кривизны) лежат по разные стороны кривой. Знак кривизны определяет направление, в котором изгибается кривая — при положительной кривизне кривая изгибается влево, при отрицательной — вправо по ходу.

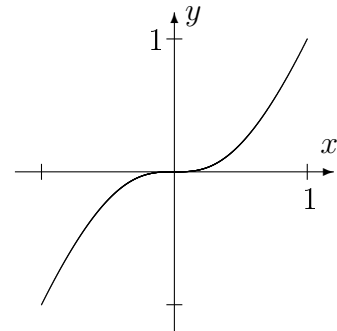


Рис. 13. Кубическая парабола

Для кривой, заданной уравнениями в декартовых или полярных координатах, из формулы (4) нетрудно получить:

$$y = y(x) : k = \frac{y''}{(1 + y')^{3/2}}; \quad r = r(\varphi) : k = \frac{-r''r + 2(r')^2 + r^2}{((r')^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Соответствующие вычисления рекомендуется проделать в качестве упражнения.

Натуральные уравнения плоской кривой.

По функции кривизны $k(s)$ и начальным условиям $\alpha(s_0) = (x_0, y_0)$ и θ_0 (углу между осью Ox и вектором $\vec{\tau} = \tau(s_0)$, см. рис. 14) кривая единичной скорости строится однозначно.

Имеем $\vec{\tau} = (\dot{x}(s), \dot{y}(s)) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$ – вектор единичной длины. Продифференцируем $\dot{\vec{\tau}} = (-\sin \theta(s), \cos \theta(s))\dot{\theta}(s) = \vec{\nu}(s)\dot{\theta}(s)$ и сравним с уравнением Френе $\dot{\vec{\tau}} = k(s)\vec{\nu}$, откуда

$$\dot{\theta}(s) = k(s)$$

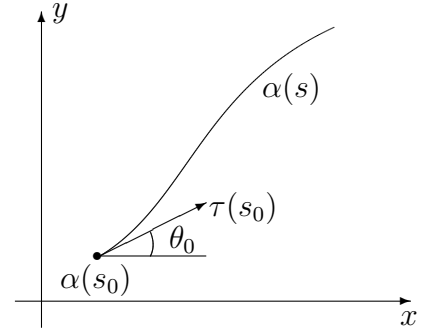


Рис. 14. Начальные условия

– скорость вращения касательного вектора равна кривизне. Интегрируем:

$$\begin{aligned} \theta(s) &= \theta(s_0) + \int_{s_0}^s k(s)ds, \\ x(s) &= x(s_0) + \int_{s_0}^s \cos \theta(s)ds, \\ y(s) &= y(s_0) + \int_{s_0}^s \sin \theta(s)ds. \end{aligned} \quad (5)$$

О. Уравнение $k = k(s)$ или равносильные ему параметрические уравнения $k = k(t)$, $s = s(t)$ называются *натуральными уравнениями кривой* $\alpha(s)$.

Натуральные уравнения определяют кривую с точностью до положения на плоскости (т.е. изометрии – поворотов и сдвигов).

Эволюта и эвольвента.

Рассмотрим точку $P = \alpha(t_0) + \frac{1}{k}\nu(t_0)$. Она является центром кривизны кривой $\alpha(t)$ в т. $\alpha(t_0)$.

О. *Эволюта* $\beta(t)$ кривой $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ – множество всех точек, которые являются центрами кривизны кривой $\alpha(t)$ (то есть множество центров всех ее соприкасающихся окружностей).

Уравнение эволюты: $\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}\nu(t)$.

Эволютой окружности является точка, эволютой эллипса – вытянутая астроида, циклоиды – циклоида.

О. Кривая $\alpha(t)$ называется *эвольвентой* для кривой $\beta(t)$, если $\beta(t)$ – эволюта кривой $\alpha(t)$.

Если эволюта однозначно определяется по исходной кривой, то эвольвенты образуют семейство кривых. В этом смысле связь эволюты и эвольвенты аналогична связи производной и первообразной.

§9 Локальное строение плоских кривых (особые точки)

Наша задача здесь – описать, как ведет себя кривая в малой окрестности некоторой своей точки, и, в особенности, в окрестности своих особых точек.

Точки кривой, заданной параметрически:

Регулярная точка: $\dot{\alpha} \neq 0$.

Бирегулярная точка: $\ddot{\alpha} \nparallel \dot{\alpha}$.

Точка распрямления: $\dot{\alpha} \neq 0$, но $\ddot{\alpha} \parallel \dot{\alpha}$.

Особая точка: $\dot{\alpha} = 0$.

Можно наглядно представить, как точка $\alpha(t)$ со скоростью $|\dot{\alpha}(t)|$ движется по кривой, то медленнее, то быстрее, останавливаясь в особых точках. В особых точках направление движения может остаться прежним, а может и измениться на противоположное (так называемая точка возврата). Там, где кривая регулярна, направляющий вектор касательной – это $\dot{\alpha}(t)$. А что будет в особой точке – какая там касательная, меняется или не меняется направление?

Запишем формулу Тейлора для вектор-функции $\alpha(t)$:

$$\alpha(t) - \alpha(t_0) = \dot{\alpha}(t_0) \frac{t - t_0}{1!} + \ddot{\alpha}(t_0) \frac{(t - t_0)^2}{2!} + \dots + \alpha^{(n)}(t_0) \frac{(t - t_0)^n}{n!} + R_n.$$

Здесь мы перенесли $\alpha(t_0)$ налево, чтобы слева стоял направляющий вектор секущей, проходящей через точки $\alpha(t)$, $\alpha(t_0)$, см. рис. 15. Предельное положение секущей прямой, проходящей через точки $\alpha(t)$, $\alpha(t_0)$ при $t \rightarrow t_0$ – касательная прямая.

О. Определим **тип точки** кривой $\alpha(t)$ как пару чисел (p, q) , где p – порядок первой отличной от нуля производной $\alpha^{(p)} \neq 0$, а q – порядок производной, следующей за p -й, не коллинеарной $\alpha^{(p)}$.

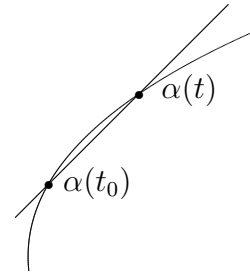


Рис. 15. Секущая

Точка	Тип
Особая: $\dot{\alpha}(t_0) = 0$	(p, q) , $p > 1$
Регулярная: $\dot{\alpha}(t_0) \neq 0$	$(1, q)$, $q > 1$
Бирегулярная: $\dot{\alpha} \nparallel \ddot{\alpha}$ (кривизна $k \neq 0$)	$(1, 2)$
Распрямления: $\dot{\alpha}(t_0) \neq 0$, $\dot{\alpha} \parallel \ddot{\alpha}$ (кривизна $k = 0$)	$(1, q)$, $q > 2$

Для точки типа (p, q) обозначим

$$\alpha^{(p)}(t_0) = \bar{a}, \quad \alpha^{(q)}(t_0) = \bar{b}$$

Разложим все векторы-производные $\alpha^{(i)}(t_0)$ в формуле Тейлора по базису \bar{a}, \bar{b} и приведем подобные, $\alpha(t) - \alpha(t_0) = ((t - t_0)^p/p! + \xi_1(t - t_0)^{p+1}/(p+1)! + \dots)\bar{a} + ((t - t_0)^q/q! + \dots)\bar{b}$. Отбрасывая в каждой скобке бесконечно малые более высокого порядка, получим

$$\alpha(t) - \alpha(t_0) \approx \bar{a} \frac{(t - t_0)^p}{p!} + \bar{b} \frac{(t - t_0)^q}{q!}.$$

Направляющий вектор секущей, проходящей через точки $\alpha(t)$, $\alpha(t_0)$, с точностью до бесконечно малых более высокого порядка равен \bar{a} , а значит \bar{a} – касательный вектор в точке $\alpha(t_0)$.

Знаки перед векторами \bar{a} и \bar{b} (определяющие, в какой четверти координатной плоскости $(\alpha(t_0), \bar{a}, \bar{b})$ находится точка $\alpha(t)$), определяются в свою очередь знаками $(t - t_0)^p$ и $(t - t_0)^q$,

При положительном $t - t_0$ оба знака положительны и точка $\alpha(t)$ находится в первой четверти. Для отрицательных $t - t_0$ составим таблицу.

p	q	знак перед \bar{a}	знак перед \bar{b}	четв.	тип точки
неч	неч	-	-	3	перегиба
неч	чет	-	+	2	изгиба
чет	неч	+	-	4	возврата 1-го рода
чет	чет	+	+	1	возврата 2-го рода ("клюв")

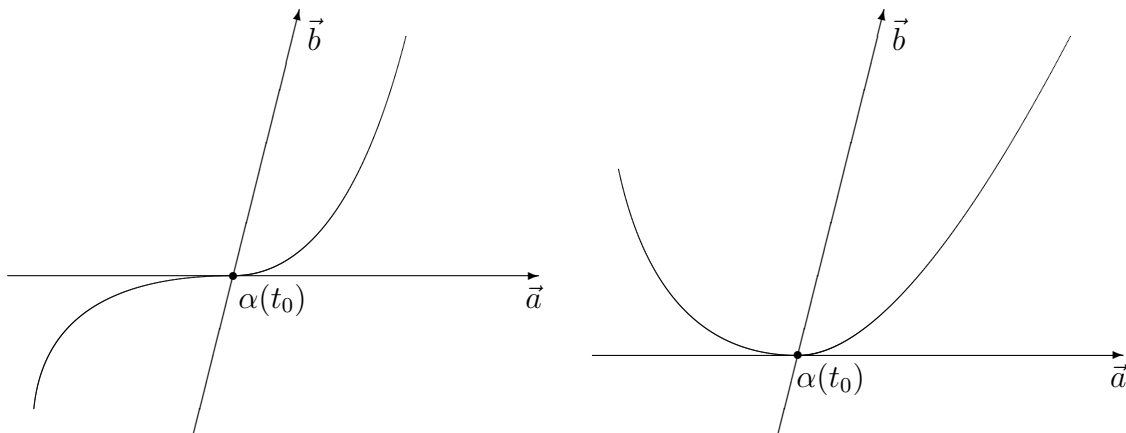


Рис. 16. Классификация особых точек: точки перегиба и изгиба

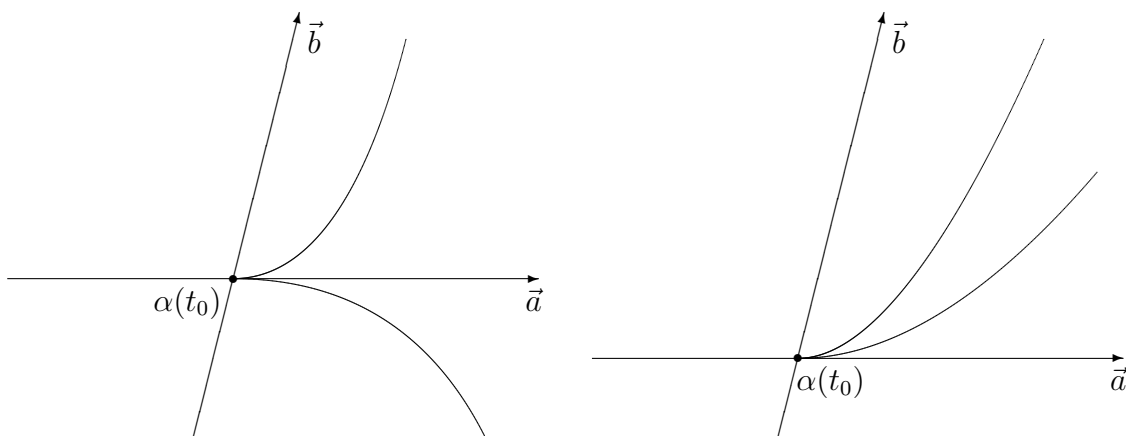


Рис. 17. Классификация особых точек: точки возврата 1-го и 2-го рода

Для точки возврата 1-го рода ветви кривой располагаются по разные стороны от касательной, для точки возврата 2-го рода – по одну.

Особые точки кривой, заданной уравнением $F(x, y) = 0$.

Регулярная точка: $F(x_0, y_0) = 0$ (точка лежит на кривой) и по крайней мере одна из производных $F'_x(x_0, y_0)$, $F'_y(x_0, y_0)$ отлична от нуля. В регулярной точке выполняются условия теоремы о неявной функции и существует единственное направление, в котором $F(x_0, y_0)$ не возрастает и не убывает.

Действительно, найдем в точке (x_0, y_0) направление, где линейная по $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$ часть приращения функции (первый дифференциал) dF обращается в 0:

$$dF = F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

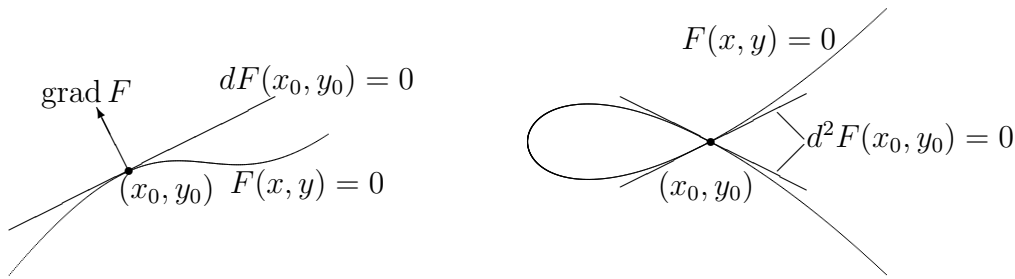


Рис. 18. Регулярная точка и точка самопересечения

Это уравнение прямой (с нормалью $\text{grad } F = (F'_x, F'_y)$ и направляющим вектором $(-F'_y, F'_x)$), являющейся касательной к нашей кривой в точке (x_0, y_0) .

Особая точка: $F(x_0, y_0) = F'_x(x_0, y_0) = F'_y(x_0, y_0) = 0$. В этом случае $dF(x_0, y_0) \equiv 0$, и надо рассматривать второй дифференциал

$$d^2F(x, y) = F''_{xx}(x - x_0)^2 + 2F''_{xy}(x - x_0)(y - y_0) + F''_{yy}(y - y_0)^2.$$

Он (если не все вторые частные производные равны нулю) представляет собой квадратичную форму с определителем $\Delta = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix}$. Будем искать в т. (x_0, y_0) направления, по которым d^2F обращается в 0.

Если $\Delta > 0$ (по критерию Сильвестра квадратичная форма положительно или отрицательно определена), то таких направлений нет – $d^2F(x_0, y_0)$ обращается в ноль только в самой точке (x_0, y_0) – изолированной особой точке.

Если $\Delta < 0$, то форма не является знакоопределенной и в некотором базисе она может быть приведена к каноническому виду $d^2F = a^2(\tilde{x} - \tilde{x}_0)^2 - b^2(\tilde{y} - \tilde{y}_0)^2 = 0$. Это уравнения пары пересекающихся прямых (касательных) в точке самопересечения кривой (узле).

Если $\Delta = 0$, и хотя бы одна из производных отлична от нуля, то канонический вид $a^2(\tilde{x} - \tilde{x}_0)^2 = 0$, имеем две совпадающие касательные $\tilde{x} = \tilde{x}_0$. В этом случае т. (x_0, y_0) – это точка возврата (1 или 2 рода), точка самоприкосновения, или точка самопересечения под нулевым углом.

§10 Некоторые плоские кривые, или кривые вокруг нас

Алгебраические кривые второго порядка (квадрики, они же конические сечения) – это хорошо знакомые нам эллипс, гипербола и парабола. Они задаются уравнением $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ – многочлен второго порядка.

Алгебраические кривые третьего порядка (кубики) задаются уравнением $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ – многочлен третьего порядка. Первую классификацию кубик дал Ньютон в 1704 году, полную классификацию дал немецкий математик и физик Юлиус Плюккер (1801-1868).

Если кривые второго порядка, образно говоря, встречаются в окружающем нас мире на каждом шагу и поэтому мы их начинаем подробно изучать еще в школе, то изучение глубоких свойств кубик долгое время считалось примером чистой математики, не находящей практического применения. Так, еще в 19 веке установили, что для некоторых кубик можно ввести сложение точек и умножение их на число, получив тем самым алгебраическую структуру, называемую эллиптической кривой (название было обусловлено связью с теорией эллиптических функций и интегралов). И эта красивая математическая конструкция долго оставалась “вещью в себе”, пока в 1985 г. на основе теории эллиптических кривых над конечными полями не была создана так называемая эллиптическая криптография,

используемая для банковского шифрования (электронные подписи, криптовалюты, в том числе биткойн и т.д.)

Циклоида $\alpha(t) = (rt - r \sin t, r - r \cos t)^T$, $0 \leq t < 2\pi$.

Определяется кинематически как траектория фиксированной точки окружности (колеса) радиуса r , катящейся без скольжения по прямой (дороге). Циклоида — периодическая функция по оси абсцисс, с периодом $2\pi r$. За границы периода удобно принять особые точки (точки возврата) вида $t = 2\pi k$, где k — целое число. Среди трансцендентных кривых, то есть кривых, уравнение которых не может быть записано в виде многочлена от x, y , циклоида — первая из исследованных. Название «циклоида» предложил Галилей. На циклоиде активно оттачивались методы только появившегося математического анализа. Эволютой циклоиды также является циклоида.

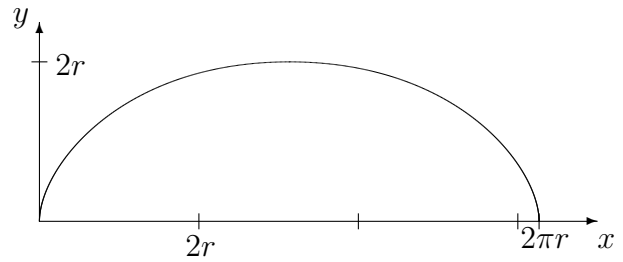


Рис. 19. Циклоида

«Перевернутая» циклоида является кривой скорейшего спуска (брахистохроной). Более того, она имеет также свойство таутохронности: тяжёлое тело, помещённое в любую точку арки циклоиды, достигает горизонтали за одно и то же время.

Задача о брахистохроне была поставлена в 1696 году Иоганном Бернулли. На его статью откликнулись Исаак Ньютон, Яков Бернулли, Г.В.Лейбниц, Г.Ф.Лопиталь, Э.В.Чирнгаус. Все они, как и сам Иоганн Бернулли, решили задачу разными способами. Метод решения, полученного в 1697 г. Исааком Ньютоном, лег в основу вариационного исчисления.

Период колебаний материальной точки, скользящей по перевернутой циклоиде, не зависит от амплитуды. Этот факт был использован Христианом Гюйгенсом (1629-1695) для создания точных механических часов. В таких часах в то время очень нуждались мореплаватели для определения долготы.

Цепная линия $y = a \operatorname{ch}(\frac{x}{a})$.

Форму цепной линии принимает гибкая однородная нерастяжимая тяжелая нить или цепь (отсюда название) с закрепленными концами в однородном гравитационном поле. Глядя на провода, подвешенные к столбам линии электропередач, мы фактически видим перед собой графики гиперболического косинуса.

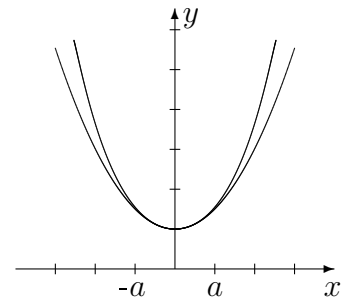


Рис. 20. Цепная линия и парабола

Пока углы подъема малы, цепная линия очень близка к параболе, что отмечал еще Галилей (1638 г). Вскоре, однако, было показано, что линия провисания цепи параболой не является. Схожесть их обусловлена тем, что в вершине цепная линия и парабола $y = a + \frac{x^2}{2a}$ имеют третий порядок касания; это легко заметить, разложив гиперболический косинус в ряд: $y = a \operatorname{ch}(\frac{x}{a}) = a + \frac{x^2}{2a} + \frac{x^4}{a^3 4!} + \dots$

Уравнение цепной линии было практически одновременно (в 1691 г.) получено Лейбницем, Гюйгенсом и Иоганном Бернулли.

Перевернутая цепная линия — идеальная форма для арок. Однородная арка в форме перевернутой цепной линии испытывает только деформации сжатия, но не излома.

Трактриса $\alpha(t) = (a \cdot \sin t, \pm a \cdot (\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t))^T$, $0 < t \leq \pi/2$.

Трактрису (линию влечения — от лат. trahere — тащить) описывает предмет (изначально лежащий на оси Ox на расстоянии a от начала координат), волокащийся на верёвке длины a за точкой, движущейся по оси Oy (трактором, выезжающим из начала координат). Для трактрисы длина отрезка касательной от точки касания до точки пересечения с фиксированной прямой (осью Oy), по которой едет трактор, является постоянной величи-

ной – длиной веревки a , см. рис. 21. График симметрично продолжается на область $y < 0$, точка $(a, 0)$ является точкой возврата. Эволюта трактрисы – цепная линия с вершиной в точке возврата трактрисы.

Открытие и первое исследование трактрисы (1670 год) принадлежит французскому инженеру, врачу и любителю математики Клоду Перро, брату знаменитого сказочника. Новая кривая заинтересовала математиков, её свойства выясняли Ньютон (1676), Гюйгенс (1692) и Лейбниц (1693).

Трактриса является частным случаем кривой пого-ни. Поверхность вращения трактрисы вокруг оси Oy называется псевдосферой, на ней может быть реализована геометрия Лобачевского.

Клотоида (она же спираль Корню или спираль Эйлера).

Клотоида – это кривая, кривизна k которой пропорциональна длине дуги s , натуральное уравнение $k = as$.

Для вывода параметрического уравнения воспользуемся уравнениями (5). Полагая, что $\theta(0) = 0$, т.е. касательная в начале координат параллельна оси Ox , получим $\theta(s) = \int_0^s k(s)ds = as^2/2$. Далее,

$$x(s) = \int_0^s \cos \frac{as^2}{2} ds, \quad y(s) = \int_0^s \sin \frac{as^2}{2} ds.$$

Эти интегралы не выражаются через элементарные функции. Если положить $a = 2$, то получим так называемые интегралы Френеля $x(s) = C(s), y(s) = S(s)$. Точки, к которым асимптотически приближается спираль при $s \rightarrow \pm\infty$, называются фокусами или полюсами клотоиды.

Клотоида используется как переходная дуга в дорожном строительстве. Когда участок дороги имеет форму клотоиды, руль поворачивается равномерно. Такая форма дороги позволяет преодолевать поворот без существенного снижения скорости. Так что, когда мы едем по автомобильным и железным дорогам, мы двигаемся, как правило, по прямой – клотоиде – окружности – клотоиде – прямой. Таким образом, центробежная сила (обратно пропорциональная радиусу кривизны) изменяется постепенно, и мы можем поворачивать руль постепенно вместо того, чтобы делать это резко. Используется клотоида и на американских горках.

По-видимому, первым изучать клотоиду начал швейцарский математик Якоб Бернулли в 1694 году, в контексте задачи теории упругости. Эта задача была решена в 1744 году математиком и физиком Леонардом Эйлером, который дал характеристику кривой. Примерно в 1818 г. французский физик Огюстен Жан Френель переоткрыл клотоиду, изучая дифракцию света, и с помощью интегралов получил параметризацию этой кривой, эквивалентную параметризации Эйлера. В 1874 году французский физик Мари Альфред Корню использовал данное выражение, чтобы точно построить кривую. А позже, в 1890 году, американский инженер Артур Талбот еще раз переоткрыл клотоиду в поисках кривой перехода для железных дорог.

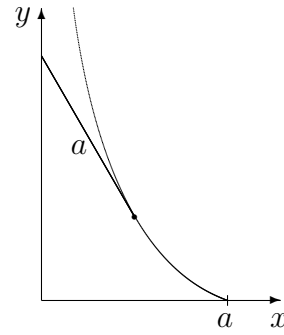


Рис. 21. Трактриса

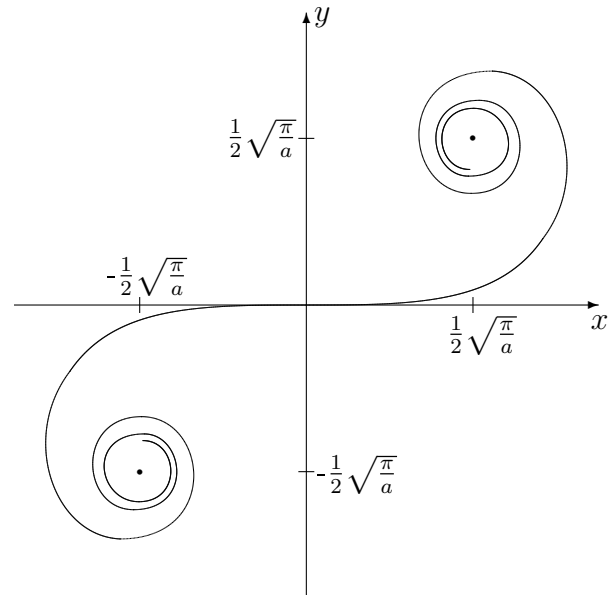


Рис. 22. Клотоида

§11 Кривые Безье

Кривая Безье n -го порядка — это параметрическая кривая, задаваемая выражением

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i b_{i,n}(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (6)$$

где \mathbf{P}_i — набор из $n + 1$ точки, а $b_{i,n}(t)$ — базисные функции кривой Безье³, называемые полиномами Бернштейна⁴,

$$b_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}, \quad (7)$$

где $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ — биномиальный коэффициент (число сочетаний из n по i), n — степень полинома, i — порядковый номер контрольной (опорной) вершины.

Иными словами, кривая Безье n -го порядка — это параметрическая кривая n -го порядка, записанная в специальном базисе. Степень кривой на единицу меньше числа контрольных точек \mathbf{P}_i .

Форма кривой, очевидно, полностью определяется контрольными точками. Точки \mathbf{P}_0 и \mathbf{P}_n задают начало и конец кривой. Действительно, при $t = 0$ и $t = 1$ сумма (6) содержит только одно (соответственно, первое или последнее) слагаемое, $\mathbf{B}(0) = \mathbf{P}_0$, $\mathbf{B}(1) = \mathbf{P}_n$.

При $n = 1$ кривая

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1, \quad t \in [0, 1],$$

представляет собой отрезок прямой линии, соединяющий точки \mathbf{P}_0 и \mathbf{P}_1 .

Квадратичная кривая Безье ($n = 2$)

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)^2\mathbf{P}_0 + 2t(1-t)\mathbf{P}_1 + t^2\mathbf{P}_2, \quad t \in [0, 1],$$

задается 3 контрольными точками и представляет собой отрезок параболы.

Производные $\mathbf{B}'(0) = 2(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)$, $\mathbf{B}'(1) = 2(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)$, соответственно направляющие вектора касательных в точках \mathbf{P}_0 и \mathbf{P}_2 — это вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$. Следовательно, точка \mathbf{P}_1 — это точка пересечения касательных к кривой в точках \mathbf{P}_0 и \mathbf{P}_2 , см. рис. 23.

Кубическая кривая Безье ($n = 3$) описывается следующим уравнением:

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 3t(1-t)^2\mathbf{P}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3, \quad t \in [0, 1].$$

На рис. 24 изображены две кубические кривые Безье, отличающиеся порядком промежуточных контрольных точек. Касательные в начальной и конечной точках кривой задаются векторами $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$. В отличие от квадратичной кривой, кубическая может иметь точку возврата 1-го рода или точку самопересечения.

Кривая Безье n -го порядка начинается в начальной точке \mathbf{P}_0 и заканчивается в конечной точке \mathbf{P}_n . Она (кроме специальных случаев) не проходит через промежуточные

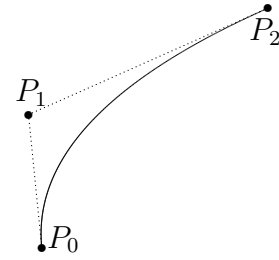


Рис. 23. Квадратичная кривая Безье

³Кривые Безье были разработаны в 60-х годах XX века независимо друг от друга Пьером Безье из компании «Рено» и Полем де Кастельжо из компании «Ситроен», где применялись для проектирования кузовов автомобилей. Несмотря на то, что открытие де Кастельжо (1959) было сделано несколько ранее Безье, его исследования не публиковались и скрывались компанией как производственная тайна до конца 1960-х. Впервые кривые были представлены широкой публике в 1962 году французским инженером Пьером Безье, который, разработав их независимо от де Кастельжо, использовал их для компьютерного проектирования автомобильных кузовов. Кривые были названы именем Безье, а именем де Кастельжо назван разработанный им рекурсивный способ построения кривых (алгоритм де Кастельжо).

⁴Описаны в 1912 г. С.Н.Бернштейном. С.Н.Бернштейн (1880-1968) — российский и советский математик.

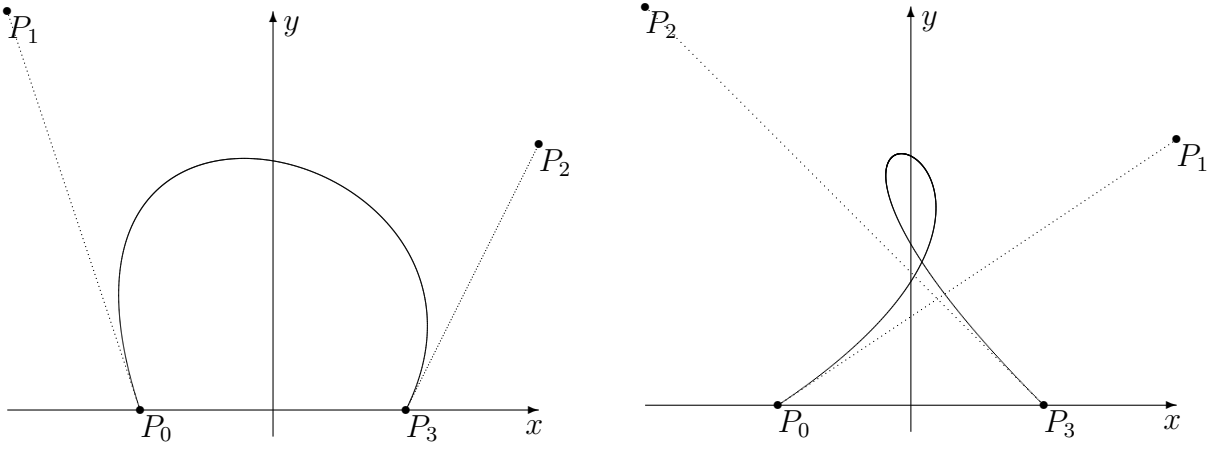


Рис. 24. Кубические кривые Безье

контрольные точки – образно говоря, промежуточные контрольные точки работают как магниты, притягивающие кривую.

Для того, чтобы записать уравнение кривой Безье в стандартном базисе $1, t, t^2, \dots, t^n$, надо получить формулу разложения базиса $[b_{0,n} \dots b_{n,n}]$ из полиномов Бернштейна (7) по стандартному базису $[1 t \dots t^n]$. Столбцами матрицы перехода M_n размера $(n+1) \times (n+1)$ (нумерация элементов базиса начинается с нуля) являются коэффициенты разложения полиномов Бернштейна по степеням t :

$$b_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i} = C_n^i C_{n-i}^k (-1)^k t^{i+k} = C_n^i C_{n-j+k}^{j-i} (-1)^{j-i} t^j, \quad j = i+k.$$

Окончательно получим

$$[b_{0,n} \dots b_{n,n}] = [1 t \dots t^n] M_n, \quad [M_n]_{ij} = C_n^i C_{n-i}^{j-i} (-1)^{j-i} t^j.$$

В частности, при $n = 3$ имеем

$$\mathbf{B}(t) = [t^3 \ t^2 \ t \ 1] M_3 [P_0 \ P_1 \ P_2 \ P_3]^T, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где столбцы матрицы M_3 – это коэффициенты разложения многочленов Бернштейна $b_{3,i}(t)$ по стандартному базису.

Некоторые свойства кривых Безье:

- кривая целиком лежит в выпуклой оболочке своих контрольных точек;
- изменение координат хотя бы одной из точек ведет к изменению формы всей кривой;
- прямая линия образуется при коллинеарном (на одной прямой) размещении контрольных точек;
- любой частичный отрезок кривой Безье также является кривой Безье.

Интуитивно понятное управление параметрами кривой в графическом интерфейсе производится передвижением её контрольных точек. На практике наибольшее значение имеют кривые Безье второй и третьей степеней. Кривые высших степеней при обработке требуют большего объёма вычислений и используются реже.

Для построения сложных по форме линий отдельные кривые Безье могут быть последовательно соединены друг с другом в *сплайн Безье*. Обозначим контрольные точки двух

соседних кривых Безье как \mathbf{P}_i и \mathbf{R}_i . Т.к. начальная и конечная точка задают начало и конец кривой, то для непрерывности составной кривой необходимо и достаточно выполнение условия совпадения конечной точки \mathbf{P}_n и начальной \mathbf{R}_0 , $\mathbf{P}_n = \mathbf{R}_0$.

Для нахождения условий гладкости сплайна в месте соединения двух кривых последовательно рассмотрим первые две производные.

Посчитаем первую производную в начальной ($t = 0$) и конечной ($t = 1$) точках кривой Безье n -го порядка:

$$\mathbf{V}'(0) = n(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0), \quad \mathbf{V}'(1) = n(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}),$$

Это показывает, что касательные к кривой Безье в начальной и конечной точках параллельны соответствующим сторонам многоугольника. Непрерывность первой производной (отсутствие изломов на сплайне) обеспечивается тем, что три смежные контрольные точки обеих кривых $\mathbf{P}_{n-1}, \mathbf{P}_n = \mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1$ должны лежать на одной прямой. Для кривой второго порядка положение средней точки получается как пересечение касательных в конечных, а значит задание начальной и конечной точек и касательных векторов в этих точках полностью определяет такую кривую. Для кривых третьего порядка мы имеем две промежуточные точки \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 , касательные определяют только прямые, на которых должны лежать эти две точки, и остаются свободными два параметра (расстояния $|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0|$ и $|\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2|$).

При отсутствии изломов наличие или отсутствие в точках сочленения скачков радиуса кривизны определяется вторыми производными

$$\mathbf{V}''(0) = n(n-1)(\mathbf{P}_0 - 2\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2), \quad \mathbf{V}''(1) = n(n-1)(\mathbf{P}_n - 2\mathbf{P}_{n-1} + \mathbf{P}_{n-2}).$$

Вторые производные на концах кривой зависят от двух ближайших сторон, т. е. от трех ближайших вершин.

Благодаря простоте задания и манипуляции, кривые Безье нашли широкое применение в системах автоматизированного проектирования и компьютерной графике для моделирования гладких линий ⁵.

§12 Кривые общего вида

Рассмотрим теперь подробнее кривые в \mathbb{R}^m .

О. Кривая $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется кривой общего вида, если $\forall t \in I$ векторы $\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t), \dots, \alpha^{(m-1)}(t)$ линейно независимы.

При $m = 2 : \dot{\alpha}(t) \neq (0, 0)^T$ — регулярные кривые.

При $m = 3 : \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$ линейно независимы — бирегулярные кривые.

Утверждение. Пусть α — кривая общего вида, кривая β получается из α заменой параметра или изометрией. Тогда β — кривая общего вида.

Доказательство:

1) Замена параметра: $\beta = \alpha(\phi(t)), \dot{\phi}(t) \neq 0$.

$$\dot{\beta} = \dot{\alpha}(\phi)\dot{\phi}$$

$$\ddot{\beta} = \ddot{\alpha}(\phi)\dot{\phi}^2 + \dot{\alpha}(\phi)\ddot{\phi}$$

\vdots

⁵В современных графических системах и форматах, таких как PostScript (а также основанные на нём форматы Adobe Illustrator и Portable Document Format (PDF)), Scalable Vector Graphics (SVG), Metafont, CorelDraw и GIMP для представления криволинейных форм используются сплайны Безье, составленные из кубических кривых. SVG также позволяет работать со сплайнами Безье 4-й степени.

$$\beta^{(k)} = \alpha^{(k)} \phi^k + \dots$$

$$[\dot{\beta} \quad \ddot{\beta} \quad \dots \quad \beta^{(m-1)}] = [\dot{\alpha} \quad \ddot{\alpha} \quad \dots \quad \alpha^{(m-1)}] \begin{bmatrix} \dot{\phi} & \ddot{\phi} & \dots \\ 0 & \dot{\phi}^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & \dots & \dot{\phi}^{m-1} \end{bmatrix}$$

Определитель матрицы перехода $\dot{\phi} \dot{\phi}^2 \dots \dot{\phi}^{m-1} = (\dot{\phi})^{(m-1)m/2} \neq 0 \Rightarrow \dot{\beta}, \ddot{\beta}, \dots, \beta^{(m-1)}$ — линейно независимы.

2) Изометрия (сдвиги, отражения, повороты):

$\hat{A}p = p_0 + Qp$, Q — ортогональная матрица, $\det Q = \pm 1$; $\beta = p_0 + Q\alpha$, откуда

$$\dot{\beta} = Q\dot{\alpha}, \ddot{\beta} = Q\ddot{\alpha}, \dots$$

\Downarrow

$\dot{\beta}, \ddot{\beta}, \dots, \beta^{(m-1)}$ — линейно независимы (т.к. Q — невырожденная матрица перехода).

О. Подвижный репер $\{\alpha(t); E_1(t), E_2(t), \dots, E_m(t)\}$, $t \in I$ вдоль кривой $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется репером Френе кривой $\alpha(t)$, если $\forall t \in I$:

1) $E_1(t), E_2(t), \dots, E_m(t)$ образуют ортонормированный базис пространства \mathbb{R}^m .

2) Системы векторов $(E_1(t), E_2(t), \dots, E_i(t))$ и $(\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t), \dots, \alpha^{(i)}(t))$ порождают одни и те же подпространства V_i , $i = 1, \dots, m-1$, положительная ориентация в которых задается базисом $(\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t), \dots, \alpha^{(i)}(t))$.

3) Ориентация базиса $E_1(t), E_2(t), \dots, E_m(t)$ положительна.

Отметим, что п. 2) можно сформулировать, используя понятие орфлага.

О. Пусть упорядоченная система векторов (a_1, a_2, \dots, a_m) линейно независима. Орфлаг (ориентированный флаг) $\vec{V}_1 \subset \vec{V}_2 \subset \dots \subset \vec{V}_i \subset \dots \subset \vec{V}_m$ порожден векторами (a_1, a_2, \dots, a_m) , если:

1) каждое подпространство V_i порождено векторами (a_1, a_2, \dots, a_i) , т.е. V_i — линейная оболочка (a_1, a_2, \dots, a_i) ;

2) ориентацию в каждом пространстве задает базис (a_1, a_2, \dots, a_i) .

При различном упорядочивании одной и той же системы векторов мы получаем различные орфлаги. П.2 определения репера теперь можно записать так:

2) Системы векторов $(E_1(t), E_2(t), \dots, E_{m-1}(t))$ и $(\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t), \dots, \alpha^{(m-1)}(t))$ порождают один и тот же орфлаг.

Т. Для всякой кривой общего вида $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ существует единственный репер Френе.
Доказательство.

Применяя процесс ортогонализации Шмидта к линейно независимым векторам $\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t), \dots, \alpha^{(m-1)}(t)$, получаем $m-1$ вектор репера Френе. Последний вектор задается как обобщенное векторное произведение $E_m = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_{m-1}$.

Отметим, в случае \mathbb{R}^3 (как и в \mathbb{R}^2) для построения репера не требуется применять процесс ортогонализации.

В пространстве \mathbb{R}^2 : $\vec{\tau} = E_1 = \frac{\dot{\alpha}}{|\dot{\alpha}|}$, $\vec{\nu} = E_2 \perp \vec{\tau}$.

В пространстве \mathbb{R}^3 : $\vec{\tau} = E_1 = \frac{\dot{\alpha}}{|\dot{\alpha}|}$ — касательный вектор, $\vec{\beta} = E_3 = \frac{\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}}{|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|}$ — бинормаль, $\vec{\nu} = E_2 = \vec{\beta} \times \vec{\tau}$ — нормаль.

Теорема. Пусть $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ — кривая общего вида, E_1, E_2, \dots, E_m — ее базис Френе. Тогда существуют гладкие скалярные функции k_1, k_2, \dots, k_{m-1} такие, что $\forall t \in I$:

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} = |\dot{\alpha}| E_1 \\ \dot{E}_1 = |\dot{\alpha}| k_1 E_2 \\ \dot{E}_2 = |\dot{\alpha}| (-k_1 E_1 + k_2 E_3) \\ \vdots \\ \dot{E}_i = |\dot{\alpha}| (-k_{i-1} E_{i-1} + k_i E_{i+1}) \\ \vdots \\ \dot{E}_m = |\dot{\alpha}| (-k_{m-1} E_{m-1}) \end{array} \right. \quad 2) \text{ Кривизны } k_1, k_2, \dots, k_{m-2} > 0$$

Матричная форма:

$$[\dot{E}_1 \ \dot{E}_2 \ \dots \ \dot{E}_m] = |\dot{\alpha}| [E_1 \ E_2 \ \dots \ E_m] \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & \dots & 0 \\ k_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -k_{m-1} \\ 0 & \dots & k_{m-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Доказательство.

1) Т.к. E_1, E_2, \dots, E_m – базис в \mathbb{R}^m , то вектора $\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dots, \dot{E}_m$ можно по нему разложить,

$$\dot{E}_j = E_k \omega_j^k.$$

Домножим это равенство скалярно на E_i :

$$\langle \dot{E}_j, E_i \rangle = \omega_j^k \langle E_k, E_i \rangle = \omega_j^k \delta_{ki} = \omega_j^i(t) \quad (9)$$

$\Rightarrow \omega_j^i(t)$ – гладкие функции.

Пусть $X = [E_1 \ \dots \ E_m]$ – матрица, состоящая из векторов-столбцов E_j базиса Френе, тогда $\dot{X} = X\omega$. Т.к. E_j образуют ортонормированный базис, то X – ортогональная матрица, $X^T X = 1_m$. Дифференцируя это равенство, получим:

$$0_m = \dot{X}^T X + X^T \dot{X} = (\omega^T X^T) X + X^T (X\omega) = \omega^T (X^T X) + (X^T X) \omega = \omega^T + \omega,$$

т.е. $\omega^T = -\omega$ – антисимметричная матрица, $\omega_j^i = -\omega_i^j$.

Далее, пусть $\vec{V}_j = \vec{V}_j(t)$ – подпространство, порожденное $\dot{\alpha}, \dots, \alpha^{(j)}$; $E_j \in \vec{V}_j$ и его разложение имеет вид $E_j = \xi_1 \dot{\alpha} + \dots + \xi_j \alpha^{(j)}$. Дифференцируем, $\dot{E}_j = \dot{\xi}_1 \dot{\alpha} + \xi_1 \ddot{\alpha} + \dots + \xi_j \alpha^{(j+1)}$, т.е. $\dot{E}_j \in \vec{V}_{j+1}$ и в его разложении E_{j+2}, \dots, E_m не участвуют, $\omega_j^i = 0$ при $i > j + 1$. В силу антисимметричности ω все ее элементы нулевые, кроме ω_j^{j+1} и ω_{j+1}^j .

Обозначим

$$k_j(t) = \frac{\langle \dot{E}_j, E_{j+1} \rangle}{|\dot{\alpha}(t)|} = \frac{\omega_j^{j+1}}{|\dot{\alpha}(t)|}. \quad (10)$$

где мы воспользовались формулой (9), откуда $\dot{X} = X\omega = |\dot{\alpha}(t)| XK$, где $K = \frac{\omega}{|\dot{\alpha}(t)|}$ – трехдиагональная антисимметричная матрица в (8), состоящая из кривизн.

2) б/д.

Т. (инвариантность кривизны относительно движения).

Пусть $Ap = p_0 + Qp$ – изометрия пространства \mathbb{R}^m , являющаяся движением (т.е. $\det Q = +1$); Q – ортогональный оператор; p_0 – точка, $\tilde{\alpha}(t) = A\alpha(t)$ – новая кривая, $\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_m$ – ее базис Френе и $\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_{m-1}$ – ее кривизны.

Тогда:

$$|\dot{\tilde{\alpha}}| = |\dot{\alpha}|, \quad \tilde{E}_i = QE_i, \quad \tilde{k}_i = k_i.$$

Доказательство.

$\dot{\alpha} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (A\alpha(t + \Delta t) - A\alpha(t)) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (p_0 + Q\alpha(t + \Delta t) - p_0 - Q\alpha(t)) = Q\dot{\alpha}(t)$. Далее, $\ddot{\alpha}(t) = Q\ddot{\alpha}(t), \dots, \tilde{\alpha}^{(m-1)}(t) = Q\alpha^{(m-1)}(t)$. Т.к. Q – ортогональный оператор, то длины не меняются. Кривизна также не меняется:

$$\tilde{k}_i(t) = \frac{\langle Q\dot{E}_i, Q\dot{E}_{i+1} \rangle}{|\dot{\alpha}(t)|} = \frac{\langle \dot{E}_i, E_{i+1} \rangle}{|\dot{\alpha}(t)|} = k_i(t).$$

Рассмотрим подробнее кривые в \mathbb{R}^3 .

В \mathbb{R}^3 имеем 2 кривизны, обозначаемые обычно как $k = k_1$ – кривизна, $\varkappa = k_2$ – кручение. $E_1 = \vec{\tau}$ – касательный вектор, $E_2 = \vec{\nu}$ – вектор нормали, $E_3 = \vec{\beta}$ – вектор бинормали,

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{\tau}} & \dot{\vec{\nu}} & \dot{\vec{\beta}} \end{bmatrix} = |\dot{\alpha}| \begin{bmatrix} \vec{\tau} & \vec{\nu} & \vec{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\varkappa \\ 0 & \varkappa & 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Пары базисных векторов определяют 3 плоскости: $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$ – соприкасающаяся, ортогональна $\vec{\beta}$, $(\vec{\nu}, \vec{\beta})$ – нормальная, ортогональна $\vec{\tau}$, $(\vec{\tau}, \vec{\beta})$ – спрямляющая, ортогональна $\vec{\nu}$.

Соприкасающаяся плоскость в т. $\alpha(t_0)$ – это плоскость векторов $\dot{\alpha}(t_0)$, $\ddot{\alpha}(t_0)$, в которой локально (с точностью до бесконечно малых 3-го порядка по Δt , отсюда и название “соприкасающаяся”) лежит кривая, $\alpha(t) = \alpha(t_0) + \dot{\alpha}(t_0)t + \frac{1}{2}\ddot{\alpha}(t_0)t^2 + o(t^2)$. Эта плоскость ортогональна $\vec{\beta}$, причем, если $\vec{\beta} = const$, то соприкасающаяся плоскость будет одна и та же во всех точках, а значит, кривая вся лежит в одной плоскости.

Выпишем последнее уравнение Френе $\dot{\vec{\beta}} = -|\dot{\alpha}|\varkappa\vec{\nu} = 0$. Из него следует, $\vec{\beta} = const \Leftrightarrow \varkappa = 0$. Это означает, что условия $\vec{\beta} = const$, кручение $\varkappa = 0$ и “кривая является плоской” равносильны. При кручении $\varkappa \neq 0$ кривая как бы “выкручивается” из плоскости.

Т. Кривизна и кручение кривой в \mathbb{R}^3 находятся по формулам:

$$k = \frac{|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|}{|\dot{\alpha}|^3}, \quad \varkappa = \frac{(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ddot{\alpha})}{|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|^2}, \quad (12)$$

где $(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ddot{\alpha}) = \det[\dot{\alpha} \ \ddot{\alpha} \ \ddot{\alpha}]$ – смешанное произведение.

Первую формулу мы докажем чуть ниже, основываясь на общем результате для \mathbb{R}^m .

Кривая постоянной ненулевой кривизны и кручения $k \neq 0, \varkappa \neq 0$

– винтовая линия,

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)^T, \quad a > 0, \quad b \neq 0, \\ k = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \varkappa = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Левый или правый “винт” определяет знак кручения \varkappa . Кривая располагается на цилиндре радиуса a .

Кривые с постоянными кривизнами в \mathbb{R}^n подробно рассматриваются в книге: Сизый С.В. Лекции по дифференциальной геометрии.

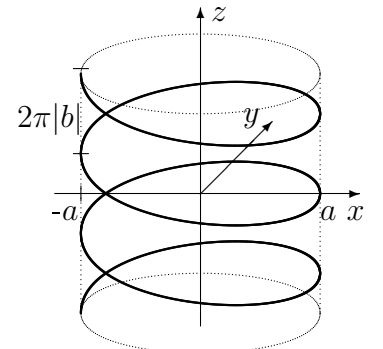


Рис. 25. Винтовая линия

Т. Основная теорема локальной теории кривых (б/д).

Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ – интервал и $0 \in I$. Пусть $k_1, \dots, k_{m-1}: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ – гладкие функции, причем $k_1(s), \dots, k_{m-2}(s) > 0 \ \forall s \in I$. Тогда \exists единственная кривая общего вида единичной скорости $\alpha(s): I \rightarrow \mathbb{R}^m$:

1) $\alpha(0) = 0$;

- 2) $E_i(0) = \vec{e}_i$ (где \vec{e}_i – i -й вектор стандартного базиса \mathbb{R}^m);
 3) k_1, \dots, k_{m-1} – кривизны $\alpha(s)$.

Т.о., кривая в \mathbb{R}^m задается своими кривизнами с точностью до расположения в пространстве (изометрии).

О. Уравнения $k_i = k_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, m-1$, называются *натуральными уравнениями кривой* $\alpha(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Т. о последней кривизне (б/д).

Пусть $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ – кривая общего вида. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) образ $\alpha(t)$ лежит в некоторой гиперплоскости (т.е. в подпространстве, размерность которого на 1 меньше размерности окружающего пространства);
 2) $\det[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m)}] = 0$;
 3) $k_{m-1} = 0$.

Выведем формулу для нахождения первой кривизны k_1 в \mathbb{R}^m . Кривизна эта согласно (10) определяется $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$ – первыми двумя производными. Пара векторов $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$ (или получающаяся из нее ортогонализацией пара E_1, E_2 векторов базиса Френе) задают соприкасающуюся плоскость. Кривизны же k_i , $i > 1$, образно говоря, ответственны за “выкручивание” кривой из этой плоскости.

Т. Кривизна k_1 кривой $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ находится по формуле:

$$k_1 = \frac{\sqrt{|\dot{\alpha}|^2 |\ddot{\alpha}|^2 - \langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha} \rangle^2}}{|\dot{\alpha}|^3}.$$

Доказательство.

Рассмотрим для наглядности сначала кривую единичной скорости. Для нее касательный вектор $\vec{\tau} = E_1 = \dot{\alpha}$, а т.к. $|\dot{\alpha}| = 1 = \text{const}$, то $\ddot{\alpha} \perp \dot{\alpha}$ и вектор главной нормали $\vec{\nu} = E_2 = \ddot{\alpha}/|\ddot{\alpha}|$,

$$k_1 = \frac{\langle \dot{E}_1, E_2 \rangle}{|\dot{\alpha}|} = \langle \ddot{\alpha}, \frac{\ddot{\alpha}}{|\ddot{\alpha}|} \rangle = |\ddot{\alpha}|.$$

Сам вектор $\ddot{\alpha}$ называется вектором кривизны кривой единичной скорости – его направление совпадает с вектором главной нормали, а длина равна кривизне. Отметим, что в \mathbb{R}^2 $\nu = E_2$ – это последний вектор базиса Френе, поэтому $\vec{\nu} = \pm \ddot{\alpha}/|\ddot{\alpha}|$ и $k_1 = \pm |\ddot{\alpha}|$.

Пусть теперь $\alpha(t)$ – кривая общего вида, $\alpha(t) = \beta(s(t))$, где $\beta(s)$ – эквивалентная $\alpha(t)$ кривая единичной скорости,

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= \tau(s(t))|\dot{\alpha}(t)|, & \ddot{\alpha}(t) &= \tau(s(t))\frac{d}{dt}|\dot{\alpha}(t)| + \vec{\tau}'_s(s(t))|\dot{\alpha}(t)|^2, \\ \vec{\tau}'_s(s) &= \beta''_{ss}(s). \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что мгновенная скорость $\dot{s}(t) = |\dot{\alpha}(t)|$. Вторую формулу, дающую разложение $\ddot{\alpha}(t)$ на касательную и нормальную компоненту ($\vec{\tau}'_s(s) \perp \tau(s)$ как производная вектора постоянной длины), мы уже использовали выше при нахождении кривизны кривых в \mathbb{R}^2 . Входящий в правую часть вектор $\vec{\tau}'_s(s) = \beta''_{ss}(s)$ – это вектор кривизны эквивалентной кривой единичной скорости $\beta(s)$. Соответственно, вектор кривизны кривой $\alpha(t)$

$$w = \beta''_{ss}(s(t)) = \frac{\ddot{\alpha}(t) - \tau(s(t))\frac{d}{dt}|\dot{\alpha}(t)|}{|\dot{\alpha}(t)|^2} = \frac{\ddot{\alpha}(t) - \langle \ddot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle |\dot{\alpha}(t)|^{-2} \dot{\alpha}(t)}{|\dot{\alpha}(t)|^2},$$

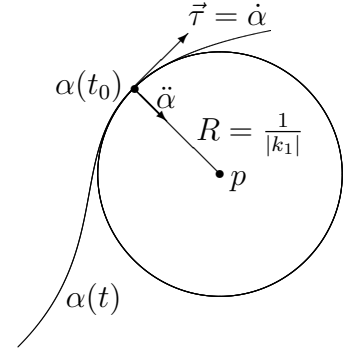


Рис. 26. Вектор кривизны $\ddot{\alpha}$ кривой единичной скорости

где мы учли, что $\frac{d}{dt}|\dot{\alpha}(t)| = \frac{d}{dt}(\langle \dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle^{1/2}) = \langle \ddot{\alpha}(t), \frac{\dot{\alpha}(t)}{|\dot{\alpha}(t)|} \rangle$, а кривизна

$$k_1 = |w| = \frac{\sqrt{|\dot{\alpha}|^2 |\ddot{\alpha}|^2 - \langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha} \rangle^2}}{|\dot{\alpha}|^3}.$$

В \mathbb{R}^3 числитель дроби равен $|\dot{\alpha}||\ddot{\alpha}|\sqrt{(1 - \cos^2 \varphi)} = |\dot{\alpha}||\ddot{\alpha}|\sin \varphi = |\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|$, где φ – угол между векторами $\dot{\alpha}$ и $\ddot{\alpha}$, и мы получаем формулу (12).

Кривизны k_i , как это следует из (10), зависят от $i + 1$ производной $\dot{\alpha}, \dots, \alpha^{(i+1)}$.

Рассмотрим теперь регулярные кривые, не являющиеся кривыми общего вида. В \mathbb{R}^3 это кривые, у которых есть точка, где $\ddot{\alpha} \parallel \dot{\alpha}$ (т.е. кривая не является бирегулярной) и, соответственно, кривизна $k = 0$ (точка распрямления).

Если же $\ddot{\alpha} \parallel \dot{\alpha}$ в каждой точке интервала, то $\alpha(t)$ представляет собой прямую или ее часть. При этом пропадает однозначная связь между кривой и репером – все направления в нормальной плоскости равнозначны, и для вектора ν можно выбрать любое из них. Формально можно рассмотреть случай кривизны $k = 0$ и кручения $\varkappa \neq 0$. Однако, подставив $k = 0$ в уравнения Френе (11) получим $\dot{\vec{\tau}} = 0$, откуда касательный вектор $\vec{\tau} = \text{const}$ и мы получаем прямую вне зависимости от значения \varkappa .

ГЛАВА 3. ПОВЕРХНОСТИ

§1. Вектор-функции векторного аргумента. Дифференциал отображения

Кривые мы определили как гладкие векторные функции одного аргумента t , $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t))^T$, $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^m$. Поверхности можно попробовать определить как гладкие вектор-функции нескольких аргументов:

кривая $I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, параметр t .

поверхность $U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, параметры u^1, \dots, u^n .

Перейдем к рассмотрению вектор-функции нескольких аргументов – отображения $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$$f(u) = (f^1(u), \dots, f^m(u))^T = (f^1(u^1, \dots, u^n), \dots, f^m(u^1, \dots, u^n))^T,$$

f^i – координатные функции этого отображения.

О. Предел $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u_0^1, \dots, u_0^i + h, \dots, u_0^n) - f(u_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial u^i}(u_0)$, если он существует, называется *частной производной* отображения $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ в точке $u_0 \in U$.

Обозначается: $\frac{\partial f}{\partial u^i}(u_0) = f'_{u^i}(u_0) = f'_{u^i}|_{u_0}$.

О. Отображение $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется *гладким*, если у каждой координатной функции f^i существуют и непрерывны все возможные производные (сколь угодно высокого порядка k) $\frac{(\partial f^i)^k}{(\partial u^1)^{k_1} \dots (\partial u^n)^{k_n}}, k_1 + \dots + k_n = k$.

Класс гладкости C^k – если \exists непрерывные производные до k -го порядка включительно.

Геометрический смысл частных производных.

Числитель дроби – разность точек пространства \mathbb{R}^m , т.е. вектор, а значит производная f'_{u^i} – вектор из \mathbb{R}^m .

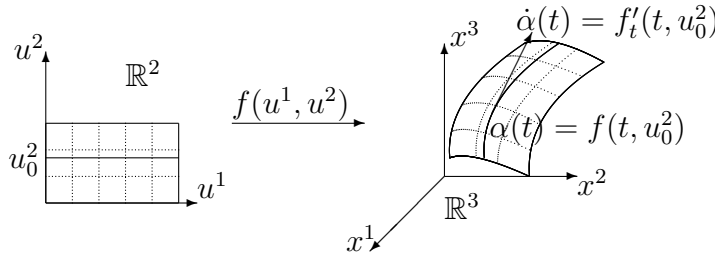


Рис. 27. Кривая $f(t, u_0^2) = \alpha(t)$ и касательный вектор $f'_t(t, u_0^2) = \dot{\alpha}(t)$

Рассмотрим функцию $\alpha(t) = f(u_0^1, \dots, t, \dots, u_0^n)$, $t = u^i$, при фиксированных u_0^k . Это функция одной переменной t , она задает кривую $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, образ этой кривой лежит в образе $f(U)$ отображения f . Очевидно, частная производная $f'_{u^i}(u_0) = \dot{\alpha}(u_0^i)$ есть *касательный* вектор кривой $\alpha(t)$.

Поэтому вектора частных производных (и их линейные комбинации) мы будем называть касательными векторами к отображению $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Примеры:

1. Прямая. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$f(u) = q_0 + u\vec{a}$, q_0 – начальная точка, $f'_u = \vec{a}$ – направляющий (он же касательный) вектор.

2. Плоскость. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$,
 $f(u, v) = q_0 + u\vec{a} + v\vec{b}$, $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, $f'_u = \vec{a}$, $f'_v = \vec{b}$ – касательные векторы.

О. Отображение $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется *дифференцируемым* в точке $u_0 \in U$, если в некоторой окрестности $O(u_0)$ точки u_0 приращение $f(u_0 + \vec{h}) - f(u_0) = df_{u_0}(\vec{h}) + o(u_0, \vec{h})$, где:

- 1) $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ такой, что $u_0 + \vec{h} \in O(u_0)$.
- 2) df_{u_0} – линейный оператор, действующий из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^m (главная или линейная часть отображения f).
- 3) $|o(u_0, \vec{h})| \rightarrow 0$ при $|\vec{h}| \rightarrow 0$.

Линейный оператор df_{u_0} называется *дифференциалом отображения* $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Обозначается $D_{u_0} = Df(u_0) = df_{u_0}$.

Как обычно, рассмотрение локальных свойств отображения основано на замене приращения f в точке u_0 на дифференциал df_{u_0} (т.е. на его главную, или линейную часть).

Найдем матрицу оператора df_{u_0} . Пусть $\vec{h} = (h^1, \dots, h^n)^T$,

$$f(u_0 + \vec{h}) - f(u_0) = \begin{bmatrix} f^1(u_0 + h) - f^1(u_0) \\ \dots \\ f^m(u_0 + h) - f^m(u_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^1}{\partial u^i} h^i + o^1(h) \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^m}{\partial u^i} h^i + o^m(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial u^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial u^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^1 \\ \dots \\ h^n \end{bmatrix} + o(\vec{h})$$

Матрица

$$[df(u_0)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial u^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial u^n} \end{bmatrix}$$

называется **матрицей Якоби или производной отображения** $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Ее столбцы – векторы частных производных (касательные векторы) отображения f .

Обозначения: $[df(u_0)] = f'(u_0)$.

Дифференциал вектора \vec{x} : $df_p(\vec{x}) = [df(u_0)][x^1 \dots x^n]^T = x^i f'_{u_i}(p)$, т.е. вектор $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$ переводится в линейную комбинацию частных производных, коэффициентами которой являются координаты исходного вектора.

§2. Определение поверхности

О. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытая связная область. Гладкое отображение $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется ***n-мерной поверхностью***, вложенной в \mathbb{R}^m , если $\forall p \in U$ ранг матрицы Якоби отображения f :

$$\text{rang}[f'(p)] = n.$$

Образ поверхности – множество всех точек $f(U)$.

Поскольку $\text{rang}[f'(p)] = \text{rang}(f'_{u^1}, \dots, f'_{u^n}) = n$, то в каждой точке $p \in U$ производные отображения линейно независимы.

Необходимость условия максимальности ранга видна на следующем примере.

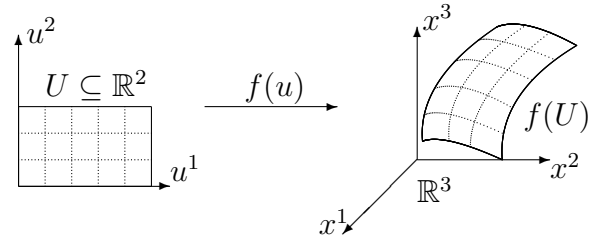


Рис. 28. Поверхность как отображение f

Пример: отображение $f(u^1, u^2) = (u^1 - u^2, u^1 - u^2, u^1 - u^2)^T$.

$[f'(p)] = [f'_{u^1}, f'_{u^2}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\text{rang}[f'(p)] = 1$. Это отображение не 2-мерная поверхность, а прямая – биссектриса 1 и 7 координатных октантов.

О. Образ дифференциала поверхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $[df_p(\vec{x})] = [f'_p][x^i]$, $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$, называется **касательным пространством** к поверхности f в точке $p \in U$ и обозначается $T_p f$.

Другими словами, $T_p f$ – это множество всех касательных векторов к поверхности f в точке $p \in U$, буква T здесь означает tangential – касательный.

Заметим, что $[df_p(\vec{e}_i)] = [f'_{u^i}(p)]$ (i -й столбец матрицы $[f'(p)]$), т.е. вектора стандартного базиса $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ пространства \mathbb{R}^n переходят в линейно независимые векторы **стандартного базиса касательного пространства** $T_p f$:

$$f'_{u^1}(p), \dots, f'_{u^n}(p).$$

В \mathbb{R}^2 вместо обозначений u^1, u^2 для краткости часто используются u, v . На рис. 29 изображены векторы f'_u, f'_v стандартного базиса касательного пространства в точке p ($T_p f$) поверхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Рассмотрим в области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ прямые \parallel осям координат $u_i(t) = p + t\vec{e}_i$. При всех возможных p они образуют **координатную сеть** в области U . Образы этих прямых на поверхности называются координатной сетью поверхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ или поверхностной системой координат.

(u^1, \dots, u^n) – *поверхностные* или *криволинейные* координаты.

$(x^1, \dots, x^m) = (f^1(u^1, \dots, u^n), \dots, f^m(u^1, \dots, u^n))$ – *пространственные* или *абсолютные* координаты.

О. Координатная сеть на поверхности называется ортогональной, если для любой точки $p \in U$ все координатные линии попарно ортогональны. А так как f'_{u^i} – это вектора, касательные к координатным линиям, то сеть является ортогональной, если во всех точках вектора стандартного базиса f'_{u^i} попарно ортогональны.

Криволинейные системы координат в \mathbb{R}^n .

Рассмотрим случай $U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ при $n = m$. Это отображение задает не какую-либо поверхность, а криволинейные координаты в n -мерном пространстве.

Пример. Отображение $f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)^T$ связывает полярные (криволинейные) координаты r, φ и декартовы координаты x^1, x^2 в \mathbb{R}^2 .

Расслоенные пространства.

Что получится, если объединить поверхность или кривую со множеством всех ее касательных пространств? На рис. 30а изображен простейший случай – кривая $\alpha(t)$ и касательные к ней в различных точках. На рис 30b мы нарисовали касательные пространства параллельными друг другу, чтобы исключить их случайные пересечения. Каждой точке на рисунке 30b отвечает ровно один касательный вектор в одной точке α . Мы получаем двумерное пространство, называемое расслоенным пространством или просто расслоением. Его слоями являются

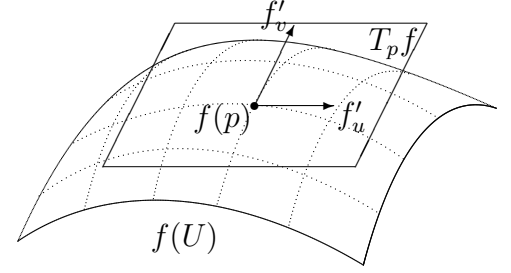


Рис. 29. Стандартный базис $T_p f$

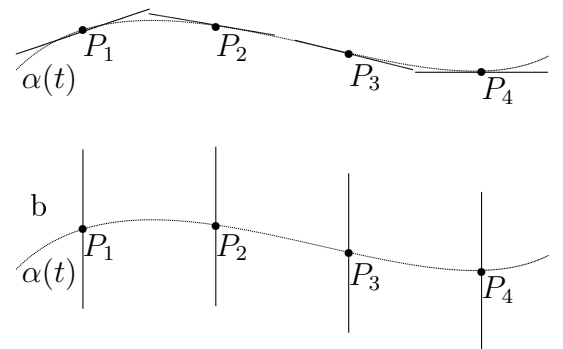


Рис. 30. Касательное расслоение

касательные пространства $T_p\alpha$, поэтому рассматриваемое нами расслоение называется касательным.

В общем случае расслоенное пространство состоит из n -мерной базы (в нашем случае – кривая α) и m -мерных типовых слоев (в нашем случае – одномерного линейного касательного пространства), заданных для каждой точки базы. В расслоенном пространстве задана проекция π , которая отображает каждую точку слоя в точку базы, с которой связан этот слой. Образно говоря, в расслоенном пространстве к каждой точке базы “прикреплен” свой небольшой внутренний мир – типовой слой. Теория расслоенных пространств – один из важнейших разделов современной дифференциальной геометрии.

§3 Примеры поверхностей

1) *Двумерная сфера* в \mathbb{R}^3

$$f(u, v) = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)^T,$$

поверхностные (криволинейные) координаты: u – широта, v – долгота, $u \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, $v \in (-\pi; \pi)$. Южный полюс – точка N , $u = -\frac{\pi}{2}$, северный полюс – точка S , $u = \frac{\pi}{2}$.

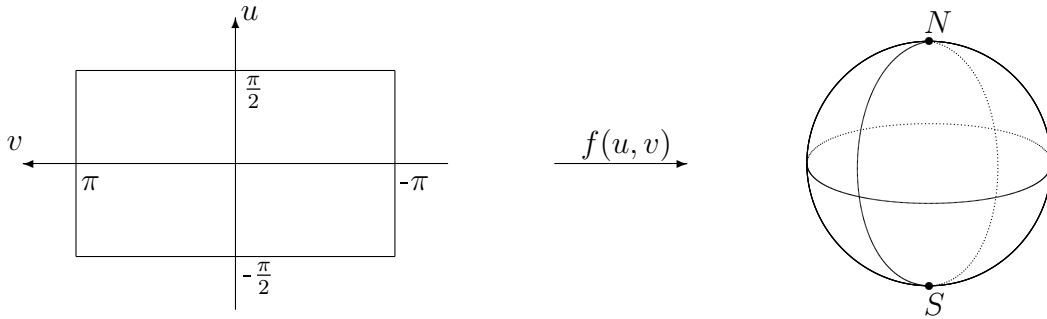


Рис. 31. Сфера

$$[f'(p)] = \begin{bmatrix} -R \sin u \cos v & -R \cos u \sin v \\ -R \sin u \sin v & R \cos u \cos v \\ R \cos u & 0 \end{bmatrix} \text{ — матрица Якоби.}$$

$\langle f'_u, f'_v \rangle = 0$, т.е. меридианы ортогональны параллелям;
параллели $u = \text{const}$ – окружности,
меридианы $v = \text{const}$ – полуокружности.

Наша сфера не содержит полюсов ($u = \pm \frac{\pi}{2}$) и линий перемены дат ($v = \pm \pi$). При $u = \pm \frac{\pi}{2}$ $f'_v = 0$ и условие максимального ранга $\text{rang}[f'(p)] = 2$ нарушается. Все точки с $u = \frac{\pi}{2}$ переходят в точку N , а с $u = -\frac{\pi}{2}$ – в точку S .

2) *Поверхности вращения* в \mathbb{R}^3

Вращаем заданную плоскую кривую $\alpha(u) = (x(u), 0, z(u))^T$, $u \in I$, вокруг оси Oz :

$$f(u, v) = A(v)\alpha(u) = \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(u) \\ 0 \\ z(u) \end{bmatrix} = (x(u) \cos v, x(u) \sin v, z(u))^T,$$

$$f(u, v) = (x(u) \cos v, x(u) \sin v, z(u))^T, \quad u \in I, \quad -\pi < v < \pi$$

Проверим условие максимальности ранга $[f'(p)]$:

$$[f'(p)] = \begin{bmatrix} \dot{x}(u) \cos v & -x(u) \sin v \\ \dot{x}(u) \sin v & x(u) \cos v \\ \dot{z}(u) & 0 \end{bmatrix},$$

$f'_u \times f'_v = (-\dot{z}(u)x(u) \cos v, -\dot{z}(u)x(u) \sin v, \dot{x}(u)x(u))$, $|f'_u \times f'_v| = x(u)\sqrt{\dot{z}^2(u) + \dot{x}^2(u)} \neq 0$ — регулярные точки поверхности (в этих точках ранг максимален).

Условие регулярности нарушается в точках $x(u) = 0$ (пересечение с осью Oz) или $\dot{z}^2(u) + \dot{x}^2(u) = |\dot{\alpha}(u)|^2 = 0$ (это особые точки кривой $\alpha(u)$).

3) Тор.

а) Тор в \mathbb{R}^3 — “бублик” — получается вращением окружности $\alpha(u) = (a + b \cos u, 0, b \sin u)^T$,

$$f(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)^T,$$

где u, v — углы поворотов или тороидальные координаты точки $f(p)$.

б) Прямое произведение двумерных окружностей — двумерная поверхность, вложенная в \mathbb{R}^4 ,

$$f(u, v) = (a \cos u, a \sin u, b \cos v, b \sin v)^T, \\ f'_u = (-a \sin u, a \cos u, 0, 0), \quad f'_v = (0, 0, -b \sin v, b \cos v), \quad \text{rang}[f'(p)] = 2.$$

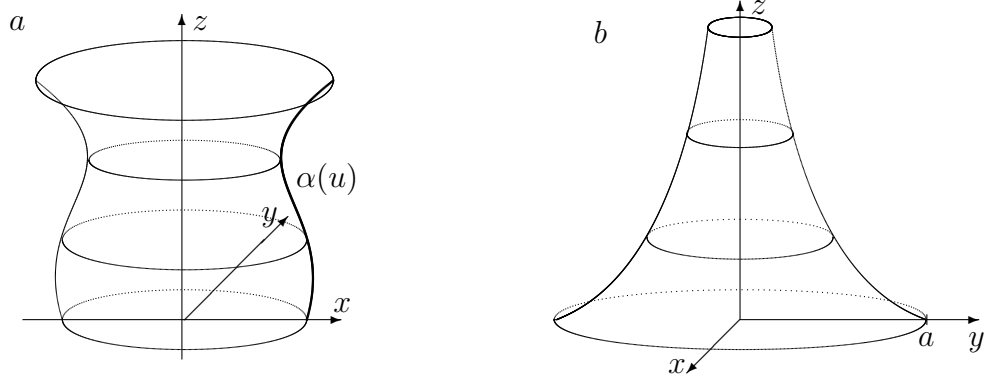


Рис. 32. а) Поверхность вращения, б) верхний раструб псевдосферы

4) Псевдосфера получается вращением трактрисы

$\alpha(u) = (a \sin u, 0, \pm a(\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u))^T$ вокруг ее асимптоты — оси Oz ,

$$f(u, v) = (a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, \pm a(\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u))^T, \quad 0 < u < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < v < 2\pi.$$

Значению параметра $u = \frac{\pi}{2}$ отвечает окружность радиуса a , лежащая в плоскости Oxy , при $u \rightarrow 0$ $z \rightarrow \infty$, $x, y \rightarrow 0$. Матрица Якоби

$$[f'(p)] = \begin{bmatrix} a \cos u \cos v & -a \sin u \sin v \\ a \cos u \sin v & a \sin u \cos v \\ \frac{a \cos^2 u}{\sin u} & 0 \end{bmatrix}.$$

Нижний раструб расположен симметрично верхнему относительно плоскости Oxy . Площадь обоих раструбов псевдосферы совпадает с площадью сферы $4\pi a^2$, объём $\frac{2}{3}\pi a^3$ — половина от объёма шара. На псевдосфере может быть реализована геометрия Лобачевского.

У всех рассмотренных выше поверхностей $\langle f'_u, f'_v \rangle = 0$, т.е. координатная сеть ортогональна.

5) Зонтик Уитни

$$y^2 - x^2 z = 0$$

горизонтальные сечения:

при $z < 0$: $x = y = 0$ (ручка зонтика);

при $z = 0$: $y = 0$;

при $z > 0$: пара пересекающихся прямых

вертикальные сечения:

при $x = \pm a$ $y^2 = a^2 z$ – параболы ветвями вверх.

Параметрическое задание. Пусть $x = u$, $z = v^2$ (теперь $z > 0$, обломали ручку), $y = uv$, тогда

$$f(u, v) = (u, uv, v^2)^T$$

$$[f'_p] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & u \\ 0 & 2v \end{bmatrix}, \text{ производные } f'_u, f'_v \text{ линейно зависимы только при } u = v = 0.$$

Координатная сеть – вертикальные параболы и горизонтальные пересекающиеся прямые, причем $\langle f'_u, f'_v \rangle = uv$, т.е. координатная сеть неортогональна.

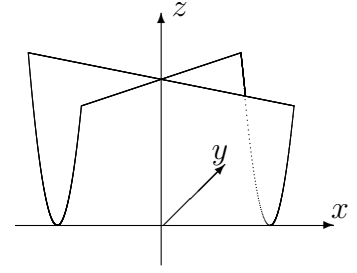


Рис. 33. Зонтик Уитни

§4. Поверхности Безье

Немного об изображении поверхностей в системах автоматизированного проектирования и компьютерной графике. Если в первом приближении кривые могут быть представлены ломаными, то для приближенного представления поверхности можно провести триангуляцию – представить поверхность в виде множества маленьких плоских треугольников (или, в более общем случае, многоугольников). Для построения же гладкой поверхности без изломов (т.е. класса гладкости C^1 – непрерывные производные) могут быть использованы многочлены, зависящие от нескольких переменных.

Поверхность Безье порядка (n, m) – это поверхность, задаваемая выражением

$$\mathbf{B}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m b_{i,n}(u) b_{j,m}(v) \mathbf{P}_{i,j}, \quad u, v \in [0, 1], \quad (13)$$

где $\mathbf{P}_{i,j}$ – набор из $(n+1) \cdot (m+1)$ контрольных точек, а $b_{i,n}(u)$ – многочлены Бернштейна:

$$b_{i,n}(u) = C_i^n u^i (1-u)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i}$$

Таким образом, поверхность Безье порядка (n, m) – это параметрическая поверхность, представляющая собой полином степени n по параметру u и полином степени m по параметру v , записанная в базисе из полиномов Бернштейна.

Перепишем формулу (13) в виде:

$$\mathbf{B}(u, v) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^m b_{j,m}(v) \mathbf{P}_{i,j} \right) b_{i,n}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i(v) b_{i,n}(u).$$

Из такой записи видно, что при фиксированном v мы имеем кривую Безье с контрольными точками $\mathbf{P}_i(v) = \sum_{j=0}^m b_{j,m}(v) \mathbf{P}_{i,j}$, лежащими на другой кривой Безье с параметром v .

Рассмотрим некоторые свойства поверхности Безье. Сначала покажем, что четыре угловые точки $\mathbf{P}_{i,j}$ задающей полигональной сетки лежат на поверхности Безье. Для этого мы подставим граничные значения параметров u и v в уравнение (13):

$$\mathbf{B}(0, 0) = \mathbf{P}_{0,0}, \quad \mathbf{B}(0, 1) = \mathbf{P}_{0,m}, \quad \mathbf{B}(1, 0) = \mathbf{P}_{n,0}, \quad \mathbf{B}(1, 1) = \mathbf{P}_{n,m}.$$

Покажем теперь, что граничные кривые поверхности Безье также являются кривыми Безье (соответственно порядка n или m). Чтобы получить уравнение одной из граничных кривых, подставим $v = 0$ в уравнение (13):

$$\mathbf{B}(u, 0) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m b_{i,n}(u) b_{j,m}(0) \mathbf{P}_{i,j} = \sum_{i=0}^n b_{i,n}(u) b_{0,m}(0) \mathbf{P}_{i,0} = \sum_{i=0}^n b_{i,n}(u) \mathbf{P}_{i,0}.$$

Видно, что граничные кривые поверхности Безье полностью определяются соответствующими граничными точками задающего многоугольника.

Наиболее часто используются бикубические поверхности Безье ($n = m = 3$), задающиеся шестнадцатью контрольными точками, аналогично тому, как при моделировании кривых используются кубические кривые Безье. Использование поверхностей Безье более высоких степеней, как и кривых Безье более высокого порядка, связано с резким увеличением необходимых для построения вычислений.

Для моделирования сложной поверхности надо создавать несколько поверхностей Безье и соединять их друг с другом.

Для обеспечения непрерывности поверхности необходимо, чтобы совпадали две граничные кривые, а следовательно, и контрольные точки, лежащие на двух граничных ломаных полигональных сеток стыкуемых поверхностей Безье (“кусков”).

Для обеспечения непрерывности векторов наклона или касательных векторов (гладкости вдоль границы куска) касательные плоскости при стремлении точки к границе с разных сторон должны совпадать, а значит направление нормали к поверхности вдоль граничной кривой должно быть одинаковым для обоих кусков. Это достигается наложением ограничений на соседние к граничным управляющие точки. На практике используются два различных условия. Первое, очевидное, требует, чтобы отрезки полигональной сетки, встречающиеся у границы и пересекающие ее, были коллинеарными (условие, аналогичное условию гладкости стыковки кривых Безье). Второе, менее жесткое, для бикубических кривых требует, чтобы три ребра полигональной сетки, встречающиеся в конечных точках граничной кривой, были компланарными.

Благодаря наглядности и удобству поверхности Безье широко используются в компьютерной графике, автоматизированном проектировании и моделировании.

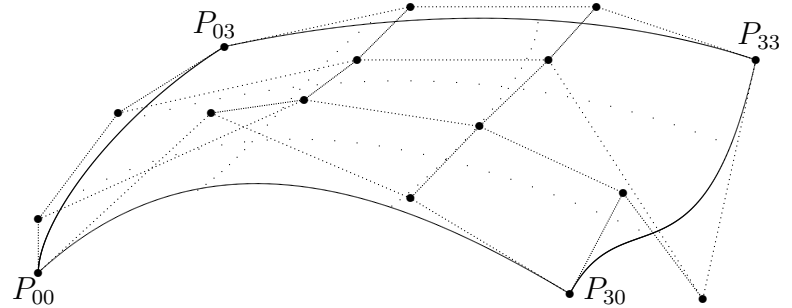


Рис. 34. Кубическая поверхность Безье

§5. Первая фундаментальная форма. Внутренняя геометрия поверхности

Как считать длины, углы, площади, объемы на поверхности?

О. Первой фундаментальной формой $I_p(\vec{x}, \vec{y})$ поверхности $f(U) : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ в точке $p \in U$ называется скалярное произведение в касательном пространстве $T_p f$, индуцированное из окружающего пространства \vec{R}^m ,

$$I_p(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{\mathbb{R}^m}, \quad \text{где } \vec{x}, \vec{y} \in T_p f.$$

Первая фундаментальная форма поверхности – это симметричная билинейная форма, но часто она по старой традиции называется “первой квадратичной”.

Обозначения: $I_p(\vec{x}, \vec{y}) = I(p; \vec{x}, \vec{y})$. Последнее подчеркивает зависимость скалярного произведения от точки поверхности, см. рис. 35. Каждое касательное пространство превращается в Евклидово, но при этом в каждом касательном пространстве скалярное произведение, вообще говоря, свое!

Для вычисления первой фундаментальной формы разложим вектора $\vec{x}, \vec{y} \in T_p f$ по стандартному базису касательного пространства:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= x^i f'_{u^i}(p), \quad \vec{y} = y^j f'_{u^j}(p), \\ I_p(\vec{x}, \vec{y}) &= \langle x^i f'_{u^i}(p), y^j f'_{u^j}(p) \rangle = \langle f'_{u^i}, f'_{u^j} \rangle x^i y^j = g_{ij} x^i y^j,\end{aligned}$$

где

$$g_{ij} = \langle f'_{u^i}, f'_{u^j} \rangle$$

Рис. 35. Касательные пространства

– метрические коэффициенты поверхности, элементы матрицы Грама $[I_p] = [g_{ij}]$ – матрицы 1-й фундаментальной формы.

Эта матрица:

- 1) симметрична;
- 2) положительно определена (удовлетворяет критерию Сильвестра);
- 3) $V = \sqrt{\det[g_{ij}]}$ – объем параллелепипеда, построенного на базисных векторах.

О. Все свойства поверхности $f(U) : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, которые могут быть выражены *только* через коэффициенты $g_{ij}(p)$ первой фундаментальной формы, называются **свойствами внутренней геометрии** поверхности.

Длина кривой вдоль поверхности.

Пусть:

$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – поверхность,
 $u(t) : (a, b) \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^n$ – некоторая кривая в области $U \subseteq \mathbb{R}^n$,
 $\alpha(t) = f(u(t)) : (a, b) \rightarrow f(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ – кривая вдоль поверхности f .

По определению, длина кривой $l[\alpha]_a^b = \int_a^b |\dot{\alpha}(t)| dt$. Найдем разложение вектора $\dot{\alpha}(t)$ по стандартному базису касательного пространства $T_p f$:

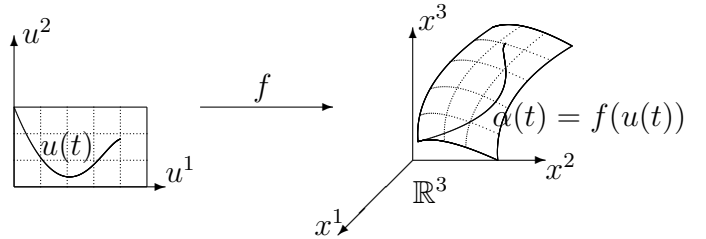


Рис. 36. Кривая вдоль поверхности

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{d}{dt} f(u(t)) = f'_{u^i}(u(t)) \dot{u}^i(t) = [f'_{u^1} \dots f'_{u^n}] [\dot{u}^1 \dots \dot{u}^n]^T,$$

$$|\dot{\alpha}(t)|^2 = \langle \dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle = \langle f'_{u^i} \dot{u}^i(t), f'_{u^j} \dot{u}^j(t) \rangle = \dot{u}^i(t) \dot{u}^j(t) \langle f'_{u^i}, f'_{u^j} \rangle = \dot{u}^i(t) \dot{u}^j(t) g_{ij}.$$

В результате для *длины дуги* получаем:

$$l[\alpha]_a^b = \int_a^b \sqrt{g_{ij} \dot{u}^i(t) \dot{u}^j(t)} dt = \int_a^b \sqrt{g_{ij} du^i du^j}.$$

Последнее выражение удобно, когда явная параметризация неизвестна, но известно соотношение между дифференциалами du^i (т.е. когда кривая задана изначально уравнением в поверхностных координатах).

Как обычно, обозначим как $s = s(t)$ натуральный параметр (длину дуги) кривой $\alpha(t)$,
 $s(t) = \int_0^t |\dot{\alpha}(\theta)| d\theta$, дифференциал дуги

$$ds = |\dot{\alpha}(t)| dt = \sqrt{g_{ij} du^i du^j}.$$

Соответственно, $ds^2 = g_{ij} du^i du^j$ – квадратичная форма с той же матрицей, что и первая фундаментальная форма, отсюда и не совсем корректное название “первая квадратичная” форма (вместо “первой фундаментальной”).

Углы на поверхности. Рассмотрим пару кривых вдоль поверхности f :

$$\alpha_1(t) = f(u_1(t)), \quad \alpha_2(\theta) = f(u_2(\theta)).$$

Пусть они пересекаются в точке $p = u_1(t_0) = u_2(\theta_0) \in U$;

это означает, что они пересекаются на поверхности в точке $f(p)$:

$$\alpha_1(t_0) = \alpha_2(\theta_0) = f(p),$$

$$\dot{\alpha}_1(t_0) = f'_{u^i}(p) \dot{u}_1^i(t_0),$$

$$\dot{\alpha}_2(\theta_0) = f'_{u^i}(p) \dot{u}_2^i(\theta_0).$$

Угол между кривыми находится через скалярное произведение с матрицей Грама – матрицей первой фундаментальной формы $[g_{ij}]$:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \dot{\alpha}_1(t_0), \dot{\alpha}_2(\theta_0) \rangle}{|\dot{\alpha}_1(t_0)| |\dot{\alpha}_2(\theta_0)|} = \frac{g_{ij} \dot{u}_1^i(t_0) \dot{u}_2^j(\theta_0)}{\sqrt{g_{ij} \dot{u}_1^i(t_0) \dot{u}_1^j(t_0)} \sqrt{g_{ij} \dot{u}_2^i(\theta_0) \dot{u}_2^j(\theta_0)}}$$

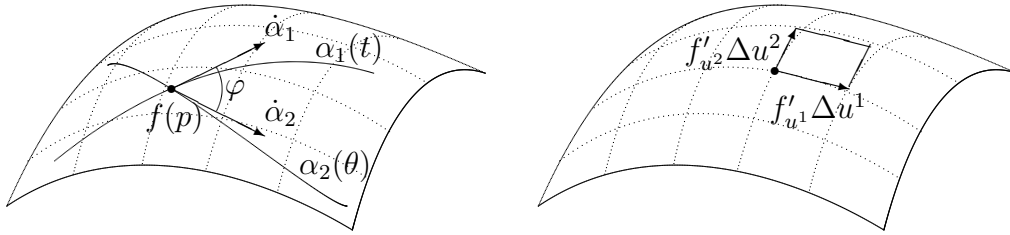


Рис. 37. а) угол между кривыми, б) к подсчету объема

Объем поверхности. Объем n -мерного параллелотопа, построенного на векторах a_1, \dots, a_n : $V = \sqrt{\det G}$, где $G_{ij} = \langle a_i, a_j \rangle$ – матрица Грама векторов a_1, \dots, a_n .

Терминология: при $n = 1$ – длина, при $n = 2$ – площадь, при $n \geq 3$ – объем.

Соответственно, объем параллелотопа, построенного на векторах стандартного базиса касательного пространства $T_p f$ $V(f'_{u^1}, \dots, f'_{u^n}) = \sqrt{\det[g_{ij}(p)]}$ (иногда используется обозначение $g = \det[g_{ij}]$)

Считаем объемы “чешуек” (см. рис. 37 б) в касательном пространстве

$$V(\Delta u^1 f'_{u^1}, \dots, \Delta u^n f'_{u^n}) = \Delta u^1 \dots \Delta u^n V(f'_{u^1}, \dots, f'_{u^n}) = \sqrt{\det g(p)} \Delta u^1 \dots \Delta u^n$$

Интегральная сумма

$$V[f] = \sum_{p_k} \sqrt{\det g(p_k)} \Delta u^1 \dots \Delta u^n.$$

О. Объемом n -мерной инъективной поверхности называется число:

$$V[f] = \int_U \sqrt{\det g(p)} du^1 \dots du^n.$$

При $n = 1$ имеем $\det g = g_{11} = \langle f'_t, f'_t \rangle = \langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle$, и для длины дуги кривой получаем уже известную нам формулу $V(\alpha) = \int_U \sqrt{\langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle} dt = \int_U |\dot{\alpha}| dt$.

Криволинейные системы координат в \mathbb{R}^n .

Рассмотрим подробнее случай отображения $U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, которое, как мы уже отмечали выше, задает не какую-либо поверхность, а криволинейные координаты в n -мерном пространстве.

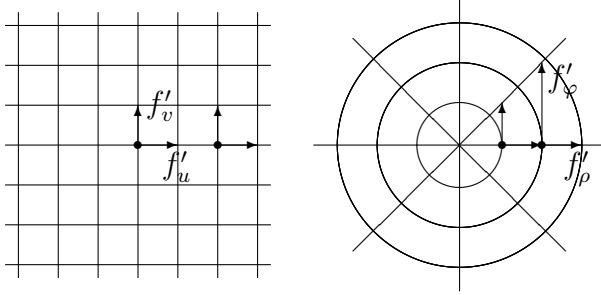


Рис. 38. Координатные сети и базисные векторы для декартовых и полярных координат

Обычно используются *ортогональные* криволинейные координаты, поскольку формулы для определения длин и углов выглядят в ортогональных координатах гораздо проще, чем в общем случае, т.к. матрица первой фундаментальной формы в системах с ортонормированным базисом является диагональной.

На диагонали матрицы $[g_{ij}]$ стоят положительные коэффициенты g_{ii} . Коэффициенты $H_i = \sqrt{g_{ii}}$, зависящие от точки пространства, называются коэффициентами Ламе или масштабными коэффициентами. Коэффициенты Ламе показывают, сколько единиц длины содержится в единице координат в данной точке и используются для преобразования векторов при переходе от одной системы координат к другой. На рис. 38 видно, что для декартовой системы координат длины базисных векторов одинаковы во всех точках, а в полярной системе длины f'_φ отличаются от точки к точке.

Длины, углы и объемы находятся по тем же формулам, что и для поверхностей.

Для различных задач используются разные ортогональные криволинейные системы координат. В \mathbb{R}^2 , кроме полярных, также используются эллиптические, параболические и биполярные координаты, в \mathbb{R}^3 – тороидальные, конические и др.

Примеры. В полярных координатах $f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)^T$: $H_r = |f'_r| = 1$, $H_\varphi = |f'_\varphi| = r$, $\sqrt{\det g} = r$, $dx dy = r dr d\varphi$. В сферических координатах: $H_r = 1$, $H_\theta = r$, $H_\varphi = r \sin \theta$, $\sqrt{\det g} = r^2 \sin \theta$, $dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$.

§6. Замена параметров. Изометричность поверхностей

Ранее мы рассматривали классы эквивалентных кривых – кривых, имеющих одинаковый образ и связанных заменой параметра. Аналогично, различные отображения $f_1(u)$ и $f_2(v)$, задающие поверхности, могут давать один и тот же образ $f_1(U) = f_2(V)$. Но, прежде чем переходить к эквивалентности поверхностей, дадим важное определение диффеоморфизма как взаимнооднозначного отображения областей.

О. Пусть $\Phi : U \rightarrow V$ – гладкое отображение области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ на область V и существует обратное отображение $\Phi^{-1} : V \rightarrow U$, которое также является гладким. Тогда Φ называется **диффеоморфизмом** области $U \subset \mathbb{R}^n$ на область V .

Свойства:

- 1) Матрица Якоби $[\Phi'_p]$ является квадратной.
- 2) Обратимость, то есть $\det[\Phi'_p] \neq 0$.

Иными словами, *диффеоморфизм* – это гладкое взаимнооднозначное отображение областей. Но наличие такого отображения для поверхностей само по себе не означает, конечно, что образы этих поверхностей совпадают или даже сколько-нибудь похожи друг на друга.

О. Две поверхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $\tilde{f} : \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ **связаны заменой параметров** Φ , если:

- 1) $\Phi : U \xrightarrow{\text{на}} \tilde{U}$ — диффеоморфизм,
- 2) \forall точки $u \in U$ $f(u) = \tilde{f}(\Phi(u))$.

Это соотношение эквивалентности. Образы эквивалентных поверхностей $f(U)$ и $\tilde{f}(\tilde{U}) = \tilde{f}(\Phi(U))$ совпадают.

Иногда используется следующая терминология:

Непараметризованная поверхность — класс эквивалентных поверхностей.

Параметризованная поверхность — каждое конкретное отображение f из этого класса.

Найдем, как преобразуется матрица первой фундаментальной формы $[g_{ik}]$, $g_{ik} = \langle f'_u, f'_u \rangle$, при замене параметров. Диффеоморфизм $\Phi : U \rightarrow \tilde{U}$ производит *замену поверхностных координат* (u^1, \dots, u^n) на $(\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^n)$, $\tilde{u} = \Phi(u)$. Учитывая, что

$$[g_{ij}] = [f'_u]^T [f'_u], \quad [\tilde{g}_{ij}] = [\tilde{f}'_{\tilde{u}}]^T [\tilde{f}'_{\tilde{u}}], \quad [f'_u] = [\tilde{f}'_{\tilde{u}}][\Phi'_u],$$

где последнее равенство получается дифференцированием $f(u) = \tilde{f}(\Phi(u))$, получим

$$[g_{ij}(u)] = [f'_u]^T [f'_u] = [\Phi'_u]^T [\tilde{f}'_{\tilde{u}}]^T [\tilde{f}'_{\tilde{u}}][\Phi'_u] = [\Phi'_u]^T [\tilde{g}_{ij}(\tilde{u})][\Phi'_u].$$

Т.о., при замене координат имеем

$$[g_{ik}] = [\Phi'_u]^T [\tilde{g}_{ik}][\Phi'_u] \quad (14)$$

— правило преобразования матрицы билинейной формы при замене базиса.

Рассмотрим теперь две поверхности. Предположим, что преобразованием вида (14) мы можем сделать их первые фундаментальные формы одинаковыми, одинакова и область изменения параметров. Значит, эти поверхности обладают одинаковой внутренней геометрией. Могут ли их образы отличаться друг от друга? Прежде чем перейти к ответу на вопрос, дадим следующее определение.

О. Изометричные поверхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\tilde{f} : \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — это поверхности, связанные диффеоморфизмом $\Phi : U \rightarrow \tilde{U}$, у которых матрицы $[g_{ij}(u)]$ и $[\tilde{g}_{ij}(\tilde{u})]$ в соответствующих точках $\tilde{u} = \Phi(u)$ связаны соотношением (14).

Пример.

Круговой цилиндр $f(u, v) = (R \cos v, R \sin v, u)^T$ и плоскость $f(u, v) = (u, v, 0)^T$, соответственно

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix}, \quad [g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица для цилиндра приводится к единичной заменой параметра на натуральный (длину дуги s), $v = s/R$, $\tilde{f}(u, s) = (R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R}, u)^T$, и в такой параметризации матрицы первой фундаментальной формы цилиндра и плоскости совпадают.

Изометричность предполагает также одинаковую область изменения параметров, поэтому круговой цилиндр будет изометричен полосе на плоскости (в таком случае говорят о локальной изометричности). Для произвольного цилиндра (над любой регулярной кривой) изометричность плоскости доказывается переходом к натуральному параметру s кривой, $f(u, s) = (x(s), y(s), u)^T$. Для установления изометричности кругового конуса $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)^T$ и плоскости достаточно записать первую фундаментальную форму плоскости в полярных координатах.

Если изогнуть (не растягивая и не смятая) лист с нарисованными на нем линиями в цилиндр, то, очевидно, ни их длины, ни углы между ними не изменятся, не изменятся и площади клякс на листе. А это свойства, задаваемые первой фундаментальной формой — свойства внутренней геометрии. Поверхности с одинаковой внутренней геометрией мы не можем отличить друг от друга, производя измерения, не выходя за их пределы.

Изометричные поверхности обладают *одинаковой внутренней геометрией*, но это, вообще говоря, *разные* поверхности, имеющие *разные* образы.

Примеры изометричных поверхностей:

- цилиндр, конус и плоскость
- катеноид и геликоид

Цилиндр и плоскость – это различные поверхности, но, используя только 1-ю фундаментальную форму, мы их различить не сможем. Их внутренняя геометрия одинакова. Надо взглянуть на поверхность снаружи.

§7. Внешняя геометрия поверхностей. Основной оператор гиперповерхности

Гиперповерхность $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ – поверхность, размерность которой на 1 меньше размерности окружающего пространства.

Нормальное гауссово поле – это единичное нормальное к гиперповерхности векторное поле, получаемое как обобщенное векторное произведение векторов стандартного базиса $T_p f$:

$$\vec{N}(u) = \frac{f'_{u^1} \times \cdots \times f'_{u^n}}{|f'_{u^1} \times \cdots \times f'_{u^n}|} = \frac{f'_{u^1} \times \cdots \times f'_{u^n}}{\sqrt{\det g}}.$$

Знаменатель – объем параллелепипеда, построенного на векторах базиса касательного векторного пространства.

Добавляя к базису касательного к гиперповерхности пространства вектор $\vec{N}(u)$, мы получим базис $f'_{u^1}, \dots, f'_{u^n}, \vec{N}(u)$ всего пространства \mathbb{R}^{n+1} .

Примеры гиперповерхностей.

1. Кривая в \mathbb{R}^2 :

$\dot{\alpha}$ – базис $T_p f$, $\vec{N} = \vec{\nu}$ – единичный нормальный вектор, $|\vec{N}| = 1$.

Пара $\dot{\alpha}, \vec{N}$ положительно ориентирована.

2. Двумерная поверхность в \mathbb{R}^3 :

f'_{u^1}, f'_{u^2} – базис $T_p f$, \vec{N} – единичный нормальный вектор, $|\vec{N}| = 1$.

Тройка $f'_{u^1}, f'_{u^2}, \vec{N}$ положительно ориентирована.

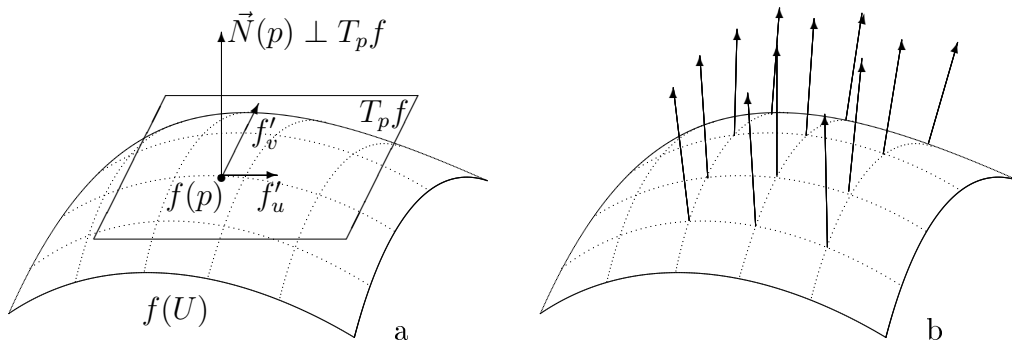


Рис. 39. а) базис $T_p f$ и вектор нормали б) нормальное гауссово поле

Внешнюю геометрию гиперповерхности мы будем исследовать, изучая поведение нормального вектора $\vec{N}(u) \perp T_p f$ при движении вдоль этой гиперповерхности. Дифференцируя $\langle \vec{N}(u), \vec{N}(u) \rangle = 1$, получаем: $\frac{\partial}{\partial u^i} \langle \vec{N}(u), \vec{N}(u) \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{N}'_{u^i}, \vec{N} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{N}'_{u^i} \perp \vec{N}$, то есть

$\vec{N}'_{ui} \in T_p f$ – производная нормального вектора принадлежит касательному пространству. С этим и связано то, что мы рассматриваем именно гиперповерхности – теорию произвольных поверхностей построить сложнее.

Кривая: кривизна = скорость поворота единичного нормального вектора \vec{N} при движении вдоль кривой (см. уравнение Френе $\dot{\vec{N}} = -k\vec{\tau}$).

На поверхности возможны разные направления движения, и мы *каждому направлению* f'_{ui} поставим в соответствие скорость поворота \vec{N}'_{ui} нормального вектора \vec{N} при его движении в этом направлении. Это приводит нас к следующему определению:

О. Основным оператором гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, или оператором Петерсона⁶-Вейнгартена⁷, называется линейный оператор $\hat{L}_p : T_p f \rightarrow T_p f$, действующий по правилу

$$\hat{L}_p f'_{ui} = -\vec{N}'_{ui}.$$

Минус поставлен для того, чтобы собственные значения \hat{L}_p являлись главными кривизнами, см. ниже.

Мы определили линейный оператор через его действие на базисные вектора. Для произвольного касательного вектора $\vec{x} = x^i f'_{ui} \in T_p f$ в силу линейности \hat{L}_p получим: $\hat{L}_p \vec{x} = \hat{L}_p(x^i f'_{ui}) = x^i \hat{L}_p(f'_{ui}) = -x^i \vec{N}'_{ui}$.

О. Второй фундаментальной формой гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ в т. $p \in U$ называется билинейная форма $\Pi_p(\vec{x}, \vec{y})$, определенная в касательном пространстве $T_p f$:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in T_p f \quad \Pi_p(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \hat{L}_p \vec{x}, \vec{y} \rangle.$$

Билинейность обеспечивается линейностью оператора \hat{L}_p .

Вторая фундаментальная форма записывается через свою матрицу $[h_{ij}]$:

$$\Pi_p(\vec{x}, \vec{y}) = \Pi_p(x^i f'_{ui}, y^j f'_{uj}) = x^i y^j \Pi_p(f'_{ui}, f'_{uj}) = x^i y^j h_{ij},$$

где мы ввели обозначение

$$h_{ij} = \Pi_p(f'_{ui}, f'_{uj}) = \langle \hat{L}_p f'_{ui}, f'_{uj} \rangle = -\langle \vec{N}'_{ui}, f'_{uj} \rangle.$$

Так как $\vec{N} \perp T_p f$, то $\langle \vec{N}, f'_{uj} \rangle = 0$. Дифференцируя, имеем $\langle \vec{N}'_{ui}, f'_{uj} \rangle + \langle \vec{N}, f''_{uiuj} \rangle = 0$, и получаем второй способ нахождения h_{ij} :

$$h_{ij} = -\langle \vec{N}'_{ui}, f'_{uj} \rangle = \langle \vec{N}, f''_{uiuj} \rangle. \quad (15)$$

Мы видим, что элементы h_{ij} матрицы второй фундаментальной формы – это проекции производных f''_{uiuj} векторов f'_{ui} стандартного базиса $T_p f$ на вектор нормали \vec{N} .

Заметим, что на основе последней формулы можно дать эквивалентное определение второй фундаментальной формы $\Pi_p(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{N}, f''_{uiuj} x^i y^j \rangle = \langle \vec{N}, d^2 f \rangle$.

Т. Для гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$:

- 1) вторая фундаментальная форма $\Pi_p(\vec{x}, \vec{y})$ симметрична,
- 2) основной оператор гиперповерхности \hat{L}_p – самосопряженный.

Доказательство.

- 1) Т.к. $f''_{uiuj} = f''_{ujui}$, то согласно (15)

⁶Карл Михайлович Петерсон (1828–1881) – российский математик. Родился в Риге, окончил Дерптский университет, преподавал в Петропавловском училище (Москва), один из основателей Московского математического общества.

⁷Юлиус Вейнгартен (1836-1910) – немецкий математик.

$h_{ij} = -\langle \vec{N}'_{u^i}, f'_{u^j} \rangle = \langle \vec{N}, f''_{u^i u^j} \rangle = \langle \vec{N}, f''_{u^j u^i} \rangle = -\langle \vec{N}'_{u^j}, f'_{u^i} \rangle = h_{ji}$, т.е. $\Pi_p(\vec{x}, \vec{y}) = \Pi_p(\vec{y}, \vec{x})$.

2) Самосопряженный (симметричный) оператор: $\forall \vec{x}, \vec{y} \in T_p f : \langle \hat{L}_p \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \hat{L}_p \vec{y} \rangle$.
 $\langle \hat{L}_p \vec{x}, \vec{y} \rangle = \Pi_p(\vec{x}, \vec{y}) = \Pi_p(\vec{y}, \vec{x}) = \langle \hat{L}_p \vec{y}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, \hat{L}_p \vec{y} \rangle$.

Следствия.

- 1) Все собственные значения \hat{L}_p — вещественны.
- 2) В $T_p f$ существует ортонормированный базис из собственных векторов \hat{L}_p .

Вычислительная формула для h_{ij} :

$$h_{ij} = -\langle \vec{N}'_{u^i}, f'_{u^j} \rangle = \langle \vec{N}, f''_{u^i u^j} \rangle = \frac{\langle f'_{u^i} \times \dots \times f'_{u^n}, f''_{u^i u^j} \rangle}{\sqrt{\det g}} = \frac{\det[f'_{u^1}, \dots, f'_{u^n}, f''_{u^i u^j}]}{\sqrt{\det g}}.$$

В частном случае $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$h_{ij} = \frac{\det[f'_{u^1}, f'_{u^2}, f''_{u^i u^j}]}{\sqrt{\det g}}.$$

§8. Главные направления и главные кривизны. Линии кривизны.

Т. В стандартном базисе $f'_{u^1}, \dots, f'_{u^n}$ касательного пространства $T_p f$ матрица оператора \hat{L}_p имеет вид:

$$L_p = [g_{ij}]^{-1} [h_{ij}].$$

Доказательство. Пусть $L_p = [a_j^i]$, т.е. $\hat{L}_p f'_{u^i} = a_j^i f'_{u^j}$ (по определению, i -й столбец есть результат действия оператора на i -й базисный вектор).

$h_{ij} = \langle \hat{L}_p f'_{u^i}, f'_{u^j} \rangle = \langle a_j^i f'_{u^j}, f'_{u^i} \rangle = a_j^i \langle f'_{u^j}, f'_{u^i} \rangle = a_j^i g_{ji}$, откуда, в силу симметричности g_{ij} и h_{ij} , $h_{ji} = g_{ji} a_i^k$, или в матричной форме $h = g L_p$, $L_p = g^{-1} h$.

О. Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ — гиперповерхность, $\hat{L}_p : T_p f \rightarrow T_p f$ ее основной оператор. Тогда:

- 1) $K(p) = \det L_p$ — **полная (Гауссова) кривизна** гиперповерхности f в точке p ;
- 2) $H(p) = \frac{1}{n} \text{Tr } L_p$ — **средняя кривизна** гиперповерхности f в точке p ;
- 3) Собственные значения $k_1 \dots k_n$ называются **главными нормальными кривизнами**;
- 4) Собственные вектора $\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n$ оператора \hat{L}_p называются **главными направлениями**.

Примечание. $K = k_1 \cdot \dots \cdot k_n$; $H = \frac{1}{n}(k_1 + \dots + k_n)$; главные направления попарно ортогональны, т.к. \hat{L}_p — самосопряженный оператор.

Полная (гауссова) и средняя кривизны представляют собой инварианты линейного оператора L_p (тензора типа (1,1)) и могут быть найдены по формулам

$$K = \det L_p = \det ([g]^{-1} [h]) = \frac{\det h}{\det g}, \quad H = \frac{1}{n} \text{Tr } L_p = \frac{1}{n} g^{ik} h_{ki}.$$

Примеры.

- 1) $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ — плоская кривая единичной скорости. Это гиперповерхность, $\vec{N} = \nu$ — нормальный вектор из базиса Френе, $\dot{\alpha}$ — базис $T_p \alpha$. $\hat{L}_p \dot{\alpha} = -\dot{\nu} = k \dot{\alpha}$, т.к., согласно уравнению Френе $-\dot{\nu} = k \dot{\alpha}$. Собственное значение k оператора \hat{L}_p — это кривизна гиперповерхности (в данном случае — кривой).

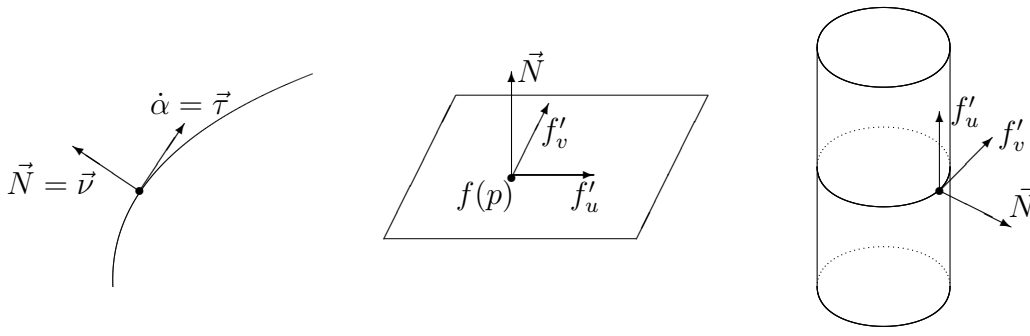


Рис. 41. Гиперповерхности: кривая в \mathbb{R}^2 , плоскость и цилиндр в \mathbb{R}^3

2) Гиперплоскость $a^1x^1 + \dots + a^{n+1}x^{n+1} = a^0$. $\vec{N} = \frac{(a^1, \dots, a^{n+1})^T}{\sqrt{(a^1)^2 + \dots + (a^{n+1})^2}} = \text{const}$, а значит \hat{L}_p – нулевой оператор.

3) Цилиндр $f(u, v) = (R \cos v, R \sin v, u)^T$. Вектора стандартного базиса касательного пространства

$$f'_u(u, v) = (0, 0, 1)^T, \quad f'_v(u, v) = (-R \sin v, R \cos v, 0)^T,$$

вторые производные

$$f''_{uu}(u, v) = f''_{uv}(u, v) = (0, 0, 0)^T, \quad f''_{vv}(u, v) = (-R \cos v, -R \sin v, 0)^T.$$

Находим матрицу основного оператора гиперповерхности \hat{L}_p :

$$[g] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix}, \quad [h] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}, \quad L_p = [g]^{-1}[h] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/R \end{bmatrix}.$$

Собственные векторы оператора \hat{L}_p в базисе f'_u, f'_v – это $(1 \ 0)^T$ и $(0 \ 1)^T$, то есть сами вектора стандартного базиса f'_u, f'_v . Откуда заключаем, что главные кривизны $k_1 = 0$ (в направлении касательного вектора $f'_u(u, v) = (0, 0, 1)$) и $k_2 = 1/R$ (в направлении касательного вектора $f'_v(u, v) = (-R \sin v, R \cos v, 0)$). Действительно, двигаясь по поверхности цилиндра вдоль его оси, мы двигаемся по прямой (нулевая кривизна), а перпендикулярно оси – по окружности радиуса R (кривизна $1/R$), см.рис 41.

4) Сфера. Для сферы радиуса R кривизны $k_1 = k_2 = 1/R$, матрица L_p кратна единичной и все вектора из $T_p f$ являются собственными векторами \hat{L}_p .

Для двумерной поверхности в \mathbb{R}^3 в собственном базисе оператора \hat{L}_p : $L_p = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$, $K = k_1 k_2$, $2H = k_1 + k_2 \Leftrightarrow k^2 - 2Hk + K = 0$, т.е. k_1, k_2 – решения этого квадратного уравнения.

О. Кривая α вдоль гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ называется **линией кривизны**, если в каждой ее точке касательный вектор является главным направлением. Касательные к линии кривизны – это собственные вектора оператора \hat{L}_p . Линии кривизны всегда образуют на поверхности ортогональную сеть, т.к. главные направления ортогональны друг другу.

Как выглядит матрица второй фундаментальной формы в ортогональном или ортонормированном собственном базисе $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ оператора \hat{L}_p ? В собственном базисе \hat{L}_p

$$h_{ij} = \langle \hat{L}_p \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \langle k_i \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = k_i \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = k_i g_{ij}$$

Матрица первой фундаментальной формы в ортогональном базисе диагональна,

$$g_{ij} = g_{ii}\delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } i = j \\ 0 & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

а в ортонормированном базисе $g_{ij} = \delta_{ij}$, т.е. $[g_{ij}]$ - единичная матрица. Соответственно, в ортогональном собственном базисе оператора \hat{L}_p $h_{ij} = k_i g_{ii} \delta_{ij}$, в ортонормированном $h_{ij} = k_i \delta_{ij} = (L_p)_{ij}$.

§9. Локальное строение гиперповерхностей

Здесь мы рассмотрим устройство гиперповерхности в окрестности некоторой своей точки p . Для этого мы перейдем к собственному базису оператора \hat{L}_p в этой точке.

Т. Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ — гиперповерхность, k_1, \dots, k_n — главные нормальные кривизны в точке $f(p)$, $p \in U$. Тогда существует окрестность U_0 точки p и декартова прямоугольная система координат такие, что $p \in U_0 \subseteq U$ и $f(U_0)$ является графиком функции $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \left(k_1 (x^1)^2 + \dots + k_n (x^n)^2 \right) + o(|x|^2), \quad \text{где } x = (x^1 \dots x^n)^T \in U_0.$$

Доказательство. Рассмотрим собственный ортонормированный базис оператора \hat{L}_p касательного пространства в т. $p \in U$. Это базис из векторов e_i , задающих главные направления в этой точке, $\hat{L}_p e_i = k_i e_i$. Соответственно, e_1, \dots, e_n, \vec{N} — базис всего пространства \mathbb{R}^{n+1} . Начало отсчета расположим в т. $f(p)$, см. рис.42.

Пусть в указанном базисе e_1, \dots, e_n, \vec{N} поверхность задана как

$$f(u) = (f^1(u), \dots, f^n(u), f^{n+1}(u))^T.$$

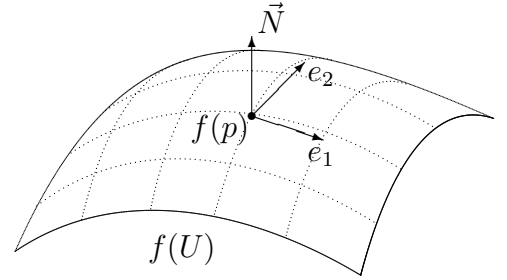


Рис. 42. Ортонормированный базис в \mathbb{R}^{n+1}

Дифференцируя, получим базис касательного пространства в т. $p \in U$:

$$f'_{u^i}(p) = (f^{1'}_{u^i}(p), \dots, f^{n'}_{u^i}(p), f^{n+1'}_{u^i}(p))^T.$$

Так как касательный вектор $f'_{u^i}(p) \perp \vec{N}(p) = e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$, то $f^{n+1'}_{u^i}(p) = 0$. Это означает, что матрица Якоби $[f'(p)]$, $\text{rang}[f'(p)] = n$, имеет нулевую $n+1$ -ю строку, а следовательно минор из первых n строк не нулевой. Рассмотрим отображение $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$u = (u^1, \dots, u^n)^T \rightarrow (f^1(u), \dots, f^n(u))^T = (x^1, \dots, x^n)^T = x. \quad (16)$$

Так как ранг его матрицы Якоби равен n , то это — замена параметров. Обозначим диффеоморфизм, обратный (16), как Φ , $x \xrightarrow{\Phi} u$. В координатах x^i поверхность задается как

$$\tilde{f}(x) = (x^1, \dots, x^n, \varphi(x))^T, \quad \text{где } \varphi(x) = f^{n+1}(\Phi(x)) = f^{n+1}(u). \quad (17)$$

Итак, мы представили (в собственном ортонормированном базисе \hat{L}_p) поверхность вокруг исследуемой точки как график функции $\varphi(x)$. В частности, при $n=2$ $\tilde{f}(x, y) = (x, y, z = \varphi(x, y))^T$.

Рассмотрим разложение $\varphi(x)$ в ряд Тейлора.

$\varphi(0) = f^{n+1}(\Phi(0)) = f^{n+1}(p) = 0$, т.к. мы перенесли начало координат в т. $f(p)$.

$\varphi'_{x^i}(0) = \sum_j (f^{n+1})'_{u^j}(p) \frac{\partial u^j}{\partial x^i} = 0$, т.к. $(f^{n+1})'_{u^j}(p) = 0$ в силу того, что мы выбрали последний

вектор базиса $e_{n+1} = \vec{N}$ перпендикулярным $T_p f$, см. выше. Таким образом, разложение начинается со вторых производных,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \varphi''_{x^i x^j}(0) x^i x^j + \bar{o}(x^2).$$

Найдем коэффициенты $\varphi''_{x^i x^j}(0)$. Дифференцируя (17), получим $\tilde{f}''_{x^i x^j}(0) = (0, \dots, 0, \varphi''_{x^i x^j})$, $\vec{N} = (0, \dots, 0, 1)$ и $h_{ij} = \langle \vec{N}, \tilde{f}''_{x^i x^j} \rangle = \varphi''_{x^i x^j}(0) = k_i \delta_{ij}$ (т.к. $[h_{ij}]$ в собственном базисе оператора \hat{L}_p диагональна, см. конец предыдущего параграфа). Окончательно получим:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \sum_i k_i (x^i)^2 + \bar{o}(|x|^2).$$

Итак, мы показали, что с помощью выбора системы координат поверхность в окрестности некоторой своей точки можно представить как график функции $\frac{1}{2} \sum k_i (x^i)^2$, квадратичной по координатам x^i , с точностью до слагаемых более высокого порядка.

Рассмотрим подробно случай двумерных поверхностей в трехмерном пространстве $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$z = \varphi(x, y) = \frac{1}{2} (k_1 x^2 + k_2 y^2) + o(x^2 + y^2). \quad (18)$$

Отбрасывая $o(x^2 + y^2)$, получаем уравнение поверхности, имеющей порядок касания не ниже второго – *соприкасающегося* параболоида ($K \neq 0$) или параболического цилиндра ($K = 0$).

Для двумерных поверхностей знания полной K и средней H кривизн достаточно для определения главных кривизн k_1 и k_2 . В зависимости от значений K и H имеется 4 типа точек.

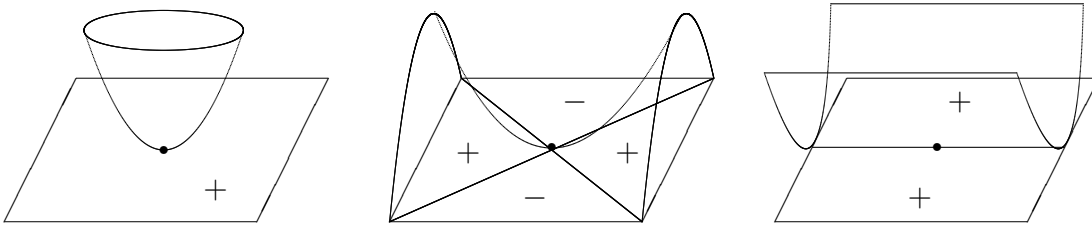


Рис. 43. Эллиптические, гиперболические и параболические точки

1) **Эллиптическая** точка.

$K > 0$ (k_1 и k_2 одного знака) — поверхность вблизи точки $f(p)$ представляет собой эллиптический параболоид (с точностью до $o(x^2 + y^2)$). Поверхность загибается по главным направлениям в одну и ту же сторону (относительно касательной плоскости): точки, близкие к точке $f(p)$, лежат по одну сторону от касательной плоскости.

2) **Гиперболическая** точка.

$K < 0$ (k_1 и k_2 разных знака) — гиперболический параболоид (седло). Поверхность загибается по главным направлениям в разные стороны; точки, близкие к точке $f(p)$, могут лежать по разные стороны от касательной плоскости. В обыденной жизни мы называем такие точки точками перевала — есть два направления подъема в горы и два — спуска в долины.

3) **Параболическая** точка.

$K = 0, H \neq 0$ — параболический цилиндр (поверхность искривлена только в одном направлении); всегда есть сколь угодно близкие к $f(p)$ точки, лежащие на касательной плоскости.

4) Точка **уплощения**.

$K = H = 0$. Локальная структура этой точки *не является квадратичной!* Строение поверхности в ней определяется старшими производными, и расположение ближайших точек относительно касательной плоскости может быть весьма разнообразным.

Пример. Обезьянье седло: $\varphi(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2$.

Параметрическое уравнение $f(x, y) = (x, y, x^3 - 3xy^2)^T$. Вторые производные $f(x, y)$ в т. $x = y = 0$ все обращаются в ноль, соответственно зануляется и матрица второй фундаментальной формы, кривизны $K = H = 0$, а значит $x = y = 0$ — точка уплощения. Точка эта для обезьяньего седла отчасти напоминает точку перевала, но не совсем обычного — из нее

можно спускаться в 3 долины или подниматься на 3 горы. Само название поверхности с этим и связано — с такого седла обезьяна может удобно свесить не только две ноги, но еще и хвост.

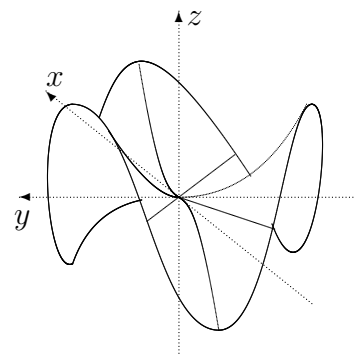


Рис. 44. Обезьянье седло

Как видно из проведенного рассмотрения, тип точки можно определить по внешнему виду поверхности — а именно, по поведению касательной плоскости.

Каким условиям должны удовлетворять точки на гиперповерхности, чтобы она являлась плоскостью или сферой?

О. Точка $f(p)$ на гиперповерхности $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ называется **омбилической**, когда в ней выполняется одно из трех эквивалентных требований:

- 1) $k_1 = k_2 = \dots = k_n$ — все нормальные кривизны равны;
- 2) L_p — скалярный оператор, $L_p = k(p) \cdot I$;
- 3) все ненулевые вектора из касательного пространства $T_p f$ являются главными направлениями.

Т. (б/д). Если $n \geq 2$, область $U \subseteq \mathbb{R}^n$ односвязна и у гиперповерхности $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ все точки омбилические, то образ $f(U)$:

- плоскость или ее часть ($k = 0$)
- сфера или ее часть ($k \neq 0$)

§10. Нормальная кривизна. Асимптотические линии

Выше мы рассмотрели кривизны, отвечающие главным направлениям (собственным векторам оператора L_p). Здесь мы рассмотрим задачу о нахождении кривизны в произвольном направлении вдоль гиперповерхности.

Утверждение. Пусть $\alpha(t)$ — кривая вдоль гиперповерхности $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ и $\alpha(t_0) = f(p)$, тогда

$$II_p(\dot{\alpha}, \dot{\alpha}) = \langle \ddot{\alpha}(t_0), \vec{N}(p) \rangle.$$

Доказательство.

Рассмотрим кривую $\alpha(t) = f(u(t))$, где $u(t) = (u^1(t), \dots, u^n(t))$ — кривая в области $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Т.к. $\dot{\alpha}(t) \in T_p f$, то $\langle \dot{\alpha}(t), \vec{N}(p) \rangle = 0$. Продифференцируем это соотношение:

$$\langle \ddot{\alpha}(t), \vec{N}(p) \rangle + \langle \dot{\alpha}(t), \dot{\vec{N}}(p) \rangle = 0.$$

Найдем производную $\dot{\vec{N}}(p)$, воспользовавшись определением оператора \hat{L}_p , $\hat{L}_p f'_{u^i} = -\vec{N}'_{u^i}$:

$$\dot{\vec{N}}(p) = \dot{\vec{N}}(u(t)) = \vec{N}'_{u^i} \dot{u}^i = -\hat{L}_p(\dot{u}^i f'_{u^i}) = -\hat{L}_p \dot{\alpha}.$$

Фиксируя значение параметра, окончательно получим

$$\langle \ddot{\alpha}(t_0), \vec{N}(p) \rangle = -\langle \dot{\alpha}(t_0), \dot{\vec{N}}(p) \rangle = \langle \dot{\alpha}(t_0), \hat{L}_p \dot{\alpha}(t_0) \rangle = \Pi_p(\dot{\alpha}, \dot{\alpha}).$$

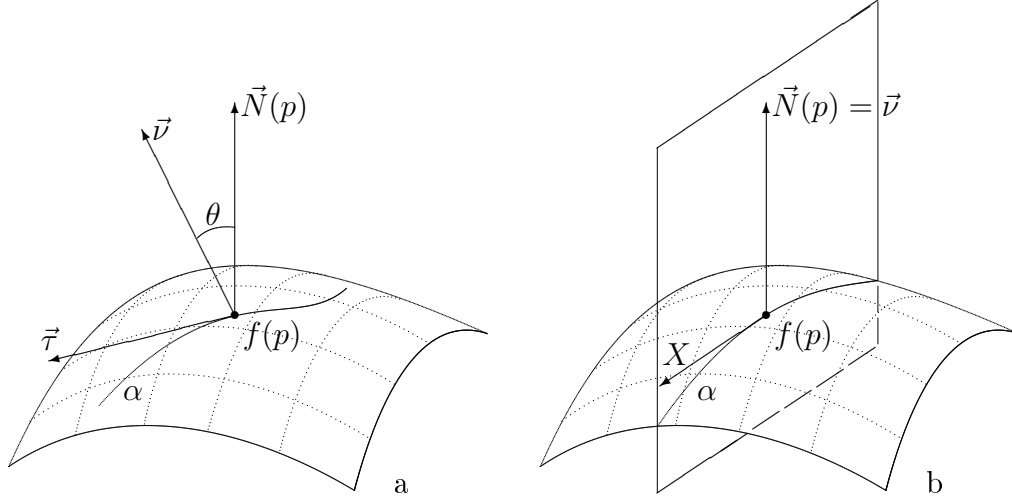


Рис. 45. а – кривая вдоль поверхности, b – нормальное сечение гиперповерхности

Т. Мёнье⁸. Пусть $\alpha(t)$ – кривая вдоль поверхности $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(t_0) = f(p)$ и θ – угол между векторами $\vec{N}(p)$ и $\vec{v}(t_0)$ (рис.45а). Тогда

$$k \cos \theta = \frac{\Pi_p(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})}{I_p(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})}, \quad (19)$$

где k – кривизна кривой $\alpha(t)$ при $t = t_0$.

Доказательство. $\Pi_p(\dot{\alpha}, \dot{\alpha}) = \langle \ddot{\alpha}, \vec{N} \rangle = \langle |\dot{\alpha}| \bullet \vec{\tau} + |\dot{\alpha}| \dot{\vec{\tau}}, \vec{N} \rangle = |\dot{\alpha}|^2 k \langle \vec{v}, \vec{N} \rangle = I_p(\dot{\alpha}, \dot{\alpha}) k \cos \theta$.

Здесь мы воспользовались уравнением Френе $\dot{\vec{\tau}} = |\dot{\alpha}| k \vec{v}$ и соотношениями $\langle \vec{v}, \vec{N} \rangle = \cos \theta$, $\langle \vec{\tau}, \vec{N} \rangle = 0$, $I_p(\dot{\alpha}, \dot{\alpha}) = |\dot{\alpha}|^2$.

Формула (19) содержит как характеристики поверхности, так и характеристики кривой, нас же здесь интересует поверхность, а именно, кривизна поверхности в некотором направлении.

Нормальная плоскость к гиперповерхности – это плоскость, натянутая на вектор \vec{N} и некоторый касательный вектор \vec{x} из $T_p f$ (рис.45b).

Кривая $\alpha(t)$, являющаяся пересечением $f(U)$ и некоторой нормальной плоскости гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, называется *нормальным сечением*. Для нормального сечения $\vec{v} = \pm \vec{N}$ (т.к. кривая $\alpha(t)$ является плоской),

$$k = \pm \frac{\Pi_p(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})}{I_p(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})}.$$

Нормальное сечение называется *вогнутым*, если $\vec{v} \uparrow \uparrow \vec{N}$, и *выпуклым*, если $\vec{v} \uparrow \downarrow \vec{N}$.

⁸Жан Батист Мёнье (1754-1793) – французский математик, дивизионный генерал. Считается изобретателем дирижабля.

Нормальной кривизной гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ в точке $p \in U$ в направлении вектора $\vec{x} \in T_p f$ называется число

$$k_N(\vec{x}) = \frac{II_p(\vec{x}, \vec{x})}{I_p(\vec{x}, \vec{x})}.$$

Если \vec{x}_i — главное направление, то $k_N(\vec{x}_i) = k_i$. Действительно,

$$k_N(\vec{x}_i) = \frac{\langle L_p \vec{x}_i, \vec{x}_i \rangle}{\langle \vec{x}_i, \vec{x}_i \rangle} = \frac{\langle k_i \vec{x}_i, \vec{x}_i \rangle}{\langle \vec{x}_i, \vec{x}_i \rangle} = k_i.$$

Отсюда виден геометрический смысл второй фундаментальной формы: ее значение $II_p(\vec{x}, \vec{x})$ на единичном векторе \vec{x} — это кривизна в направлении, им задаваемом.

Т. Пусть $\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n \in T_p f$ — ортонормированный базис из главных направлений гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $k_1 \dots k_n$ — главные нормальные кривизны. Пусть $\vec{x} \in T_p f$ — ненулевой вектор, образующий углы $\theta_1, \dots, \theta_n$ с $\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n$ соответственно. Тогда

$$k_N(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n k_i \cos^2 \theta_i$$

Доказательство. Рассмотрим единичный вектор $\vec{x} \in T_p f$, $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \vec{x}_i \cos \theta_i$, где $\cos \theta_i$ — направляющие косинусы, $|\vec{x}|^2 = I_p(\vec{x}, \vec{x}) = 1$.

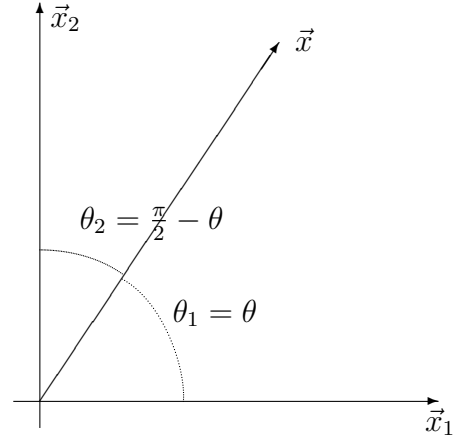


Рис. 46. Углы между \vec{x} и главными направлениями

$$\begin{aligned} k_N(\vec{x}) &= \frac{II_p(\vec{x}, \vec{x})}{I_p(\vec{x}, \vec{x})} = II_p(\vec{x}, \vec{x}) = II_p\left(\sum_{i=1}^n \vec{x}_i \cos \theta_i, \sum_{j=1}^n \vec{x}_j \cos \theta_j\right) \\ &= \sum_{i,j} \cos \theta_i \cos \theta_j II_p(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \sum_{i=1}^n k_i \cos^2 \theta_i, \end{aligned}$$

где мы учли, что $II_p(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \langle L_p(\vec{x}_i), \vec{x}_j \rangle = k_i \langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle = k_i \delta_{ij}$.

Частный случай — формула Эйлера для $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ — двумерной поверхности в трехмерном пространстве.

В этом случае $\cos \theta_2 = \pm \sin \theta_1$, см. рис.46.

$$k_N(\vec{x}) = k_1 \cos^2 \theta_1 + k_2 \sin^2 \theta_1 = k_1 + (k_2 - k_1) \sin^2 \theta.$$

Отсюда видно, что k_1 и k_2 — экстремальные значения кривизны, достигаемые на двух взаимноперпендикулярных направлениях.

Понятие асимптотических векторов. Ненулевой вектор $\vec{x} \in T_p f$ называется асимптотическим, если $k_N(\vec{x}) = 0$, то есть если в его направлении кривизна равна 0. Очевидно,

$$\text{вектор } \vec{x} \text{ является асимптотическим} \Leftrightarrow II_p(\vec{x}, \vec{x}) = 0.$$

О. Кривая $\alpha(t) : I \rightarrow f(U)$ вдоль гиперповерхности $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, называется **асимптотической**, если для любого $t \in I$ ее касательный вектор $\dot{\alpha}(t)$ — асимптотический.

Любая прямая, лежащая на гиперповерхности, является асимптотической линией. Обратное неверно (контрпример — асимптотические линии на торе, являющиеся окружностями).

Не на всех поверхностях существуют асимптотические линии; например, их нет на сфере. Для двумерных поверхностей в \mathbb{R}^3 нормальные кривизны принимают промежуточные значения между главными кривизнами k_1 и k_2 . Соответственно,

- в эллиптических точках асимптотических направлений нет,
- в параболических точках асимптотическое направление одно,
- в гиперболических точках асимптотических направлений два.

Большее количество асимптотических направлений может быть в точках уплощения (в случае обезьяного седла их три).

Т. Бонне (б/д). Всякая гиперповерхность однозначно (с точностью до изометрии объемлющего пространства) определяется своими I и II фундаментальными формами.

Т. (Леви-Чивита⁹, 1906 г.) (б/д) Пусть $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ – гиперповерхность четной размерности, т.е. $n = 2s$, $s \in \mathbb{N}$. Тогда ее полная кривизна K является свойством внутренней геометрии.

Иными словами, полная (Гауссова) кривизна (равная определителю основного оператора гиперповерхности) в этом случае может быть выражена только через метрику g_{ij} . Для случая двумерных поверхностей в трехмерном пространстве теорема была доказана К.Гауссом (1828 г.) Гаусс называл ее “theorema egregium” – блистательная теорема. Она говорит нам о том, что даже не выходя из поверхности “наружу”, мы можем узнать ее полную кривизну. А коэффициенты первой и второй фундаментальных форм не являются независимыми друг от друга.

Согласно этой теореме, полные кривизны у изометричных четномерных поверхностей в соответствующих точках совпадают. Примером таких изометричных поверхностей нулевой полной кривизны являются плоскость, цилиндр, конус и все другие, которые можно получить изгибанием (без разрывов и растяжений) листа бумаги. Поверхности, у которых полные кривизны не совпадают, изометричными быть не могут – в частности, даже малый участок сферы невозможно без разрывов и растяжений наложить на плоскость.

Четномерным является и четырехмерное пространство-время – пространство Минковского. Поэтому полная кривизна пространства-времени также является свойством внутренней геометрии – свойством, которое можно экспериментально определить, не выходя за пределы пространства.

§11. Движение репера вдоль поверхности. Коэффициенты связности

Рассматривая кривые, мы с каждой точкой кривой соотносили репер, базисные вектора которого определялись “поведением” этой кривой. Исследуя кривые, мы анализировали поведение подвижного репера Френе при его движении вдоль кривой.

С каждой точкой поверхности мы также можем соотнести репер, определяемый ее свойствами, и исследовать саму поверхность, изучая реперы при движении вдоль поверхности.

Стандартный подвижный репер вдоль поверхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – это совокупность реперов окружающего пространства \mathbb{R}^m :

$$\{f(p); f'_{u^1}(p), f'_{u^2}(p), \dots, f'_{u^n}(p); \vec{N}_{n+1}(p), \dots, \vec{N}_m(p)\}, \quad p \in U. \quad (20)$$

Вектора $f'_{u^1}(p), f'_{u^2}(p), \dots, f'_{u^n}(p)$ в каждой точке образуют стандартный базис касательного пространства $T_p f$. Вектора $\vec{N}_{n+1}(p), \dots, \vec{N}_m(p)$ образуют базис ортогонального дополнения $(T_p f)^\perp$ к $T_p f$. Для гиперповерхностей в каждой точке имеется только один единичный нормальный вектор \vec{N} .

⁹Туллио Леви-Чивита (1873-1941) – итальянский математик, основные работы в области тензорного исчисления и теории относительности.

Нам уже хорошо известен частный случай гиперповерхности – кривая в \mathbb{R}^2 , привлекательный своей простотой и наглядностью. Репер Френе $(\alpha(t); \vec{\tau}(t), \vec{\nu}(t))$ включает в себя два единичных вектора – касательный $\vec{\tau}(t)$ и нормальный $\vec{\nu}(t)$, а уравнения Френе

$$\begin{cases} \dot{\vec{\tau}}(t) = |\dot{\alpha}(t)|k(t)\vec{\nu}(t) \\ \dot{\vec{\nu}}(t) = |\dot{\alpha}(t)|(-k(t))\vec{\tau}(t), \end{cases}$$

представляют собой разложение производных от базиса Френе по базису Френе.

Очевидно, что производные от векторов базиса

$$f'_{u^1}(p), f'_{u^2}(p), \dots, f'_{u^n}(p); \vec{N}_{n+1}(p), \dots, \vec{N}_m(p),$$

входящего в репер (20), можно разложить по этому же базису. Нашей задачей здесь является установление вида этого разложения. Можно сказать, что мы сейчас попытаемся написать аналоги уравнений Френе для поверхностей.

Аналог второго уравнения Френе для гиперповерхностей мы уже рассмотрели выше – это уравнение, записываемое с помощью основного оператора гиперповерхности

$$\vec{N}'_{u^i} = -\hat{L}_p f'_{u^i} = -(L_p)^k_i f'_{u^k} = -g^{kl} h_{li} f'_{u^k},$$

где \vec{N} – единичный нормальный к гиперповерхности вектор, $\vec{N} \perp T_p f$. В случае гиперповерхности в \mathbb{R}^n , $n > 2$, производная от единичного нормального вектора, как и в случае кривой в \mathbb{R}^2 , разлагается по базису касательного пространства. Отличие состоит в том, что для гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $n > 1$, вместо одной кривизны k мы имеем оператор L_p , собственными значениями которого k_1, \dots, k_n являются n кривизн, отвечающих главным направлениям (собственным векторам оператора).

В разложение же производных $f''_{u^i u^j}$ от векторов базиса касательного пространства $f'_{u^i}(p)$ при $n > 1$ войдут, вообще говоря, не только нормальные вектора из $(T_p f)^\perp$, но и сами вектора $f'_{u^i}(p)$ из $T_p f$.

О. Символами Кристоффеля первого рода называются функции

$$\Gamma_{ijk} = \langle f''_{u^i u^j}, f'_{u^k} \rangle.$$

Очевидно, что эти функции симметричны по первым двум индексам.

Т. Пусть $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – поверхность класса гладкости не ниже C^3 . Тогда в любой точке $p \in U$:

$$f''_{u^i u^j} = \Gamma_{ij}^k f'_{u^k} + \vec{N}_{ij}, \quad (21)$$

$$\text{где } \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right), \quad \vec{N}_{ij} \in (T_p f)^\perp \quad (22)$$

Для случая гиперповерхности ($m = n + 1$) $\vec{N}_{ij} = \langle f''_{u^i u^j}, \vec{N} \rangle \vec{N} = h_{ij} \vec{N}$, где h_{ij} – матричные элементы 2-й фундаментальной формы (см. (15)).

Коэффициенты связности (называемые также символами Кристоффеля второго рода) Γ_{ij}^k выражаются через коэффициенты первой фундаментальной формы g_{ml} , то есть определяются только внутренней геометрией поверхности. В уравнениях Френе (уравнениях для простейшего случая гиперповерхности – кривой в \mathbb{R}^2) эти коэффициенты равны нулю, т.к. производная от единичного касательного вектора кривой содержит только нормальную компоненту.

Доказательство. Найдем сначала связь между символами Кристоффеля 1-го и 2-го рода: $\Gamma_{ijk} = \langle f''_{u^i u^j}, f'_{u^k} \rangle = \langle \Gamma_{ij}^l f'_{u^l} + \vec{N}_{ij}, f'_{u^k} \rangle = \langle \Gamma_{ij}^l f'_{u^l}, f'_{u^k} \rangle = \Gamma_{ij}^l g_{lk}$. Домножая получившееся соотношение на обратную матрицу $g^{km} = [g^{-1}]^{km}$, $g_{ik} g^{km} = \delta_i^m$, получим

$$\Gamma_{ijk} g^{km} = \Gamma_{ij}^l g_{lk} g^{km} = \Gamma_{ij}^l \delta_l^m = \Gamma_{ij}^m.$$

Продифференцируем тождество $g_{ij} = \langle f'_{u_i}, f'_{u_j} \rangle$:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = \langle f''_{u_i u_l}, f'_{u_j} \rangle + \langle f'_{u_i}, f'_{u_j u_l} \rangle = \Gamma_{ilj} + \Gamma_{jli}.$$

Для нахождения Γ_{ijl} выпишем три равенства, заменяя индексы:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = \Gamma_{ilj} + \Gamma_{jli}, \quad \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} = \Gamma_{ijl} + \Gamma_{lji}, \quad \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} = \Gamma_{lij} + \Gamma_{jil}.$$

В силу симметричности символов Кристоффеля по первым двум индексам эти равенства содержат одинаковые слагаемые. Сложим второе и третье и вычтем из них первое:

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = 2\Gamma_{ijl},$$

откуда получим искомую формулу $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{km} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right)$.

§12. Ковариантное ускорение. Геодезические

Попробуем найти аналоги прямой на поверхности. Для этого сначала посмотрим, чем же замечательна прямая.

1. Отрезок прямой – кратчайший путь между двумя точками.

2. В механике тело движется равномерно по прямой $\alpha(t)$, если на него не действуют силы. Ускорение $\ddot{\alpha}(t)$ в этом случае равно нулю.

3. В любой точке прямая имеет один и тот же касательный вектор $\dot{\alpha}(t)$.

Последние два утверждения непосредственно связаны между собой: $\dot{\alpha}(t) = \text{const} \Leftrightarrow \ddot{\alpha}(t) = 0$.

Рассмотрим теперь сферу радиуса R – поверхность постоянной положительной кривизны $1/R$.

1. Кратчайшим путём между двумя точками является меньшая из двух дуг большой окружности сферы (т.е. окружности радиуса R), проходящей через эти точки.

2. На сфере материальная точка (шарик) будет двигаться по большой окружности сферы. При этом ускорение, очевидно, нулю равно не будет, но будет равно нулю проекция ускорения на касательную плоскость (центростремительное ускорение направлено к центру сферы).

3. Собственный касательный вектор переносится вдоль дуги большой окружности параллельно (т.е. остается касательным к ней).

О. Ковариантным ускорением кривой $\alpha(t) = f(u(t))$ называется ортогональная проекция ускорения $\ddot{\alpha}(t)$ на касательное пространство $T_{u(t)}f$.

Для нахождения ковариантного ускорения дважды продифференцируем уравнение $\alpha(t) = f(u(t))$ и воспользуемся уравнениями (21):

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= \dot{u}^i(t) f'_{u_i}(u(t)), \\ \ddot{\alpha}(t) &= \ddot{u}^i f'_{u_i}(u(t)) + \dot{u}^i \dot{u}^j f''_{u_i u_j}(u(t)) = \ddot{u}^k f'_{u_k} + \dot{u}^i \dot{u}^j (\Gamma_{ij}^k f'_{u_k} + N_{ij}) \\ &= (\ddot{u}^k + \dot{u}^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^k) f'_{u_k} + \dot{u}^i \dot{u}^j \vec{N}_{ij}. \end{aligned}$$

Для ковариантного ускорения – проекции $\ddot{\alpha}(t)$ на касательное пространство – получим:

$$\frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt} = (\ddot{u}^k + \dot{u}^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^k) f'_{u_k}.$$

Ковариантное ускорение является свойством внутренней геометрии поверхности.

О. Кривая $\alpha(u(t)) : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ вдоль поверхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется **геодезической**, если ее ковариантное ускорение тождественно равно нулю:

$$\frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt} = (\ddot{u}^k + \dot{u}^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^k) f'_{u_k} \equiv 0.$$

Эквивалентное определение – кривая $\alpha(u(t))$, для которой $\ddot{\alpha}(t) \perp T_{u(t)}f$. Отсюда следует, что $\frac{d|\dot{\alpha}|}{dt} = 2\langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha} \rangle = 0$, а, следовательно, длина касательного вектора вдоль геодезической $|\dot{\alpha}| = \text{const}$, то есть геодезическая является кривой постоянной скорости.

Для нахождения геодезических имеем систему n уравнений

$$\ddot{u}^k + \dot{u}^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^k = 0.$$

Если все $\Gamma_{ij}^k = 0$, что верно для плоскости и кругового цилиндра, то имеем $\ddot{u}^k = 0$, откуда $u^1 = u = at + b$, $u^2 = v = ct + d$. Для плоскости $f(u, v) = (u, v, 0)^T$ это прямые, для цилиндра $f(u, v) = (R \cos v, R \sin v, u)^T$ это в зависимости от значений параметров прямолинейные образующие ($c = 0$), большие окружности ($a = 0$) или винтовые линии.

§13. Параллельность и параллельный перенос

На плоскости, как и в пространстве \mathbb{R}^m , мы, как о само собой разумеющемся, говорим о параллельности векторов в *разных* точках. Можно ли говорить о параллельности векторов в *разных* точках произвольной поверхности?

Рассмотрим на примере сферы два разных пути параллельного переноса. Перенос этот будем делать интуитивно ясным способом по большим кругам, см. рис. 47.

В обоих случаях будем начинать с касательного вектора \vec{V} , расположенного на северном полюсе (точка A). Будем сначала переносить его вдоль большой дуги ABC , к которой он является касательным. Для того, чтобы вектор продолжал “лежать на сфере”, он должен оставаться в касательной плоскости, и если его не поворачивать относительно большой дуги, он придет в южный полюс (точку C) противоположно направленным с точки зрения наблюдателя из нашего 3-мерного мира. Если же переносить касательный вектор \vec{V} вдоль большой дуги ADC , перпендикулярной \vec{V} , в точке C получим вектор, сонаправленный исходному с точки зрения трехмерного мира.

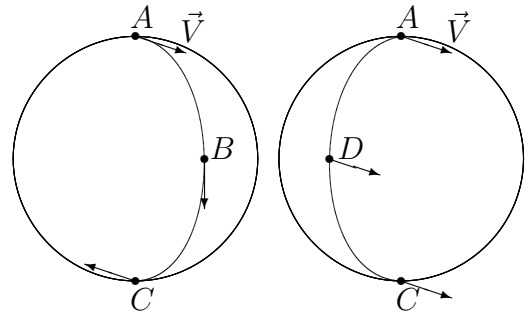


Рис. 47. Параллельный перенос на сфере

Взяв два разных пути, мы получили два противоположно направленных вектора! С точки свойств сферы как таковой преимуществ ни у одного из них нет. Если же переносить вектор в т. D двумя путями – по дуге AD и последовательно по двум дугам AB и BD – то в точке D между ними будет прямой угол. Этот пример показывает, что понятия параллельности векторов в *разных* точках поверхности (а, по сути, в разных касательных пространствах) просто нет.

Но можно определить понятие *параллельного переноса вдоль кривой*, чем мы и воспользовались. Фактически, в рассмотренном примере мы переносили вектор \vec{V} вдоль геодезических, сохраняя угол между этим вектором и касательным вектором геодезической.

Определить понятие параллельного переноса – движения вектора вдоль кривой без изменения его направления – позволяют коэффициенты связности Γ_{ij}^k . Чтобы записать уравнение переноса, нам понадобится понятие ковариантной производной.

§14. Поля на поверхностях. Ковариантное дифференцирование

До сих пор мы изучали исключительно поверхности как таковые. Но, как и в пространстве \mathbb{R}^n , на поверхности можно задать скалярное и векторное поля. Скалярное поле вдоль поверхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – это гладкая скалярная функция $\varphi(u)$, $u \in U$. Касательное векторное поле вдоль поверхности – это векторное поле $\vec{y}(u) = y^i(u)f'_{u^i}$.

Скорость изменения поля вдоль поверхности задается производной по направлению.

С определением производной скалярного поля сложностей не возникает, оно вполне аналогично случаю плоского пространства \mathbb{R}^m . Производной скалярного поля $\varphi(u)$ по направлению касательного вектора $\vec{x}(u) = x^i f'_{u^i}$ называется число

$$D_{\vec{x}}\varphi(u) = x^i \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u^i}.$$

Рассмотрим теперь производную касательного векторного поля вдоль поверхности f . В ортонормированном стандартном базисе \vec{e}_i пространства \mathbb{R}^m дифференцирование вектора $\vec{y} = y^i \vec{e}_i$ сводится к дифференцированию его компонент, $\frac{\partial \vec{y}}{\partial u^j} = \frac{\partial y^i}{\partial u^j} \vec{e}_i$.

Для поверхности сложность заключается в том, что касательные векторы в точках P и P' лежат в различных касательных пространствах $T_P f$ и $T_{P'} f$, их координаты вычислены в разных базисах. Соответственно, при дифференцировании мы должны учитывать изменения базисных элементов f'_{u^k} от точки к точке.

Продифференцируем вектор $\vec{y} = y^k(u)f'_{u^k}(u)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^j} (y^k f'_{u^k}) &= \frac{\partial y^k}{\partial u^j} f'_{u^k} + y^k \frac{\partial f'_{u^k}}{\partial u^j} = \frac{\partial y^k}{\partial u^j} f'_{u^k} + y^k (\Gamma_{kj}^l f'_{u^l} + \vec{N}_{kj}) \\ &= \frac{\partial y^k}{\partial u^j} f'_{u^k} + y^i (\Gamma_{ij}^k f'_{u^k} + \vec{N}_{ij}) = \left(\frac{\partial y^k}{\partial u^j} + y^i \Gamma_{ij}^k \right) f'_{u^k} + y^i \vec{N}_{ij}. \end{aligned}$$

Слагаемое, включающее коэффициент связности Γ_{ij}^k , появилось за счет дифференцирования векторов базиса касательного пространства, $\frac{\partial f'_{u^k}}{\partial u^j} = \Gamma_{kj}^l f'_{u^l} + \vec{N}_{kj}$, см. (21). Заметим, что полученная формула верна как для поверхностей, так и для криволинейных координат.

Ковариантная производная $D_j \vec{y}$ представляет собой проекцию получившегося вектора на касательное пространство, т.е. получается отбрасыванием нормальной составляющей.

Ковариантной производной вектора $\vec{y} = y^i f'_{u^i}$ вдоль вектора $\vec{x} = x^j f'_{u^j}$ называется касательный вектор

$$D_{\vec{x}} \vec{y} = x^j \left(\frac{\partial y^k}{\partial u^j} + y^i \Gamma_{ij}^k \right) f'_{u^k}. \quad (23)$$

Изменение базисных векторов от точки к точке привело к добавлению в ковариантной производной (по сравнению с обычной) члена $y^i \Gamma_{ij}^k$.

В случае отображения $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ нормальной составляющей нет, и ковариантная производная представляет собой запись обычной производной по направлению в криволинейных координатах.

Введенное выше ковариантное ускорение – это ковариантная производная касательного вектора $\dot{\alpha} = \dot{u}^i f'_{u^i}$ вдоль него самого:

$$D_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} = \dot{u}^j \left(\frac{\partial \dot{u}^k}{\partial u^j} + \dot{u}^i \Gamma_{ij}^k \right) f'_{u^k} = (\ddot{u}^k + \dot{u}^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^k) f'_{u^k} = \frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt}.$$

Это означает, что касательный вектор геодезической, определяемой уравнением $\frac{\nabla \dot{\alpha}}{dt} = D_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} = 0$, при параллельном переносе вдоль геодезической остается касательным вектором.

Для параллельного переноса произвольного вектора \vec{y} вдоль кривой $\alpha(t)$ имеем

$$D_{\dot{\alpha}}\vec{y} = \dot{u}^j \left(\frac{\partial y^k}{\partial u^j} + y^i \Gamma_{ij}^k \right) f'_{u^k} = \left(\frac{\partial y^k}{\partial t} + y^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^k \right) f'_{u^k} = 0,$$

откуда получим *уравнение параллельного переноса вектора \vec{y} вдоль кривой*

$$\frac{\partial y^k}{\partial t} + y^i \dot{u}^j \Gamma_{ij}^k = 0.$$

Рассмотрев движение репера вдоль поверхности, мы увидели, что его поведение описывается коэффициентами связности. С их помощью осуществляется параллельный перенос и дифференцирование векторов в искривленных пространствах.

Проведенное в последних параграфах рассмотрение служит углублению понимания классической теории поверхностей. Кроме того, оно в определенном смысле перекидывает “мостик” от классической дифференциальной геометрии кривых и поверхностей к более сложным разделам не только дифференциальной геометрии и тензорного анализа, но и теоретической физики, где физические поля представляют собой связности в расслоенных пространствах.