Теоретический минимум для экзамена по Дополнительным Главам Уравнений в Частных Производных

Х. С. Горы

Январь 2025 или типа того

0 Оправдание

Я вызвался писать этот документ будучи относительно пьяным. В трезвом уме я бы ни за что не согласился тратить на это время, потому что мне ультралень. Однако here we are. Пока что формат документа планируется следующий: просто переписать все определения и формулировки из каждой записанной лекции А.Б.Костина.

Поплакать об оформлении, попросить письменные конспекты, попросить в долг 500 рублей: t.me/diracseascrolls

1 Глава: Безымянная

◇ Лекция 1

1.1 Общие понятия и обозначения.

Ω – область в $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$

• $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \subset \mathbb{Z}_+$ – набор целых неотрицательных чисел – называется мультииндексом. $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$
$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$
$\alpha! = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \alpha_n$

• $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)
$\mathbb{D}_x^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \mathbb{D}_{x_1}^{\alpha_1} \cdot \mathbb{D}_{x_2}^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot \mathbb{D}_{x_n}^{\alpha_n} u$
Уравнение в частных производных:

$$F(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, \dots, \mathbb{D}_x^\alpha u, \dots) = 0$$

имеет порядок m, если $|\alpha| = m$, и не входят производные более высоких порядков.
Линейное уравнение:

$$\sum_{\alpha : |\alpha| \le m} a_\alpha(x) \mathbb{D}_x^\alpha u = 0$$

✓ Квазилинейное уравнение - линейное относительно старших производных.

Опр. 1.1.1 (Пространство $C^k(\Omega)$)**.** $\Omega \subset \mathbb{R}^n, u : \Omega \to \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+$
$u \in C^k(\Omega)$, если $u \in C(\Omega)$, и во всех внутренних точках Ω существуют все частные производные до порядка k включительно, которые по непрерывности продолжнаются на всё Ω.

При выводе уравнений теплопроводности и равновесия мембраны получаются интегральные тождества. Решение такого тождества называется обобщённым решением.

1.2 Распространение тепла в среде.

$G \subset \mathbb{R}^3$, $x \in G$, $u(x,t)$ - температура в точке.
ρ - плотность, c - удельная теплоёмкость, $k(x)$ - коэффициент (внутренней) теплопроводности.

Уравнение теплопроводности в интегральной формулировке:

$$\int_t^{t+\Delta t} dt \int_\Omega (\mathrm{div}(k\nabla u) + F - c\rho\frac{\partial u}{\partial t})dt = 0,\ \forall\Omega\ \forall\Delta t > 0$$

В дифференциальной формулировке:

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{div}(k\nabla u) = F,\ \forall t > 0\, \forall x \in G$$

Начальные и граничные условия: $u(x,0) = u_0(x), x \in G$ - нач. усл.
• Граничные условия 1 рода (температура):
$u(x,t) = u_1(x,1), x \in \partial G, t \geq 0$
• Граничные условия 2 рода (поток): $k\frac{\partial u}{\partial n} = u_2(x,t), x \in \partial G, t \geq 0$
• Граничные условия 3 рода (теплообмен): $k\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - u_e) = 0$

$\diamond$ Лекция 2

1.3 Равновесие мембраны.

Упругая тонкая плёнка. Проектируется на область Ω плоскости (x_1, x_2).
Потенциальная энергия для свободной границы:

$U = C + \frac{1}{2}\int_\Omega (k|\nabla u|^2 + au^2 + 2fu)dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(a_1u^2 - 2f_1u)ds_x$ (1)
(здесь $C = (U_0 - A_1^0 - A_2^0 - A_3^0)$)
Условие закрепления границы: $u(x) = \varphi(x)\ x \in \partial\Omega$ (2)
Потенциальная энергия с фиксированной границей:
$U = C_1 + \frac{1}{2}\int_\Omega (k|\nabla u|^2 + au^2 - 2fu)dx$ (3)

Минимизируя какой-то функционал, получаем интегральное тождество (обобщённая формулировка задачи равновесия мембраны):

$$\int_\Omega (k(\nabla u, \nabla v) + auv - fv)dx = 0,\ \forall v \in C^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0$$

Для задачи со свободной границей:

$$\int_\Omega (k(\nabla u, \nabla v) + auv - fv)dx + \int_{\partial\Omega} (a_1 uv - f_1 v)ds_x = 0,\ \forall v \in C^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0$$

✓ Можно показать, что эти задачи эквивалентны.

Уравнение равновесия мембраны в дифференциальной форме:

$$\begin{cases} \text{-div}(k\nabla u) + a \cdot u = f,\ x \in \Omega \\ \text{u(x)} = \varphi(x),\ x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

Для задачи со свободной границей:

$$\begin{cases} \text{-div}(k\nabla u) + a \cdot u = f,\ x \in \Omega \\ \text{k}\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + a_1 u = f_1,\ x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

⋄ Лекция 3

1.4 Колебания мембраны.

Интегральное тождество, описывающее колебания мембраны:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega (\rho u_t v_t - k(\nabla u, \nabla v) - auv + fv)dxdt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} (a_1 u - f_1)v ds_x dt = 0,$$

$\forall t_1, t_2,\ \forall v \in C^1(\bar{\Omega} \times [0, +\infty)), v|_{t=t_1} = v|_{t=t_2} = 0$

Дифференциальная формулировка тождества (Уравнение колебаний мембраны):

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - \operatorname{div}(k\nabla u) + au = f, \ x \in \Omega, t > 0 \\ \text{Н.у.: k } \dfrac{\partial u}{\partial n} + a_1 u = f_1, \ x \in \partial\Omega, t > 0 \\ \text{Гр.у.: u(x,0)} = \mathrm{u}_0(x), \ u_t(x,0) = u_1(x), x \in \bar{\Omega} \end{cases} \tag{3}$$

✓ Можно доказать, что эта задача эквивалентна задаче поиска минимума некоторого функционала, как для прошлой задачи.

2 Глава: Некоторые вопросы общей теории УрЧП.

2.1 Задача Коши. Теорема Ковалевской.

В этой главе (или хотя бы в этом параграфе) n пространственных переменных и время:
$u = u(x,t), \alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+$,
$\mathbb{D}^\alpha u = \mathbb{D}_t^{\alpha_0} \mathbb{D}_{x_1}^{\alpha_1} \dots \mathbb{D}_{x_n}^{\alpha_n} u$

Ставится задача Коши для дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^k u}{\partial t^k} = \sum\limits_{\substack{|\alpha| \le k \\ \alpha_0 < k}} a_\alpha(x,t) \mathbb{D}^\alpha u + f(x,t) \\ \text{н.у.: } \left. \dfrac{\partial^m u}{\partial t^m} \right|_{t=t^0} = \varphi_m(x), \ \forall m = 0, 1, \dots, k-1 \end{cases} \tag{4}$$

✓ Такое уравнение называют линейным уравнением типа Ковалевской.

Опр. 2.1.1. *Пусть $F : \Omega \to \mathbb{C}, \Omega \subset \mathbb{R}^n, x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$. Функция F называется аналитической в точке $x_0 \in \Omega$, если она раскладывается в* *некоторой окрестности точки x_0 в абсолютно сходящийся степенной ряд.*

$$F(x) = \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} A_{\alpha 1 \ldots \alpha_n} (x-x_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (x-x_n)^{\alpha_n}$$

В терминах мультииндексов:

$$F(x) = \sum_{\alpha} A_\alpha (x-x^0)^\alpha$$

Теор. 2.1.1 (Коши-Ковалевской о локальной разрешимости и единственности решения задачи Коши)**.** *Если функции $a_\alpha(x,t)$,$f(x,t)$ аналитические в окрестности т. $(x^0,t^0),\ x^0 \in \Omega,\ t^0 \in (a,b)$, а все функции $\varphi_m(x)$ аналитические в окр-ти x^0, то в некоторой окр-ти т. (x^0,t^0) существует аналитическое решение $u(x,t)$, которое единственно в классе аналитических функций.*

$\diamond$ Лекция 4

Система типа Ковалевской (нормальная система): $i = 1, 2, \ldots, N$

$$\frac{\partial^n u_i}{\partial t^{n_i}} = F_i(x, t, u, \ldots, \frac{\partial^{|\tilde{\alpha}|} u_j}{\partial t^{\alpha_0} \cdot \partial x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}}, \ldots),$$

где n_i - наивысший порядок производной функции u_i, входящей в i уравнение по переменной t.
$|\tilde{\alpha}| = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,\ \alpha_0 < n_j,\ |\tilde{\alpha}| \le n_j$
Условия: 1) производная наивысшего порядка по переменной t должна обязательно содержаться в i-том уравнении, 2) производная должна явно выражаться через оставшиеся. (То есть, система является разрешённой относительно старших производных по переменной t.

Начальные условия: $\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k}(x,t^0) = \varphi_{i,k}(x),\ \forall k = 0, \ldots, n_i - 1,\ \forall i = \overline{1..N}$

Теор. 2.1.2 (О локальной разрешимости и единственности решения задачи Коши для системы). *Пусть функции $\varphi_{i,k}$ аналитические в окрестности x^0, функции F_i - аналитические своих аргументов в окрестности $(x^0, t^0, u(x^0, t^0), \dots, \dfrac{\partial^{|\tilde{\alpha}|} u_j}{\partial t^{\alpha_0} \cdot \partial x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}}(x^0, t^0), \dots)$. Тогда задача Коши имеет аналитическое решение в окрестности (x^0, t^0), которое единственно в классе аналиических вектор-функций.*

◇ Лекция 5

2.2 Пример отсутствия аналитического решения задачи уравнения теплопроводности

У этой задачи не существует решения, аналитического в окрестности $(0, 0)$:

$$\begin{cases} \mathrm{u}_t = u_{xx},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ \mathrm{u(x,0)} = 1_{\overline{1+x^2,\ x\in\mathbb{R}}} \end{cases} \tag{5}$$

Это решение:

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4t}} \dfrac{1}{1+\xi^2} d\xi,\ t > 0 \\ \dfrac{1}{1+x^2},\ t = 0. \end{cases} \tag{6}$$

не является аналитическим, но является единственным в классе ограниченных функций.

2.3 Характеристики и характеристические направления.

Уравнение $\sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) \mathbb{D}^\alpha u = f(x)$. Поверхность $S : F(x) = 0$, $F \in C^1, |\nabla F| \neq 0\ \forall x \in S$. Тогда существует нормаль $n = n(x)$.

Опр. 2.3.1 (Характеристическая поверхность). *Гладкая поверхность S, для которой выполняется равенство*
$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)(\frac{\partial F}{\partial x_0})^{\alpha_0}(\frac{\partial F}{\partial x_1})^{\alpha_1}\ldots(\frac{\partial F}{\partial x_n})^{\alpha_n} \equiv \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)(\nabla F)^\alpha = 0$
называется характеристической поверхностью для уравнения (1), или просто характеристикой.

✓ Коэффициент перед $\frac{\partial^m v(y)}{\partial y_0^m}$ на S обращается в 0.

◇ Лекция 6

Опр. 2.3.2. *Для уравнения (1) построим многочлен $n+1$ переменной $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$: $(3) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$. Многочлен (3) называют полным символом уравнения (1), а $(4) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ - главным символом (1).*

✓ Иногда в этом определении заменяют $\xi \to i\xi$.

Опр. 2.3.3. *Вектор $\xi \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\theta\}$ задаёт характеристическое направление уравнения (1) в т. x, если главный символ уравнения обращается в 0 на ξ. ($\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha = 0$)*

2.4 Классификация уравнений и систем УрЧП. Эллиптические, гиперболические и параболические системы.

Опр. 2.4.1 (Эллиптическое уравнение). *Уравнение называется эллиптическим в т. x, если $\forall \xi \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\theta\}$ выполнено*
$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \neq 0$.

✓ Альтернативная формулировка: уравнение не имеет характеристических направлений.

Опр. 2.4.2 (Гиперболическое уравнение). *Уравнение называется гиперболическим в т. x, если его хар. уравнение $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha = 0$ имеет только действ. корни отн-но ξ_0 при $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta\}$*

$\diamond$ Лекция 7

Опр. 2.4.3 (Параболическое уравнение)**.** *Уравнение называется параболическим (по Петровскому) в т. x, если $\exists\, p \in \mathbb{N}$, т. ч. относительно ξ_0 все действительные части всех корней уравнения*

$$\sum_{|\alpha'|+p\cdot\alpha_0=m} a_\alpha\left(x_0, x'\right)\xi_0^{\alpha_0}\cdot\left(i\xi'\right)^{\alpha'}=0$$

отрицательны при всех $|\xi'|=1$, где $\xi' \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta\}$

Система:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_0}=\sum_{j=1}^N \sum_{|\alpha|\leq n_j} a_{ij}^\alpha(x)\frac{\partial^\alpha u_j}{\partial x_0^{\alpha_0}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}=f_i(x), i=1,2,\ldots,N$$

Опр. 2.4.4 (Эллиптическая система)**.** *называется эллиптической, если $\forall\xi \in \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{\theta\}$ выполнено:* $\det\left(\sum_{|a|=n_j} a_{ij}^\alpha(x)\xi_0^{\alpha_0}\ldots\cdot\xi_n^{\alpha_n}\right)\neq 0.$

Опр. 2.4.5 (Гиперболическая система)**.** *называется гиперболической в т. x, если $\forall\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{\theta\}$ в определителе* $\det\left(\sum_{|a|=n_j} a_{ij}^\alpha(x)\xi_0^{\alpha_0}\cdot\xi_1^{\alpha_1}\ldots\cdot\xi_n^{\alpha_n}\right)$ *все корни относительно действительных переменных ξ_0 только действительные.*

Опр. 2.4.6 (Параболическая система)**.** *называется параболической в т. x, если $\forall|\xi'|=1$, где $\xi'=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{\theta\}$ в определителе* $\det\left(\sum_{|a|=2\cdot m}(-1)^m a_{ij}^\alpha(x)\xi_1^{\alpha_1}\ldots\cdot\xi_n^{\alpha_n}-\xi_0\cdot\delta_{ij}\right)$ *все корни относительно переменных ξ_0 имеют отрицательную действительную часть.*

✓ *Определение в терминах оператора $\mathbb{L}(x,\mathbb{D})$ выходит за рамки настоящего теоретического минимума.*

Линейное уравнение 2 порядка:

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=0}^{n} f_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)\cdot u = f(x), x \in \mathbb{R}^{n+1}$$

В точке x_0 вещественная симметрическая матрица:
$A_0 = A(x_0) = (a_{ij}(x_0))$ имеет $n+1$ собственное значение λ_i. p - положит. собств. значений, q - отрицательных и r - нулевых. •
Система называется эллиптической, если $(p = n+1)$ или $(q = n+1)$.

- *Система называется параболической, если $(p = n, q = 0, r = 1)$ или $(p = 0, q = n, r = 1)$.*
- *Система называется гиперболической, если $(p = n, q = 1, r = 0)$ или $(p = 1, q = n, r = 0)$.*
- *Система называется ультрагиперболической, если $(p \geq 2, q \geq 2, p + q = n + 1)$.*

✓ *Линейными преобразованиями эти уравнения приводятся к каноническому виду.*

Канонический вид ***эллиптич.*** *уравнения:*

$$\pm\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{u}^2}{\partial y_k^2} + \sum_{k=0}^{n} \tilde{b}_k \cdot \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial y_k} + \tilde{c}\cdot\tilde{u} = \tilde{f}(y)$$

Канонический вид ***параболич.*** *уравнения:*

$$\pm\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{u}^2}{\partial {y_k}^2} + \sum_{k=0}^{n} \tilde{b}_k \cdot \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial y_k} + \tilde{c}\cdot\tilde{u} = \tilde{f}(y)$$

Канонический вид ***гиперболич.*** *и* ***ультрагиперболич.*** *уравнения:*

$\pm\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{u}^2}{\partial y_k^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_0^2}\right) + \sum_{k=0}^{n} \tilde{b}_k \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_k} + \tilde{c}\cdot\tilde{u} = \tilde{f}(y)$

$1 \leqslant m \leqslant n-2 \quad \sum_{k=0}^{m} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_k^2} - \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_k^2} = \tilde{f}(y)$