

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
FÍSICA

Gabriel Riato de Andrade Silva

Investigação analítica e numérica do
efeito termoacústico com
campo magnético

Santo André – 2019

Gabriel Riato de Andrade Silva

Investigação analítica e numérica do efeito termoacústico com campo magnético

Dissertação apresentada ao programa de pós graduação em
Física da Universidade Federal do ABC, como requisito
parcial a obtenção do título de mestre em Física.

Linha de pesquisa: Mecânica de Fluidos.

Orientador: Profº Drº Francisco Eugenio

Mendonça da Silveira

Santo André – SP

2019

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Riato de Andrade Silva, Gabriel

Investigação analítica e numérica do efeito termoacústico com
campo magnético / Gabriel Riato de Andrade Silva. — 2019.

108 fls. : il.

Orientador: Francisco Eugenio Mendonça da Silveira

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Programa
de Pós-Graduação em Física, Santo André, 2019.

1. Mecânica de Fluídos. 2. Termodinâmica. 3. magnetismo em fluido
condutor. I. Mendonça da Silveira, Francisco Eugenio. II. Programa
de Pós-Graduação em Física, 2019. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação a versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor, e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 11 de Outubro de 2019,

Assinatura do autor: 

Assinatura do orientador: 



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Fundação Universidade Federal do ABC

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 - Fone: (11) 4996-0017

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato, GABRIEL RIATO DE ANDRADE SILVA realizada em 11 de Setembro 2019:

Prof.(a) Dr.(a) CELIO ADREGA DE MOURA JUNIOR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) ZWINGLIO DE OLIVEIRA GUIMARÃES FILHO
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO - Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) JOSE ANTONIO SOUZA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) JOSÉ HELDER FACUNDO SEVERO
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO - Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) FRANCISCO EUGENIO MENDONÇA DA SILVEIRA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

Dedicatória

A um homem sábio que eu conheci: meu pai.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço minha família, sem a qual nunca chegaria aqui. Agradeço ao Francisco, pela paciência e esforço. Agradeço meus amigos e todos que me ajudaram neste período, me motivaram quando eu estava triste, e acreditaram em mim, mesmo quando nem eu acreditava mais.

Agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro e a UFABC, particularmente a ProPG e a ProGrad, que sempre me atenderam em tudo que foi possível. Muito obrigado.

RESUMO

Estudamos oscilações termo acústicas em fluidos condutores, provocadas por gradientes de temperatura em tubos cilíndricos. Levamos em conta uma viscosidade finita para o fluído no tubo, mas desprezamos qualquer resistividade elétrica finita. Estendemos o modelo usual para fluidos não condutores, incluindo oscilações acopladas a um campo magnético. Usamos a teoria de perturbação linear para investigar o sistema resultante de equações diferenciais parciais, reduzindo-o a uma única equação. Finalmente, procedemos a um estudo numérico das soluções destas equações.

Palavras-chave: oscilações termo acústicas, fluido condutor

ABSTRACT

We study thermoacoustic oscillations in conducting fluids, provoked by temperature gradients in cylindrical tubes. We take into account a finite viscosity for the fluid in the tube, but neglect any finite electric resistivity. We extend the usual model for nonconducting fluids, by including oscillations coupled to a magnetic field. We use the linear perturbation theory to investigate the resulting system of partial differential equations, reducing it to a single equation. Finally, we proceed to a numerical study of the solutions of those equations.

Keywords: thermoacoustic oscillations, conducting fluid

SUMÁRIO

1. Introdução	
1.1 Definição e história	13
1.2 Motivações	17
2. O modelo de Rott	20
3. Efeito magneto-termoacústico	39
4. Um <i>toy model</i>	47
5. Modelagem computacional	
5.1 Efeito termoacústico	54
5.2 Efeito magneto-termoacústico	69
6. Discussão dos resultados	77
7. Conclusões e perspectivas	81
8. Referências	83
9. Apêndice I: obtendo as equações perturbadas	85
10. Apêndice II: alguns códigos fonte	91
11. Apêndice III: justificando a equação de estado para um líquido	108

Capítulo 1

Introdução

1.1) Definição e história

Oscilações termoacústicas ocorrem tipicamente em geometria cilíndrica; sob um forte gradiente de temperatura axial, em tubos cujo comprimento é muito maior que o diâmetro (razão de aspecto $L/D \gg 1$). Usualmente, existe uma relação entre o gradiente de temperatura e essa razão de aspecto.

Fabricantes de vidrarias foram talvez os primeiros a reportar o fenômeno [1].

O efeito, contudo, só passou a despertar algum interesse na comunidade científica na segunda metade do século XIX.

Em 1850 o alemão Karl Friedrich Sondhauss chamou a atenção para o fenômeno em um artigo publicado na revista *Annalen der Physik* [13].

O artigo incentivou o holandês Pieter Leonardus Rijke a conduzir uma série de experimentos [14].

Rijke foi possivelmente o primeiro a usar uma resistência elétrica para manter o gradiente de temperatura e sustentar o som indefinidamente.

Tubo aberto

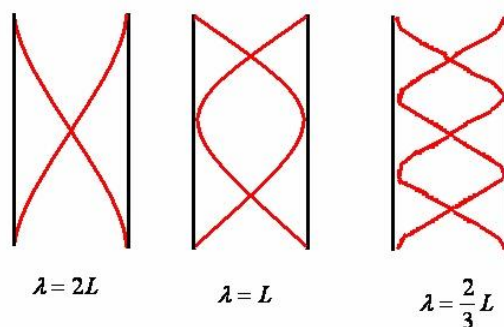


Figura 1.1 – tubo de meia onda

O experimento usando um tubo com ambas extremidades abertas, comportando

meia onda em seu harmônico fundamental, ficou conhecido como tubo de *Rijke*.

Tubo fechado

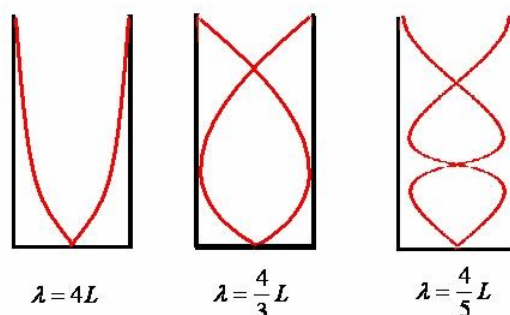


Figura 1.2 – tubo de $\frac{1}{4}$ de onda

O tubo de $\frac{1}{4}$ de onda, com uma extremidade aberta e outra fechada, ficou conhecido como *tubo de Sondhauss*.

Sobre este fenômeno Lord Rayleigh afirmou em 1896: “*Se o calor for adicionado no momento de maior condensação e/ou retirado no momento de maior rarefação a oscilação é incentivada*” [2].

Os primeiros modelos matemáticos foram elaborados por Gustav Kirchoff em 1868 e Hendrik Kramers em 1949. Partiam basicamente da equação de Euler, no máximo considerando viscosidade apenas ao redor da camada limite adjacente a parede do tubo [1].

No século XX o interesse pelo fenômeno reapareceu em função de experimentos com hélio liquefeito. A montagem de um experimento típico desses pode considerar o tubo em contato com dois reservatórios térmicos: um quente e um frio. O tubo pode ser de $\frac{1}{2}$ onda, $\frac{1}{4}$, fechado, ou em um loop toroidal. As figuras a seguir mostram alguns arranjos típicos:

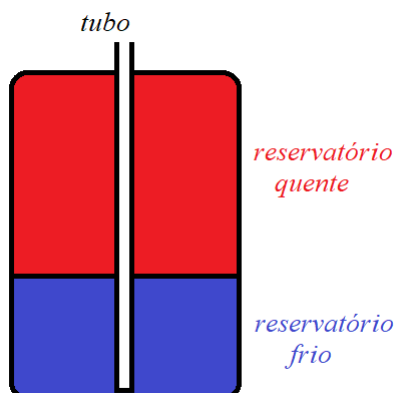


Figura 1.3.1 – um arranjo experimental básico para observação do fenômeno

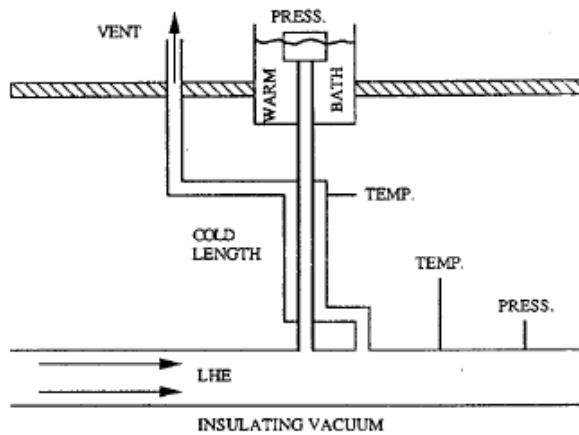


Figura 1.3.2 – experimento realizado por pesquisadores do Fermilab em 1990 [6] . Parte da extensão do tubo era mantida na temperatura do hélio líquido, enquanto outra parte ficava em contato com um “banho quente” – que poderia ser de gelo, gelo seco ou água fervendo.

O primeiro modelo matemático consistente com dados experimentais foi elaborado pelo suíço Nikolaus Rott em 1969 [1]. Uma comparação das previsões de Rott com dados experimentais pode ser vista nos gráficos a seguir, obtidos com o arranjo experimental ilustrado na figura 1.3.2.

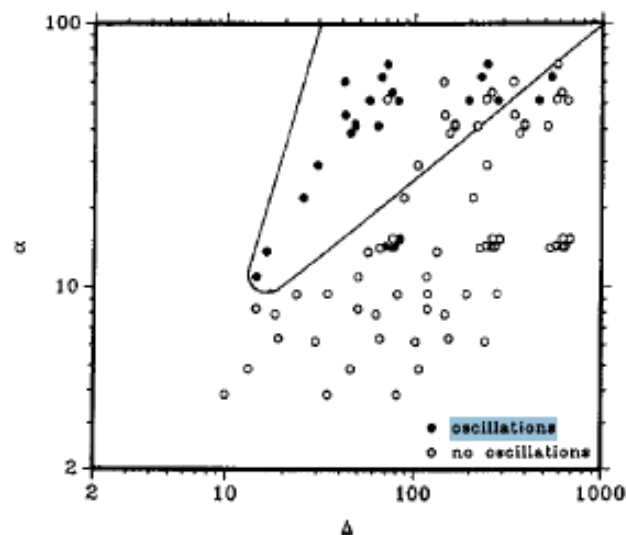


Figure 2: Data for length ratio $\zeta = 0.3$

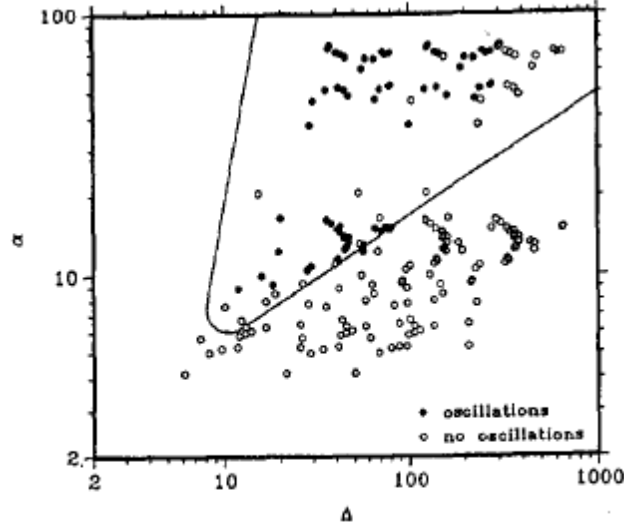


Figure 3: Data for length ratio $\zeta = 1.0$

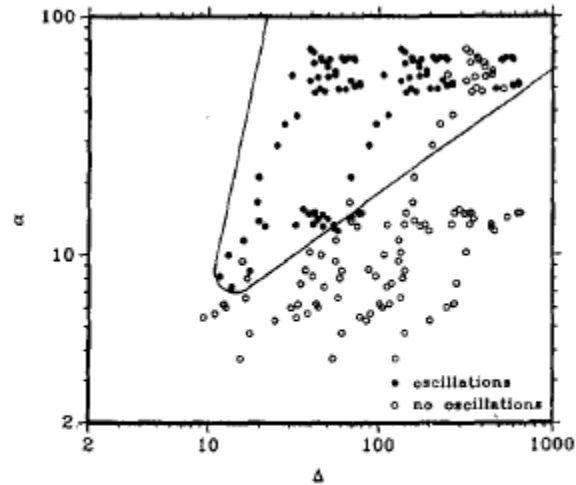


Figure 4: Data for length ratio $\zeta = 2.0$

Figuras 1.4 - gráficos da referência [6], α é a razão das temperaturas quente e fria, enquanto Δ é a razão entre o raio do tubo e a camada limite. A curva contínua é uma previsão teórica para a região onde as oscilações devem ocorrer

Estes experimentos foram realizados tentando impor um perfil de temperatura semelhante a uma função degrau. Como mostra a figura 1.3, parte do tubo ficou em contato com o hélio líquido, enquanto outra parte ficou em um banho térmico quente. Nos gráficos das figuras 1.4, o eixo horizontal é razão entre o raio do tubo e o tamanho da camada limite, enquanto o eixo vertical é a razão entre as temperaturas quente e fria. Em outras palavras, Δ se relaciona com a geometria (proporção D/L) do tubo, enquanto α se relaciona com o gradiente de temperatura aplicado. Ou seja, foram experimentos muito criteriosos, variando bastante as condições experimentais [6]. A curva contínua é uma previsão do modelo de Rott para a região em que as oscilações devem ocorrer. Observamos,

no geral, uma certa coerência dos resultados com este modelo [1].

1.2) Motivações

Vamos agora enumerar as razões pelas quais decidimos desenvolver este trabalho: as aplicações.

Aplicações em Engenharia de Energia: fenômeno segue ciclo Stirling, o ciclo prático mais próximo do ciclo de Carnot. Vemos uma ilustração deste ciclo na figura 1.5. Ele é formado por duas adiabáticas e duas isocóricas, no lugar das isotermas de Carnot. A conversão de energia é altamente eficiente, no entanto a potência é baixa.

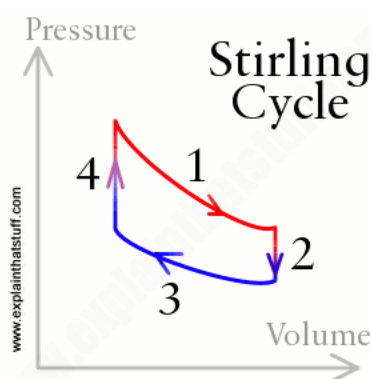


Figura 1.5 – representação do ciclo Stirling

Dispositivos dessa natureza trazem a possibilidade de gerar energia com poucas ou até nenhuma parte móvel, como ocorre com os motores Stirling de pistão livre e os com conversão piezoelétrica. Tecnologias úteis para qualquer tipo de geração termoelétrica (nuclear, solar, biomassa, etc.). Quanto mais termoacústica se utiliza, maior a confiabilidade, uma vez que o número de peças diminui. Por isso dispositivos dessa natureza estão sendo cada vez mais usados para regeneração de energia e até mesmo como sensores [22].

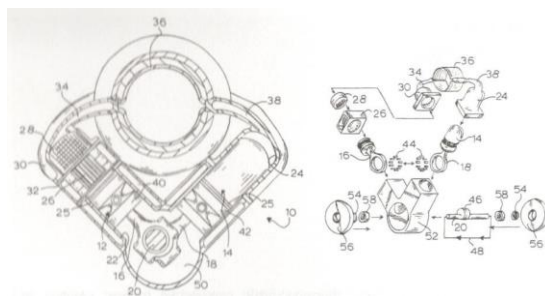


Figura 1.6 – esquema de um motor térmico tradicional do tipo alfa Stirling. Note a complexidade [4].

Dispositivos termoacústicos tem alta confiabilidade pois, em função do reduzido número de

peças, requerem pouca manutenção. Por este motivo são utilizados para gerar energia em sondas espaciais, quando distantes do Sol, usando o calor do decaimento de algum elemento radioativo [21].

Outras aplicações aeroespaciais: fenômeno ocorre em propulsores e câmaras de combustão. Às vezes é desejável, por exemplo, para mistura do combustível, outras não, pois ressonância pode provocar explosões.

Aplicação em criogenia e refrigeração: utiliza-se do fenômeno simétrico ao usualmente observado quando se injeta calor no sistema, inserindo uma onda mecânica o calor pode ser retirado. A modelagem é feita pelas mesmas equações.

Esse tipo de refrigeração não demanda gases potencialmente nocivos à saúde e ao ambiente (como os organofluorados), e *sequer precisa de um compressor* [23].

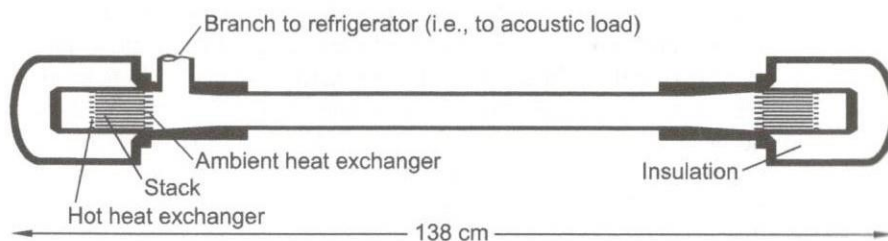


Figure 1.7 – esquema típico de um refrigerador termoacústico [4].

Os fenômenos acima mencionados podem ocorrer, para uma ampla variedade de fluídos, em foguetes, torres de destilação de petróleo, sistemas criogênicos etc. Entretanto, a identificação de suas causas como oscilações termoacústicas tem permanecido restrita a uma comunidade relativamente pequena de pesquisadores das áreas de fluídos e engenharia.

Quando se falam de modelos físicos, invariavelmente se pretende partir de princípios simples, que possam ser expressos em poucas palavras. E com isso eventualmente se espera uma explicação de por quê tal efeito vem a ocorrer.

O que podemos oferecer como explicação não é mais do que uma opinião fundamentada no que conhecemos sobre o assunto até aqui. A natureza, diante de uma condição instável, busca se estabilizar. Quando você impõe um gradiente de temperatura muito, mas muito forte, em um tubo estreito, a maneira que a natureza encontra para fazer isso é a vibração. Então a oscilação acústica é uma tentativa de relaxar esse altíssimo gradiente de temperatura, de homogeneizar a temperatura ao longo do tubo, de maximizar a entropia do sistema, para resolver esta condição de instabilidade que foi imposta (em geral, artificialmente).

Claro que eventuais oscilações de pequeno porte, praticamente infinitesimais, tomam parte neste processo de fazer o tubo ressoar. Essas oscilações colocam todo o entorno da fonte (quente ou fria) em vibração e a partir dali o resto do tubo, numa onda que se propaga. Esse fenômeno transiente não tem nenhum modelo matemático. Quer dizer, não existe de fato nenhuma explicação detalhada, por primeiros princípios, de como começam essas oscilações ou de como o fenômeno emerge a partir do gradiente imposto em $t = 0$. A hipótese nossa é essa porque, como mencionado anteriormente, na área de Engenharia, existem algumas máquinas termoacústicas. Elas operam no ciclo Stirling, como mencionamos anteriormente, com características semelhantes ao de Carnot, a saber, baixa potência e alto rendimento. Quase todos motores Stirling requerem "dar partida". Não funcionam sem um acionamento externo inicial - quando é um motor mecânico, com pistões e engrenagens. No caso do fenômeno termoacústico é claro que esse acionamento se baseia em oscilações naturais do fluido. Ainda que sejam muito pequenas, abaixo do limiar audível, essas oscilações teriam um papel como **gatilho** deste fenômeno.

Isso é o que acreditamos até agora como plausível para explicar a ocorrência do fenômeno.

É claro que seria cabível uma investigação experimental para averiguar exatamente quais níveis de ruído poderiam desencadear isso. Uma abordagem por elementos finitos com simulações de dinâmica de fluidos computacional poderia igualmente apontar as condições iniciais nas quais essas oscilações se constituem. Porém, não é este o escopo deste trabalho. Aqui investigaremos apenas o estado estacionário.

No contexto da Física de Plasma são conhecidas as "*instabilidades termoacústicas*" [11], pois também em um tokamak essas oscilações podem ocorrer em condições pouco homogêneas. Neste caso, como nos foguetes, não são exatamente desejáveis e precisam ser controladas. Para todos efeitos, *tokamaks* também são eventualmente modelados por coordenadas cilíndricas, com condições de contorno periódicas.

Mas nosso interesse no comportamento termoacústico de um fluido condutor veio mais motivado pela relação destas oscilações com as demais ondas observadas em plasmas, como as ondas magnetosônicas, as ondas magneto-hidrodinâmicas ou as ondas de *Alfven* [12].

Capítulo 2

O modelo de Rott

Como já foi dito, modelos anteriores partiam da equação de Euler, $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}p$, desprezando a viscosidade na maior parte do tubo, eventualmente introduzindo η apenas em uma camada adjacente a parede do tubo.

Se jogamos um copo de água numa parede vemos que mesmo depois que a maior parte do fluido escorre a parede fica molhada. Ou seja, parte da água aderiu na parede. Esse é o efeito da viscosidade. A espessura da camada de água que adere na parede está ligada ao conceito de *camada-limite*.

Observando bem, mesmo parte da água que pareceu aderir num primeiro instante pode começar a escorrer gradualmente, de forma cada vez mais lenta.

Isso ocorre porque o atrito diminui continuamente a partir da parede. Para definir um tamanho característico arbitrou-se que a borda da camada limite hidrodinâmica deve se situar aonde a velocidade v for apenas 99% da velocidade do fluxo livre [10].

No caso do tubo, levar em conta a viscosidade nos obriga a impor como condição de contorno que a velocidade é nula sobre parede do tubo.

Em um escoamento laminar estacionário em tubulações, o perfil de velocidades que encontramos na maioria dos livros-texto é:

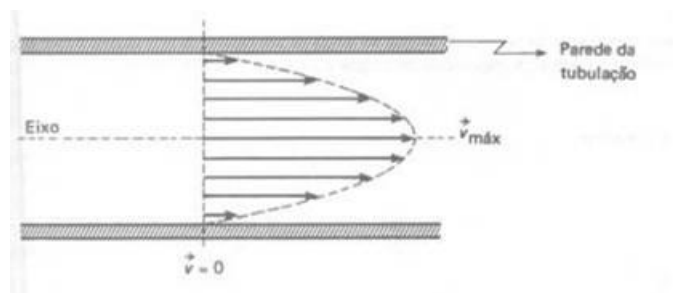


Figura 2.1 – perfil de velocidades, escoamento laminar em um tubo [10].

O conceito de camada limite foi introduzido por Ludwig Prandtl em 1904. Ele também se aplica a transferência de calor em fluidos. Podemos definir uma camada limite térmica como a distância a partir da qual a temperatura é 99% da temperatura do fluxo livre. A razão hidrodinâmica/térmica se relaciona diretamente com o número de Prandtl [5].

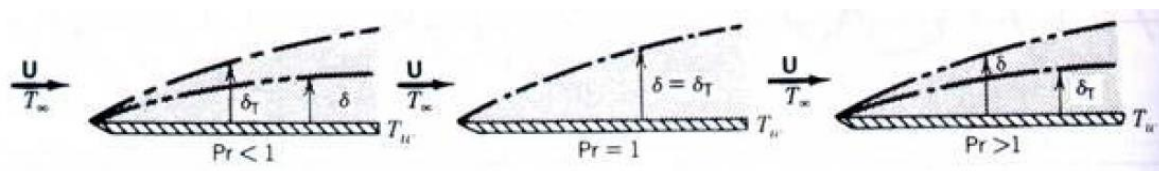


Figura 2.2 – Comparação camadas limite térmica e hidrodinâmica num escoamento sobre uma placa plana [10].

Para a maioria dos gases típicos o número de Prandtl é um pouco menor do que 1. Isto quer dizer, que a camada limite hidrodinâmica é da mesma ordem da camada limite térmica, apenas ligeiramente menor.

O que diferencia os fenômenos acústicos ordinários dos termoacústicos é a relação entre essas camadas e a amplitude de deslocamento do gás. Na *áudio* acústica do nosso cotidiano as amplitudes de deslocamento são bem menores do que as camadas limite. Na *termo* acústica acontece o oposto, os deslocamentos são muito maiores do que as camadas limite. Em todos os casos, tanto deslocamentos quanto camadas limite são muito menores que o comprimento de onda [4].

Em geral, a condutividade térmica k de um fluido está vinculada a sua viscosidade e a seu calor específico, na razão inversa do número de Prandtl: $k = \frac{\eta c_p}{\sigma}$. A tabela a seguir mostra alguns valores típicos deste número:

Valores característicos do número de Prandtl	
Metais líquidos	
Sódio	0.011
Mercúrio	0.0196
Bismuto	0.0142
Gases	
Ar	0.70
Dióxido de carbono	0.75
Monóxido de carbono	0.73
Hélio	0.68
Hidrogênio	0.70
Outros líquidos	
Água	4.6
Fluidos viscosos	
Óleo lubrificante de motor	3400
Glicerina	3060

Tabela 2.1 – número de Prandtl para diversas substâncias [17].

Como primeiros princípios o modelo de Rott se utiliza da equação de Navier Stokes, da equação de continuidade e da equação de Fourier:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \eta \nabla^2 \vec{v} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \\ c_p \rho_0 \frac{DT}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} = \frac{\eta c_p}{\sigma} \nabla^2 T \end{array} \right. \quad (2.0)$$

O modelo supõe cada grandeza sendo composta de um valor médio e uma pequena perturbação, que corresponde a oscilação acústica. Os cálculos detalhados estão no apêndice I. Colocaremos aqui apenas as equações para as grandezas perturbativas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p_1 = \nu \nabla^2 \vec{v}_1 \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) = 0 \\ c_p \rho_0 \frac{\partial T_1}{\partial t} + c_p \rho_0 (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) T_0 - \frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\eta c_p}{\sigma} \nabla^2 T_1 \end{array} \right. \quad (2.01)$$

As grandezas com índice 0 são os valores médios, enquanto as com índice 1 são as perturbações.

Rott desenvolve seu modelo a partir de três premissas básicas:

(1) O gradiente radial da oscilação de pressão é nulo.

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} = 0 \quad (2.1)$$

(2) Variações radiais da temperatura média e atrito radial são desprezíveis.

$$\frac{\partial T_0}{\partial r} = 0 \quad \nu \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} = 0 \quad (2.2)$$

(3) A condução axial de calor na onda acústica e o atrito devido aos gradientes axiais podem ser ignorados

$$\frac{\partial T_1}{\partial z} = 0 \quad \nu \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

Essas simplificações são no geral consistentes quando o raio do tubo é muito menor do que seu comprimento.

Adicionalmente supõe-se que todas as perturbações variam harmonicamente com o tempo, ou seja, podemos trocar $\frac{\partial}{\partial t}$ por $i\omega$ nas equações perturbadas. Resta apenas escrever em um sistema de coordenadas conveniente.

No caso, temos um problema com simetria cilíndrica. Vamos usar coordenadas cilíndricas para expressar as equações. Não vamos considerar a coordenada azimutal pois supomos em primeira aproximação uma perfeita simetria no comportamento do gás dentro do tubo. Consideraremos assim apenas a coordenada radial r e a axial z .

O divergente na equação de continuidade é dado por

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) = (\vec{\nabla} \rho_0) \cdot \vec{v}_1 + \rho_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1)$$

O gradiente da densidade média independe da coordenada r *por causa da suposição (2)*, já o divergente da velocidade será $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z}$. Então, a equação de continuidade fica

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) &= 0 \\ i\omega \rho + v_z \frac{d\rho_0}{dz} + \rho_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

onde, por simplicidade, omitimos o índice 1 das oscilações acústicas.

Na equação de propagação de calor, consideraremos $(\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) T_0 = v_z \frac{dT_0}{dz}$ já que o gradiente de temperatura média é axial *pela suposição (2)*. Em contrapartida, assumimos, *conforme (3)*, que a perturbação T_1 na temperatura não varia em z , ou seja, $\nabla^2 T_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right)$. Isso resulta o seguinte:

$$\begin{aligned} c_p \rho_0 \frac{\partial T_1}{\partial t} + c_p \rho_0 (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) T_0 - \frac{\partial p_1}{\partial t} &= \frac{\eta c_p}{\sigma} \nabla^2 T_1 \\ c_p \rho_0 \frac{\partial T_1}{\partial t} + c_p \rho_0 v_z \frac{dT_0}{dz} - \frac{\partial p_1}{\partial t} &= \frac{\eta c_p}{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Nesse ponto vamos eliminar as temperaturas usando a lei dos gases:

$$p = \frac{R}{M} \rho T \Rightarrow T_0 = \frac{M p_0}{R \rho_0} \quad e$$

$$p_0 + p_1 = \frac{R}{M} (\rho_0 + \rho_1) (T_0 + T_1) \Rightarrow T_1 = \frac{M}{R} \frac{1}{\rho_0} (p_1 - p_0)$$

$$c_p \rho_0 \frac{\partial T_1}{\partial t} + c_p \rho_0 v_z \frac{dT_0}{dz} - \frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\eta c_p}{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right)$$

$\frac{\partial T_1}{\partial t}$ vai ser $i\omega T_1 = i\omega \frac{M}{R} \frac{1}{\rho_0} \left(p_1 - \frac{p_0}{\rho_0} \rho_1 \right)$, o gradiente $\frac{dT_0}{dz} = -\frac{M}{R} \frac{p_0}{\rho_0^2} \frac{d\rho_0}{dz}$ e o laplaciano no lado direito fica $-\frac{M}{R} \frac{p_0}{\rho_0^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho_1}{\partial r} \right)$. Assim, teremos

$$i\omega c_p \frac{M}{R} \left(p_1 - \frac{p_0}{\rho_0} \rho_1 \right) - c_p \frac{M}{R} \frac{p_0}{\rho_0} v_z \frac{d\rho_0}{dz} - i\omega p_1 = -\frac{\eta c_p}{\sigma} \frac{M}{R} \frac{p_0}{\rho_0^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho_1}{\partial r} \right)$$

Dividindo por $-\frac{M}{R} \frac{p_0}{\rho_0} c_p$ e agrupando os termos em $i\omega$,

$$i\omega \left[\rho_1 - \rho_0 \frac{p_1}{p_0} - \frac{(R/M)/c_p}{p_0/\rho_0} p_1 \right] + v_z \frac{d\rho_0}{dz} = \frac{1}{\sigma} \frac{\eta}{\rho_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho_1}{\partial r} \right)$$

O segundo termo no colchete à esquerda o autor identificou como ρ_w .

“Pode-se mostrar que a influência das flutuações de temperatura sobre a parede é pequena na maior parte dos casos” – N. Rott [1].

Ou seja, na parede do tubo, $T_1 = \frac{M}{R} \frac{1}{\rho_0} \left(p_1 - \frac{p_0}{\rho_0} \rho_1 \right) = 0 \Rightarrow \rho_1 = \rho_0 \frac{p_1}{p_0} \equiv \rho_w$.

$$i\omega \left[\rho_1 - \rho_w - \frac{R/c_p}{M p_0/\rho_0} p_1 \right] + v_z \frac{d\rho_0}{dz} = \frac{\nu}{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho_1}{\partial r} \right)$$

Finalmente, considerando que $R/M = c_p - c_v$ e $\frac{p_0}{\rho_0} \equiv a^2$, onde a é a velocidade do som, chegamos a

$$i\omega \left[\rho - \rho_w + \frac{\gamma c - 1}{a^2} p \right] + v_z \frac{d\rho_0}{dz} = \frac{\nu}{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho}{\partial r} \right)$$

e, inserindo $\rho_w = \frac{\gamma c}{a^2}$ ficamos com

$$i\omega \left[\rho - \frac{1}{a^2} p \right] + v_z \frac{d\rho_0}{dz} = \frac{\nu}{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho}{\partial r} \right)$$

Ou, seja, tínhamos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p_1 = \nu \nabla^2 \vec{v}_1 \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) = 0 \\ c_p \rho_0 \frac{\partial T_1}{\partial t} + c_p \rho_0 (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) T_0 - \frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\eta c_p}{\sigma} \nabla^2 T_1 \end{array} \right.$$

E obtivemos

$$\left\{ \begin{array}{l} i\omega v_z + \frac{1}{\rho_0} \frac{dp}{dz} - \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = 0 \\ i\omega \rho + v_z \frac{d\rho_0}{dz} + \rho_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\ i\omega \left[\rho - \frac{1}{a^2} p \right] + v_z \frac{d\rho_0}{dz} = \frac{\nu}{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) \end{array} \right. \quad (2.4)$$

O artigo [1] segue um tortuoso caminho, usando uma “solução local” da equação de Navier-Stokes, subtraindo uma equação da outra, integrando ambas numa secção transversal do tubo, subtraindo novamente... e finalmente reduzindo o sistema a uma equação diferencial ordinária em $p(z)$.

Vamos tentar reproduzir aqui uma pequena parte deste procedimento.

No caso, denomina-se “solução local” as soluções obtidas sobre uma secção do tubo, para um z fixo [9]. Tomemos a primeira equação. Para obter a solução local consideramos dp/dz uma constante. Assim podemos trocar $i\omega v_z + \frac{1}{\rho_0} \frac{dp}{dz} \rightarrow i\omega v'_z$ (o que fisicamente equivaleria a mudar o referencial de v_z). Reescrevendo, temos

$$i\omega v'_z - \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v'_z}{\partial r} \right) = 0 \quad (2.5)$$

uma vez que nem ρ_0 e nem p dependem de r .

Trocando agora $rv'_z \rightarrow u$ teremos $v'_z \rightarrow \frac{u}{r}$ e

$$r \frac{\partial v'_z}{\partial r} + v'_z \rightarrow \frac{du}{dr}$$

$$r \frac{\partial v'_z}{\partial r} + \frac{u}{r} \rightarrow \frac{du}{dr} \Rightarrow \left(r \frac{\partial v'_z}{\partial r} \right) \rightarrow \frac{du}{dr} - \frac{u}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v'_z}{\partial r} \right) \rightarrow \frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2} u \quad .$$

Portanto, a equação em v'_z se reduz a

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{i\omega}{v} \right) u = 0 \quad .$$

Multiplicando isso por r^2 chegamos a

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} - r \frac{du}{dr} + \left(1 - \frac{i\omega}{v} r^2 \right) u = 0 \quad (2.51)$$

que vem a ser uma equação de Bessel.

Para obter a solução vamos comparar com uma versão generalizada:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (2p+1)x \frac{dy}{dx} + (a^2 x^{2r} + \beta^2) y = 0.$$

cuja solução é

$$y = x^{-p} \left[C_1 J_{q/r} \left(\frac{\alpha}{r} x^r \right) + C_2 Y_{q/r} \left(\frac{\alpha}{r} x^r \right) \right],$$

onde $q \equiv \sqrt{p^2 - \beta^2}$ [18].

Comparando com (2.51) encontramos os parâmetros

$$p = -1, \quad \alpha = i \sqrt{\frac{i\omega}{v}}, \quad \beta^2 = 1 \quad \text{e} \quad q = 0, \quad \text{resultando assim a solução:}$$

$$u = r \left[C_1 J_0 \left(i \sqrt{\frac{i\omega}{v}} \cdot r \right) + C_2 Y_0 \left(i \sqrt{\frac{i\omega}{v}} \cdot r \right) \right] \quad .$$

Sendo $v'_z = \frac{u}{r}$ teremos $v'_z \sim J_0 \left(i \sqrt{\frac{i\omega}{v}} r \right) = I_0 \left(\sqrt{\frac{i\omega}{v}} r \right)$ pois Y_0 não pode ser uma solução física, uma

vez que diverge em $r = 0$.

Como $\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$ tem dimensão de inverso de comprimento, podemos definir um $\sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \equiv l_c$.

A tabela a seguir mostra alguns valores de l_c para o ar a 20 graus Celsius
(viscosidade cinemática $\sim 1,511 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$).

f (Hz)	omega (Hz)	raiz(omega/ni)	lc (microns)
20	126	2884	347
100	628	6448	155
440	2765	13526	74
1000	6283	20392	49
20000	125664	91195	11

Tabela 1.2 – valores típicos de l_c .

Pela ordem de grandeza podemos desconfiar que o valor de l_c está relacionado a camada limite hidrodinâmica neste caso. De fato, o que importa é a razão $\frac{r}{l_c}$.

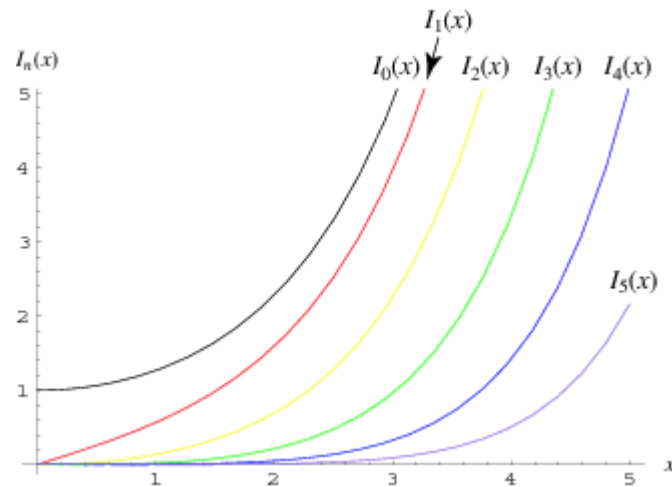


Gráfico 2.1 – Funções de Bessel modificadas

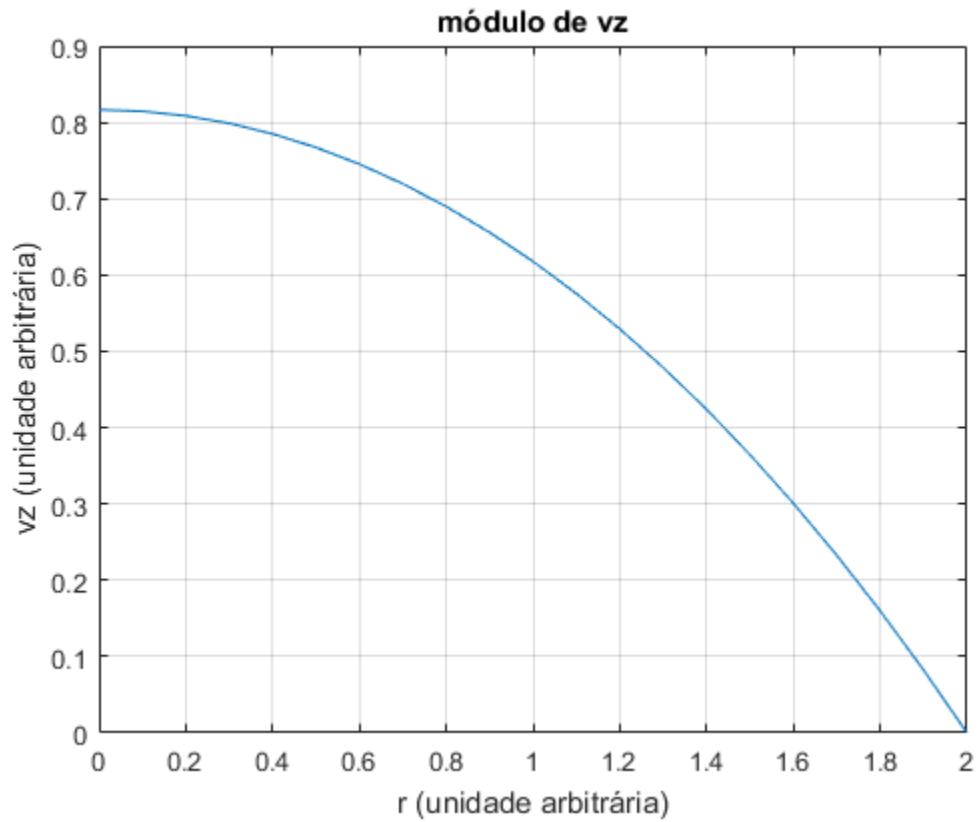
Temos então um v_z' com perfil da função modificada de Bessel de ordem zero (curva em preto acima). Voltando a transformação Para v_z temos

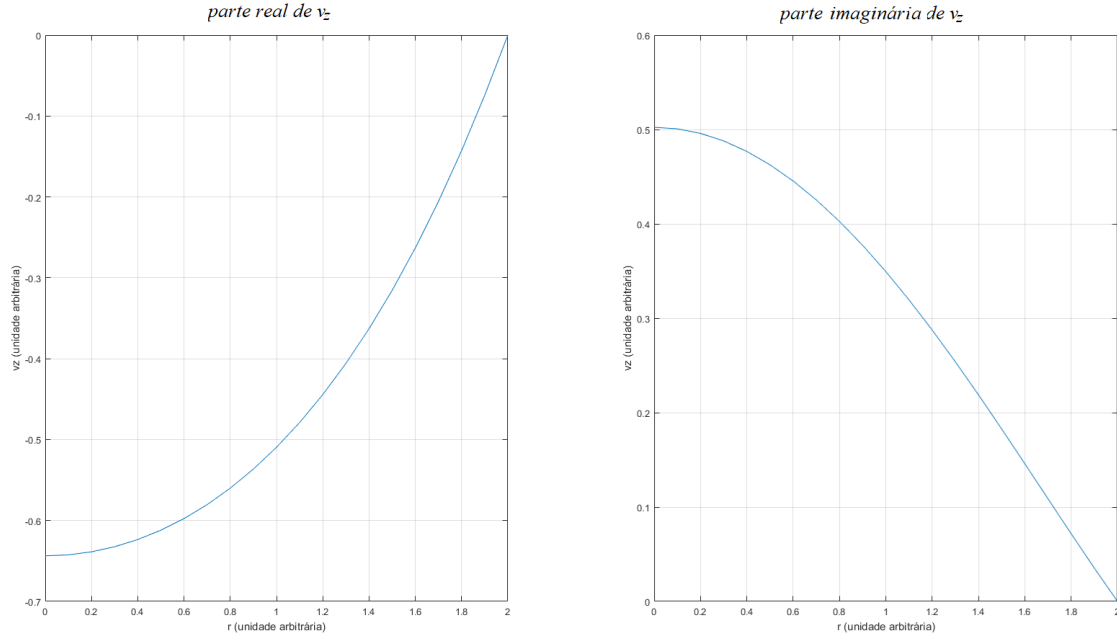
$$v_z' \rightarrow v_z + \frac{1}{i\omega\rho_0} \frac{dp}{dz} = C \cdot I_0\left(\sqrt{i} \frac{r}{l_c}\right)$$

E impondo a condição de contorno teremos

$$v_z = \frac{1}{i\omega\rho_0} \frac{dp}{dz} \left(\frac{I_0\left(\sqrt{i}\frac{r}{l_c}\right)}{I_0\left(\sqrt{i}\frac{r_0}{l_c}\right)} - 1 \right) \quad (2.6)$$

Apenas para visualizar, plotamos o resultado para o caso $\frac{1}{i\omega\rho_0} \frac{dp}{dz} = \frac{1}{i}$ e $l_c = 1$.





Gráficos 2.2 – perfil de velocidade axial em uma secção do tubo.

Observamos que tanto a parte real quanto a imaginária, e também o módulo dessa solução, apresentam perfil qualitativamente semelhante ao perfil parabólico típico para um fluxo laminar em uma tubulação, que é dado pela equação:

$$v(r) = \frac{(p_1 - p_2)}{4l\eta} (a^2 - r^2) \quad (2.7)$$

para um tubo de raio a , com fluído sujeito a um gradiente de pressão $\frac{p_1 - p_2}{l}$ [8].

Para comparar, vamos multiplicar a equação de v_z dentro do parênteses por $I_0\left(\sqrt{i} \cdot \frac{r_0}{l_c}\right)$, dividindo pelo mesmo fora:

$$v_z = \frac{1}{i\omega\rho_0 \cdot I_0\left(\sqrt{i} \cdot \frac{r_0}{l_c}\right)} \frac{dp}{dz} \left[I_0\left(\sqrt{i} \cdot \frac{r_0}{l_c}\right) - I_0\left(\sqrt{i} \cdot \frac{r}{l_c}\right) \right] \quad (2.8)$$

Vemos que essa solução local é parecida com a do regime laminar estacionário. A função I_0 também é monotonicamente crescente e tem a mesma concavidade de r^2 , atendendo ambas velocidades a condição de contorno (aderência às paredes).

A dependência da viscosidade em $v(r)$ está explícita, enquanto em v_z está em l_c , dentro do argumento das funções I_0 .

Com isto, voltando ao sistema de equações (2.4) ,

$$\begin{cases} i\omega v_z + \frac{1}{\rho_0} \frac{dp}{dz} - v \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = 0 \\ i\omega \rho + v_z \frac{d\rho_0}{dz} + \rho_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\ i\omega \left[\rho - \frac{1}{a^2} p \right] + v_z \frac{d\rho_0}{dz} = \frac{v}{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) \end{cases}$$

vemos que podemos resolver localmente também a última equação. Do mesmo modo, fixando um z , temos p constante em toda secção transversal do tubo. Portanto, podemos trocar $i\omega \left[\rho - \frac{1}{a^2} p \right] \rightarrow i\omega \cdot \rho'$ e obter

$$\frac{v}{\sigma} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho'}{\partial r} \right) - i\omega \cdot r \rho' = v_z \frac{d\rho_0}{dz}$$

Trocando agora $r \rho' \rightarrow u$ teremos $\rho' \rightarrow \frac{u}{r}$ e

$$r \frac{\partial \rho'}{\partial r} + \rho' \rightarrow \frac{du}{dr}$$

$$r \frac{\partial \rho'}{\partial r} + \frac{u}{r} \rightarrow \frac{du}{dr} \Rightarrow \left(r \frac{\partial \rho'}{\partial r} \right) \rightarrow \frac{du}{dr} - \frac{u}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho'}{\partial r} \right) \rightarrow \frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2} u .$$

Portanto, substituindo isso e a solução v_z , a equação em ρ' fica

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{i\omega\sigma}{v} \right) u = \frac{r}{i\omega\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{dp}{dz} \left[\frac{I_0(\sqrt{i}\frac{r}{l_c})}{I_0(\sqrt{i}\frac{r_0}{l_c})} - 1 \right] (2.85) .$$

O que é basicamente a mesma coisa que (2.51), mas não homogênea e com sigma junto às constantes no lado esquerdo. A solução será a solução da equação homogênea mais uma solução particular.

$$u = u_h + u_p$$

onde

$$u_h \sim r \cdot I_0 \left(\sqrt{i}\sigma \cdot \frac{r}{l_c} \right)$$

e com o mesmo procedimento, voltamos a variável $\rho' = \frac{u}{r}$ e considerando novamente

$$i\omega \left[\rho - \frac{1}{a^2} p \right] \rightarrow i\omega \cdot \rho'$$

Podemos obter a solução homogênea para (2.85) .

Rott apresenta a solução completa para a densidade do seguinte modo:

$$\boxed{\rho - \rho_w = \left(\frac{\gamma - 1}{a^2} p - \frac{\theta}{(1 - \sigma)\omega^2} \frac{dp}{dz} \right) \left(\frac{I_0 \left(\sqrt{i\sigma} \cdot \frac{r}{l_c} \right)}{I_0 \left(\sqrt{i\sigma} \cdot \frac{r_0}{l_c} \right)} - 1 \right) + \frac{\sigma\theta}{(1 - \sigma)\omega^2} \frac{dp}{dz} \left(\frac{I_0 \left(\sqrt{i} \cdot \frac{r}{l_c} \right)}{I_0 \left(\sqrt{i} \cdot \frac{r_0}{l_c} \right)} - 1 \right)} \quad (2.9)$$

Vemos aí a parte homogênea composta de funções com raiz de sigma no argumento, enquanto a solução particular se assemelha a v_z . Temos o uso de $\rho_0 \frac{p_1}{p_0} \equiv \rho_w$ para denotar a oscilação de densidade na parede do tubo e

$$\theta = -\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} = \frac{1}{T_0} \frac{dT_0}{dz} \quad (2.10)$$

para o gradiente logarítmico de temperatura.

Vamos mostrar que

$$\rho_p \equiv \frac{\sigma\theta}{(1 - \sigma)\omega^2} \frac{dp}{dz} \left(\frac{I_0 \left(\sqrt{i} \cdot \frac{r}{l_c} \right)}{I_0 \left(\sqrt{i} \cdot \frac{r_0}{l_c} \right)} - 1 \right) \quad (2.11)$$

é uma solução particular da equação

$$\frac{v}{\sigma} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho'}{\partial r} \right) - i\omega \cdot r \rho' = v_z \frac{d\rho_0}{dz} .$$

Por simplicidade vamos escrever $\rho_p \equiv A \left(\frac{I_0(ar)}{B} - 1 \right) .$

Vamos usar a regra $\frac{\partial I_\nu(z)}{\partial z} = \frac{\nu}{z} I_\nu(z) + I_{\nu+1}(z)$ para começar a derivar a função de Bessel:

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial r} \equiv \frac{A}{B} \alpha \cdot I_1(\alpha r)$$

$$r \frac{\partial \rho_p}{\partial r} \equiv \frac{A}{B} \alpha r \cdot I_1(\alpha r)$$

Agora usamos a outra regra $\frac{\partial I_\nu(z)}{\partial z} = I_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} I_\nu(z)$ para fazer outra derivação:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho_p}{\partial r} \right) \equiv \frac{A}{B} \alpha I_1(\alpha r) + \frac{A}{B} \alpha r \left[I_0(\alpha r) - \frac{1}{\alpha r} I_1(\alpha r) \right]$$

$$\frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho_p}{\partial r} \right) \equiv \alpha \frac{\nu}{\sigma} \frac{A}{B} \left\{ I_1(\alpha r) + \alpha r \left[I_0(\alpha r) - \frac{1}{\alpha r} I_1(\alpha r) \right] \right\}$$

$$\frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho_p}{\partial r} \right) - i\omega r \rho_p$$

$$\equiv \alpha \frac{\nu}{\sigma} \frac{A}{B} \{ \alpha r I_0(\alpha r) \} - i\omega r \frac{A}{B} [I_0(\alpha r) - B]$$

$$\frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho_p}{\partial r} \right) - i\omega r \rho_p = -i\omega r \frac{A}{B} [I_0(\alpha r) - B]$$

O que, substituindo os valores de A e B nos fornece $r v_z \frac{d\rho_0}{dz}$, como na equação

$$\frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho'}{\partial r} \right) - i\omega \cdot r \rho' = v_z \frac{d\rho_0}{dz}$$

Temos, portanto, as soluções locais tanto para v_z quanto para a densidade.

Voltando ao sistema de EDPs (2.4):

$$\begin{cases} i\omega v_z + \frac{1}{\rho_0} \frac{dp}{dz} - \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = 0 \\ i\omega \rho + v_z \frac{d\rho_0}{dz} + \rho_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\ i\omega \left[\rho - \frac{1}{a^2} p \right] + v_z \frac{d\rho_0}{dz} = \frac{\nu}{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) \end{cases}$$

Subtraindo a última equação da segunda:

$$\rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{i\omega}{a^2} \frac{dp}{dz} + \frac{\nu}{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) + \rho_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = 0$$

Se multiplicarmos essa equação pelo fator $\frac{2a^2}{r_0^2} r dr$ podemos integrar de 0 até r_0 .

Denotando

$$\frac{2\rho_0 a^2}{r_0^2} \int_0^{r_0} v_z r dr \equiv \phi$$

(fluxo de massa)

temos

$$\frac{d\phi}{dz} + i\omega p = -2a^2 \frac{\nu}{\sigma r_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right)_w$$

onde $\left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right)_w$ é $\frac{\partial \rho}{\partial r}$ na parede do tubo.

Esse mesmo procedimento de integração em r aplicado a primeira EDP (eq. de Navier-Stokes) resulta:

$$i\omega \phi + a^2 \frac{dp}{dz} = -2a^2 \rho_0 \frac{\nu}{r_0} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)_w$$

Ou seja, reduzimos o sistema de EDPs a

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dz} + i\omega p = -2a^2 \frac{\nu}{\sigma r_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right)_w \\ i\omega \phi + a^2 \frac{dp}{dz} = -2a^2 \rho_0 \frac{\nu}{r_0} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)_w \end{cases}$$

Derivando a segunda equação e multiplicando a primeira por $i\omega$ conseguimos eliminar o fluxo de massa:

$$\begin{aligned} \omega^2 p + \frac{d}{dz} \left(a^2 \frac{dp}{dz} \right) - 2a^2 \rho_0 \frac{d}{dz} \left(\frac{\nu}{r_0} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)_w \right) \\ - 2a^2 \frac{i\omega \nu}{\sigma r_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right)_w = 0 \end{aligned}$$

Por fim, usamos as soluções locais para calcular as derivadas de v_z e da densidade em $r = r_0$, obtemos a equação final para a pressão:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{a^2}{\omega^2} (1 - f) \frac{dp}{dz} \right) - \frac{a^2 \tilde{f} - f}{\omega^2 (1 - \sigma)} \theta \frac{dp}{dz} + [1 + (\gamma - 1) \tilde{f}] p = 0 \quad (2.12)$$

Onde f é

$$f = \frac{2I_1 \left(\sqrt{i} \frac{r_0}{l_c} \right)}{i \sqrt{i} \frac{r_0}{l_c} I_0 \left(\sqrt{i} \frac{r_0}{l_c} \right)} \quad (2.12a)$$

e

$$\tilde{f} = \frac{2I_1 \left(\sqrt{i\sigma} \frac{r_0}{l_c} \right)}{i \sqrt{i\sigma} \frac{r_0}{l_c} I_0 \left(\sqrt{i\sigma} \frac{r_0}{l_c} \right)} \quad (2.12b)$$

Ambas f dependem de z através de l_c , devido a variação da viscosidade ao longo do perfil de temperatura $T(z)$. Esta variação pode ser visualizada no gráfico a seguir, elaborado com os dados de viscosidade do ar.

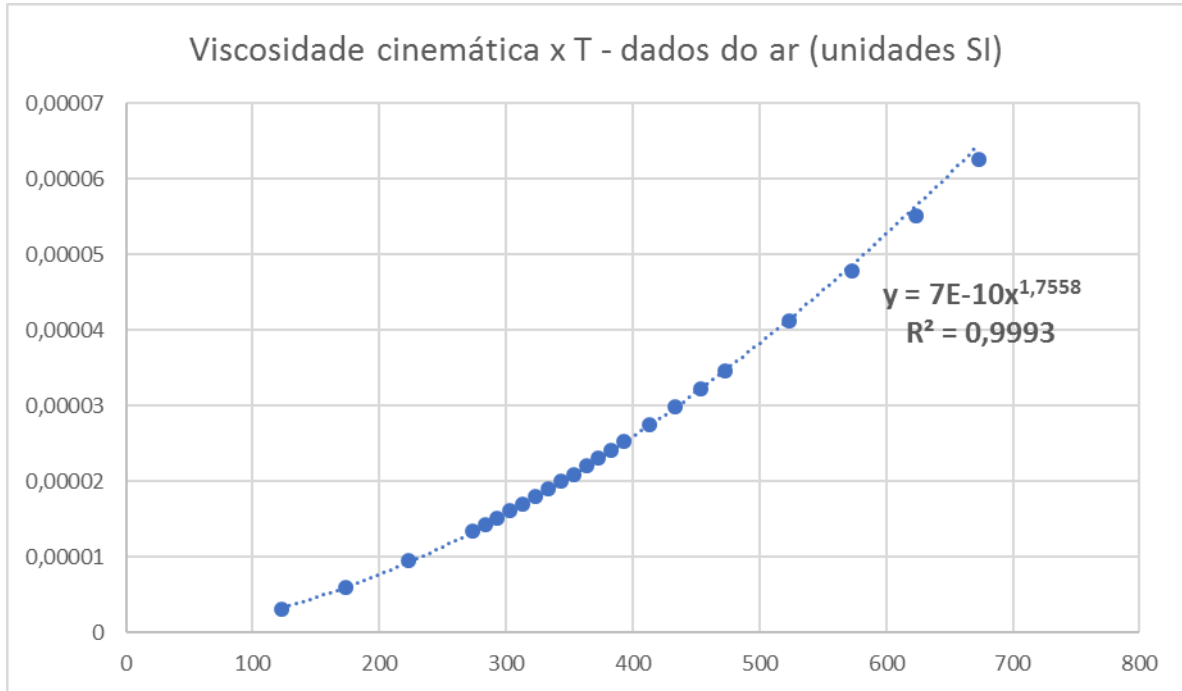


Gráfico 2.3 - Dados da viscosidade cinemática do ar apontam uma lei de potência com a temperatura [20].

A primeira solução apresentada no artigo é para um tubo semi-infinito com extremidade aberta em $z = 0$ e com $q = 0$. Inserindo $p \sim \exp(-kz)$ foi então possível extrair a seguinte relação de dispersão:

$$k = \frac{\omega}{a} \left(\frac{1 + (\gamma - 1) f_j^*}{1 - f_j} \right)^{1/2} \equiv \frac{\omega}{a} h_j \quad (2.13)$$

A qual podemos visualizar nos gráficos a seguir com parâmetros típicos do ar seco a temperatura ambiente.

Gráficos 2.4 – relação entre número de onda e a frequência

“Em geral k é complexo e parece que a condição $\text{Im}(k) < 0$ deve ser imposta para obter uma pressão finita em z muito grande” – N. Rott [1]

Pelo gráfico a direita vemos que $\text{Im}(k) < 0$ em todo o domínio e seu valor é, em média, de três a quatro ordens de grandeza inferior ao da parte real.

Vamos comparar este $\text{Re}(k)$ com a reta definida por $k = \omega/a$, para um valor de a praticamente constante e em torno de 340 m/s (velocidade típica do som no ar atmosférico).

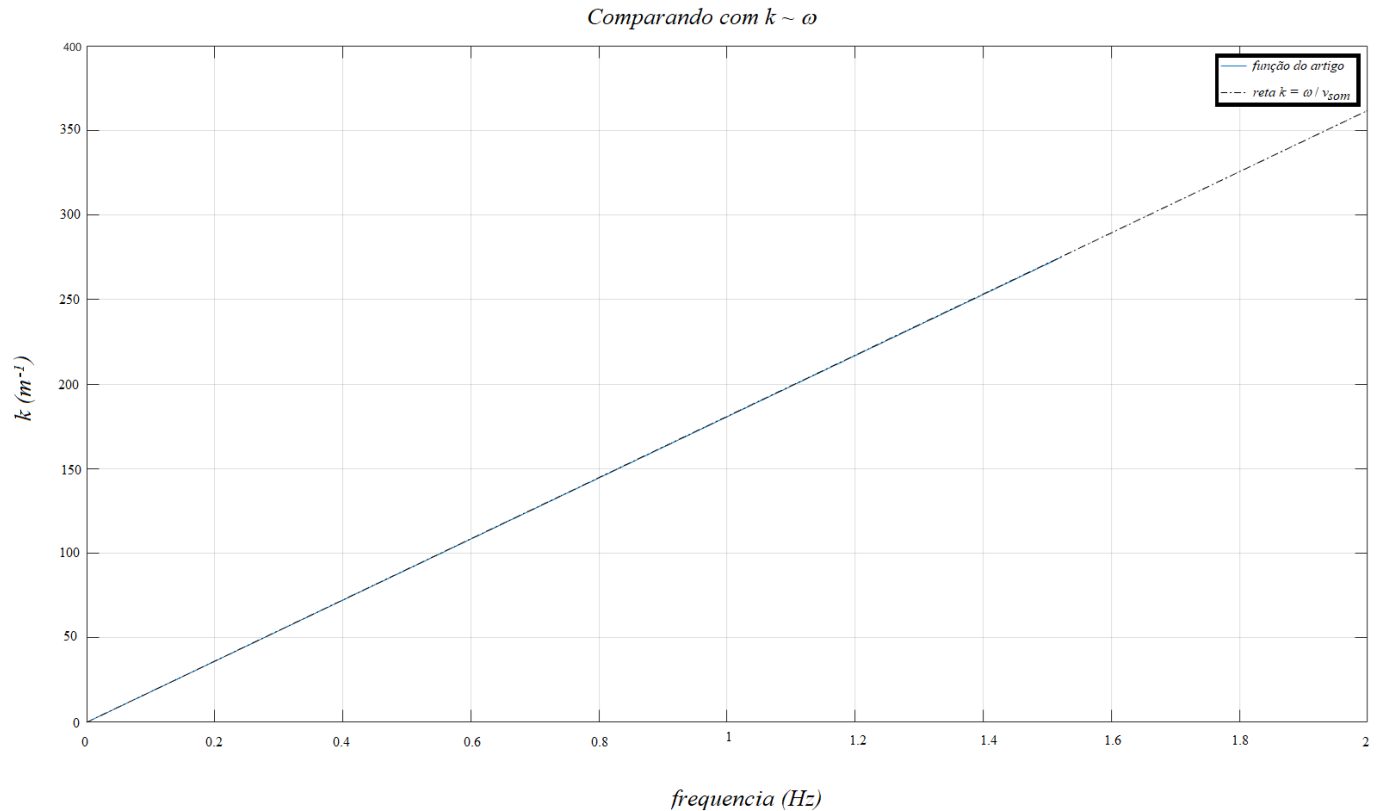
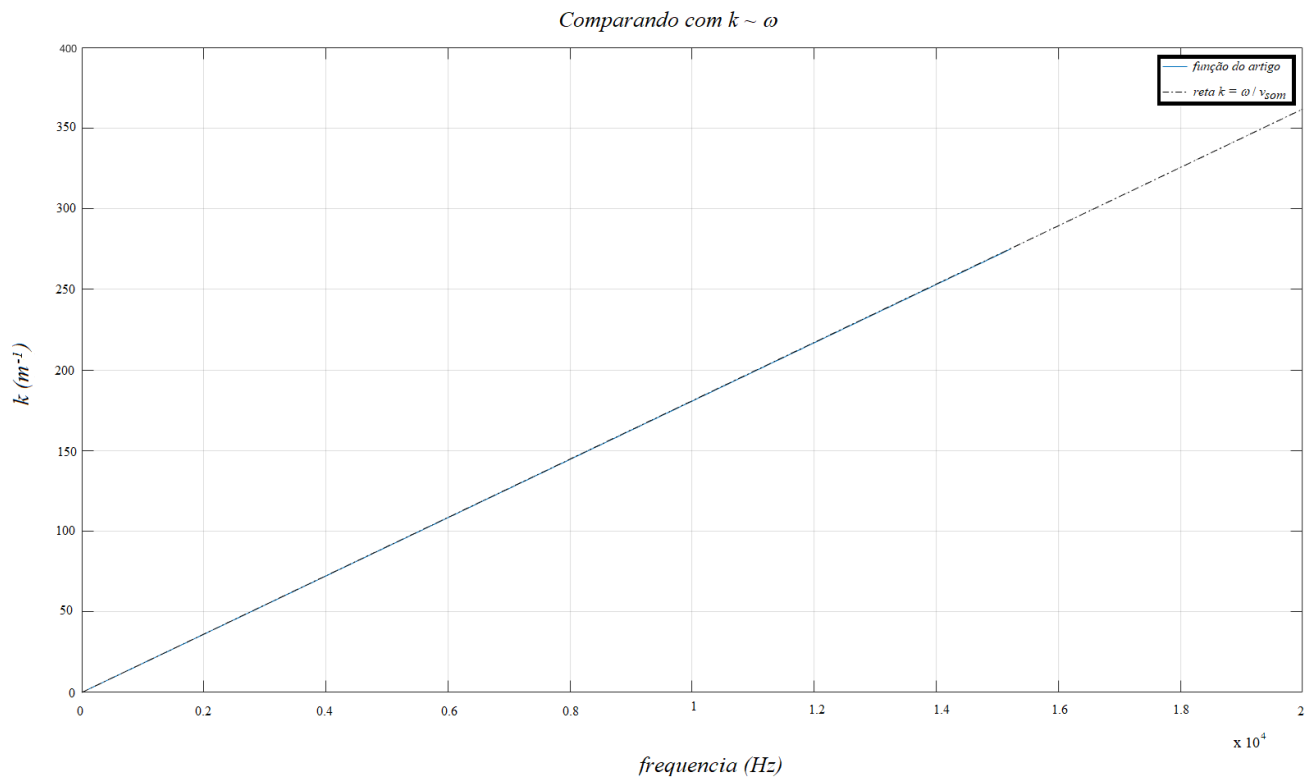


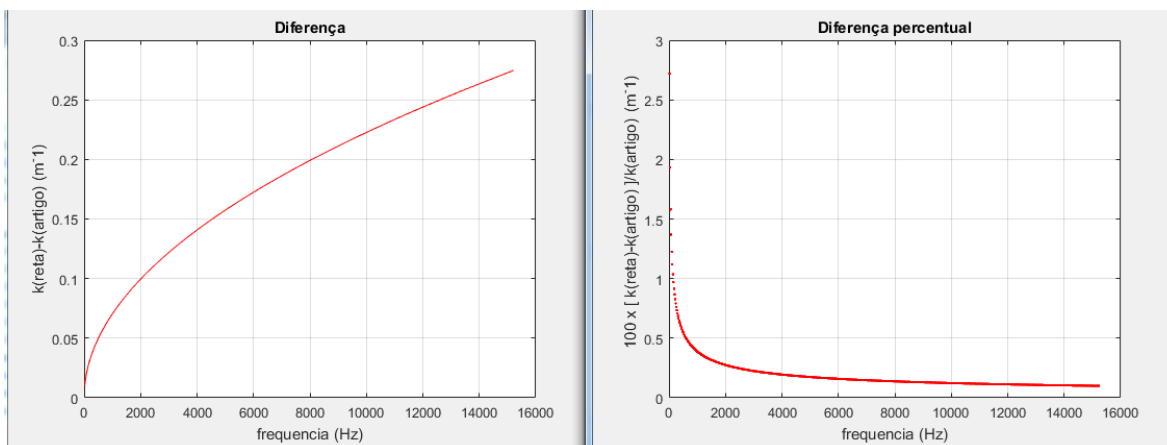
Gráfico 2.5 – comparação relação de dispersão

Estão plotados aproximadamente 1000 pontos. A curva está muito próxima. Vamos olhar

em zoom para visualizar a dispersão.

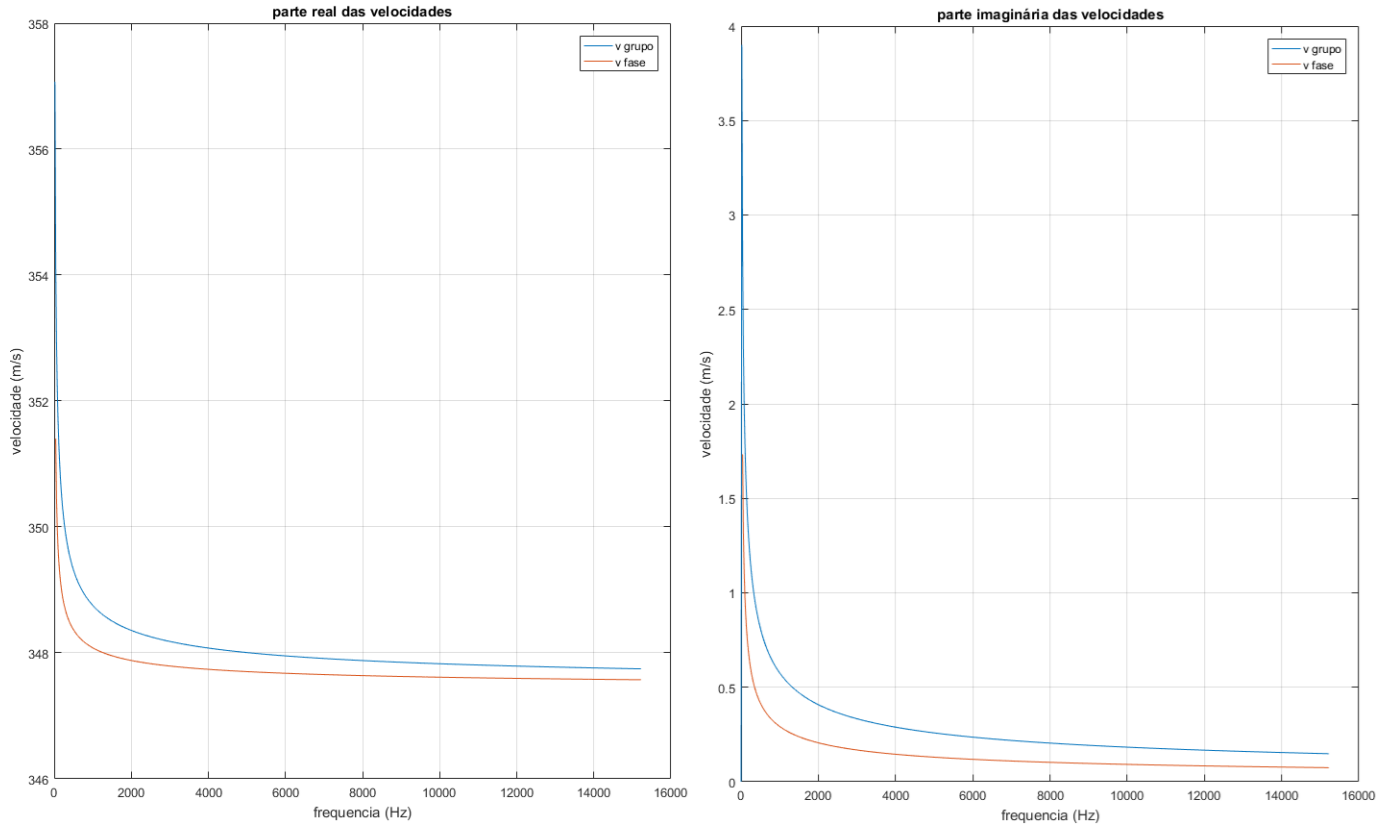


Observamos que a dispersão ocorre muito gradualmente...



Gráficos 2.7 – comparação entre relações de dispersão

Plotamos também as velocidades de grupo ($v_g = \omega/k$) e de fase ($v_f = d\omega/dk$).



Gráficos 2.8 – Velocidades de fase e de grupo

Quase na metade do trabalho [1], o autor menciona que as funções f em (2.13) passariam a depender de z sob um grad T_0 não nulo, exatamente porque a viscosidade varia com a temperatura (alterando a camada limite). Em muitos fluidos $\eta \sim T^\beta$, isso alteraria f mais ou menos do seguinte modo:

$$f_1 = \frac{2I_1 \left(\sqrt{i} \cdot \frac{r_0}{l_c} T_0^{-(1+\beta)} \right)}{i\sqrt{i} \cdot \frac{r_0}{l_c} K \cdot T_0^{-(1+\beta)} I_0 \left(\sqrt{i} \cdot \frac{r_0}{l_c} T_0^{-(1+\beta)} \right)} \quad (2.14)$$

mas essa alteração não é suficiente, uma vez que essa relação de dispersão veio da solução de (2.12)

$$[1 + (\gamma - 1) f_1^*] p + \frac{d}{dz} \left[\frac{a^2}{\omega^2} (1 - f_1) \frac{dp}{dz} \right] - \frac{a^2}{\omega^2} \frac{f_1^* - f_1}{1 - \sigma} \theta \frac{dp}{dz} = 0$$

no caso particular em que $\theta = 0$ (gradiente de temperatura nulo).

Nas palavras do próprio Rott

“Nenhum progresso adicional parece ser possível com meios analíticos simples...” [1]

Na ocasião da publicação do artigo (final da década de 60) a computação ainda se difundia lentamente, não sendo de todo comum ter acesso a bons computadores para cálculos numéricos.

O artigo prossegue supondo um perfil de temperaturas com uma descontinuidade em um ponto no interior do tubo. Este é o único caso que o autor resolve, ainda assim realizando várias outras aproximações. Por este motivo achamos interessante tentar uma simulação numérica do problema.

Capítulo 3

Efeito magneto-termoacústico

Conseguimos estender este modelo para o caso de um fluido condutor sujeito a um campo magnético externo de intensidade B_0 . Checamos duas possibilidades para direção do campo: axial ou tangencial. Concluímos que aplicar um campo ao longo do eixo z é mais simples, tanto experimentalmente como nos cálculos, portanto, adotamos esta direção.

Na ordem de grandeza das frequências acústicas podemos fazer uma abordagem não-relativística, ignorando correntes de deslocamento. Deste modo, conforme a lei de Ampère, teremos no fluido uma corrente de condução

$$\vec{J} = \mu_0^{-1} \nabla \times \vec{B} \quad (3.1)$$

Consideramos um fluido não magnetizável, por isso usamos a permeabilidade magnética do vácuo μ_0 .

Como isso vai afeta as equações? Tínhamos o sistema (2.4),

$$\begin{aligned} i\omega \rho_1 &= -\frac{d\rho_0}{dz} v_z - \rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\rho_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r), \\ i\omega v_z &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{dp_1}{dz} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \\ \frac{i\omega}{a^2} p_1 - i\omega \rho_1 &= \frac{d\rho_0}{dz} v_z - \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho_1}{\partial r} \right), \end{aligned}$$

relembrando: a primeira equação veio da continuidade (note: é de primeira ordem), a segunda é a de Navier-Stokes na direção z , já a terceira é a de conservação de energia.

O campo magnético não pode alterar a conservação de massa, portanto a primeira equação fica como está.

Já no que tange a densidade de força, expressa pela segunda equação, podemos esperar um termo adicional no lado direito correspondente a força de Lorentz:

$$\vec{J} \times \vec{B} = \left(\mu_0^{-1} \nabla \times \vec{B} \right) \times \vec{B} \quad (3.2)$$

Isso se relaciona com o efeito *skin* : qualquer carga livre no interior do condutor tende a ir para a superfície, em um tempo menor que o necessário para o fluido atingir o equilíbrio termodinâmico. Se o fluído tivesse uma resistividade η finita então um termo como $-\eta J^2$

deveria ser adicionado no lado direito da equação de conservação de energia, representando o efeito Joule.

O duplo produto vetorial pode ser expandido pela identidade:

$$(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \nabla (B^2/2) \quad (3.3)$$

O primeiro termo do segundo membro é chamado *tensão magnética*, enquanto o último termo é o gradiente da *pressão magnética*. A tensão ocorre quando há mudanças significativas na direção do campo. Em outras palavras, quanto maior a curvatura das linhas, maior a tensão magnética. Já a pressão só altera a força quando há mudanças significativas na intensidade do campo. Uma vez que tenhamos fixado uma direção majoritária para o campo, vamos negligenciar o termo de tensão magnética, ficando apenas com o gradiente da pressão.

Resumidamente, o que propomos, para incluir o campo magnético, é substituir o pressuposto fundamental de Rott sobre o gradiente radial desprezível pela seguinte condição sobre a pressão:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(p_1 + \frac{\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1}{\mu_0} \right) = 0, \quad (3.4)$$

onde B_0 é o campo externo e B_1 sua perturbação. Em outras palavras, (3.4) substitui a equação (2.1).

Uma vez que introduzimos um novo campo, será necessária uma nova equação. Felizmente, a Lei de Faraday, nos provê o necessário neste caso:

$$\partial \vec{B} / \partial t = -\nabla \times \vec{E} \quad (3.5)$$

Em um fluído perfeitamente condutor, o campo elétrico comóvel com o fluído se anula:

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0 \quad (3.6)$$

Substituindo isso na Lei de Faraday temos

$$\partial \vec{B} / \partial t = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.7)$$

Veremos o que ocorre se introduzirmos as perturbações $\vec{v} \rightarrow \vec{v}_0 + \vec{v}_1$ e $\vec{B} \rightarrow \vec{B}_0 + \vec{B}_1$. Em

primeiro lugar, o produto nos parênteses a direita será

$$\vec{v} \times \vec{B} = \vec{v}_0 \times \vec{B}_0 + \vec{v}_0 \times \vec{B}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{B}_0 \quad (3.8)$$

O primeiro termo se cancela com o termo de equilíbrio do lado esquerdo, o segundo termo se anula se considerarmos que o fluído é estático no equilíbrio, sobrarão apenas

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \vec{v} \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) \quad (3.9)$$

Vamos então adotar coordenadas cilíndricas e assumir, para esta primeira abordagem, que o campo externo é uniforme e constante:

$$\vec{B}_0 = \hat{z} B_0 \quad (3.10)$$

Essa configuração pode ser produzida por uma corrente contínua, fluindo em um solenoide, enrolado externamente a parede do tubo. Neste caso, devido a lei de Ampère, a corrente de condução no equilíbrio $\vec{J}_0 = 0$ em todo o fluído. Portanto, considerando a mesma perturbação monocromática e axisimétrica, vemos que a componente z da densidade de força de Lorentz será

$$\hat{z} \cdot (\vec{J}_0 \times \vec{B}_1 + \vec{J}_1 \times \vec{B}_0) = 0 \quad (3.11)$$

Em outras palavras, devido a nossa escolha do campo magnético de equilíbrio, a densidade de força de Lorentz não contribui para a componente z da equação de Navier-Stokes linearizada.

Da Lei de Faraday obtemos a evolução temporal da componente z do campo perturbado:

$$i\omega (\hat{z} \cdot \vec{B}_1) = -B_0 \Omega \quad (3.12)$$

Onde Ω é

$$\Omega = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \quad (3.13)$$

Pois bem, multiplicando por B_0 este resultado da Lei de Faraday, encontramos o produto

$\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1$, o qual podemos substituir na hipótese de Rott modificada:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(p_1 + \frac{\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1}{\mu_0} \right) = 0.$$

obtendo

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(p_1 - \frac{B_0^2}{i\omega\mu_0} \Omega \right) = 0 \quad (3.14)$$

Integrando este resultado, chegamos a

$$p_1(r, z) - \alpha^2 \gamma p_0 \frac{\Omega(r, z)}{i\omega} \equiv p_1^{\text{eff}}(z) \quad (3.15)$$

Onde definimos a constante

$$\alpha = \frac{A(z)}{a(z)}, \quad (3.16)$$

como a razão entre as velocidades de Álfven (A) e a do som (a).

$$A(z) = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}}, \quad a(z) = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}, \quad (3.17)$$

esta razão deve ser constante, uma vez que a dependência em z está no p_0 e eles se cancelam nesta divisão.

Rotulamos a integral como uma pressão efetiva, independente de r , uma vez que efetivamente satisfaz a hipótese original de Rott:

$$\frac{\partial p_1^{\text{eff}}}{\partial r} = 0. \quad (3.18)$$

Vamos agora verificar o impacto da modificação dessa hipótese sobre as outras grandezas. Tomemos, por exemplo, a equação de Navier-Stokes:

$$i\omega v_z = -\frac{1}{\rho_0} \frac{dp_1}{dz} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right).$$

Nesta equação substituímos

$$p_1 = p_1^{eff} + \frac{\gamma p_0 \alpha^2}{i \omega} \Omega \quad (3.19)$$

obtendo

$$i\omega v_z = -\frac{1}{\rho_0} \frac{dp_1^{eff}}{dz} - \frac{1}{i} \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\alpha^2 \Omega}{\omega} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} (v v_z) \right]$$

onde identificamos $\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \equiv \alpha^2(z)$ no segundo termo do lado direito. Passando este termo ao primeiro membro vamos ficar com

$$i\omega \left[v_z - \frac{\alpha^2}{\omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\alpha^2 \Omega}{\omega} \right) \right] = -\frac{1}{\rho_0} \frac{dp_1^{eff}}{dz} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} (v v_z) \right]$$

Colocamos a viscosidade cinemática junto a v_z por um motivo: estamos tentando obter novamente a mesma equação de Navier-Stokes, agora para uma velocidade efetiva.

Olhando para o colchete do lado esquerdo, se o rotularmos como

$$v_z^{eff} \equiv v_z - \frac{\alpha^2}{\omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\alpha^2 \Omega}{\omega} \right) \quad (3.20)$$

observamos que a equação fica satisfeita, pois foi suposto $v(z) \frac{\partial}{\partial z} \sim 0$, como no modelo de Rott.

Podemos, do mesmo modo, encontrar uma relação entre a oscilação na densidade com e sem o campo magnético. Basta partir da equação da continuidade:

$$i\omega \rho_1 = -\frac{d\rho_0}{dz} v_z - \rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \rho_0 \Omega$$

inserindo $v_z = v_z^{eff} + \frac{\alpha^2}{\omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\alpha^2 \Omega}{\omega} \right)$ obtemos

$$i\omega \rho_1 = -\frac{d\rho_0}{dz} v_z^{eff} - \frac{\alpha^2}{i\omega^2} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\alpha^2 \Omega}{\omega} \right) - \rho_0 \frac{\partial v_z^{eff}}{\partial z} - \rho_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\alpha^2}{\omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\alpha^2 \Omega}{\omega} \right) \right) - \rho_0 \Omega$$

O que, rearranjando, fica

$$i\omega \left[\rho_1 + \frac{\alpha^2}{\omega^3} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\alpha^2 \Omega}{\omega} \right) + \frac{\rho_0}{i\omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\alpha^2}{\omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\alpha^2 \Omega}{\omega} \right) \right) \right] = -\frac{d\rho_0}{dz} v_z^{eff} - \rho_0 \frac{\partial v_z^{eff}}{\partial z} - \rho_0 \Omega$$

Aqui, do mesmo modo, rotulamos o colchete do lado esquerdo como

$$\rho_1^{eff} \equiv \rho_1 + \frac{\alpha^2}{\omega^3} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\alpha^2 \Omega}{\omega} \right) + \frac{\rho_0}{i\omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\alpha^2}{\omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\alpha^2 \Omega}{\omega} \right) \right) \quad (3.21)$$

De modo que reobtemos a equação de continuidade:

$$i\omega \rho_1^{eff} = -\frac{d\rho_0}{dz} v_z^{eff} - \rho_0 \frac{\partial v_z^{eff}}{\partial z} - \rho_0 \Omega$$

Vamos substituir agora estes resultados na equação da energia. A equação para o caso sem campo deve permanecer válida para as grandezas efetivas:

$$\frac{i\omega}{a^2} p_1^{eff} - i\omega \rho_1^{eff} = \frac{d\rho_0}{dz} v_z^{eff} - \frac{\nu/\varrho}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho_1^{eff}}{\partial r} \right)$$

Já para as amplitudes de oscilação com o campo magnético devemos retroceder alguns passos na dedução da equação, para obter a expressão correta. Tínhamos a equação (2.35):

$$c_p \rho_0 \frac{\partial T_1}{\partial t} + c_p \rho_0 v_z \frac{dT_0}{dz} - \frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\eta c_p}{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right)$$

com T_1 dado por $\frac{M}{R} \frac{1}{\rho_0} \left(p_1 - \frac{p_0}{\rho_0} \rho_1 \right)$.

Não temos mais uma oscilação de pressão independente de r , uma vez que $p_1 = p_1^{eff} + \frac{\gamma p_0}{i} \frac{\alpha^2}{\omega} \Omega$, vamos ter um termo adicional no membro direito, equivalente ao laplaciano de p_1 :

$$\frac{i\omega}{a^2} p_1 - i\omega \rho_1 = \frac{d\rho_0}{dz} v_z + \frac{\nu}{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\gamma}{a^2} r \frac{\partial p_1}{\partial r} \right] - \frac{\nu}{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \rho_1}{\partial r} \right]$$

A substituição de cada grandeza em função dos valores efetivos nos levará a seguinte equação diferencial para Ω :

$$\Omega + \frac{\alpha^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} + \frac{\gamma}{i\omega} \frac{\nu}{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right] = 0$$

a qual simplificamos com as mudanças de variáveis:

$$dz \rightarrow d\zeta \cdot \frac{\omega}{a} \quad \text{e}$$

$$dr \rightarrow d\xi \cdot \left(\frac{v/\sigma}{i\omega} \right)^{1/2},$$

obtendo:

$$\frac{\gamma}{\Omega \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \zeta^2} + 1 = 0 \quad (3.22).$$

Vamos impor condição semelhante ao caso sem o campo. Com a oscilação de temperatura zerando na parede do tubo, teremos

$$\frac{M}{R} \frac{1}{\rho_0} \left(p_1 - \frac{p_0}{\rho_0} \rho_1 \right) = 0$$

em $r = r_0$ (raio interno do tubo), ou ainda,

$$\gamma (p_1)_w = (\rho_1)_w a^2 \quad (3.23),$$

onde w indica a parede do tubo. Substituindo p_1 e ρ_1 em termos dos valores efetivos e Ω , teremos:

$$\gamma (p_1^{\text{eff}})_w + \alpha^2 \gamma^2 p_0 \frac{\Omega_w}{i\omega} = (\rho_1^{\text{eff}})_w a^2 - \alpha^2 \frac{a^4}{i\omega^3} \frac{d\rho_0}{dz} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial z} \right)_w - \alpha^2 \frac{a^4}{i\omega^3} \rho_0 \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} \right)_w$$

O que pode ser simplificado pela imposição da condição de contorno nos valores efetivos, cancelando o primeiro membro de cada lado. Trocando o gradiente de densidade pelo de temperatura, para melhor explicitar a dependência com este último, obtemos:

$$\frac{1}{\Omega_w} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \zeta^2} \right)_w - \frac{1}{T_0} \frac{dT_0}{d\zeta} \frac{1}{\Omega_w} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} \right)_w + \gamma = 0 \quad (3.24)$$

que é a condição de contorno a ser imposta na equação de Ω .

Usando o método de separação de variáveis, conseguimos resolver a equação em Ω , encontrando uma equação de Bessel na coordenada radial (ξ) e uma equação do oscilador harmônico na direção axial (ζ). Encontramos uma solução na forma:

$$\Omega(\xi, \zeta) = \Omega(\xi_0, \zeta_0) \frac{\mathcal{J}_0(\xi) \sinh(\zeta \sqrt{\gamma-1})}{\mathcal{J}_0(\xi_0) \sinh(\zeta_0 \sqrt{\gamma-1})} \quad (3.25)$$

A condição de contorno nos permitiu adicionalmente encontrar a forma que o gradiente de temperatura que deve ter:

$$\frac{1}{T_0} \frac{dT_0}{d\zeta} = \frac{(2\gamma-1)}{\sqrt{\gamma-1}} \tanh(\zeta \sqrt{\gamma-1}) \quad (3.26)$$

Isso leva a um perfil de T do tipo

$$T_0(\zeta) = T_0(\zeta_0) \left[\frac{\cosh(\zeta \sqrt{\gamma-1})}{\cosh(\zeta_0 \sqrt{\gamma-1})} \right]^{(2\gamma-1)/(\gamma-1)} \quad (3.27).$$

Temos portanto, um entendimento completo do fenômeno resolvendo primeiramente a equação da pressão efetiva, que é a mesma do modelo de Rott:

$$\frac{d^2 p_1^{\text{eff}}}{d\zeta^2} + \left[\frac{1}{\phi_1} \frac{d\phi_1}{d\zeta} + \left(\frac{\phi_e/\phi_1 - \varrho}{1 - \varrho} \right) \frac{1}{T_0} \frac{dT_0}{d\zeta} \right] \frac{dp_1^{\text{eff}}}{d\zeta} + \left[\frac{\gamma}{\phi_1} - \frac{(\gamma-1)}{\phi_1/\phi_e} \right] p_1^{\text{eff}} = 0. \quad (3.28)$$

para este perfil de temperatura. Em segundo lugar compomos com a função Ômega para encontrar a pressão com o campo magnético ligado usando (3.19):

$$p_1 = p_1^{\text{eff}} + \frac{\gamma p_0 \alpha^2}{i \omega} \Omega.$$

A velocidade axial v_z é composta do mesmo modo, a partir do valor efetivo, usando (3.20), e depois com a função Ômega

$$v_z = v_z^{\text{eff}} + \frac{\alpha^2}{\omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\alpha^2 \Omega}{\omega} \right)$$

e o mesmo pode ser feito para a densidade e a velocidade v_r .

Capítulo 4

Um *toy model*

Propomos a seguir uma abordagem inicial para um entendimento básico do estado estacionário dessas oscilações.

A semelhança de uma barreira de potencial em mecânica quântica, temos aqui uma barreira de temperatura.

As ondas mecânicas provem dessa região com um gradiente extremo, que pode ser aproximada como uma função degrau em T .

Para ilustrar de uma maneira muito simples, consideremos a seguinte "equação de onda" unidimensional para a pressão manométrica ao longo do eixo do tubo: $p'' + k^2 \cdot p = 0$. Em um tubo de comprimento L , com uma estreita fonte de calor em $z = z_0$ teremos então

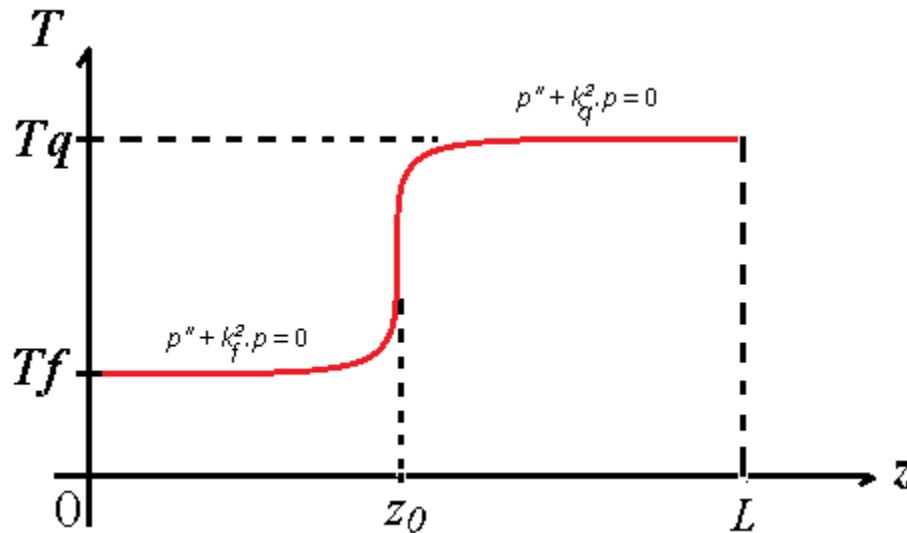


Figura 4.1 – quebrando o problema em dois

Podemos esperar, como na barreira de potencial em mecânica quântica, que em ambos patamares, valha a mesma equação de onda, apenas com um parâmetro diferente. O parâmetro, no caso, é o número de onda k , para o qual admitimos o valor k_f de $z = 0$ a $z = z_0$ e o valor k_q de $z = z_0$ até $z = L$.

Ademais, também como no caso quântico, podemos considerar fisicamente impossível uma descontinuidade nas oscilações de pressão, assim como no gradiente de pressão, já que isso

acarretaria uma força infinita, entre outros absurdos. Chamando então de p_f a pressão entre $z=0$ e $z = z_0$, e chamando p_q a pressão entre $z = z_0$ e $z = L$ devemos ter

$$p_f(z_0) = p_q(z_0)$$

$$p_f'(z_0) = p_q'(z_0)$$

Isto deve valer independente das condições de contorno.

Vamos desenvolver para o caso particular de um tubo aberto em $z=0$ e fechado em $z=L$. Neste caso temos as soluções $p_f \sim \cos(k_f.z)$ para a parte fria e $p_q \sim \sin(k_q.z)$ para a parte quente.

Teremos então uma condição de contorno $p_q = 0$ ou $\sin(k_q.L) = 0$ em $z = L$, o que implica

$$k_q = n.\pi/L \quad . \quad (4.0)$$

Supondo então amplitudes A_f e A_q a imposição de continuidade implica

$$A_f.\cos(k_f.z_0) = A_q.\sin(k_q.z_0) \quad (4.1)$$

$$-A_f.k_f.\sin(k_f.z_0) = A_q.k_q.\cos(k_q.z_0) \quad (4.2)$$

O problema é que estas duas equações não são independentes, portanto, elas não podem fornecer valores independentes de A_f e A_q . Porém, dividindo uma pela outra, encontramos uma relação entre k_f e k_q :

$$k_f.\text{tg}(k_f.z_0) = -k_q/\text{tg}(k_q.z_0) \quad (4.3)$$

como já constava no trabalho de Rott [1].

Na mecânica quântica problema das amplitudes é resolvido pela condição de normalização da função de onda. O equivalente disso aqui seria a integral de potência para essas soluções.

Uma vez que a potência acústica pode ser inferida pela medida do nível sonoro, teremos algo parecido com a condição de normalização da mecânica quântica, no formato

$$a.A_f^2 + b.A_q^2 = P \quad (4.4)$$

sendo as constantes a e b integrais em r e z das soluções. É fácil ver isso considerando que da acústica temos a seguinte equação para a potência por unidade de área:

$$I = A^2/(2.\rho_0.v_{\text{som}}) \quad (4.5)$$

sendo p a amplitude da oscilação de pressão e ρ_0 a densidade média do fluido. No caso

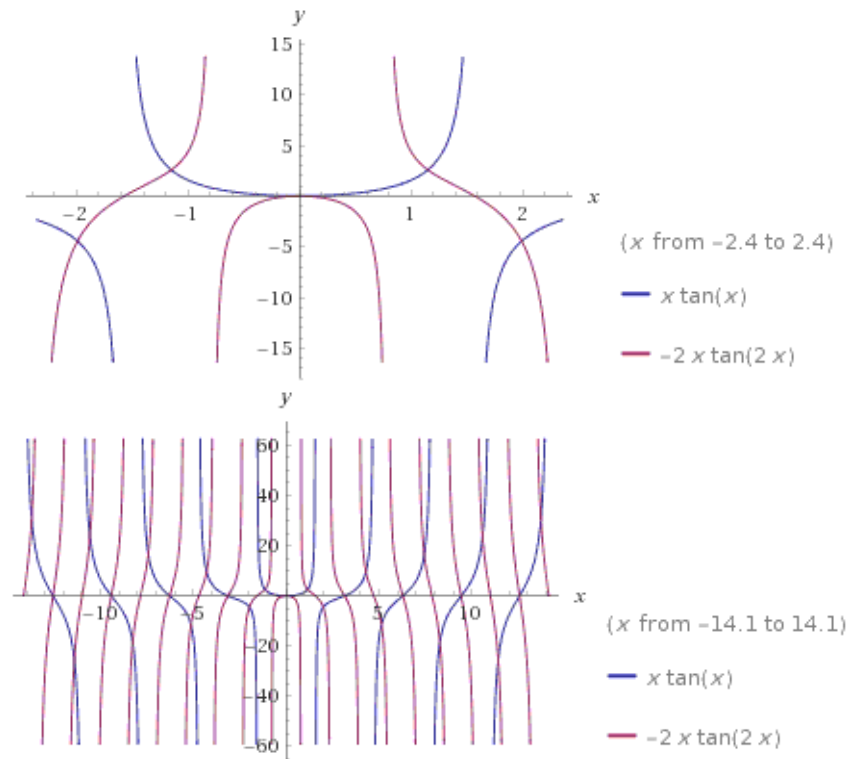
podemos esperar que o quadrado da amplitude A^2 venha a ser uma composição das amplitudes quadradas das soluções nos domínios anterior e posterior ao *stack* localizado em $z = z_0$.

Inserindo (2.0) em (2.3) encontramos

$$(k_f z_0) \cdot \text{tg}(k_f z_0) = - (n \cdot \pi \cdot z_0 / L) / \text{tg}(n \cdot \pi \cdot z_0 / L) \quad (4.6)$$

que é uma equação para k_f , na forma $x \cdot \text{tg} x = \text{cte}$.

Podemos visualizar as soluções para $k_f z_0 = x$ observando os gráficos a seguir:



dos quais podemos inferir, considerando o sinal no membro direito de (4.6), que uma primeira solução para $x = k_f z_0$ se situaria entre $\pi/2$ e π ou, equivalentemente, entre $-\pi$ e $-\pi/2$.

$$\pi/2 \cdot z_0 < |k_f| < \pi/z_0$$

Como $x \cdot \text{tg} x$ é periódica todas soluções podem ser mapeadas por outro número inteiro m . Essa desigualdade seria para uma solução com $m = 1$, para outros números valeria

$$(m-1) \cdot \pi / z_0 < |k_f| < m \cdot \pi / z_0$$

Particularmente, sabemos que, para $k_f z_0 \ll 1$, ou seja, $z_0 \ll L$, teremos $k_f = i.n. \pi / L$ em

(4.6) .

Vimos no capítulo anterior como a equação diferencial para $p(z)$ é obtida por primeiros princípios, para um perfil de temperatura $T(z)$ qualquer. Essa equação, sendo linear, tem soluções na forma $\exp(k.z)$. Deste modo, a equação diferencial em p se converte em equações algébricas para k em ambos patamares. Então a relação de dispersão (4.3) na verdade funcionaria como uma equação para z_0 , pois os valores de k_f e k_q seriam conhecidos de antemão.

Em um caso mais geral, tanto as condições de continuidade quanto as de contorno formariam um sistema linear como $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{c}$, onde \mathbf{A} é uma matriz 4×4 , \mathbf{u} e \mathbf{c} são vetores coluna. O vetor \mathbf{u} contém as amplitudes das funções exponenciais que compõe a solução, em ambos patamares de temperatura. Para generalizar, denotaremos estes patamares por a e b ao invés de f e q . O segmento a será compreendido entre $z = 0$ e $z = z_0$, e terá uma temperatura T_a . Já o segmento b estará de $z = z_0$ até $z = L$, com uma temperatura T_b . Dessa maneira, como a equação para $p(z)$ é de segunda ordem, teremos uma equação de segundo grau em k para cada patamar. Denotando as raízes dessas equações por k_{a1} , k_{a2} e k_{b1} , k_{b2} teremos $p(z)$ especificado pelas seguintes soluções:

$$p_a(z) = p_{a1} \cdot \exp(k_{a1} \cdot z) + p_{a2} \cdot \exp(k_{a2} \cdot z) \quad , \quad \text{para } z \text{ de zero a } z_0$$

$$\text{e} \quad p_b(z) = p_{b1} \cdot \exp(k_{b1} \cdot z) + p_{b2} \cdot \exp(k_{b2} \cdot z) \quad , \quad \text{para } z \text{ de } z_0 \text{ até } L.$$

Logo, nosso vetor \mathbf{u} de amplitudes seria $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} p_{a1} \\ p_{a2} \\ p_{b1} \\ p_{b2} \end{bmatrix}$.

As condições de continuidade ficam:

$$p_a(z_0) = p_b(z_0) \Rightarrow p_{a1} \cdot \exp(k_{a1} \cdot z_0) + p_{a2} \cdot \exp(k_{a2} \cdot z_0) - p_{b1} \cdot \exp(k_{b1} \cdot z_0) - p_{b2} \cdot \exp(k_{b2} \cdot z_0) = 0$$

$$p_a'(z_0) = p_b'(z_0) \Rightarrow k_{a1} \cdot p_{a1} \cdot \exp(k_{a1} \cdot z_0) + k_{a2} \cdot p_{a2} \cdot \exp(k_{a2} \cdot z_0) -$$

$$- k_{b1} \cdot p_{b1} \cdot \exp(k_{b1} \cdot z_0) - k_{b2} \cdot p_{b2} \cdot \exp(k_{b2} \cdot z_0) = 0 .$$

Colocamos estas condições nas duas primeiras linhas da matriz \mathbf{A} .

Deste modo, as duas primeiras linhas do vetor \mathbf{c} são nulas, enquanto as duas últimas são obtidas considerando a amplitude de oscilação em cada extremidade - numa extremidade fechada teremos uma oscilação nula e numa aberta teremos uma amplitude de oscilação p_0 .

Para impor variadas condições de contorno de forma uniforme sobre estas soluções consideramos dois possíveis estados nas fronteiras $z = 0$ e $z = L$: aberto ou fechado, os quais denotamos por dois números binários a e b , sendo zero extremidade aberta e 1 fechada. Assim, por exemplo, $a = 0$, $b = 1$, denotaria extremidade aberta em $z = 0$ e fechada

em $z = L$. O sistema $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{c}$ é então:

$$\begin{bmatrix} e^{k_{a1}z_0} & e^{k_{a2}z_0} & -e^{k_{b1}z_0} & -e^{k_{b2}z_0} \\ k_{a1}e^{k_{a1}z_0} & k_{a2}e^{k_{a2}z_0} & -k_{b1}e^{k_{b1}z_0} & -k_{b2}e^{k_{b2}z_0} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{k_{b1}L} & e^{k_{b2}L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{a1} \\ p_{a2} \\ p_{b1} \\ p_{b2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta_{a0} \cdot p_0 \\ \delta_{b0} \cdot p_0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Nas duas últimas linhas, temos $p_a(0)$ e $p_b(L)$, com os deltas de Kronecker especificando os valores no caso aberto (a e/ou b = 0) ou fechado (a e/ou b = 1).

Cabe observar que temos alguns problemas para resolver isso no caso $a = b = 1$. Matematicamente, teremos um sistema homogêneo, então sempre haverá a solução trivial. Mas isso também significa que as equações não são todas independentes. Seria necessária informação adicional para solucionar. Tal solução só poderia ser obtida considerando, ou uma condição no meio do tubo ou a limitação da potência ou densidade de energia no tubo.

Por outro lado, pensando fisicamente, em um tubo fechado em ambas extremidades, como ser possível introduzir uma perturbação de modo a desencadear o fenômeno? Este caso possivelmente seria mais difícil de obter experimentalmente. Como estamos nos restringindo ao que pode ser mais acessível observar, iremos, num primeiro momento, excluir esta possibilidade do nosso interesse, nos restringindo as outras três condições de contorno.

Para as demais condições, é fundamental compreender o parâmetro p_0 . Interpretaremos tal parâmetro como uma pequena perturbação necessária para desencadear o fenômeno. Pelas equações básicas da acústica podemos relacionar esta perturbação com o nível sonoro de um ruído ambiental. Desta forma, imaginamos que p_0 seja a pressão correspondente a um nível sonoro de 10 a 30 dB. Como sabemos, este valor pode ser obtido inserindo a equação (2.5) em

$$\beta = \log(I/I_0) \quad [\text{Bell}]$$

com $I_0 \sim 10^{-12} \text{ W/m}^2$ o limiar auditivo, obtemos p_0 no intervalo de 0,025 a 0,368 mPa [3].

Vamos apresentar as soluções para o caso mais simples, que é o da equação

$$p'' + k^2 \cdot p = 0 .$$

$$\mathbf{a = 0, b=0} \Rightarrow p_a(z) = A_a \cdot \cos(k_a \cdot z) \quad , \quad p_b(z) = A_b \cdot \cos(k_b \cdot z)$$

$$p_a'(z) = -k_a \cdot A_a \cdot \cos(k_a \cdot z) \quad , \quad p_b'(z) = -k_b \cdot A_b \cdot \cos(k_b \cdot z)$$

impondo a continuidade, $p_a(z_0) = p_b(z_0)$ e $p_a'(z_0) = p_b'(z_0)$, temos

$$A_a \cdot \cos(k_a \cdot z_0) = A_b \cdot \cos(k_b \cdot z_0) \quad \text{e} \quad k_a \cdot A_a \cdot \cos(k_a \cdot z_0) = k_b \cdot A_b \cdot \cos(k_b \cdot z_0) .$$

Dividindo a última equação pela anterior chegamos a algo análogo a (2.3):

$$k_a \cdot \text{tg}(k_a \cdot z_0) = k_b \cdot \text{tg}(k_b \cdot z_0)$$

Difícil não concluir daqui que $k_b = k_a$ e as amplitudes A_b e A_a seriam ambas iguais a p_0 .

$$\mathbf{a=1, b=0} \Rightarrow p_a(z) = A_a \cdot \sin(k_a \cdot z) \quad , \quad p_b(z) = A_b \cdot \cos(k_b \cdot z)$$

$$p_a'(z) = k_a \cdot A_a \cdot \cos(k_a \cdot z) \quad , \quad p_b'(z) = -k_b \cdot A_b \cdot \sin(k_b \cdot z)$$

impondo a continuidade, $p_a(z_0) = p_b(z_0)$ e $p_a'(z_0) = p_b'(z_0)$, temos

$$A_a \cdot \sin(k_a \cdot z_0) = A_b \cdot \cos(k_b \cdot z_0) \quad \text{e} \quad k_a \cdot A_a \cdot \cos(k_a \cdot z_0) = -k_b \cdot A_b \cdot \sin(k_b \cdot z_0) .$$

Novamente, dividindo encontramos:

$$k_a / \text{tg}(k_a \cdot z_0) = -k_b \cdot \text{tg}(k_b \cdot z_0)$$

Conforme (4.0), para um tubo de comprimento L , temos $k_b = n \cdot \pi / L$, então os valores de k_a serão obtidos pela intersecção das curvas $k_a / \text{tg}(k_a \cdot z_0)$ com $-(n \cdot \pi / L) \cdot \text{tg}(n \cdot \pi \cdot z_0 / L)$. A amplitude $A_b = p_0$, e a amplitude A_a fica determinada por $A_a = p_0 \cdot \cos(k_b \cdot z_0) / \sin(k_a \cdot z_0)$.

$$\mathbf{a=0, b=1} \Rightarrow p_a(z) = A_a \cdot \cos(k_a \cdot z) \quad , \quad p_b(z) = A_b \cdot \sin(k_b \cdot z)$$

$$p_a'(z) = -k_a \cdot A_a \cdot \sin(k_a \cdot z) \quad , \quad p_b'(z) = k_b \cdot A_b \cdot \cos(k_b \cdot z)$$

do mesmo modo, impondo $p_a(z_0) = p_b(z_0)$ e $p_a'(z_0) = p_b'(z_0)$, temos

$$A_a \cdot \cos(k_a \cdot z_0) = A_b \cdot \sin(k_b \cdot z_0) \quad \text{e} \quad -k_a \cdot A_a \cdot \sin(k_a \cdot z_0) = k_b \cdot A_b \cdot \cos(k_b \cdot z_0) .$$

Do mesmo modo, encontramos

$$k_a \cdot \text{tg}(k_a \cdot z_0) = -k_b / \text{tg}(k_b \cdot z_0)$$

note a simetria com o caso anterior. Este foi o caso ilustrado anteriormente. De novo, conforme (4.0), para um tubo de comprimento L , temos $k_b = n \cdot \pi / L$, então os valores de k_a serão obtidos pela intersecção das curvas $k_a \cdot \text{tg}(k_a \cdot z_0)$ com $-(n \cdot \pi / L) \cdot \text{tg}(n \cdot \pi \cdot z_0 / L)$. A amplitude $A_a = p_0$, e a amplitude A_b fica do mesmo modo determinada por $A_b = p_0 \cdot \cos(k_a \cdot z_0) / \sin(k_b \cdot z_0)$.

Apenas por completeza, vamos mostrar o caso de ambas extremidades fechadas.

$$\mathbf{a=1, b=1} \Rightarrow p_a(z) = A_a.\text{sen}(k_a.z) , \quad p_b(z) = A_b.\text{sen}(k_b.z)$$

$$p_a'(z) = k_a.A_a.\cos(k_a.z) , \quad p_b'(z) = k_b.A_b.\cos(k_b.z)$$

do mesmo modo, impondo $p_a(z_0) = p_b(z_0)$ e $p_a'(z_0) = p_b'(z_0)$, temos

$$A_a.\text{sen}(k_a.z_0) = A_b.\text{sen}(k_b.z_0) \quad \text{e} \quad k_a.A_a.\cos(k_a.z_0) = k_b.A_b.\cos(k_b.z_0) .$$

Do mesmo modo, encontramos

$$k_a/\text{tg}(k_a.z_0) = k_b/\text{tg}(k_b.z_0)$$

Vemos aqui também que essa relação de dispersão parece sugerir $k_b = k_a$ e $A_b = A_a$, mas não temos como avaliar nenhuma dessas quantidades.

Portanto, fica difícil atribuir diferentes valores de k para a equação $p'' + k^2.p = 0$ em diferentes patamares, com condições de contorno idênticas em ambas extremidades.

Um modelo mais completo consideraria um termo de dispersão na equação diferencial. Poderíamos utilizar uma equação na forma

$$A.p'' + B.p' + C.p = 0 \quad (4.10)$$

procedendo da mesma maneira, com diferentes valores das constantes em cada patamar de T , e mesmas condições de continuidade.

Veremos adiante que A , B e C são na realidade números complexos, limites das funções $A(z)$, $B(z)$ e $C(z)$ obtidas por primeiros princípios. Foi para este caso que o tratamento através do sistema $\mathbf{A.u = c}$ foi desenvolvido (equação 4.9).

Capítulo 5

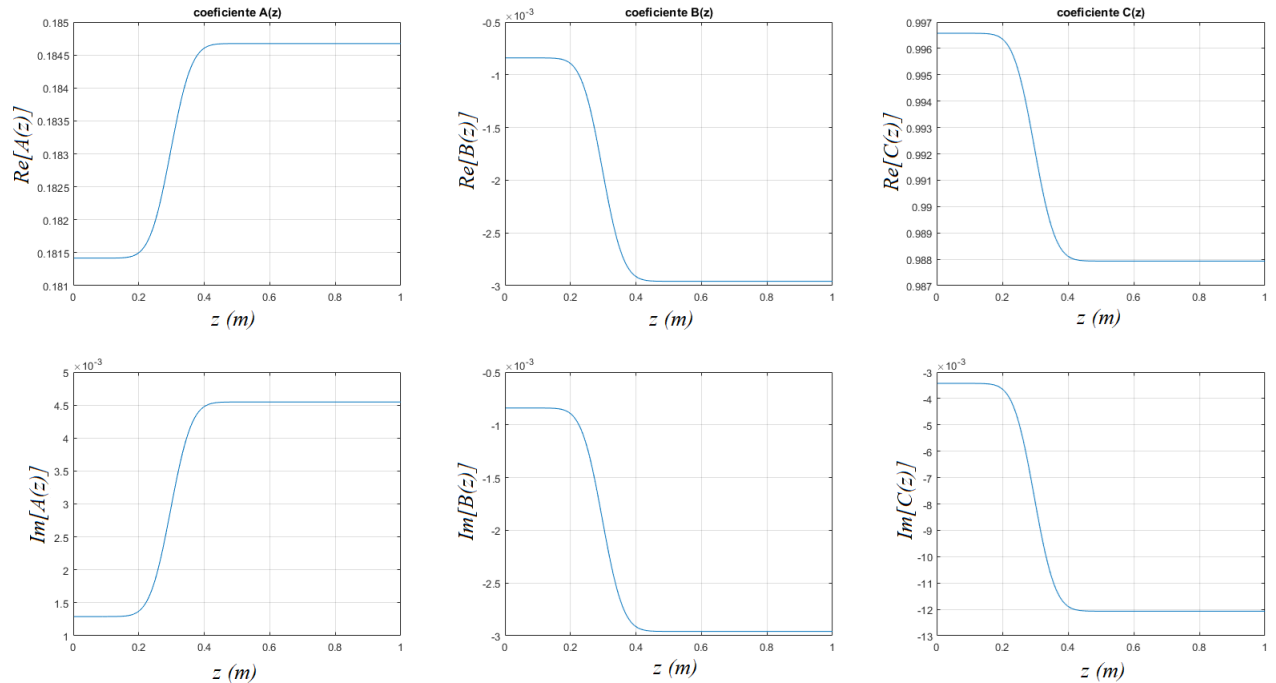
Modelagem computacional

5.1) Efeito termoacústico

Para criar um entendimento melhor acerca da EDO que modela a pressão manométrica no modelo de Rott vamos considerar que se trata de uma equação na forma:

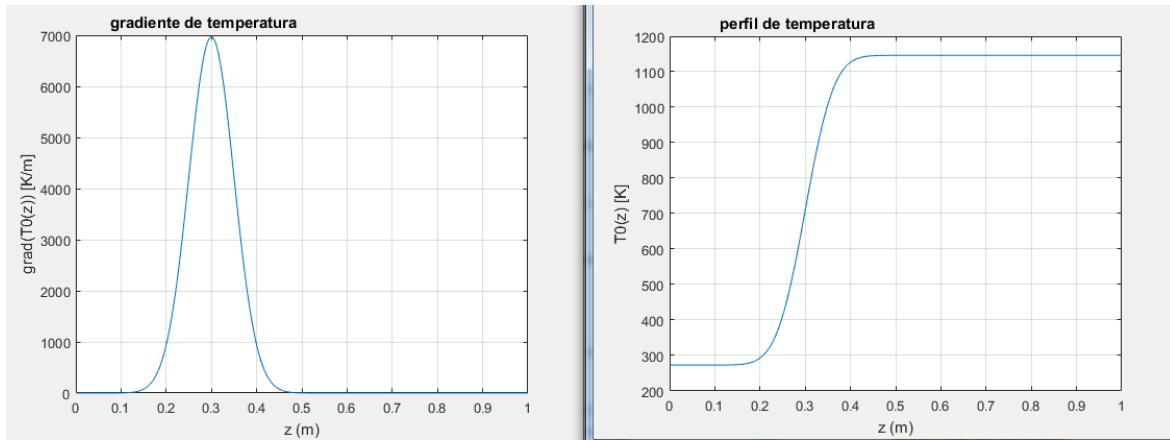
$$d/dz[A(z).dp/dz] - B(z).dp/dz + C(z).p = 0$$

A seguir mostramos um primeiro exemplo do que podem ser os coeficientes A, B e C(z):



Gráficos 5.1.1 – coeficientes para uma fonte de calor gaussiana em $z_0 = 0,3$.

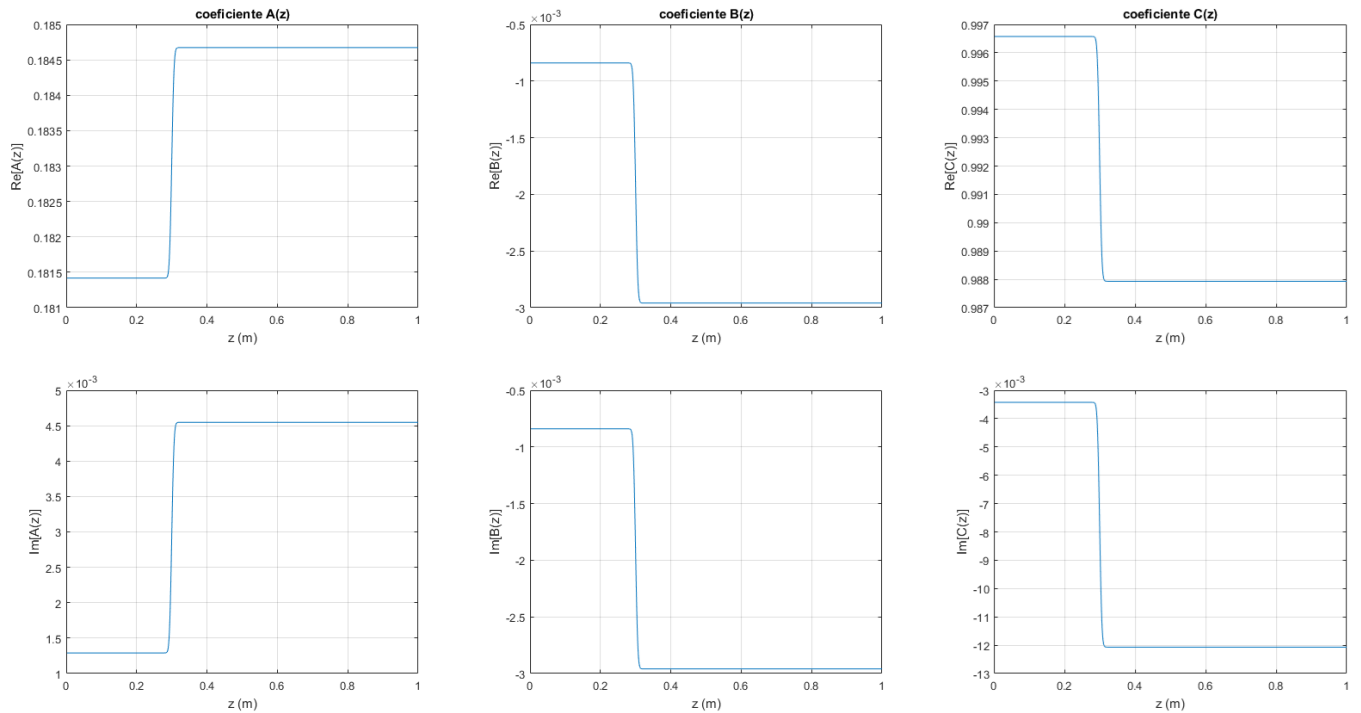
Nesta figura vemos os coeficientes para um perfil de temperaturas ao longo de um tubo com comprimento $L = 1$ m. A fonte de calor está em $z_0 = 0,30$ m. Achamos razoável supor um gradiente de temperatura representado por uma gaussiana no entorno de z_0 .



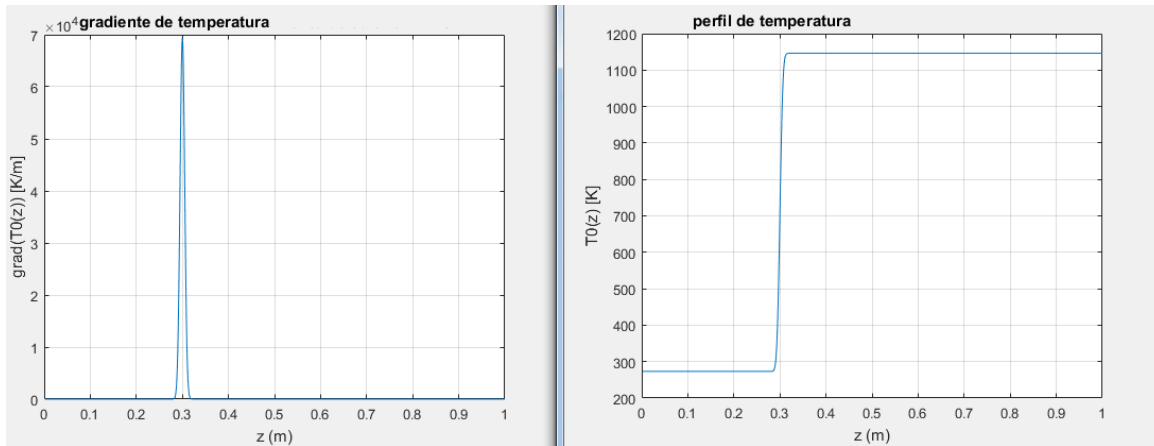
Gráficos 5.1.2 – gradiente gaussiano e perfil de temperatura função erro.

Esta gaussiana tem desvio padrão de 5 cm, representando portanto uma fonte de calor com aproximadamente essa extensão.

Curiosamente, se estreitarmos a largura da fonte, teremos os coeficientes se distribuindo em patamares cada vez mais definidos:



Gráficos 5.1.3 – coeficientes para fonte de calor dez vezes mais estreita.



Gráficos 5.1.4 – gradiente e perfil de temperatura correspondente aos coeficientes da figura 5.3 .

Podemos ver isto neste caso com o desvio padrão de 5 mm, mantendo todos outros parâmetros iguais.

No tocante a $p(z)$, devemos primeiramente observar que a solução, assim como os coeficientes, tem uma parte real e uma parte imaginária. A integração é solução de um problema de contorno. Tentamos realizar como um problema de valor inicial o caso de um tubo semi-infinito mas nenhum código convergiu.

O método básico para resolver este tipo de problema é o método da colocação.

Método de colocação é um meio para a solução numérica de equações diferenciais ordinárias, equações diferenciais parciais e equações integrais. A idéia é escolher um espaço de dimensões finitas de soluções candidatas (geralmente polinômios até um certo grau) e um número de pontos no domínio (chamados de pontos de colocação), e selecionar aquela solução que satisfaça a equação dada nos pontos de colocação.

Por exemplo, suponha o problema

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0,$$

a ser resolvido no intervalo $[t_0, t_0+h]$. Escolha n constantes c tais que $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \dots \leq c_n \leq 1$.

O método da colocação aproxima a solução y por um polinômio p de grau n que satisfaz a condição $p(t_0) = y_0$, e a equação diferencial $p'(t_k) = f(t_k, p(t_k))$ em todos pontos de colocação $t_k = t_0 + c_k \cdot h$. Isso fornece $n+1$ condições que casam com os $n+1$ parâmetros necessários para um especificar um polinômio de grau n . Este seria um problema de valor inicial, mas no caso do problema de contorno, temos então uma divisão a menos no domínio da função, pois há uma condição adicional na extremidade oposta. O método funciona da mesma maneira em ambos casos, como um método implícito de Runge-Kutta [15,16].

Felizmente, não precisamos nos preocupar muito em desenvolver a metodologia de integração desde o início. Existem softwares de computação científica como o Matlab, e

seus congêneres livres como o Scilab e o Octave, que já vem com pacotes de funções para integração de problemas assim. Usaremos tais pacotes, comparando-os entre si.

Montamos duas frentes de investigação com o Matlab: uma para integração numérica de um perfil de temperatura sigmóide (fonte de tamanho finito), outra para solução exata do problema com $T(z)$ dado por uma função degrau (fonte pontual). No ultimo caso trabalhamos com a resolução do sistema linear $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{c}$ mostrado no capítulo anterior.

A integração numérica no Matlab se focou no uso das funções `bvp4c` e `bvp5c`. Também aqui especificamos as condições de contorno possíveis com dois números booleanos a e b . Construímos a seguinte função de 15 parâmetros para resolver estes problemas por integração:

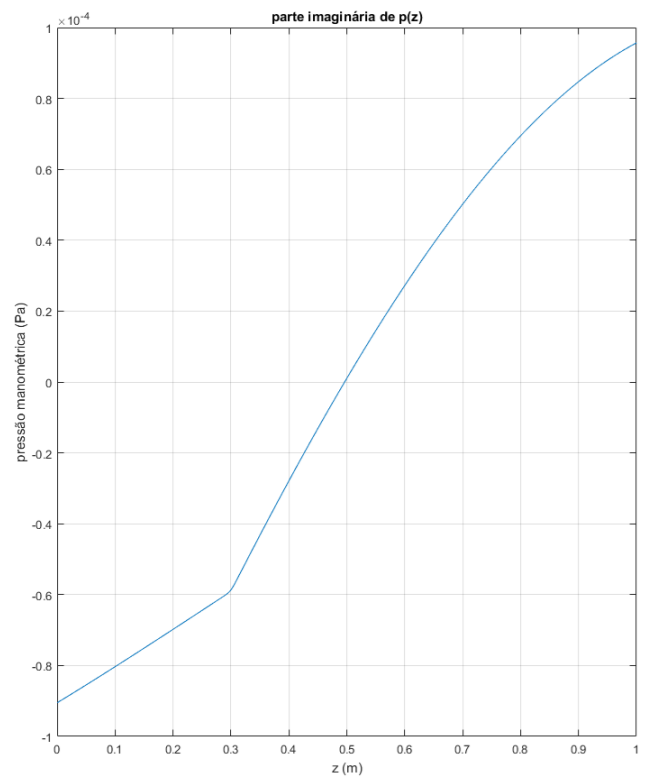
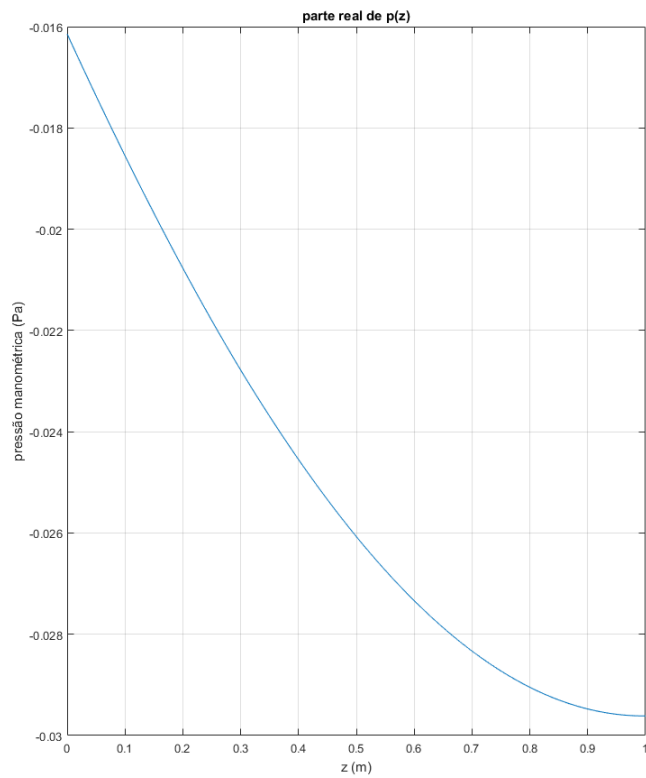
`ResolveModeloRoot(p0,L,vsom,gama_cte,sigma,rmax,a,b,Ta,Tb,z0,desvioT,perfil_T,n)`

Além de a e b temos então como entrada a perturbação na extremidade aberta, o tamanho do tubo, a velocidade do som, o número de Prandtl, o raio do tubo, as temperaturas nos extremos, a posição da fonte de calor, a largura do `gradT` e dois parâmetros para especificar o perfil de $T(z)$ e o harmônico n a buscar.

Dentre as curvas sigmóides, consideramos três possíveis perfis de $T(z)$:

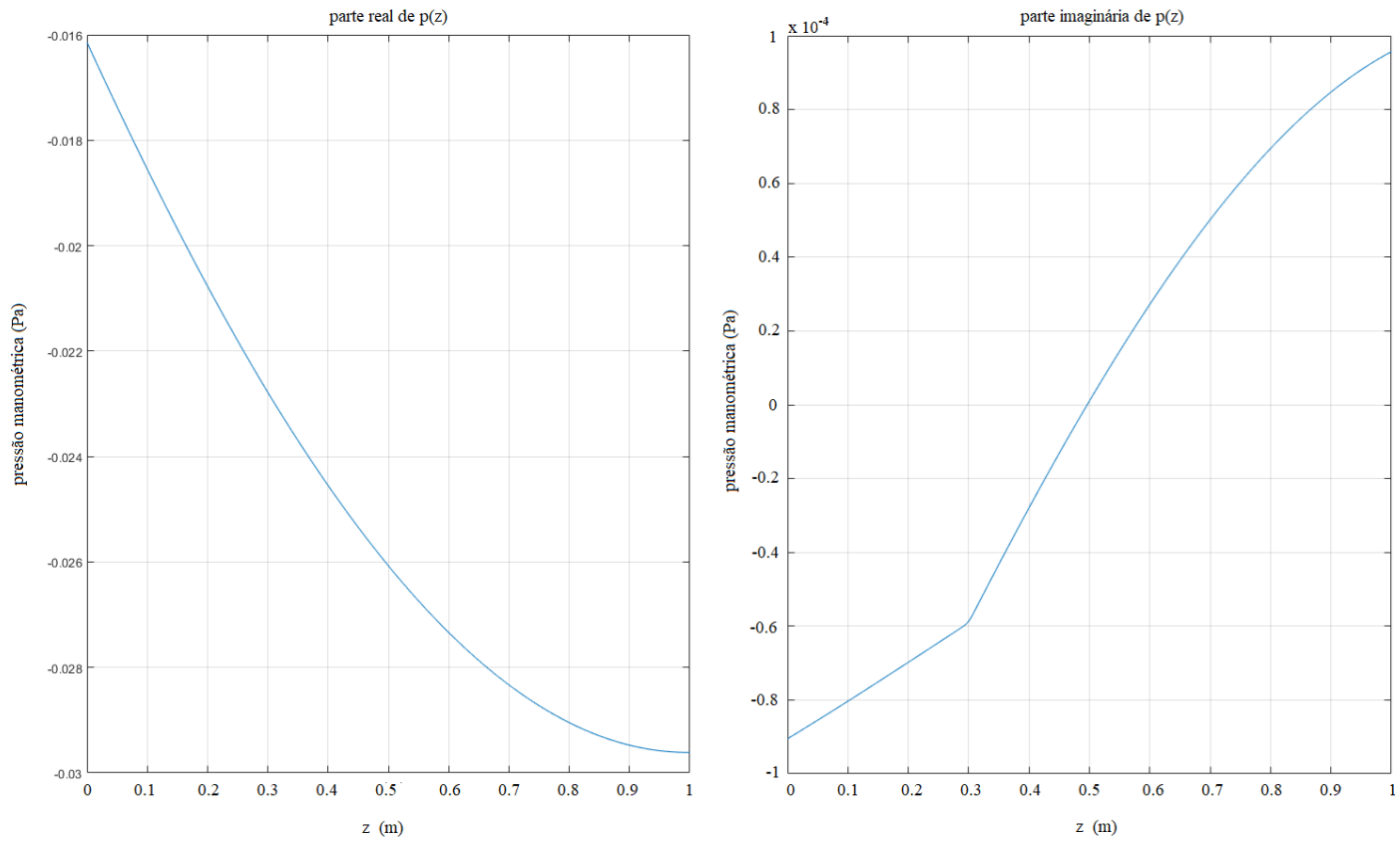
- 1) função erro 2)logístico 3)arcotangente .

Vamos apresentar a seguir alguns resultados.



Gráficos 5.1.5 – uma primeira integração do problema de contorno.

Este caso é com uma fonte de calor de 5 mm. Vamos observar o valor absoluto da pressão :

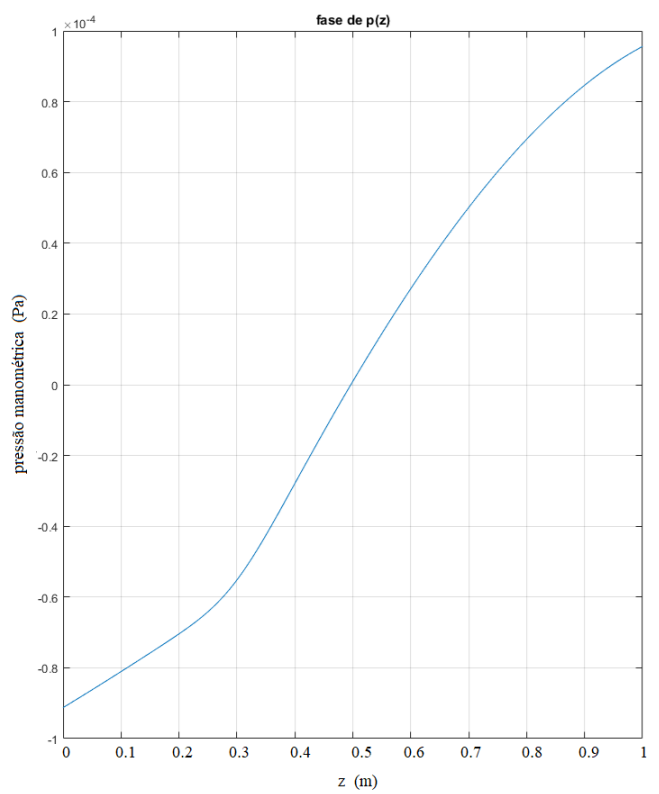
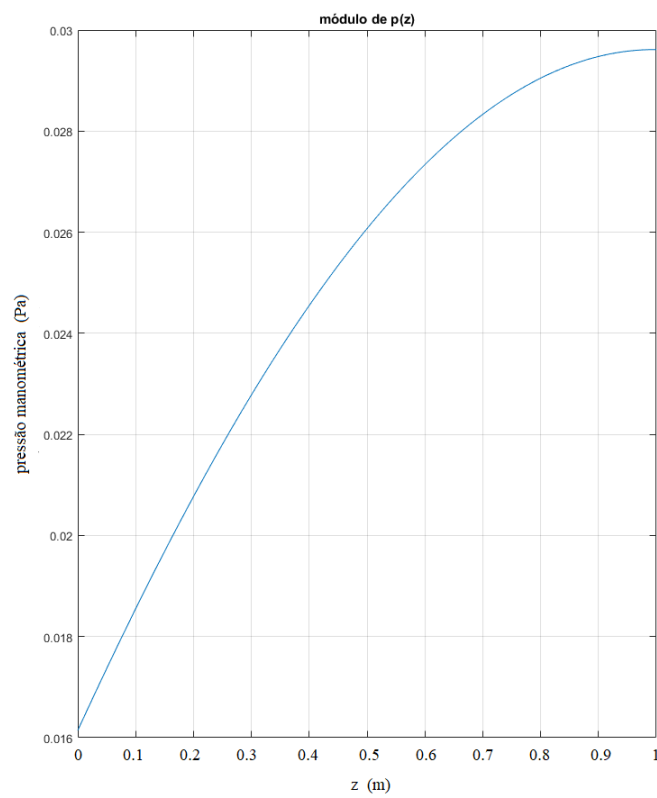
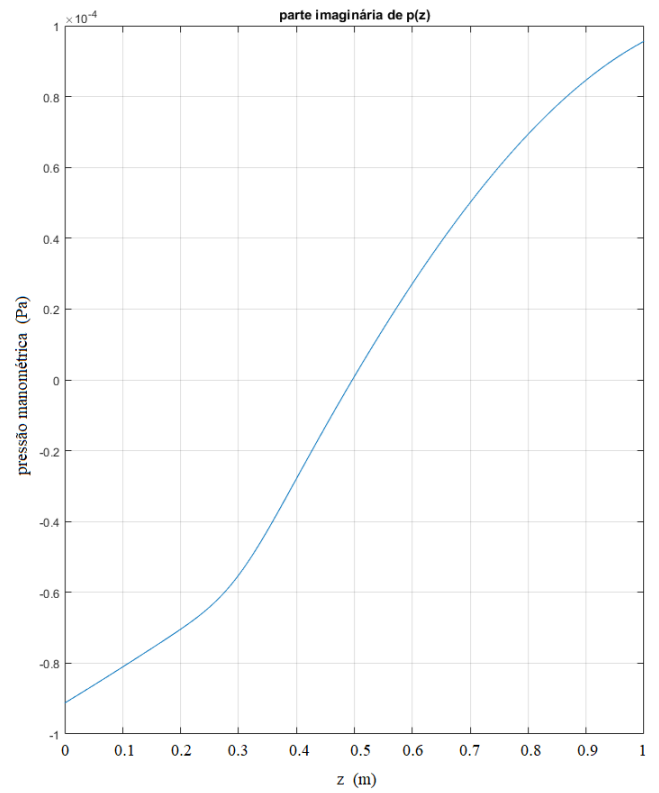
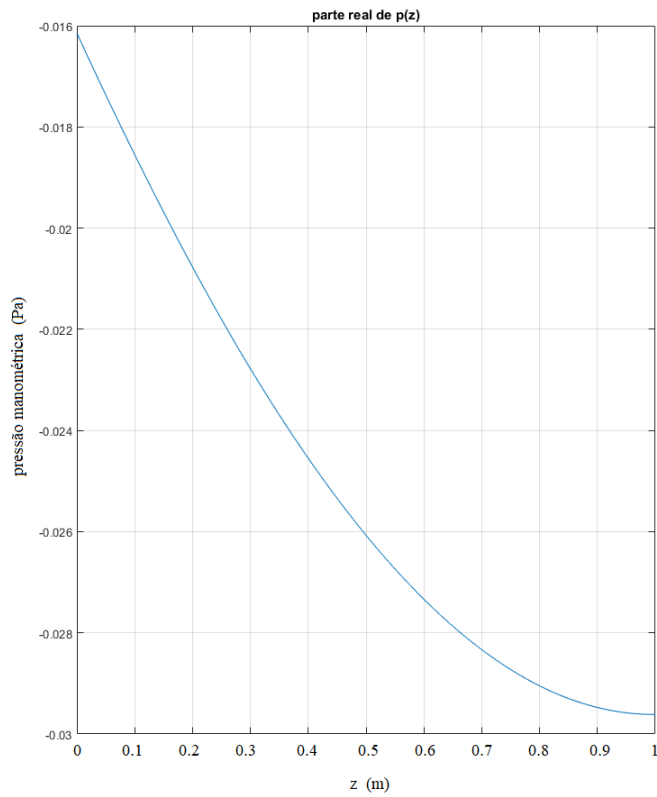


Gráficos 5.1.6 – valor absoluto e fase da integral do problema de contorno por

ResolveModeloRootV6(.025,1,340,1.4,.7,.0254,0,1,0,600,.3,.005,1,1)

[código fonte no apêndice II]

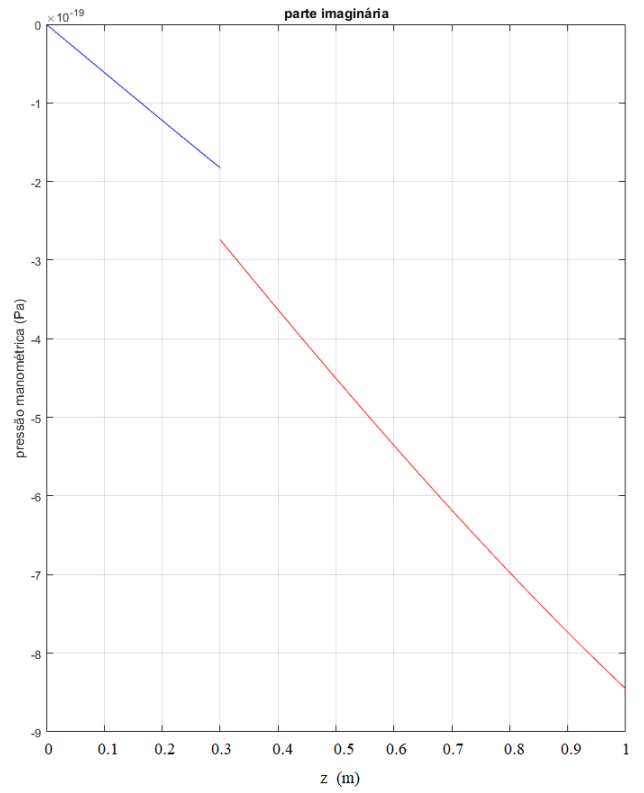
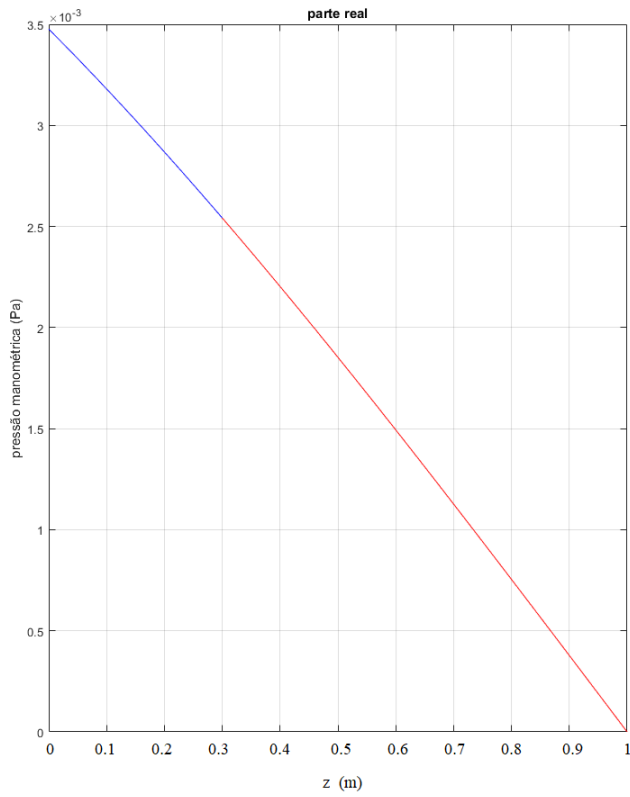
Agora o mesmo no caso de uma fonte dez vezes mais larga:

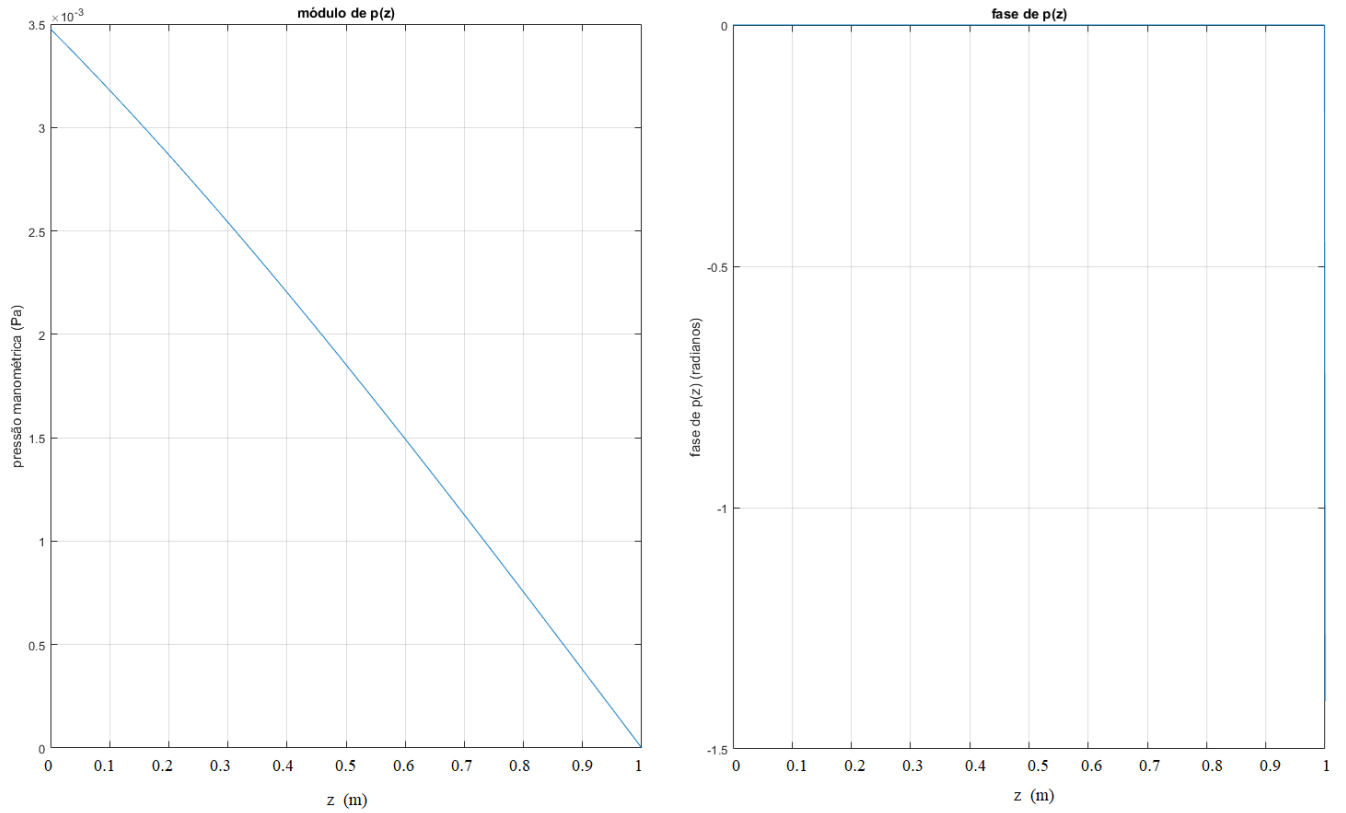


Gráficos 5.1.7 – valores real, imaginário, absoluto e fase da integral obtida com

ResolveModeloRoot(.025,1,340,1.4,.7,.0254,0,1,0,600,.3,.05,1,1)

Vamos apresentar os resultados correspondentes a estes parametros para a solução com um perfil descontínuo:

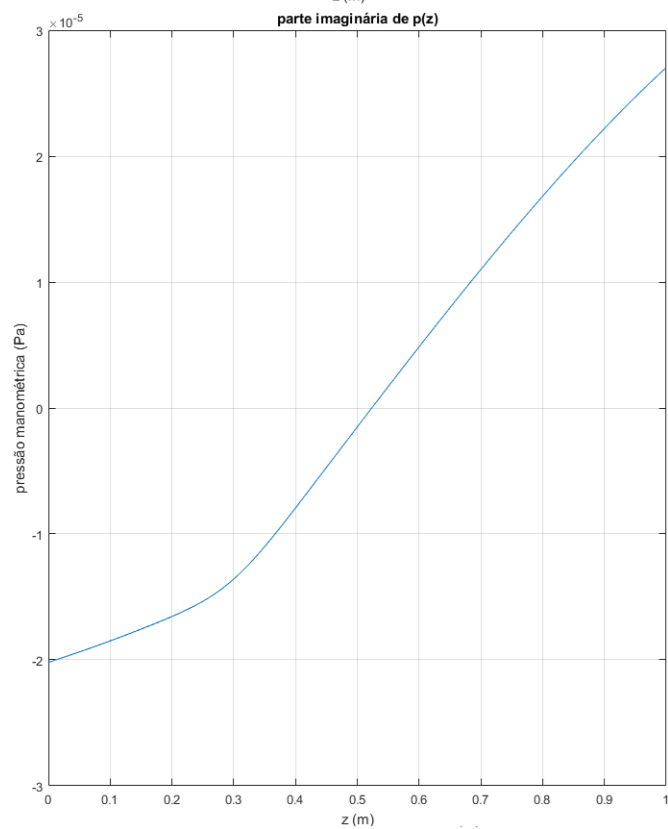
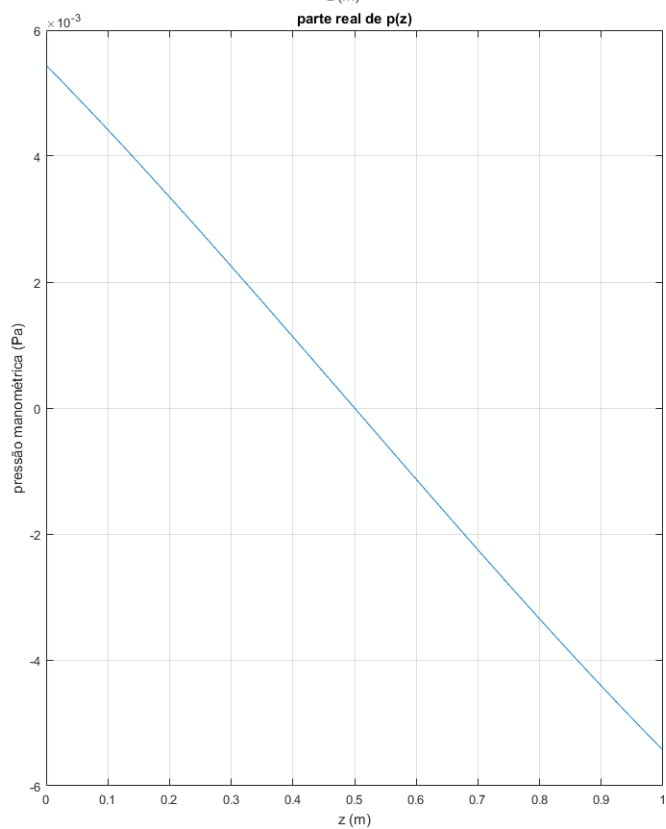
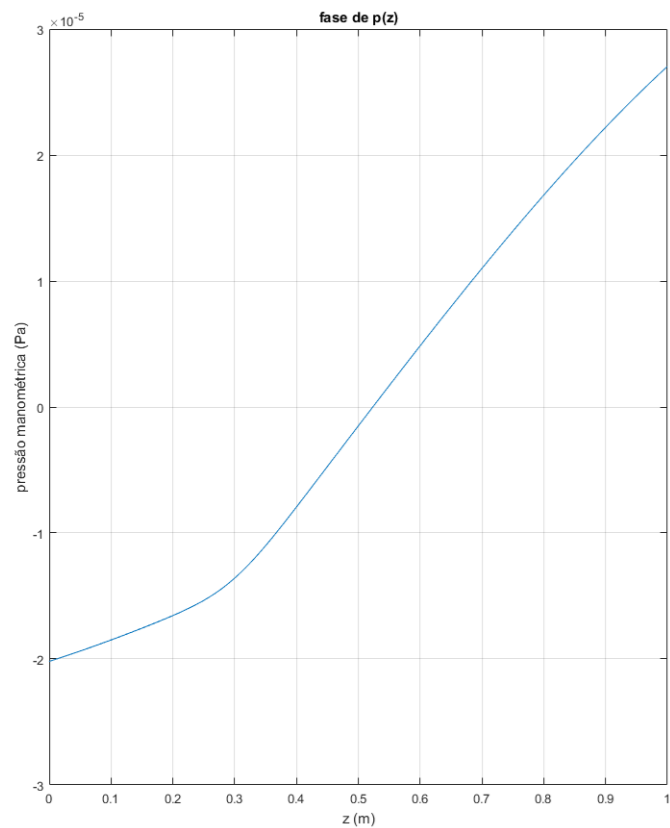
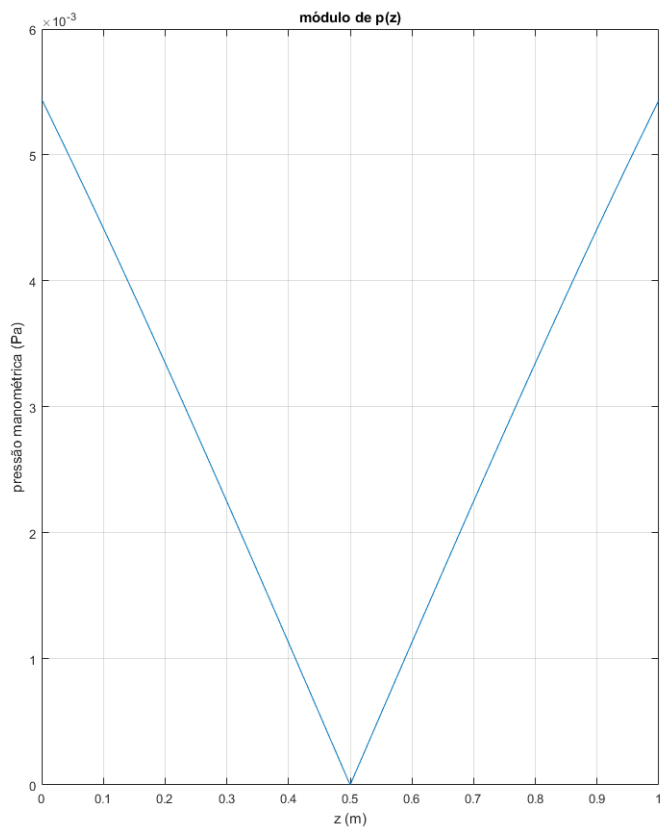




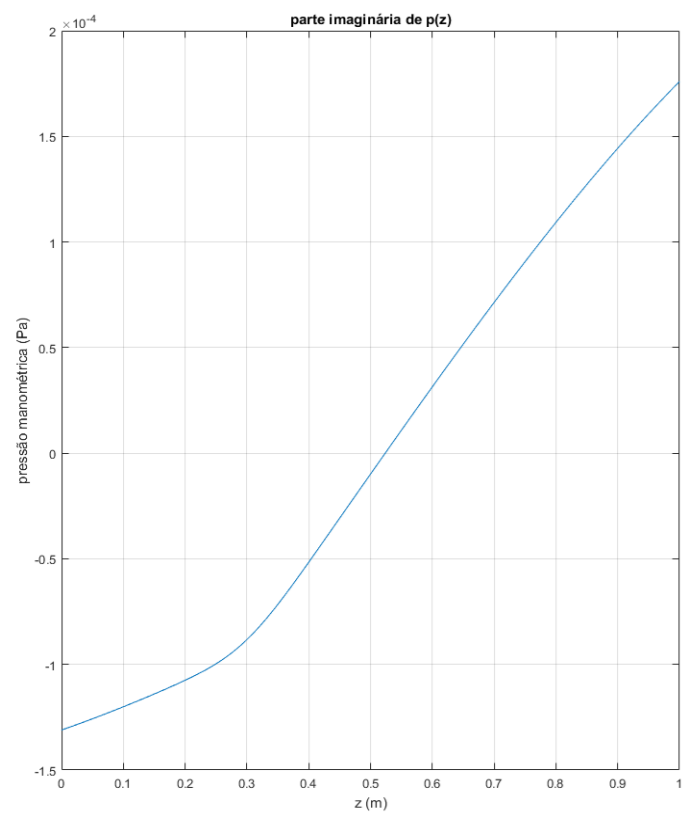
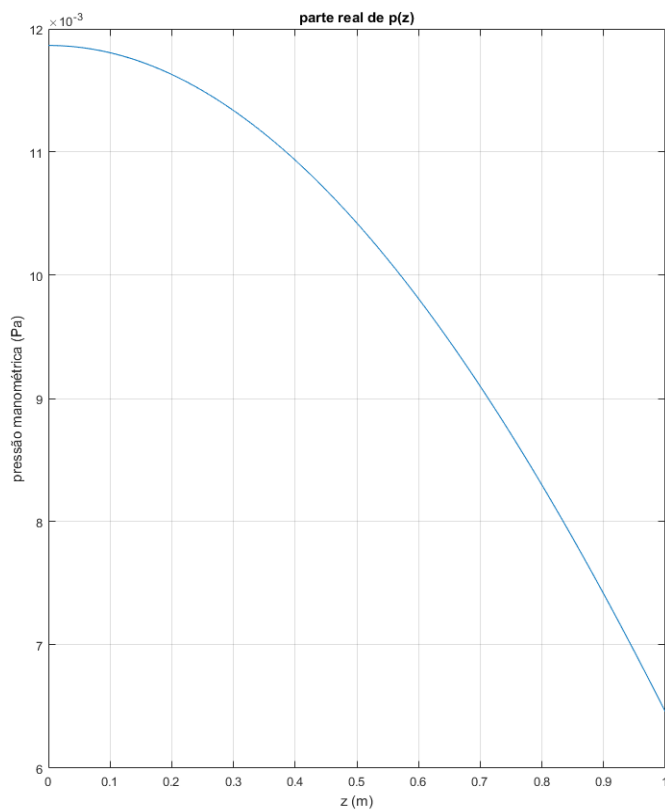
Gráficos 5.1.8 – caso análogo a 5.6 mas com $T_0(z)$ descontínuo, solução obtida com

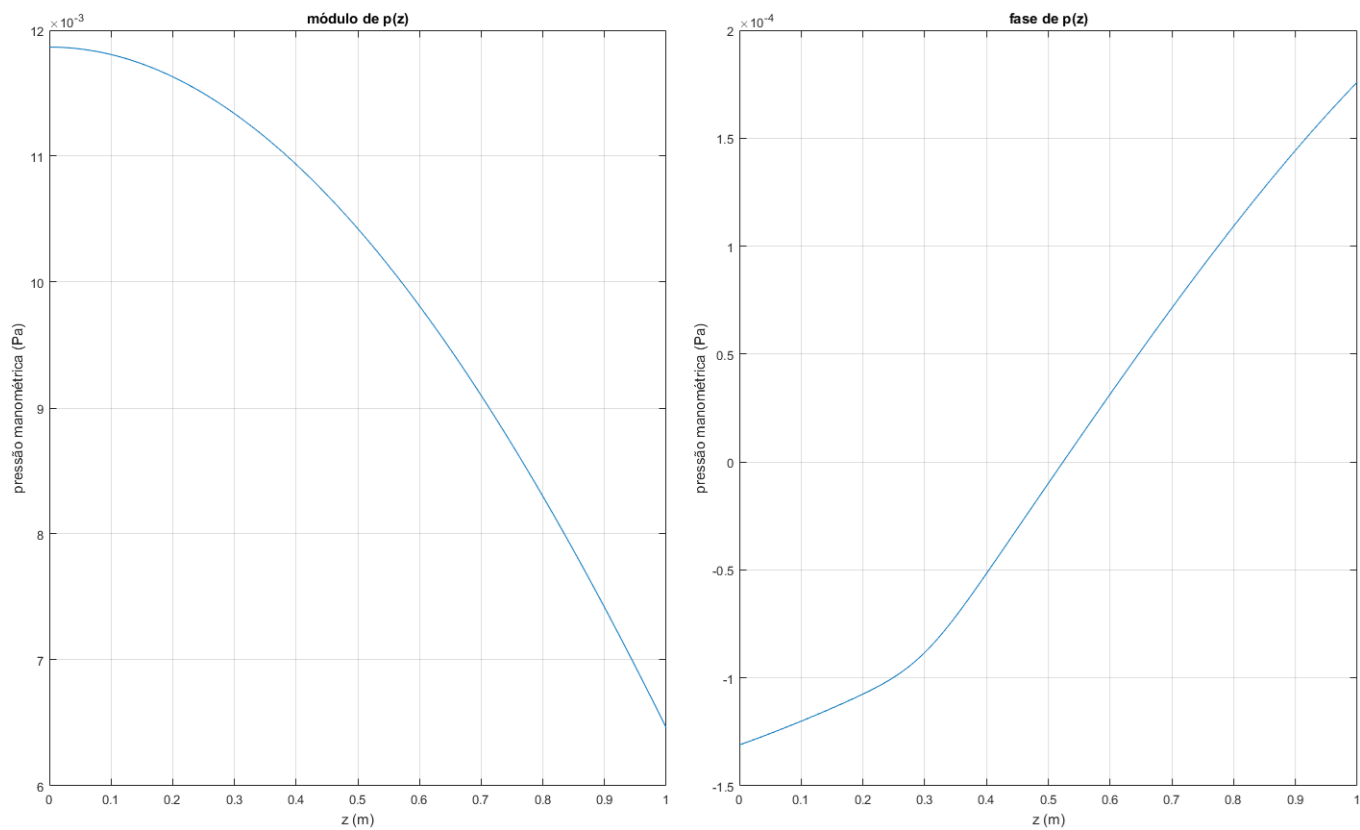
`rootToyModelV8` [código fonte no apêndice II].

Mostraremos a seguir outras integrações com variadas condições de contorno:

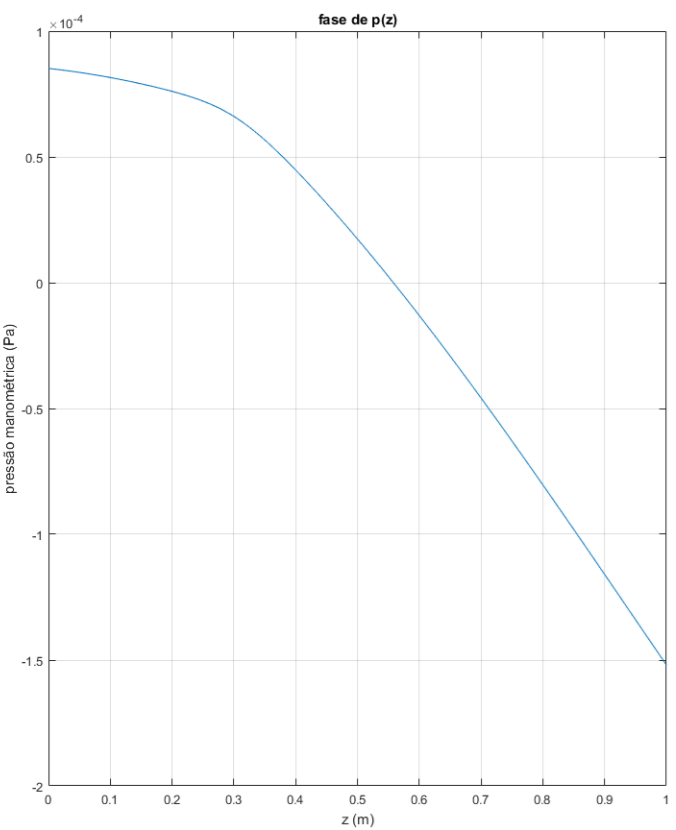
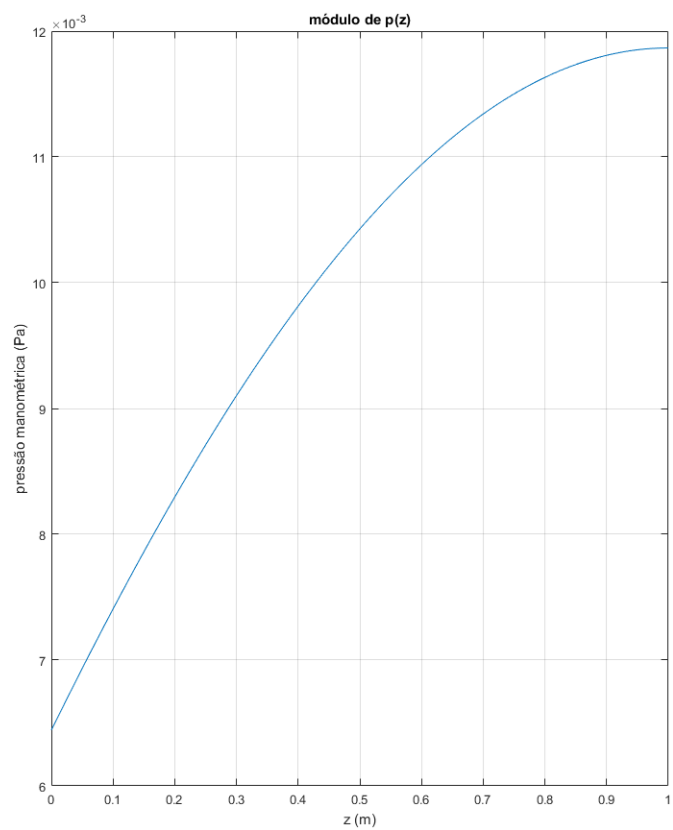
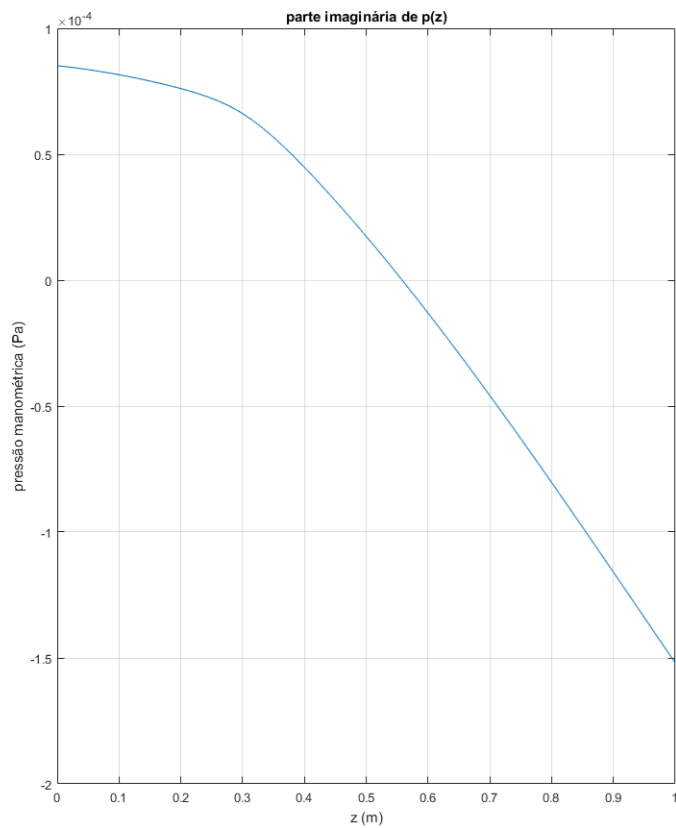
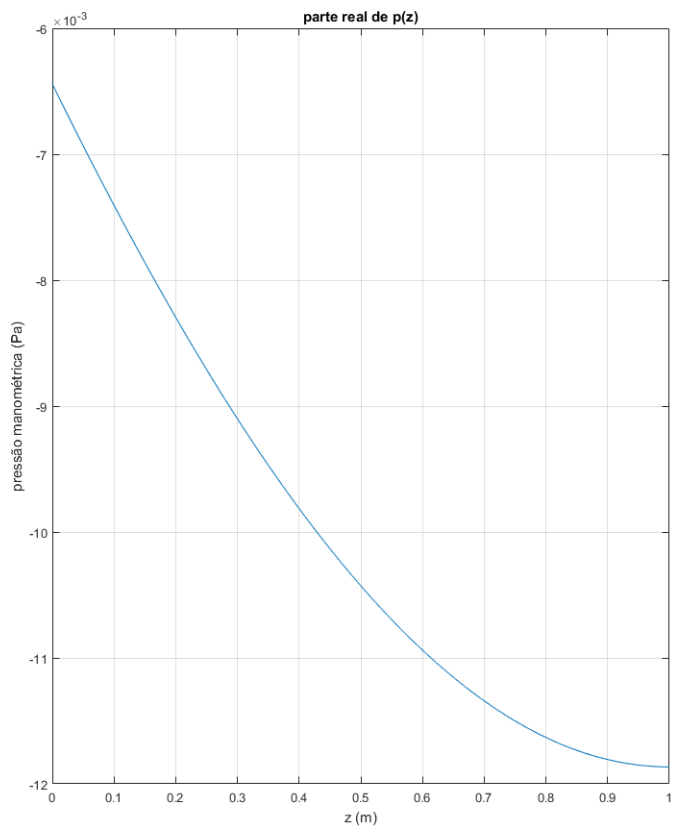


Gráficos 5.1.9 – integral para um tubo de meia onda (ambas extremidades abertas).





Gráficos 5.1.10 – outro possível tubo de um quarto de onda, trocamos extremidade aberta/fechada



Gráficos 5.1.11 – mais uma integração possível variando os parâmetros

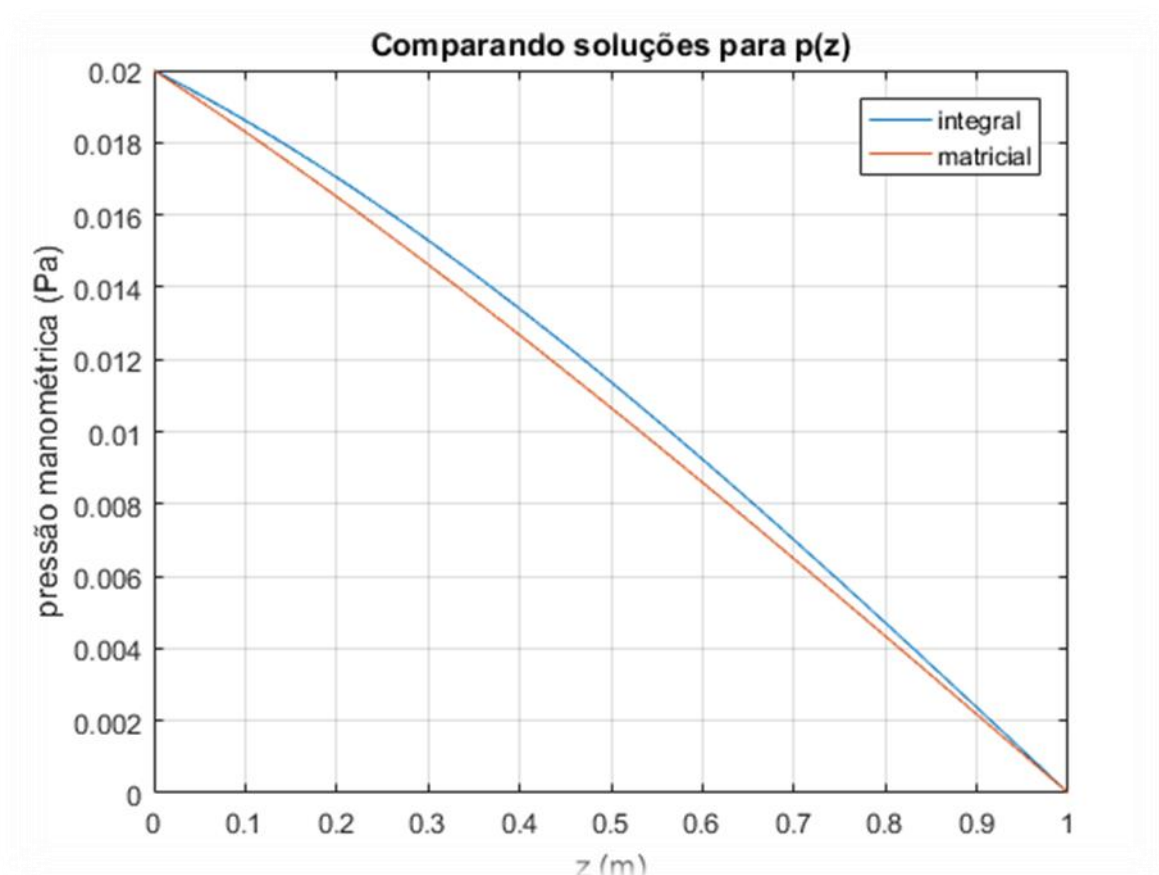


Gráfico 5.1.12 – comparação das duas soluções

A partir de $p(z)$ estimamos a potência do som emitido. Um primeiro cálculo baseado no modelo exato (matricial) forneceu, para $T_a = 0^\circ\text{C}$ e $T_b = 600^\circ\text{C}$:

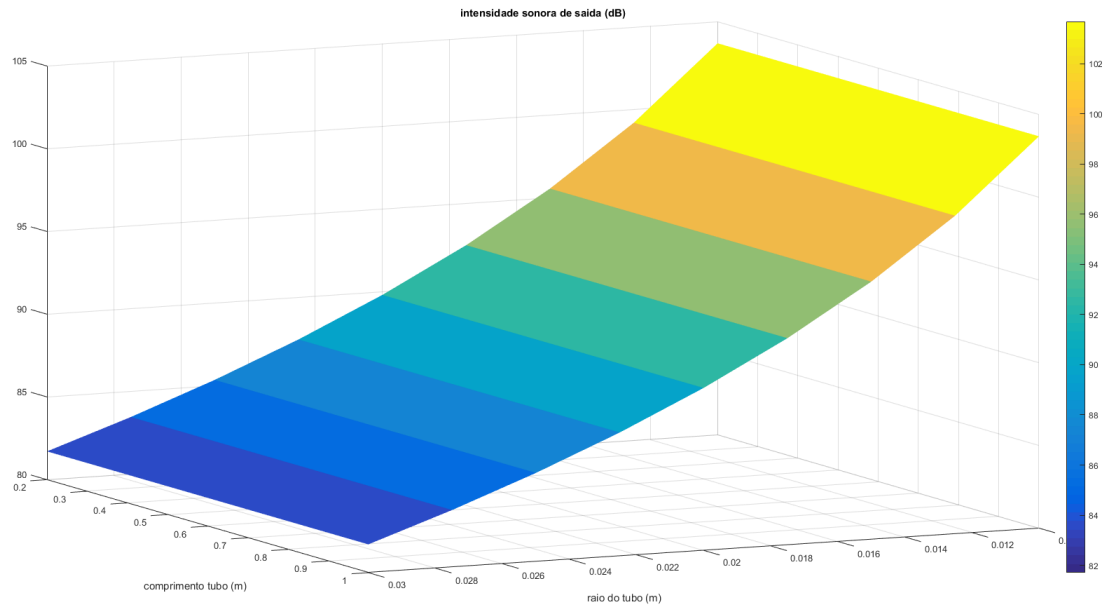


Gráfico 5.1.13 – uma estimativa da potência usando RootToyModel

para $T_a = 0^\circ\text{C}$ e $T_b = 600^\circ\text{C}$, com uma perturbação p_0 de entrada equivalente a 10 dB. Variando a razão de temperaturas, com a solução exata (RootToyModel), encontramos:

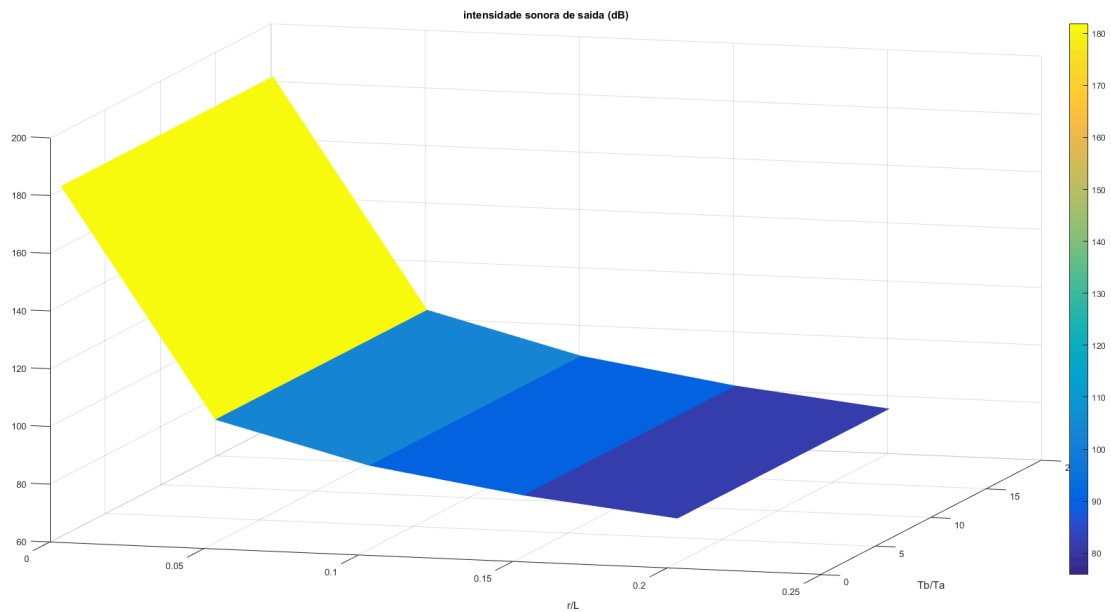


Gráfico 5.1.14 – representação da intensidade, variando geometria e temperaturas.

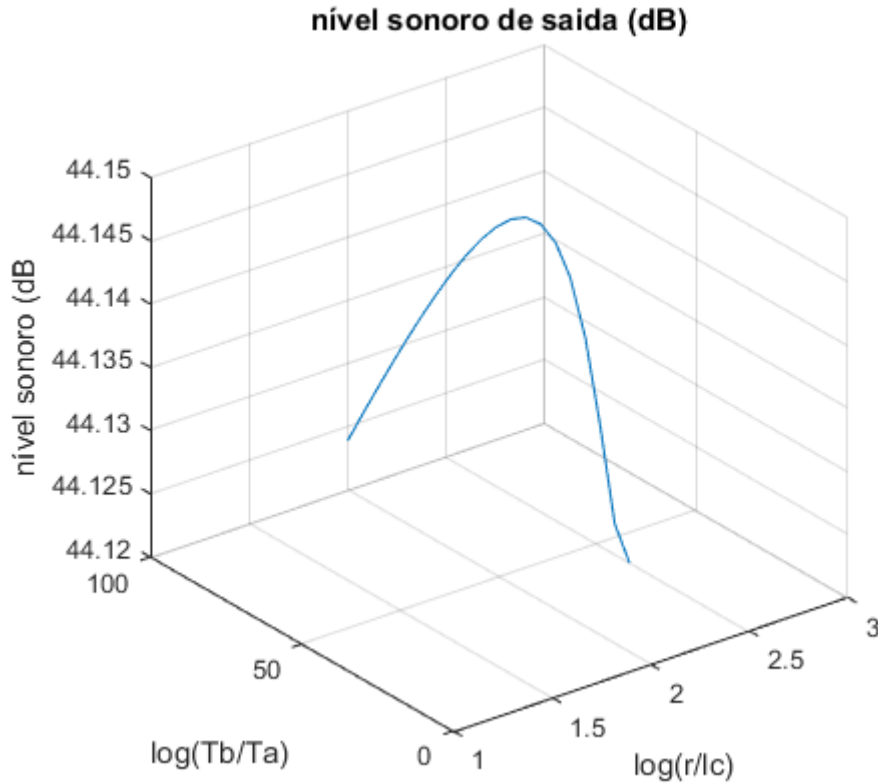


Gráfico 5.1.15 – tentativa de obter o nível sonoro em função da razão de aspecto e de temperatura

5.2) Efeito magneto termoacústico

Buscamos realizar algumas simulações com os parâmetros de um fluido condutor de interesse, a saber, o Gálio líquido. Acreditamos que haja certa possibilidade do modelo originalmente desenvolvido para um gás se estender ao caso de um metal líquido, afinal, mesmo algo como a equação de estado do gás parece ter um domínio de validade dentro do estado líquido, apenas com uma correção adicional para a tensão superficial [7,24].

A guisa de justificativa, podemos mostrar alguns dados que indicam a validade dessa aproximação, como vemos no gráfico 5.2.1 a seguir.

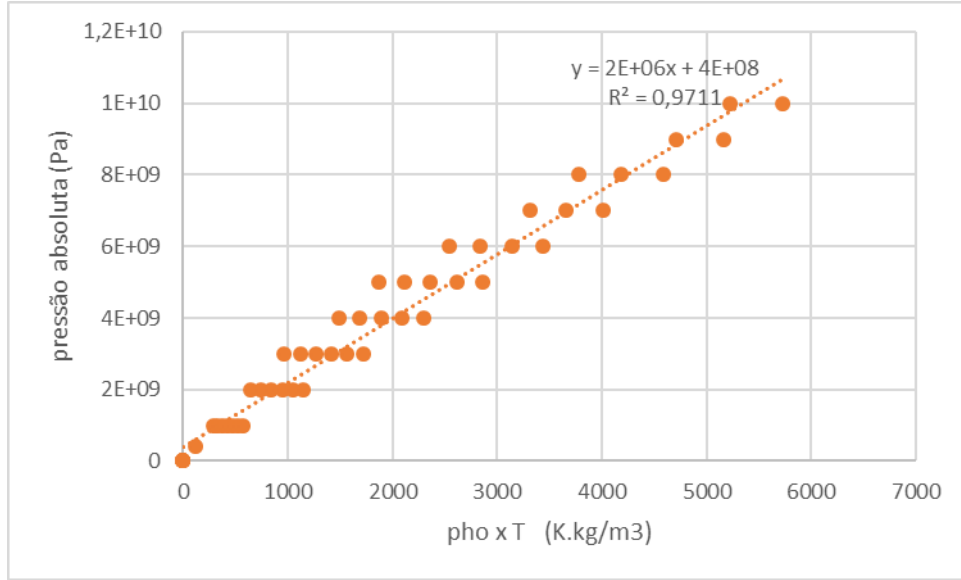


Gráfico 5.2.1 – breve análise dos dados de [19].

Vemos por este gráfico que $p \sim \rho.T + p'$, sendo p' uma constante. Essa constante não influencia na análise perturbativa, a expressão para eliminar T_I na equação (2.35) permanece a mesma. Assim, a mesma dedução deve valer, com algum nível de aproximação, para o gálio líquido. Estes cálculos e alguns detalhes adicionais sobre a plausibilidade teórica dessa equação estão no apêndice III.

Infelizmente, os pacotes de solução numérica apresentados na seção anterior não foram suficientes para resolver a equação (3.28) em zeta com um perfil de temperatura hiperbólico.

Tomamos o cuidado de multiplicar por ϕ_I a equação (3.28)

$$\phi_1 \frac{d^2 p_1^{\text{eff}}}{d\zeta^2} + \left[\frac{d\phi_1}{d\zeta} + \left(\frac{\phi_e - \varrho \phi_1}{1 - \varrho} \right) \frac{1}{T_0} \frac{dT_0}{d\zeta} \right] \frac{dp_1^{\text{eff}}}{d\zeta} + \left[\gamma - \phi_e(\gamma - 1) \right] p_1^{\text{eff}} = 0. \quad (5.2.1)$$

para evitar singularidades. A variável zeta permaneceu rotulada como z na maioria dos programas aonde a troca não faria muita diferença. Portanto, nossa definição de coeficientes foi:

$$\begin{aligned} A &= @ (z) \left(\text{fi_1}(z) \right); \\ B &= @ (z) \left(\text{gradfi_1}(z) + \text{inv}(1 - \text{Pr}) * (\text{fi_sigma}(z) - \text{Pr} * \text{fi_1}(z)) .* \text{theta}(z) \right); \\ C &= @ (z) \left(\text{gama_cte} - (\text{gama_cte} - 1) * \text{fi_sigma}(z) \right); \end{aligned}$$

conforme os códigos fonte disponibilizados no apêndice II.

Não havendo muitos outros recursos cabíveis no tempo em que dispúnhamos, recorremos a uma extensão do *toy model* apresentado no capítulo 4.

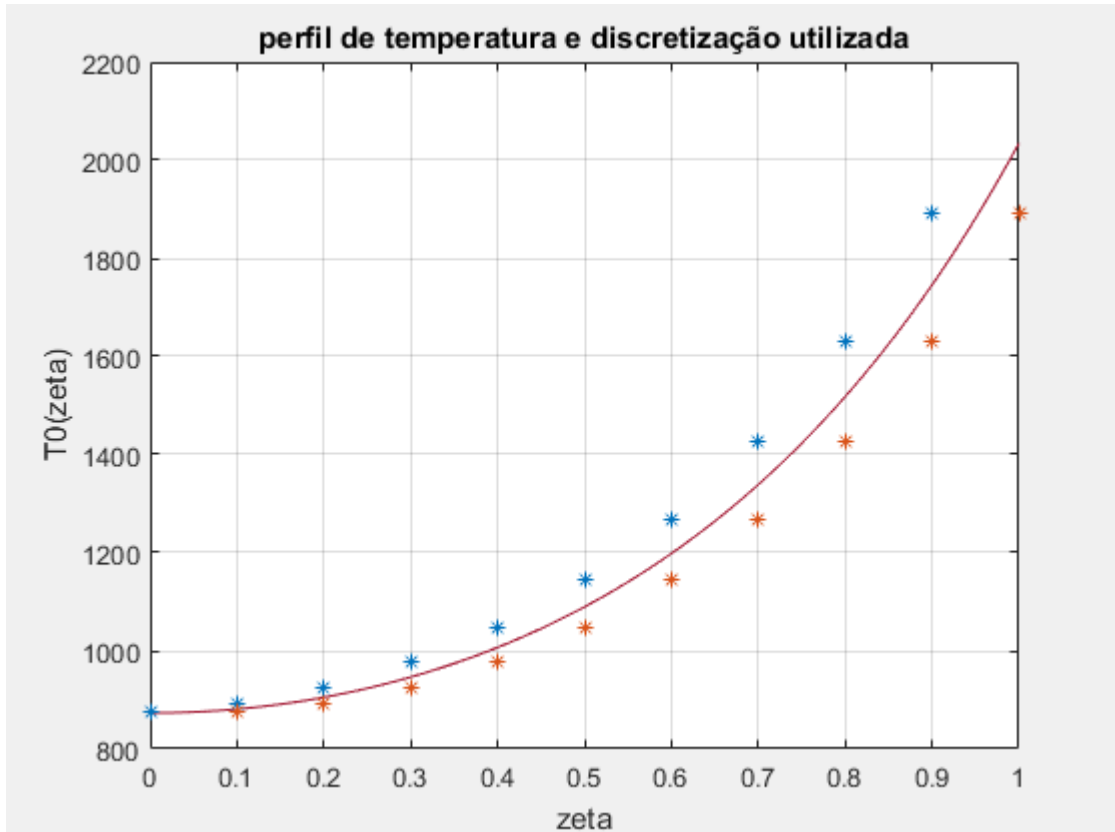


Gráfico 5.2.2 - Curva contínua: perfil de temperatura $\sim \cosh(K.zeta)$. Asteriscos: bordas dos degrais para representar este perfil.

Pois bem, anteriormente, aproximamos as curvas contínuas dos coeficientes A, B e C por dois patamares discretos. Neste caso, vamos mostrar uma primeira abordagem aonde a $T_0(z)$ do efeito magneto-termoacústico é representada por dez patamares discretos. Novamente, vamos usar valores médios de $A(z)$, $B(z)$ e $C(z)$ em cada patamar, transformando a equação diferencial em equações de segundo grau pela suposição de $p \sim \exp(k.z)$ em cada nível.

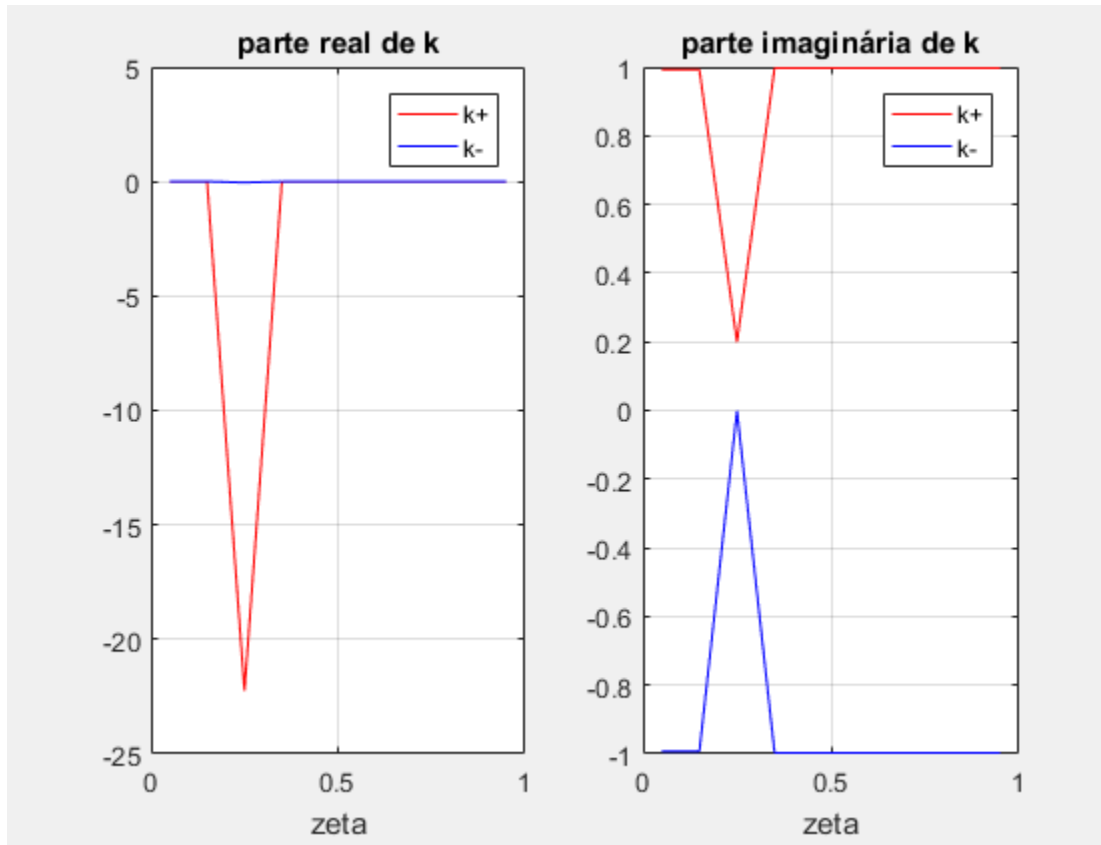


Gráfico 5.2.3 - Distribuição axial de valores de k , denotamos k_+ e k_- as duas soluções das equações de segundo grau em cada patamar.

Em cada patamar temos uma $p(z) = (u_+).exp(k_+.z) + (u_-).exp(k_-.z)$ diferente, com diferentes valores dos k e das amplitudes u . Como no *toy model*, estas últimas serão determinadas por um sistema linear análogo a (4.9). Colocando todas as condições de contorno e continuidade c_I para essas várias $p(z)$, montamos uma matriz que vamos denotar por M . A construção se baseou na matriz A elaborada no capítulo 4 e os detalhes podem ser conferidos no código fonte *GeraMatrizM* disponibilizado no apêndice II.

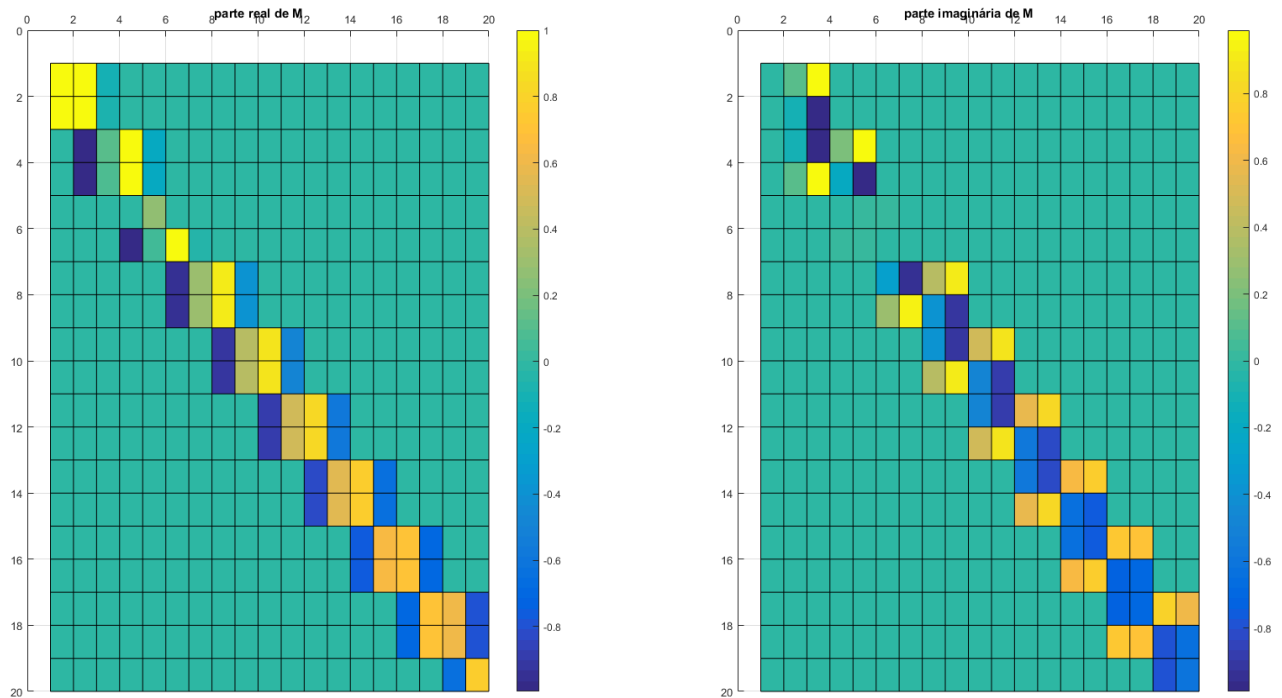


Figura 5.2.4 - Visualização da matriz M para o caso em que $N=10$ (demais condições semelhantes aos casos estudados anteriormente).

O vetor-solução \mathbf{u} do sistema $\mathbf{M} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b}$ contém as amplitudes das pressões em todos os trechos. O vetor \mathbf{b} é totalmente nulo, a não ser nas extremidades aonde possa haver um valor p_0 fixado como condição de contorno para p .

Apresentamos então agora uma primeira solução, para o caso de uma extremidade aberta e outra fechada (aberta em $z = 0$) :

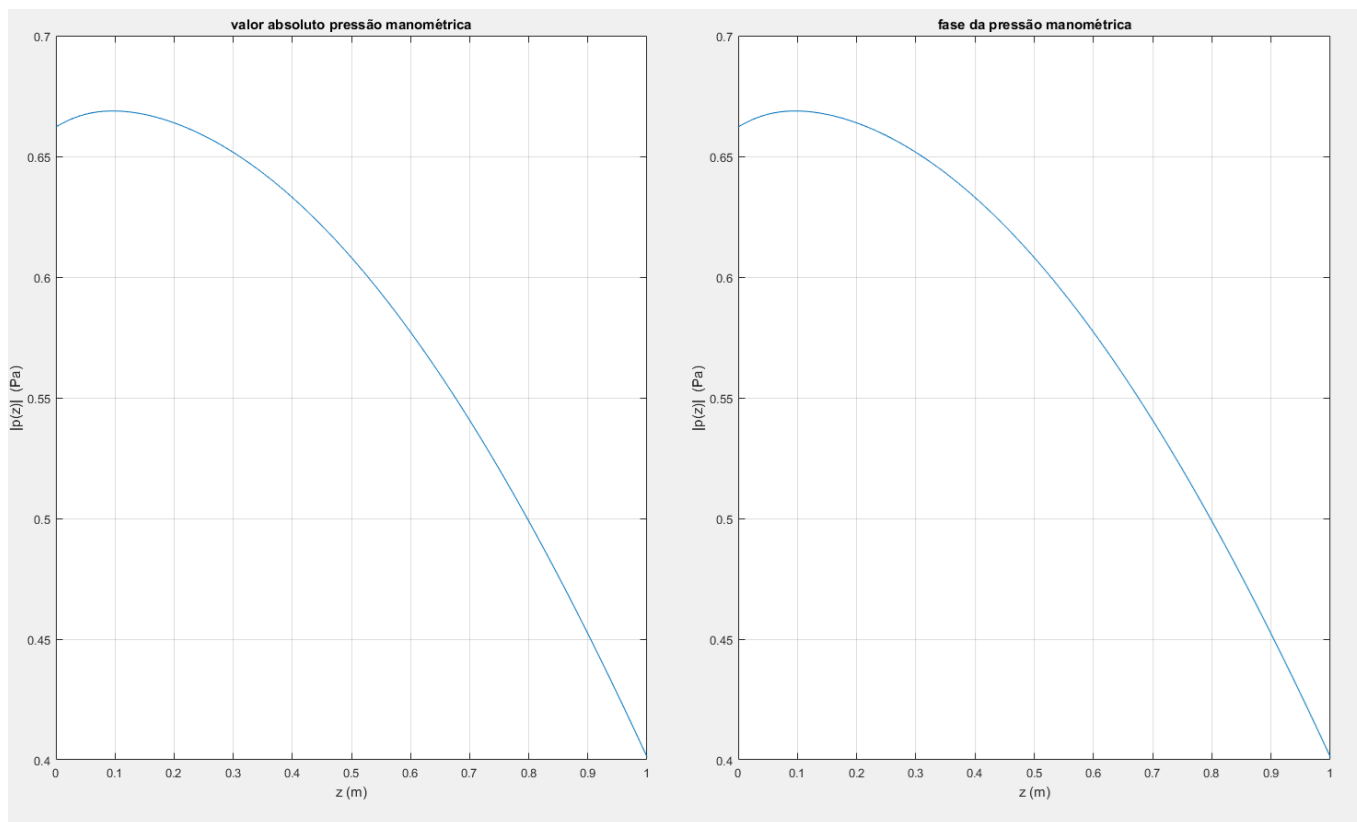


Gráfico 5.2.5 – perfil de pressão em tubo de $1/4$ de onda, para $T_0(z)$ cosseno hiperbólico

Tendo estranhado um pouco o gráfico 5.2.3, fizemos uma revisão, solucionando patamar a patamar na linha de comando e obtivemos:

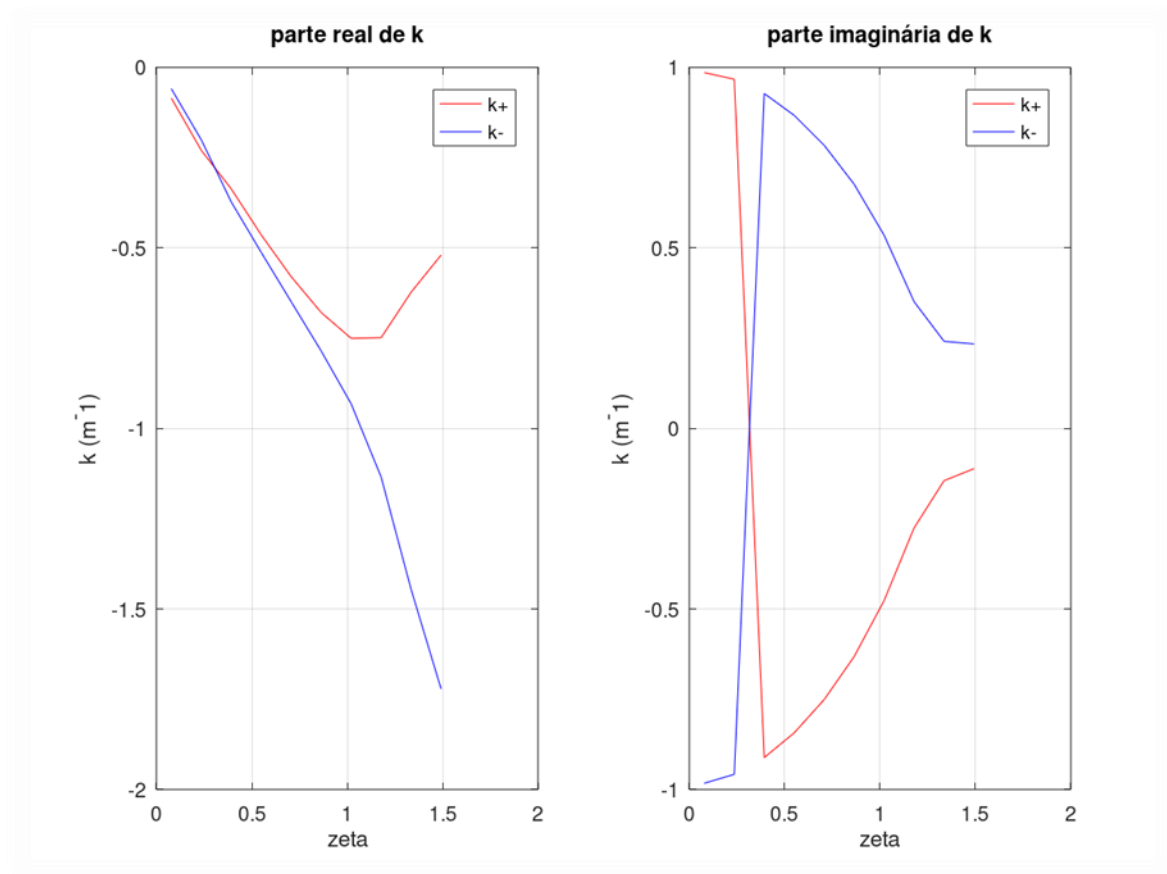


Gráfico 5.2.6 - valores revisados das soluções das equações de segundo grau em cada patamar.

Este resultado revisado gerou a seguinte matriz M e o seguinte perfil $p(z)$:

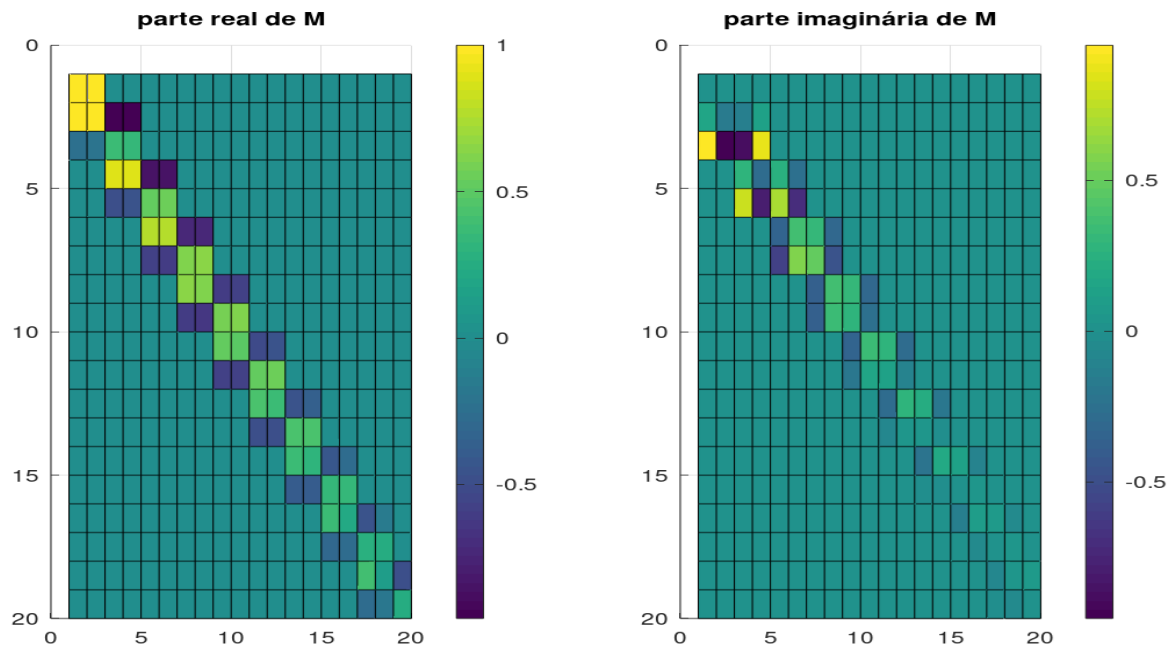


Figura 5.2.7 - Visualização da matriz M para os valores de k revisados do gráfico 5.2.6

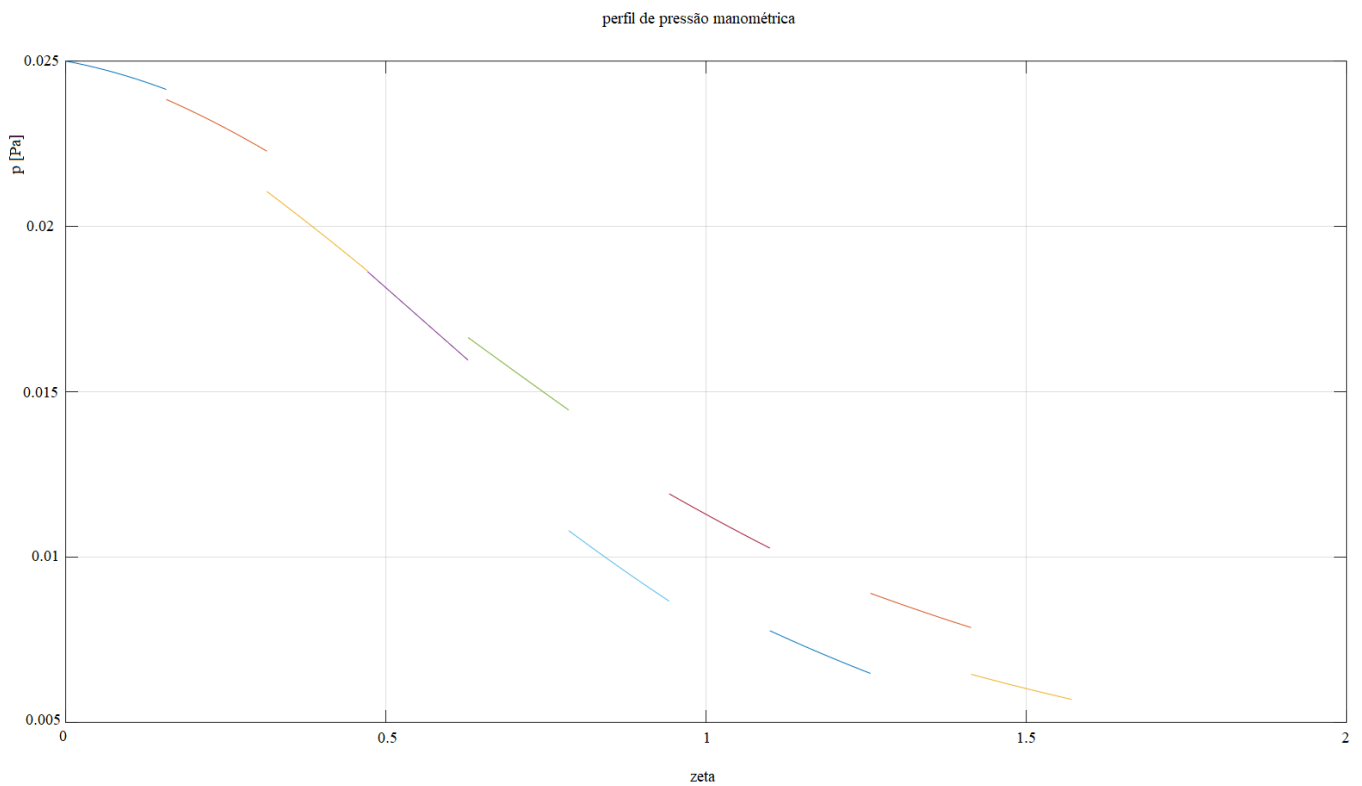


Gráfico 5.2.8 – perfil de pressão revisado

Capítulo 6

Discussão dos resultados

Observamos que a razão entre os coeficientes C e A equivale ao k da equação simplificada $p'' + k^2 p = 0$. Esta razão parece aumentar quando a temperatura aumenta. Já B , ou mais precisamente, $-B$, se relaciona diretamente com a dispersão de energia, que também aumenta conforme subimos o patamar de temperatura.

Nas integrações observamos um “joelho” na parte imaginária, exatamente sobre o local da fonte de calor. Fornecemos 20 mPa na entrada, a amplitude de saída atingiu por volta de 28 mPa. Esse joelho se suaviza se aumentamos o tamanho da fonte.

Mas no caso de $T(z)$ descontínuo vemos uma descontinuidade na parte imaginária de $p(z)$. Também notamos que a parte imaginária é mais de dez ordens de grandeza inferior a real. O mesmo não acontece com a integração numérica, aonde a parte imaginária é apenas uma ordem de grandeza inferior.

Uma das integrações, feita para ambas extremidades abertas (tubo de meia onda) apresenta um bico em $z = 0$ para $\text{abs}(p)$. Isso possivelmente ocorreu pois $p(z)$ assumia valores negativos na extremidade $z = L$, vibrando em oposição de fase a $z = 0$.

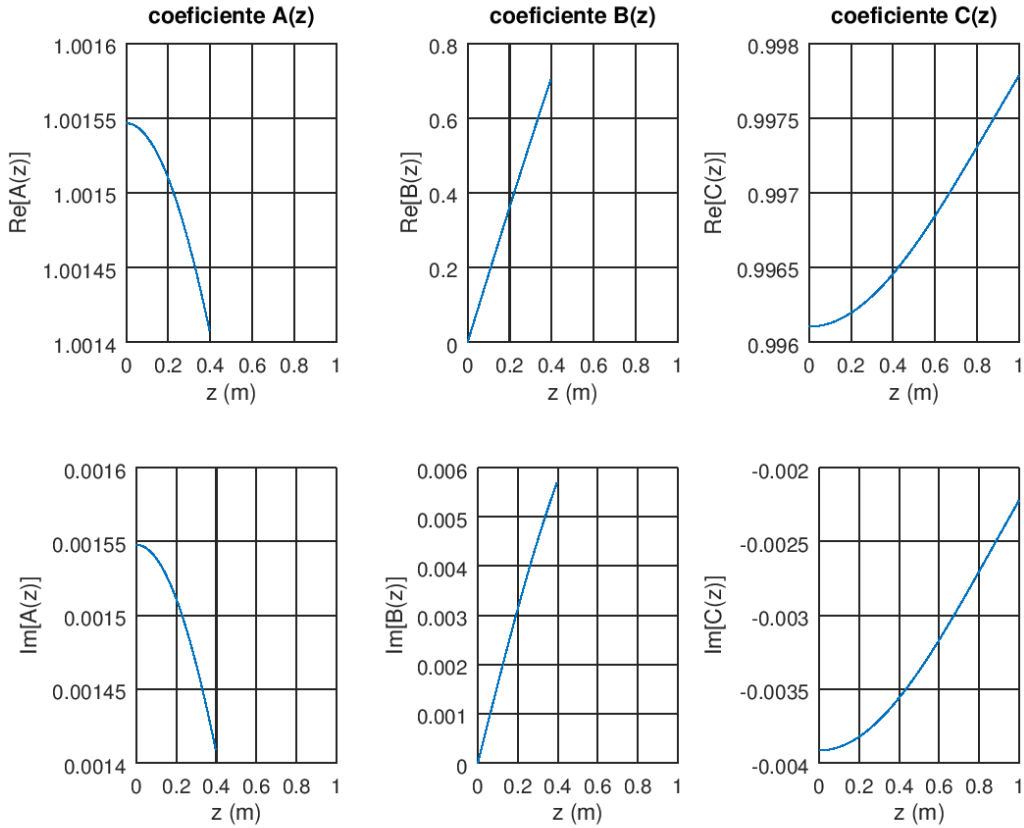
No gráfico 5.1.12 vimos que a comparação das soluções contínua e discreta (*toy model*) indica uma concavidade maior em $p(z)$ para o caso de uma fonte extensa do que uma fonte de calor puntual.

Nos plots de potência subsequentes (gráficos 5.1.13 e 5.1.14) parece que perdemos a dependência em uma das variáveis. Já no gráfico 5.1.15 esperávamos obter a superfície geradora das figuras 1.4, na qual a curva contínua seria uma curva de nível. Nikolaus Rott publicou 3 artigos como continuação de [1], esboçando no último deles alguns cálculos de potência. Nesta altura do trabalho tivemos de tomar a decisão entre consertar estes gráficos, com base nos artigos subsequentes, ou tentar algo novo. Escolhemos a última opção.

Ficamos muito felizes de verificar a compatibilidade deste modelo com o caso em que temos um campo magnético acoplado. Contudo, as soluções deixaram um pouco a desejar. Infelizmente não houve tempo hábil para desenvolver soluções mais coerentes. Nenhuma das ferramentas computacionais usadas com as sigmóides convergiu adequadamente com o perfil de temperatura hiperbólico. Tentamos desenvolver uma própria ferramenta, mas também houveram alguns problemas. Como vemos pelos gráficos 5.2.2 e 5.2.3 .

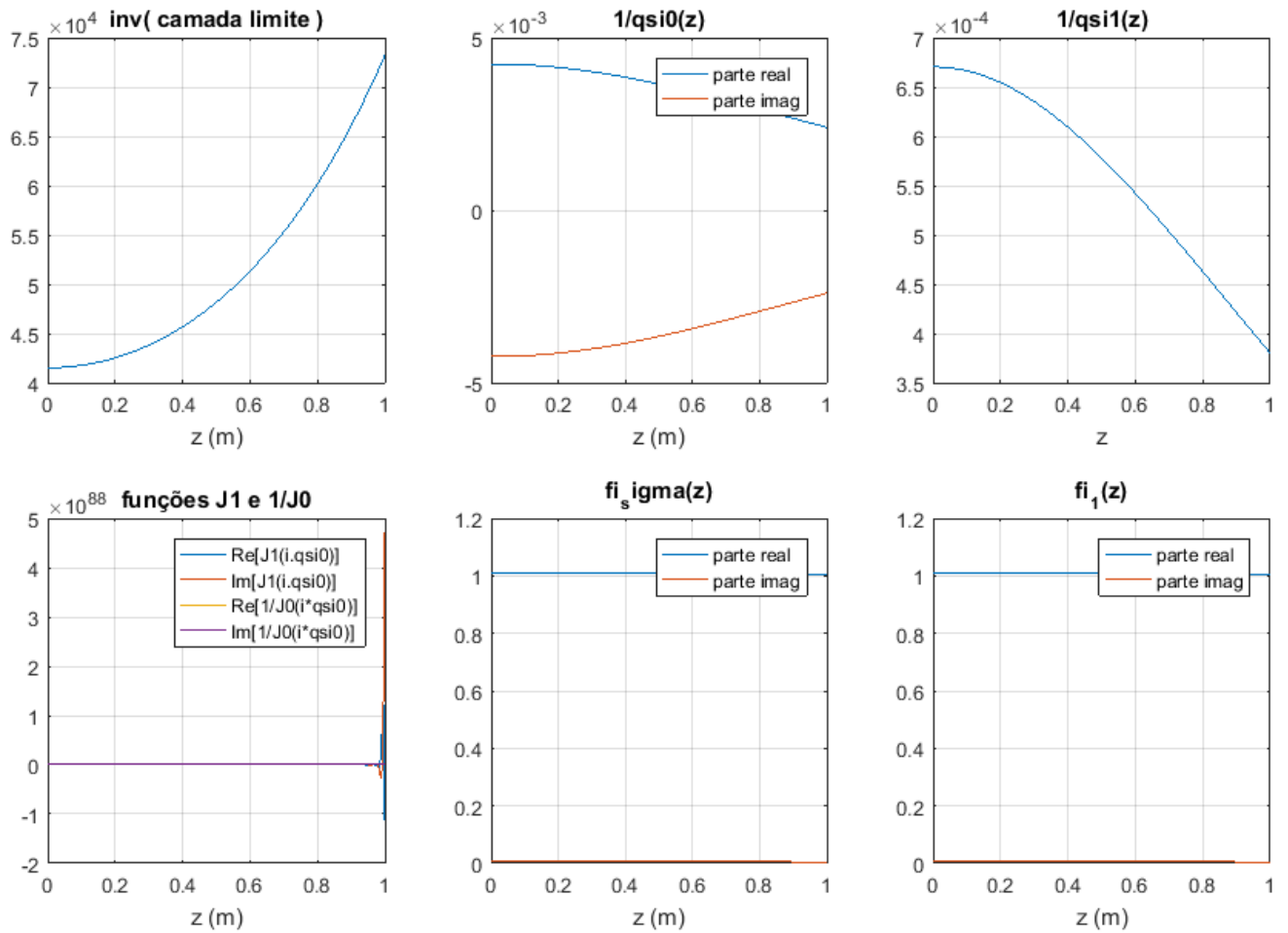
No gráfico 5.2.3 notamos a escala da ordem de 1 Pa, totalmente incompatível com todos gráficos anteriores de $p(z)$, que indicam valores da ordem de 10 mPa. Também estranhamos um pouco a semelhança entre a fase e o módulo de $p(z)$.

A distribuição dos k do gráfico 5.2.2 não parece corresponder ao caso do cosseno hiperbólico, mas sim ao de uma fonte localizada em z_0 , como fizemos anteriormente. Por algum motivo, o programa parece ter ‘viciado’ nestes casos e, a despeito de inúmeras tentativas, não computou adequadamente os coeficientes A, B e C da equação com o perfil $\sim \cosh(z)$, dando resultados do tipo *NaN* (“*not a number*”). O Matlab computava apenas o coeficiente C. Passando ao Octave, ao invés do Matlab, conseguimos computar A e B em apenas uma parte do domínio, conforme vemos na figura 6.1:



Gráficos 6.1 – coeficientes para perfil $T_0(z)$ cosseno hiperbólico. Por algum motivo A e B parecem truncar em $z = 0,4$ m, com resultados NaN no resto do domínio estudado.

Tentando rastrear o problema, plotamos ainda as funções que compõe estes coeficientes, conforme deduzido no capítulo 3 e com as definições indicadas na sessão 5.2. Obtivemos:



Gráficos 6.2 – funções que compõe os coeficientes A , B e $C(z)$ para $T_0(z) \sim \cosh(K \cdot z)$.

Como vemos, curiosamente, a função ϕ_1 , que compõe $A(z)$, parece bem definida em praticamente todo o domínio, assim como todas outras funções. Notamos algo estranho apenas nas funções de Bessel, cuja escala parece explodir no final do intervalo considerado. Apesar disso, não vemos divergência na razão J_1/J_0 , embutida nas funções ϕ .

Tentando implementar manualmente uma revisão destes resultados obtivemos os valores de k dados pelo gráfico 5.2.6, o qual parece coerente com um tipo de solução oscilatória decrescente, uma vez que observamos a parte real sempre negativa e as soluções imaginárias simétricas – indicando uma função hiperbólica. Infelizmente este resultado, apesar de melhor, não pareceu refletir um perfil $p(z)$ fisicamente factível no gráfico 5.2.8, onde observamos discontinuidades.

Capítulo 7

Conclusões e perspectivas

Estudamos primeiramente oscilações termoacústicas típicas para um tubo em contato com o ar ambiente, a pressão atmosférica. Isso nos motivou a tentar modelar um fenômeno mais arrojado. Conseguimos então encontrar uma extensão do modelo de Rott para um fluido condutor, sujeito a condições semelhantes mais um campo magnético externo.

Tendemos a crer que as funções A , B e $C(z)$ se assemelham ao perfil de temperatura apresentado. Para curvas sigmóides, todas assumem um caráter sigmóide. Isso ocorre mesmo quando o gradiente não era uma gaussiana e $T_0(z)$ não é a função erro. A largura do degrau de todas estas funções corresponde a largura do gradiente imposto. E quanto mais concentrado este gradiente, mais o perfil $T_0(z)$ e os coeficientes A , B e C se aproximam do comportamento de funções de Heaviside. No caso mais extremo, um gradiente violento de temperatura provoca a descontinuidade observada na parte imaginária das soluções para $T_0(z)$, como uma onda de choque.

Com relação a comparação das soluções do gráfico 5.1.12, cremos que a diminuição gradual da extensão da fonte de calor leva a uma gradual diminuição da concavidade em $p(z)$, eventualmente atingindo a curva inferior, calculada pelo *toy model* discreto.

Para compor os gráficos de potência utilizamos basicamente o *toy model* e uma suposição simplificadora adicional para computar

$$P = \iint_S p \vec{v} \cdot d\vec{S}.$$

Supomos $v_z = f(r) \cdot dp/dz$, separando a integral na forma $P = \int_0^L p \frac{dp}{dz} dz \cdot 2\pi \int_0^{r_0} f(r) \cdot r dr$.

Foi possivelmente este o motivo de acabarmos perdendo a dependência em um dos sentidos nos gráficos 5.1.13 e 5.1.14. Consideramos a integral em r como uma constante ao longo do eixo z , quando, na verdade, $v_z \sim f(r/l_c)$ com $l_c = l_c(z)$.

Também no gráfico 5.1.15 esta opção computacional se refletiu, com a escala vertical muito limitada, notamos que este plot não poderia discriminar o fenômeno real do caso sem ressonância. Adicionalmente parece que tivemos um problema para plotar

múltiplas razões de aspecto, pois a linha que ali aparece é de uma única.

Temos então indícios da ocorrência deste fenômeno num fluído condutor, com um campo magnético acoplado, mas sem previsões quantitativas coerentes por enquanto. Estes indícios são uma contribuição original nossa ao ramo da termoacústica, fruto de esforços de pesquisa dos últimos anos. Encontramos um vínculo entre o problema original de Rott e o nosso, modificando a primeira suposição do modelo para incluir pressão magnética. A velocidade de Alfvén aparece neste vínculo.

No gráfico da pressão 5.2.5 na verdade o que foi computado foi a soma de todas as exponenciais em todo domínio, por isso a escala parece um pouco exagerada em relação aos demais. As funções não foram computadas por partes, como havia sido proposto no início da seção 5.2 . Este infelizmente foi o único resultado quantitativo do caso com campo antes de começarmos a obter *NaN* no cálculo dos coeficientes.

A revisão deste gráfico, recomputado passo a passo, indicou um perfil de pressão amortecido (gráfico 5.2.8). Neste caso desconfiamos que as discontinuidades ali observadas sejam mais um problema com o método computacional do que uma condição física como a da pequena onda de choque observada na solução com $T_0(z)$ descontínuo. Uma vez que sistemas lineares homogêneos eventualmente só tem a solução trivial, e essa solução foi obtida por um sistema linear quase homogêneo, o Matlab pode ter dado um resultado numérico que mais se aproximasse, ao invés de uma solução exata, dando origem a essas discontinuidades.

A conversão dos resultados de um problema em outro, via função $\hat{\Omega}$, demandaria primeiramente uma solução numérica mais adequada ao perfil hiperbólico de $T_0(z)$. Este e outros resultados, como por exemplo para os casos de fluídos com resistividade finita ou diferentes propriedades magnéticas, esperamos poder obter em trabalhos futuros, nos quais também não excluimos eventualmente alguma investigação por elementos finitos e eventuais colaborações para uma verificação experimental do fenômeno.

Referências

- [1] N. ROTT, *Damped and Thermally Driven Acoustic Oscillations in Wide and Narrow Tubes*, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* **20**, 230 (1969).
- [2] LORD RAYLEIGH, *Theory of Sound*, Vol II (Macmillan 1896).
- [3] L. E. KINSLER, A. R. FREY, A. B. COPPENS, J. V. SANDERS, *Fundamentals of Acoustics* (John Wiley 1982).
- [4] G. W. SWIFT, *Thermoacoustics a Unifying Perspective for Some Engines and Refrigerators*, Springer, 2002.
- [5] F. M. WHITE, *Viscous Fluid Flow*, 3rd ed. (McGraw-Hill, New York, 2006).
- [6] J. D. FUERST, *An investigation of Thermally Driven Acoustical Oscillations in Helium Systems*, proceedings of the Low Temperature Engineering and Cryogenics Conference 1990, Southampton, England, July 17-19, 1990.
- [7] T. IIDA AND R. GUTHRIE, *Metall. Mater. Trans. B* **41**, 437 (2010).
- [8] M. NUSSENZVEIG, *Curso de Física Básica vol. 2*, Editora Blucher (2002)
- [9] T. SEXL, *Über den von E.G. Richardson entdeckten ‘Annulareffekt’*, *Z. Phys.* **61**, 349 (1930).
- [10] R. FOX, A. MACDONALD, *Introdução à Mecânica dos Fluídos*, LTC Editora, Rio de Janeiro, 1998.
- [11] NIKITA P. KRYUCHKOV, EGOR V. YAKOVLEV, EVGENY A. GORBUNOV, LENAIC COUËDEL, ANDREY M. LIPAEV, AND STANISLAV O. YURCHENKO, *Thermoacoustic Instability in Two-Dimensional Fluid Complex Plasmas*, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 075003, 2018.
- [12] F. F. CHEN, *Introduction to Plasma Physics*, Plenum Press, New York, 1974.
- [13] KARL SONDHAUSS, *"Über die Schallschwingungen der Luft in erhitzten Glasrohren und in gedeckten Pfeifen von ungleicher Weite"*. *Annalen der Physik und Chemie*. 2nd series (in German). **79**: 1–34, 1850.
- [14] PIETER RIJKE, *"Notiz über eine neue Art, die in einer an beiden Enden offenen Röhre enthaltene Luft in Schwingungen zu versetzen"*. *Annalen der Physik*, **183**: 339–343, 1859.

- [15] *Collocation Method*. In: Wikipedia. Disponível em https://en.wikipedia.org/wiki/Collocation_method . Acesso em 01-05-2019 .
- [16] HERMANN BRUNNER, *Collocation Methods for Integral and Differential Equations*. Cambridge University Press, 2004.
- [17] *Número de Prandtl*. In: Wikipedia. Disponível em https://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_de_Prandtl . Acesso em 04-04-2019 .
- [18] *Bessel Differential Equation*. In: Wolfram Mathworld. Disponível em <http://mathworld.wolfram.com/BesselDifferentialEquation.html> . Acesso em 06-03-2019.
- [19] S AYRINHAC, M GAUTHIER, G LE MARCHAND, M MORAND, F BERGAME ANDF DECREMPS, *Thermodynamic properties of liquid gallium from picosecond acoustic velocity measurements*, J. Phys.: Condens. Matter **27**(2015) 275103 (8pp).
- [20] *Dry air properties*. In: The Engineering Toolbox. Disponível em https://www.engineeringtoolbox.com/dry-air-properties-d_973.html . Acesso em 14-08-2019.
- [21] *Gerador termoacústico sem partes móveis para naves espaciais*. In: Inovação Tecnológica. Disponível em: <https://tinyurl.com/y36ohcbg> . Acesso em 16-08-2019.
- [22] GARRET, SMITH et al, *Fission-powered in-core thermoacoustic sensor*, Appl. Phys. Lett. **108**, 144102 (2016).
- [23] *Cientistas criam refrigerador termoacústico ambientalmente correto*. In: Inovação Tecnológica, 11/05/2004. Disponível em <https://tinyurl.com/y4dehztq> acesso em 16-08-2019.
- [24] *Liquid States Theories*. In Shodhganga. Disponível em https://shodhganga.inflibnet.ac.in/bitstream/10603/150526/8/08_chapter%203.pdf . Acesso em 16-08-2019

Apêndice I: obtendo as equações perturbadas

Para melhor compreender o trabalho de ROTT [1], elaboramos a presente dedução detalhada, a partir das equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \\ \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{v} \\ c_p \rho_0 \frac{DT}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} = \frac{\mu c_p}{\sigma} \nabla^2 T \end{cases}$$

As duas primeiras são a de continuidade e a do fluxo de momento (Navier-Stokes), estas representam os princípios físicos mais comumente utilizados na modelagem de fluidos.

A terceira é uma equação de propagação de calor. Seu uso se justifica plenamente pela natureza do fenômeno em questão: uma oscilação provocada por um gradiente térmico.

Trataremos estas três equações considerando que cada grandeza pode se decompor em dois termos: um representando seu valor médio e outro sua perturbação acústica. Tais perturbações são tipicamente várias ordens de grandeza menores do que os valores médios.

Começemos com o tratamento matemático da primeira equação, a de continuidade. Substituindo então $\rho = \rho_0 + \rho_1$ e $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$ teremos que o produto $\rho \vec{v}$ será dado por

$$\rho \vec{v} = \rho_0 \vec{v}_0 + \rho_0 \vec{v}_1 + \rho_1 \vec{v}_0 + \rho_1 \vec{v}_1$$

onde o índice zero indica os valores médios e o índice um as perturbações. No último termo do segundo membro temos o produto de duas perturbações. Como supomos que tais perturbações são pequenas, muito menor ainda seria um termo de segunda ordem como esse, portanto, desprezamos este produto. Ficamos então com

$$\rho \vec{v} = \rho_0 \vec{v}_0 + \rho_0 \vec{v}_1 + \rho_1 \vec{v}_0$$

o que, substituindo na equação de continuidade resulta

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}_0) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_1 \vec{v}_0) = 0$$

Feito isso, a primeira coisa a se observar é que os valores médios por si só obedecem à equação original. Isso implica que o primeiro e o terceiro termos juntos se anulam, uma vez que eles compõem a equação de continuidade com índice zero. Assim, temos:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_1 \vec{v}_0) = 0$$

Em segundo lugar, podemos considerar num primeiro momento que \vec{v}_0 , o valor médio do campo de velocidade não só seja uniforme mas totalmente nulo. Temos então

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) = 0$$

que é a equação de continuidade perturbada.

Buscamos obter, tanto quanto possível, as equações envolvendo primariamente as grandezas perturbadas, pois são elas que se sobressaem no fenômeno, sempre eliminando, na medida do possível os valores médios. Ao cabo do trabalho observaremos que os valores médios não eliminados poderão ser relacionados ao gradiente de temperatura imposto.

Nas demais equações utilizamos a notação de derivada hidrodinâmica para simplificar. No caso da equação de Navier-Stokes temos

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

Observamos que o operador $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})$ sempre terá uma componente não linear devido ao último termo. Ou seja, ao introduzirmos $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$ na segunda equação, não podemos esperar simplesmente que $\frac{D}{Dt}$ se distribua em \vec{v}_0 e \vec{v}_1 como faria uma derivação ordinária. Haverá algo a mais devido à não-linearidade. Vejamos então como ficaria:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + [(\vec{v}_0 + \vec{v}_1) \cdot \vec{\nabla}](\vec{v}_0 + \vec{v}_1)$$

Abrindo o último termo temos $(\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_0 + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_0 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_1$, o que resulta

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{D\vec{v}_0}{Dt} + \frac{D\vec{v}_1}{Dt} + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_0$$

Como supomos $\vec{v}_0 = 0$ acabamos obtendo uma linearização da derivada hidrodinâmica no caso da velocidade:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{D\vec{v}_0}{Dt} + \frac{D\vec{v}_1}{Dt}$$

Inserindo isso então na equação de Navier-Stokes, considerando $p = p_0 + p_1$ e $\frac{1}{\rho} \approx \frac{1}{\rho_0}$ temos

$$\frac{D\vec{v}_0}{Dt} + \frac{D\vec{v}_1}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p_0 - \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p_1 + \nu \nabla^2 \vec{v}_0 + \nu \nabla^2 \vec{v}_1$$

Vamos introduzir agora as simplificações da teoria perturbativa. Observamos que o primeiro termo do primeiro membro, juntamente com o primeiro e terceiro do segundo membro, compõe a equação original com as grandezas médias. Portanto, estes termos se anulam:

$$\frac{D\vec{v}_1}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}p_1 + \nu\nabla^2\vec{v}_1$$

Utilizando a definição de $\frac{D\vec{v}}{Dt}$ temos $\frac{D\vec{v}_1}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_1$. Agora, porém, a não linearidade recai com um produto de duas perturbações, o qual desprezamos, como todos demais termos de segunda ordem. Ou seja, para a equação de Navier-Stokes teremos $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}_1}{\partial t}$ simplesmente. E a segunda equação resultará:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{v}_1}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}p_1 + \nu\nabla^2\vec{v}_1 \\ \frac{\partial\vec{v}_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}p_1 &= \nu\nabla^2\vec{v}_1\end{aligned}$$

Esta é a segunda equação em sua forma perturbativa.

A terceira equação, que governa a difusão de calor, demandaria um pouco mais de trabalho se não houvéssimos estabelecido a propriedade distributiva do operador de derivada hidrodinâmica. Analogamente a $\frac{D\vec{v}}{Dt}$ temos

$$\begin{aligned}\frac{DT}{Dt} &= \frac{DT_0}{Dt} + \frac{DT_1}{Dt} + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla})T_1 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla})T_0 \\ \frac{Dp}{Dt} &= \frac{Dp_0}{Dt} + \frac{Dp_1}{Dt} + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla})p_1 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla})p_0\end{aligned}$$

Mas aqui a linearidade se verifica apenas em p . Dos últimos termos nessas derivadas apenas $(\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla})T_0$ sobrevive, pois \vec{v}_0 é nulo e p_0 é assumido como constante.

$$\begin{aligned}\frac{DT}{Dt} &= \frac{DT_0}{Dt} + \frac{DT_1}{Dt} + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla})T_0 \\ \frac{Dp}{Dt} &= \frac{Dp_0}{Dt} + \frac{Dp_1}{Dt}\end{aligned}$$

Então a equação do calor fica

$$c_p\rho_0\frac{DT_1}{Dt} + c_p\rho_0(\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla})T_0 - \frac{Dp_1}{Dt} = \frac{\mu c_p}{\sigma}\nabla^2T_1$$

Como $(\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla})T_1$ e $(\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla})p_1$ são termos de segunda ordem, $\frac{DT_1}{Dt} = \frac{\partial T_1}{\partial t}$ e $\frac{Dp_1}{Dt} = \frac{\partial p_1}{\partial t}$

e o sistema de equações será

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p_1 = \nu \nabla^2 \vec{v}_1 \\ c_p \rho_0 \frac{\partial T_1}{\partial t} + c_p \rho_0 (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) T_0 - \frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\mu c_p}{\sigma} \nabla^2 T_1 \end{cases}$$

Todas as perturbações variam harmonicamente com o tempo, então podemos trocar $\frac{\partial}{\partial t}$ por $i\omega$ nas equações acima. Resta apenas escrever em um sistema de coordenadas conveniente.

No caso, temos um problema com simetria cilíndrica. Vamos usar coordenadas cilíndricas para expressar as equações. Não vamos considerar a coordenada azimutal pois supomos em primeira aproximação uma perfeita simetria no comportamento do gás dentro do tubo. Consideraremos assim apenas a coordenada radial r e a axial z .

O divergente da equação de continuidade é dado por

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) = (\vec{\nabla} \rho_0) \cdot \vec{v}_1 + \rho_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1)$$

O gradiente da densidade média independe da coordenada r , já o divergente da velocidade será $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z}$. Então, a equação de continuidade fica

$$i\omega \rho + v_z \frac{d\rho_0}{dz} + \rho_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

onde, por simplicidade, omitimos o índice 1 das oscilações acústicas.

A equação de Navier-Stokes na direção z será

$$i\omega v_{1z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{dp_1}{dz} = \nu \nabla^2 v_{1z}$$

O gradiente de pressão na direção radial também pode ser desprezado, por isso escrevemos a derivada total $\frac{dp_1}{dz}$. O laplaciano no membro direito não deverá conter termo em z pois a dissipação por viscosidade na direção z é muito pequena comparada com a direção radial. Assim, temos o seguinte:

$$i\omega v_z + \frac{1}{\rho_0} \frac{dp}{dz} - \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = 0$$

Já na equação de propagação de calor, consideraremos $(\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) T_0 = v_z \frac{dT_0}{dz}$ já que o gradiente de temperatura média é axial. Em contrapartida, assumimos que a perturbação T_1 na temperatura não varia em z , ou seja, $\nabla^2 T_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right)$. Isso resulta a equação seguinte:

$$c_p \rho_0 \left(i\omega T_1 + v_z \frac{dT_0}{dz} \right) - i\omega p_1 = \frac{\mu c_p}{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right)$$

onde também trocamos $\frac{\partial}{\partial t}$ por $i\omega$. Reagrupando alguns termos podemos também escrever:

$$i\omega (c_p \rho_0 T_1 - p_1) + c_p \rho_0 v_z \frac{dT_0}{dz} = \frac{\mu c_p}{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right)$$

Usando a lei dos gases perfeitos conseguimos eliminar totalmente a temperatura dessa última equação. Partindo então de $p = R\rho T$ temos

$$p_0 + p_1 = R(\rho_0 + \rho_1)(T_0 + T_1) = R(\rho_0 T_0 + \rho_0 T_1 + \rho_1 T_0 + \rho_1 T_1)$$

O último termo pode ser desprezado, já que é o produto de duas pequenas oscilações. Além disso, sendo $p_0 = R\rho_0 T_0$, o primeiro termo dessa mesma distributiva vai se cancelar com p_0 , sobrando apenas $p_1 = R(\rho_0 T_1 + \rho_1 T_0)$. Disso podemos isolar T_1 , obtendo

$$T_1 = \frac{p_1}{R\rho_0} - T_0 \frac{\rho_1}{\rho_0}$$

Substituindo isso na última equação diferencial resulta

$$i\omega \left(\frac{c_p}{R} p_1 - c_p T_0 \rho_1 - p_1 \right) + c_p \rho_0 v_z \frac{dT_0}{dz} = \frac{\mu c_p}{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right)$$

No membro direito teríamos $\frac{\partial T_1}{\partial r} = \frac{1}{R\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial r} - \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial r}$ pois ρ_0 é constante em relação a r . Mas o modelo de Rott também considera que as oscilações de pressão não variam radialmente, ou seja, $\frac{\partial p_1}{\partial r} = 0$, o que nos leva a $\frac{\partial T_1}{\partial r} = -\frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial r}$ e

$$i\omega \left[c_p T_0 \rho_1 - \left(\frac{c_p - R}{R} \right) p_1 \right] - c_p \rho_0 v_z \frac{dT_0}{dz} = \frac{\mu c_p T_0}{\sigma \rho_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho_1}{\partial r} \right).$$

Dividindo essa equação por $c_p T_0$,

$$i\omega \left[\rho_1 - \left(\frac{1 - \frac{R}{c_p}}{R} \right) \frac{p_1}{T_0} \right] - \frac{\rho_0}{T_0} v_z \frac{dT_0}{dz} = \frac{\mu}{\sigma \rho_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho_1}{\partial r} \right)$$

Vamos agora introduzir outras constantes, considerando que $\frac{\mu}{\rho_0} = \nu$ e $\frac{R}{c_p} = \frac{c_p - c_v}{c_p} = 1 - \frac{c_v}{c_p}$, ou seja, $\frac{R}{c_p} = 1 - \frac{1}{\gamma}$, portanto, $1 - \frac{R}{c_p} = \frac{1}{\gamma}$.

$$i\omega \left[\rho_1 - \frac{1}{\gamma R T_0} p_1 \right] - \frac{\rho_0}{T_0} v_z \frac{dT_0}{dz} = \frac{\nu}{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho_1}{\partial r} \right)$$

Assim temos a temperatura apenas no segundo termo do primeiro membro. Usando $\rho_0 T_0 = p_0/R$ temos $\frac{d\rho_0}{dz} T_0 + \rho_0 \frac{dT_0}{dz} = 0$ pois p_0 é constante. Isolando então o gradiente de temperatura média, $\frac{dT_0}{dz} = -\frac{T_0}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz}$, e reescrevendo:

$$i\omega \left[\rho_1 - \frac{1}{\gamma RT_0} p_1 \right] + v_z \frac{d\rho_0}{dz} = \frac{v}{\sigma} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho_1}{\partial r} \right)$$

Para eliminação da temperatura média remanescente basta levar em conta que γRT_0 é a expressão para a velocidade padrão do som em um meio. Em outras palavras, podemos definir uma nova constante $a := \gamma RT_0$.

Deste modo temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} i\omega \rho + v_z \frac{d\rho_0}{dz} + \rho_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\ i\omega v_z + \frac{1}{\rho_0} \frac{dp}{dz} - \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = 0 \\ i\omega \left[\rho - \frac{1}{a^2} p \right] + v_z \frac{d\rho_0}{dz} - \frac{v}{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) = 0 \end{cases}$$

o qual corresponde ao sistema utilizado por ROTT em seu trabalho [1].

Apêndice II: alguns códigos fonte

EFEITO TERMOACÚSTICO – *Toy Model*

%%%

```
function q =  
rootToyModelV8(L,z0,a,b,Ta,Tb,vsom,pho_med,gama_cte,sigma,rmax,dB,perfil_  
T,desvioT)  
%V8 18-10-2018: usa integral_em_r() para avaliar K  
  
tic  
  
if a~=b  
    omega = vsom/8*pi*L;  
else  
    omega = vsom/4*pi*L;  
end  
save omega;  
  
omega  
  
dr=rmax/100;  
K = integral_em_r(dr,rmax,pho_med,omega,Ta,Tb,perfil_T,desvioT,z0,z0);  
%calcula K em z0  
K = K(1) ; %podia ser K(2) também  
  
%V7 15-10-2018: soluciona apenas com alguma extremidade aberta, usando  
%solução de sistema linear A.u = b e calcula Pot = (K/L).u'.M.u a  
%posteriori  
  
%V6 de 13-10-2018 com entrada em dB no lugar de p0 e Pot  
  
%V5 de 27-09-2018 usa Acha_uV3() p/ resolver o sistema A.u = 0 com u'.M.u =  
P  
%Ta e Tb agora em Celsius  
%Usa perfil_T para escolher entre os tres perfis possíveis de T(z) em  
%AchaCoeficientesExtremosV2.  
%perfil_T pode ser:  
%1) função erro          2)logístico          3)arcotangente  
  
I0 = 1E-12; %limiar da audição (W/m2)  
Beta = dB/10 ; %nivel sonoro em Bell  
I = I0*10^Beta; %(W/m2)  
p0 = sqrt(2*pho_med*vsom*I)    %X1(4) = X0(4)  
Pot = I*K; %potência  
  
ABC =  
AchaCoeficientesExtremosV2(p0,L,Ta,Tb,vsom,gama_cte,sigma,rmax,z0,perfil_  
T,desvioT); %as temperaturas estão embutidas aqui  
A = ABC(:,1);    B = ABC(:,2);    C = ABC(:,3);
```

```

Aa = A(1); Ab = A(2); Ba = A(1); Bb = A(2); Ca = A(1); Cb = A(2);

%Aa
%Ba
%Ca

%Ab
%Bb
%Cb

%testando caso em que coeficientes morrem em um dos lado
if or( and( and(Aa=='NaN',Ba=='NaN'),Ca=='NaN') ,
and( and(Ab=='NaN',Bb=='NaN'),Cb=='NaN') )
    return
    q=0;
    dB_saida = 0;
    save dB_saida;
end

syms k;

ka = solve(Aa*k^2 + Ba*k^2 + Ca,k);
kb = solve(Ab*k^2 + Bb*k^2 + Cb,k);

ka = vpa(ka) ; kb = vpa(kb);

save ka; save kb;

syms pa1 pa2 pb1 pb2

%length(ka)
%length(kb)

%vamos achar o vetor p1 de amplitudes de p = p1*exp(k*z0)
if length(ka) < 2 ka = vertcat(ka,0); pa2 = 0; end
if length(kb) < 2 kb = vertcat(kb,0); pb2 = 0; end

kb

%DEFININDO MATRIZ M (de transferência de energia)
M = zeros(4,4);

M(1,1) = 0.5*( exp(2*ka(1)*z0) - 1 )/ka(1) ; M(1,2) = exp(sum(ka)*z0) - 1 ;
M(2,1) = exp(sum(ka)*z0) - 1 ;

%contornando singularidade possível em M(2,2)
if length(ka)<2
    ka = vertcat(ka,0);

```

```

    if ka(2)~=0
        M(2,2) = 0.5*( exp(2*ka(2)*z0) - 1 )/ka(2) ;
    else
        M(2,2)=0;
    end
end

M(3,3) = 0.5*( exp(2*kb(1)*L) - exp(2*kb(1)*z0) )/kb(1) ; M(3,4) =
exp(sum(kb)*L) - exp(sum(kb)*z0) ;
M(4,3) = exp(sum(kb)*L) - exp(sum(kb)*z0) ;

%contornando singularidade possivel em M(4,4)
if length(kb)<2
    kb = vertcat(kb,0);

    if kb(2)~=0
        M(4,4) = 0.5*( exp(2*kb(2)*L) - exp(2*kb(2)*z0) )/kb(2) ;
    else
        M(4,4)=0;
    end
end

%DEFININDO MATRIZ A (continuidade e condições de contorno)
A = zeros(4,4);
%continuidade
A(1,1) = exp(ka(1)*z0) ;    A(1,2) = exp(ka(2)*z0) ;    A(1,3) =
-exp(kb(1)*z0) ;    A(1,4) = -exp(kb(2)*z0) ;
A(2,1) = ka(1)*exp(ka(1)*z0) ; A(2,2) = ka(2)*exp(ka(2)*z0) ; A(2,3) =
-kb(1)*exp(kb(1)*z0) ; A(2,4) = -kb(2)*exp(kb(2)*z0) ;

amplitudes = zeros(4,1);

%conds de contorno possíveis (parametrizando em a e b)
if a==0 & b==1
    A(3,1) = 1 ;    A(3,2) = 1 ;
    A(4,3) = exp(kb(1)*L) ;    A(4,4) =
exp(kb(2)*L) ;
    b_vetor = [0 0 p0 0]';
else
    if a==0 & b==0
        A(3,1) = 1 ;    A(3,2) = 1 ;
        A(4,3) = kb(1)*exp(kb(1)*L) ;
        A(4,4) = kb(2)*exp(kb(2)*L) ;
        b_vetor = [ 0 0 p0 p0]';
    else
        if a==1 & b==0
            A(3,1) = 1 ;    A(3,2) = 1 ;
            A(4,3) = exp(kb(1)*L) ;    A(4,4) =
exp(kb(2)*L) ;
            b_vetor = [ 0 0 0 p0]';
            amplitudes = Acha_uV4(A,M,L*Pot/K,b);
        else
            if a==1 & b==1
                A(3,1) = 1 ;    A(3,2) = 1 ;

```

```

                                A(4,3) = exp(kb(1)*L) ;    A(4,4) =
exp(kb(2)*L) ;
                                b_vetor = [ 0 0 0 0]';
                                amplitudes = Acha_uV4(A,M,L*Pot/K,b);

                                else
                                    disp('Valores de a e/ou b incompatíveis com entrada,
esperava-se zero ou 1');
                                end
                            end
                        end
                    end

amplitudes = linsolve(A,b_vetor);

pa1 = amplitudes(1,1) ; pa2 = amplitudes(2,1) ; pb1 = amplitudes(3,1) ; pb2
= amplitudes(4,1) ;
%pa1 = vpa(amplitudes.u1) ; pa2 = vpa(amplitudes.u2) ; pb1 =
vpa(amplitudes.u3) ; pb2 = vpa(amplitudes.u4) ;

Saida = PlotaSolucoes(L,z0,Ta,Tb,pa1,pa2,pb1,pb2,ka,kb);

%save A
%save M

%comparando db de entrada (p0) e de saída
Pot_saida = abs(K/L)*amplitudes'*M*amplitudes;

if ~(a==1 & b==1)
    if (a==0 & b==1) || (a==1 & b==0)
        Area = pi*rmax^2 ;
    else
        Area = 2*pi*rmax^2 ;
    end

    I_saida = Pot/Area;
    Beta_saida = log(I_saida/I0);
    dB_saida = 10*Beta_saida;
    save dB_saida;

else

    disp('Não é possível resolver o caso de ambas extremidades fechadas');

end

t_comp = toc

q = Saida;

```

```

end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function q =
AchaCoeficientesExtremosV2(p0,L,Ta,Tb,vsom,gama_cte,sigma,rmax,z0,perfil_
T,desvioT)
%ATUALIZAÇÃO COEFICIENTES EM 26-10-2018

%versão 2 de 27-09-2018
%Considera o perfil de T(z) podendo ser 1, 2 ou 3
%1) função erro          2)logístico          3)arcotangente

Ta = Ta + 273.15;  Tb = Tb + 273.15;

load omega;

zmax = L;
dz = L/1000;

%freq = 0.5*vsom/zmax;
dz = zmax/2000;
%omega = 2*pi*freq;
freq = omega/2*pi;
disp('A frequencia neste tubo é '); disp(freq); disp('          Hz');

%p0 é p em z = 0
%p1 é p em z = dz
%p1 só será usado para estimar u = dp/dz em zero.
%Vamos impor condição de contorno igual um tubo com ambas extremidades abertas
%ou seja, vamos supor que tanto p(0) quanto p(zmax) sejam máximos
%Estimamos então inicialmente que p(z) ~ cos(k0*z) com k0 = pi/zmax;
%então, em z = dz temos p1 = p(dz) = p0*cos(k0*dz) ou
p1 = p0*cos(pi*dz/zmax); %atualizando valor de p1 para ser coerente com modelo

%parâmetros do perfil da visc cinemática X T para o ar
K_ni = 7*10^-10;  beta_ni = 1.7558;

%parâmetros típicos do perfil gaussiano de temperatura
% z0 = zmax/4 seria um valor típico para o centro da distribuição
%Tmax = 600+273 ; %temperatura máxima (Kelvin)
%desvioT = 0.010; %um milímetro para o desvio padrão da temperatura
%gradT = @(z) Tmax*exp(-(z-z0)/desvioT).^2);
if Ta<Tb
    Tmax = Tb;
    T0 = Ta;
else
    if Ta>Tb
        Tmax = Ta;
        T0 = Tb;
    else
        disp('Não há gradiente de temperatura, assim o fenomeno é impossivel');
        q = 0;
    end
end
end

```

```

%Perfis de Temperatura ao longo de z
if perfil_T==1
    T = @(z) T0 + 0.5*Tmax*( 1 + erf( (z-z0)/(sqrt(2)*desvioT) ) ); %perfil
gaussiano em gradT
else if perfil_T==2
    T = @(z) T0 + Tmax./( 1 + exp(-(z - z0)/desvioT) ) ; %perfil
logístico de T(z)
else if perfil_T==3
    T = @(z) T0 + 0.5*Tmax*atan(2*pi*(z-z0)/sigma); %lorentziana
em gradT
else
    disp('Perfil de T(z) não cadastrado!');
end
end
end

gradT = @(z) (T(z+dz/2)-T(z-dz/2))/dz;
theta = @(z) (T(z).^-1).*gradT(z);
%theta = @(z) (T(z).^-1).*(T(z+dz/2)-T(z-dz/2))/dz;

ni = @(T) K_ni*T.^beta_ni; %CHECAR VALORES DE K_ni e beta_ni para o ar
eta0 = @(T) sqrt(i*omega./ni(T))*rmax;
f = @(eta0) 2*besselj(0,i*eta0)./(i*eta0.*besselj(0,i*eta0)); % é o f1 da
equação (18)

%%definindo coeficientes da equação - ATUALIZADO EM 26-10-218
% d/dz[A(z).dp/dz] - B(z).dp/dz + C(z).p = 0
A = @(z) ((vsom./omega)^2)*( 1 - f(eta0(T(z))) );
B = @(z) (vsom/omega)^2 * inv(1-sigma) * ( f(sqrt(sigma)*eta0(T(z))) -
f(eta0(T(z))) );
C = @(z) 1 + (gama_cte-1)*f(sqrt(sigma)*eta0(T(z)));
%%

z_vetor = 0:dz:zmax;

figure();
z = 2*dz:dz:L;
subplot(2,3,1); plot(z,real(A(z))); xlabel('z (m)'); ylabel('Re[A(z)]');
title('coeficiente A(z)'); grid on;
subplot(2,3,2); plot(z,real(B(z))); xlabel('z (m)'); ylabel('Re[B(z)]');
title('coeficiente B(z)'); grid on;
subplot(2,3,3); plot(z,real(C(z))); xlabel('z (m)'); ylabel('Re[C(z)]');
title('coeficiente C(z)'); grid on;
subplot(2,3,4); plot(z,imag(A(z))); xlabel('z (m)'); ylabel('Im[A(z)]');
grid on;
subplot(2,3,5); plot(z,imag(B(z))); xlabel('z (m)'); ylabel('Im[B(z)]');
grid on;
subplot(2,3,6); plot(z,imag(C(z))); xlabel('z (m)'); ylabel('Im[C(z)]');
grid on;

```



```

Amin = min(A(z_vetor)); Amax = max(A(z_vetor));
Bmin = min(B(z_vetor)); Bmax = max(B(z_vetor));
Cmin = min(C(z_vetor)); Cmax = max(C(z_vetor));

Aa = mean(A(0:dz:z0));

za = 0:dz:z0 ;   zb = z0:dz:zmax;

Aa = mean(A(za)); Ab = mean(A(zb));
Ba = mean(B(za)); Bb = mean(B(zb));
Ca = mean(C(za)); Cb = mean(C(zb));

A = vertcat(Aa,Ab); B = vertcat(Bmin,Bmax); C = vertcat(Cmin,Cmax);

%figure(2);
%z = 0:dz:zmax;
%subplot(2,3,1); plot(z,real(A(z))); xlabel('z (m)'); ylabel('Re[A(z)]');
title('coeficiente A(z)'); grid on;
%subplot(2,3,2); plot(z,real(B(z))); xlabel('z (m)'); ylabel('Re[B(z)]');
title('coeficiente B(z)'); grid on;
%subplot(2,3,3); plot(z,real(C(z))); xlabel('z (m)'); ylabel('Re[C(z)]');
title('coeficiente C(z)'); grid on;
%subplot(2,3,4); plot(z,imag(A(z))); xlabel('z (m)'); ylabel('Im[A(z)]');
grid on;
%subplot(2,3,5); plot(z,imag(B(z))); xlabel('z (m)'); ylabel('Im[B(z)]');
grid on;
%subplot(2,3,6); plot(z,imag(C(z))); xlabel('z (m)'); ylabel('Im[C(z)]');
grid on;

q = horzcat(A,B,C);
end

```

%%

EFEITO TERMOACÚSTICO – perfis $T_0(z)$ sigmóides

%%

```

function q =
ResolveModeloRootV6(p0,L,vsom,gama_cte,sigma,rmax,a,b,Ta,Tb,z0,desvioT,pe
rfil_T,n)
%30-09-2018
%agora usando bvp4c() ao invés de ode15s()

%27-09-2018
%agora usando perfil_T para escolher entre os tres perfis possíveis de T(z)
%Pode ser:
%1) função erro          2)logístico          3)arcotangente

```

```

save a; save b; save p0;
Ta = Ta + 273.15 ; Tb = Tb + 273.15;

disp('O comprimento do tubo correspondente é '); disp(L); disp('
metros');

if a==0 && b==0
    lambda = (2/(2*n+1))*L;
else
    if a==0 && b==1
        lambda = (4/(2*n+1))*2*L;
    else
        if a==1 && b==0
            lambda = (4/(2*n+1))*2*L;
        else
            if a==1 && b==1
                lambda = (2/n)*L;
            else
                disp('Valor(es) incompativel(is) de a e/ou b')
            end
        end
    end
end

disp('O comprimento da onda nesse tubo é '); disp(lambda); disp('
metros');

freq = vsom/lambda ; omega = 2*pi*freq;

save vsom; save omega; save gama_cte; save sigma; save rmax; save z0;

dz = L/1000; save dz;

%parâmetros do perfil da visc cinemática X T
K_ni = 7*10^-10; beta_ni = 1.7558; %(parametros do ar)
% y = 0,0003x-0,842 %ajuste excel para o gálio
%K_ni = 3E-4; beta_ni = -0.842; %para o GÁLIO LÍQUIDO

%determinando maior e menor T
if Ta>Tb
    Tmax = Ta ; T0 = Tb;
else
    if Tb>Ta
        T0 = Ta ; Tmax = Tb;
    else
        disp('Não existe gradiente de T. O fenômeno não pode ocorrer');
    end
end

%Perfil de Temperatura ao longo de z
if perfil_T==1

```

```

    T = @(z) T0 + 0.5*Tmax*( 1 + erf( (z-z0)/(sqrt(2)*desvioT) ) ); %perfil
gaussiano em gradT
else if perfil_T==2
    T = @(z) T0 + Tmax./( 1 + exp(-(z - z0)/desvioT) ) ); %perfil
logístico de T(z)
else if perfil_T==3
    T = @(z) T0 + 0.5*Tmax*atan(2*pi*(z-z0)/sigma); %lorentziana
em gradT
else
    disp('Perfil de T(z) não cadastrado!');
end
end
end

gradT = @(z) (T(z+dz/2)-T(z-dz/2))/dz;
theta = @(z) (T(z).^(-1)).*gradT(z);
%theta = @(z) (T(z).^(-1)).*(T(z+dz/2)-T(z-dz/2))/dz;

save T0; save Tmax; save desvioT; save perfil_T

ni = @(T) K_ni*T.^beta_ni; %CHECAR VALORES DE K_ni e beta_ni para cada meio
eta0 = @(T) sqrt(i*omega./ni(T))*rmax;
f = @(eta0) 2*besselj(0,i*eta0)./(i*eta0.*besselj(0,i*eta0)); % é o f1 da
equação (18)

%%definindo coeficientes da equação
% d/dz[A(z).dp/dz] - B(z).dp/dz + C(z).p = 0
A = @(z) ((vsom./omega)^2)*( 1 - f(eta0(T(z))) );
B = @(z) (vsom/omega)^2 * inv(1-sigma) * ( f(sqrt(sigma)*eta0(T(z))) -
f(eta0(T(z))) );
C = @(z) 1 + (gama_cte-1)*f(sqrt(sigma)*eta0(T(z)));
%%%

%options = odeset('Mass',@(z) [1 0; 0 0]*A(z),'MStateDependence','none');
%options = odeset('Mass',@(z) [1 0; 0 0]*A(z));

z_vetor = 0:dz:L;
z_vetor = linspace(0,L,length(z_vetor));

%chute de solução inicial
if a==0 && b==0
    solinit = bvpinit(z_vetor,[p0 0]);
else
    if a==0 && b==1
        solinit = bvpinit(z_vetor,[p0 0]);
    else
        if a==1 && b==0
            % dpdz0 = ( p_chute(dz,p0,a,b,L,n)-pchute(0,p0,a,b,L,n) ) /dz;
            solinit = bvpinit(z_vetor,[0 p0]);
        else
            if a==1 && b==1
                % dpdz0 = ( p_chute(dz,p0,a,b,L,n)-pchute(0,p0,a,b,L,n) ) /dz;
                solinit = bvpinit(z_vetor,[0 p0]);
            end
        end
    end
end

```

```

        else
            disp('Valor(es) incompatível(is) de a e/ou b')
        end
    end
end
end

%solinit2 = [z_vetor' p_chute(z_vetor,p0,a,b,L,1)'];
solucao = bvp4c(@rootV5,@conds_contorno,solinit);
%solucao = bvp4c(@rootV5,@conds_contorno,solinit2);

pressao = deval(solucao,z_vetor); % vetor de duas linhas, N colunas, a
resposta está na linha 1
size(pressao) % pressao(2,:) é dp/dz

figure()
subplot(1,2,1); plot(z_vetor,real( pressao(1,:) )); grid on; hold on;
xlabel('z (m)'); ylabel('pressão manométrica (Pa)');
title('parte real de p(z)');
subplot(1,2,2); plot(z_vetor,imag( pressao(1,:) )); grid on; hold on;
xlabel('z (m)'); ylabel('pressão manométrica (Pa)');
title('parte imaginária de p(z)');

figure()
p_modulo = abs(pressao(1,:));
fase = atan( imag(pressao(1,:))/real(pressao(1,:)) );
subplot(1,2,1); plot(z_vetor,p_modulo); grid on; hold on; xlabel('z (m)');
ylabel('pressão manométrica (Pa)');
title('módulo de p(z)');
subplot(1,2,2); plot(z_vetor,fase); grid on; hold on;
xlabel('z (m)'); ylabel('pressão manométrica (Pa)');
title('fase de p(z)');

%figure(6); plot(pressao); grid on; hold on; xlabel('z (m)'); ylabel('pressão
manométrica (Pa)');
%title('oscilação de pressão');

Saida = pressao;

%plotando coeficientes
figure();
z = 2*dz:dz:L;
subplot(2,3,1); plot(z,real(A(z))); xlabel('z (m)'); ylabel('Re[A(z)]');
title('coeficiente A(z)'); grid on;
subplot(2,3,2); plot(z,real(B(z))); xlabel('z (m)'); ylabel('Re[B(z)]');
title('coeficiente B(z)'); grid on;
subplot(2,3,3); plot(z,real(C(z))); xlabel('z (m)'); ylabel('Re[C(z)]');
title('coeficiente C(z)'); grid on;
subplot(2,3,4); plot(z,imag(A(z))); xlabel('z (m)'); ylabel('Im[A(z)]');
grid on;
subplot(2,3,5); plot(z,imag(B(z))); xlabel('z (m)'); ylabel('Im[B(z)]');
grid on;

```

```

subplot(2,3,6); plot(z,imag(C(z))); xlabel('z (m)'); ylabel('Im[C(z)]');
grid on;

%plotando perfil T(z) e gradientes
figure(); plot(z,T(z)); grid on;
titulo = strcat('perfil de temperatura - fonte de calor em z ~ ',
num2str(100*round(z0/100)), ' m');
xlabel('z (m)'); ylabel('T0(z) [K]'); title(titulo);

figure(); plot(z,gradT(z)); grid on;
titulo = strcat('gradiente de temperatura - fonte de calor em z ~ ',
num2str(100*round(z0/100)), ' m');
xlabel('z (m)'); ylabel('grad(T0(z)) [K/m]'); title(titulo);

figure(); plot(z,T(z)); hold on; plot(z,theta(z)); grid on;
legend('T0','theta')
xlabel('z (m)'); ylabel('perfil T0(z) e seu gradiente logaritmico
[unidadesSI]'); title('T0(z) e theta = grad(ln(T0))');

q = Saida;

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function dYdz = rootV5(z,Y)
%atualizado em 26-10-2018

%27-09-2018
%load perfil_T define T(z). Pode ser:
%1) função erro          2)logístico          3)arcotangente

load vsom; load gama_cte; load sigma; load rmax; load zmax; load dz; load omega;
load z0; load T0; load Tmax; load desvioT; load perfil_T; load gama_cte;

%parâmetros do perfil da visc cinemática X T para o ar
K_ni = 7*10^-10; beta_ni = 1.7558;

%perfil de temperatura T(z)
if perfil_T==1
    T = @(z) T0 + 0.5*Tmax*( 1 + erf( (z-z0)/(sqrt(2)*desvioT) ) ); %perfil
gaussiano em gradT
else if perfil_T==2
    T = @(z) T0 + Tmax./( 1 + exp(-(z - z0)/desvioT) ) ); %perfil
logístico de T(z)
    else if perfil_T==3
        T = @(z) T0 + 0.5*Tmax*atan(2*pi*(z-z0)/sigma); %lorentziana
em gradT
    else
        if perfil_T==4
            T = @(z)
T0*cosh(sqrt(gama_cte-1)*z).^((2*gama_cte-1)/(gama_cte-1));

```

```

        else
            disp('Perfil T(z) não cadastrado!');
        end

    end

end

ni = @(T) K_ni*T.^beta_ni; %CHECAR VALORES DE K_ni e beta_ni para o ar
eta0 = @(T) sqrt(i*omega./ni(T))*rmax;
f = @(eta0) 2*besselj(0,i*eta0)./(i*eta0.*besselj(0,i*eta0)); % é o f1 da
equação (18)

%%%definindo coeficientes da equação
% d/dz[A(z).dp/dz] - B(z).dp/dz + C(z).p = 0
A = @(z) ((vsom./omega)^2)*( 1 - f(eta0(T(z))) );
B = @(z) (vsom/omega)^2 * inv(1-sigma) * ( f(sqrt(sigma)*eta0(T(z))) -
f(eta0(T(z))) );
C = @(z) 1 + (gama_cte-1)*f(sqrt(sigma)*eta0(T(z)));
%%%

% Y = [ p u ]' ;

dYdz = [Y(2) ; -C(z)*Y(1)+ B(z)*Y(2)];

end

```

%%

EFEITO MAGNETO-TERMOACÚSTICO

%%

```

function q =
ResModelArtDiscreto(p0,L,meio,rmax,a,b,Ta,Tb,z0,desvioT,perfil_T,N,n_)
%06-08-2019
%resolve sistema M.p = b para achar amplitudes de oscilação p

%Discretizando o perfil de temperatura em N pedaços e resolvendo por partes
% n_ é a discretização para tirar o valor médio de cada pedaço do T0(z)
% anteriormente n era o harmonico (agora estamos setando n = 1 para
fundamental)

M = GeraMatrizM(L,meio,rmax,a,b,Ta,Tb,z0,desvioT,perfil_T,N,n_);
plota_M(M);

```

```

amplitudes = zeros(2*N,1);
b_vetor = zeros(2*N,1);

%conds de contorno possíveis (parametrizando em a e b)
if a==0 & b==1
    b_vetor(1) = p0 ;
else
    if a==0 & b==0
        b_vetor(1) = p0 ;        b_vetor(2*N) = p0 ;
    else
        if a==1 & b==0
            b_vetor(2*N) = p0 ;
        else
            if a==1 & b==1
                b_vetor(N) = p0 ;
            else
                disp('Valores de a e/ou b incompatíveis com entrada,
esperava-se zero ou 1');
            end
        end
    end
end

amplitudes = linsolve(M,b_vetor);

q = amplitudes;

end

%%%%%%%%%%%%%

function q = GeraMatrizM(L,meio,rmax,a,b,Ta,Tb,z0,desvioT,perfil_T,N,n_)
%08-08-2019
% ALTERADA função ks da linha 13

%gerador de Matriz para sistema linear de amplitudes do

%05-08-2019
%Discretizando o perfil de temperatura em N pedaços e resolvendo por partes
% n_ é a discretização para tirar o valor médio de cada pedaço do T0(z)
% anteriormente n era o harmonico (agora estamos setando n = 1 para
fundamental)

%ks = ks_T_discretizada(N,n_,a,b,L,meio,rmax,Ta,Tb,perfil_T,desvioT,z0);
ks = ks_T_discretizadaV2(N,n_,a,b,L,meio,rmax,Ta,Tb,perfil_T,desvioT,z0);
%ALTERADO para V2 enm 08-08-2019
save ks;

```

```

n_ks = size(ks); n_ks = n_ks(1);

load Degraus;
zs = Degraus(:,2) ;
zs(length(zs)) = [] ; % assim só ficam pontos de fronteira internos (tamanho
(N-1))

plota_ks(Degraus,ks);

%matriz M terá 2N linhas, amplitudes virão do sistema linear M.u = b

M = zeros(2*N,2*N) ;

M(1,1:2) = [ 1 1 ] ;

M(2*N, (2*N-1):(2*N)) = [ exp(ks(n_ks,1)*L) exp(ks(n_ks,2)*L) ] ;

for bloco = 1:(N-1)

    z = zs(bloco);

    ka_mais = ks(bloco,1) ; ka_menos = ks(bloco,2);
    kb_mais = ks(bloco+1,1) ; kb_menos = ks(bloco+1,2) ;

    imin = 2*bloco ; imax = 2*bloco+1 ;
    jmin = (2*bloco-1) ; jmax = (2*bloco+2) ;

    M(imin:imax,jmin:jmax) = [ exp(ka_mais*z) -exp(kb_mais*z) -exp(kb_menos*z)
exp(ka_menos*z)
;
ka_menos*exp(ka_menos*z) ka_mais*exp(ka_mais*z)
-kb_mais*exp(kb_mais*z) -kb_menos*exp(kb_menos*z)
];

end

q = M;

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function q =
ks_T_discretizadaV2(N,n_,a,b,L,meio,rmax,Ta,Tb,perfil_T,desvioT,z0)
%08-08-2019
% setando ABC da linha 32 para usar coefs_artigoV3 (perfil exclusivamente cosh)
n = 1; % setando harmônico fundamental

%08-08-2019

```



```

% V2: calcula k_mais e k_menos por Bhaskara, sem usar função solve()

%05-08-2018: linha 11 atualizada com Discretiza_T_V2
% n = harmonico (1 para fundamental)
% n_ = nro divisoes para fazer média dos intervalos

%17-07-2019: procedendo solução por discretização do perfil de temperatura,
% e divisão do dominio em sessões

% considera perfil dado por T0_(z) salva em outro arquivo

ambiente = parametros_meio(meio);
gama_cte = ambiente(3);
save Ta; save Tb; save perfil_T; save desvioT; save z0; save gama_cte;

Degraus = Discretiza_T_V2(L,N,n_,Ta,Tb,perfil_T,desvioT,gama_cte,z0);
save Degraus;

dz = L/n_;

ks = zeros(N,2);

for m = 1:N

    z = Degraus(m,1):dz:Degraus(m,2) ;
    % ABC = coefs_artigo(a,b,L,meio,rmax,1,Ta,Tb,perfil_T,desvioT,z0,z) ;
    %setando harmonico fundamental ( n = 1 ), para não dar confusão com outro n
    % ABC = coefs_artigoV3(a,b,L,meio,rmax,n,Ta,Tb,z);
    ABC = coefs_artigoV4(a,b,L,meio,rmax,Ta,Tb,z);

    A = mean(ABC(:,1)) ; B = mean(ABC(:,2)) ; C = mean(ABC(:,3)) ;

    %syms k;
    %k = solve(A*k^2 + B*k + C == 0 , k);
    %k = double(vpa(k))';

    k_mais = ( -B + sqrt(B.^2 - 4*A*C) )/(2*A) ;
    k_menos = ( -B - sqrt(B.^2 - 4*A*C) )/(2*A) ;
    k = [k_mais k_menos];

    ks(m,:) = k ;

end

q = ks;

end

%%%%%%%%%%%%%%

```

```

function q = Discretiza_T_V2(L,N,n,Ta,Tb,perfil_T,desvioT,gama_cte,z0)
%01-08-2019
%esta é uma versão simplificada, discretizando a passos iguais no eixo x

%31-07-2019
%agora não precisa f de entrada, setei T(z) aqui

%load Ta; load Tb; load perfil_T; load desvioT; load gama_cte; load z0;

f = @(z) perfil_temperatura(Ta,Tb,perfil_T,desvioT,gama_cte,z0,z);

% Discretiza_f: 11-07-2019
% f: função a discretizar
% L: extremo máximo do domínio ( é [0,L] )
% N: número de níveis
% n: passo de integração

dx = L/n;
x = 0:dx:L;

DX = L/N;
X = 0:DX:L ;

fmed = zeros(1,length(X)-1);

for k = 1:N
    fmed(k) = mean( f(X(k)):dx:f(X(k+1)) );
end

X_ = []; X1 = X_;

for k = 1:N
    X1 = [X(k) X(k+1)];
    X_ = vertcat(X_,X1);
end

plot(x,f(x)); grid on; hold on;
plot(X_(:,1),fmed','*'); hold on;
plot(X_(:,2),fmed','*'); hold on;
title('perfil de temperatura e discretização utilizada')
xlabel('zeta'); ylabel('T0(zeta)');

q = [X_ fmed'];

end

%%%%%%%%%%%%

function q = perfil_temperaturaV2(Ta,Tb,gama_cte,z)

```

```

%08-08-2019
%V2: perfil EXCLUSIVAMENTE cosh

%convertendo para Kelvin
Ta = Ta + 273.15 ; Tb = Tb + 273.15;

%determinando maior e menor T
if Ta>Tb
    Tmax = Ta ; T0 = Tb;
else
    if Tb>Ta
        T0 = Ta ; Tmax = Tb;
    else
        disp('Não existe gradiente de T. O fenômeno não pode ocorrer');
    end
end

%Perfil de Temperatura ao longo de z
T = @(z) Tmax*cosh(sqrt(gama_cte-1)*z).^((2*gama_cte-1)/(gama_cte-1));

q = T(z);

end

%%%%%%%%%%%%

```

Apêndice III: justificando a equação de estado para um líquido

Usamos no texto $p \sim \rho.T$ para um líquido. Vamos mostrar aqui que, independente das oscilações, podemos ter um termo de pressão assim em um líquido. Consideremos um cilindro de área A e volume V_0 , como mostrado na figura 11.1.

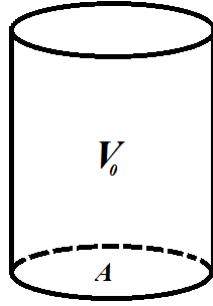


Figura 11.1 – cilindro

Se este cilindro estiver cheio de líquido, podemos escrever a pressão hidrostática da coluna de fluido como

$$p = \rho.g.V/A$$

Caso este fluido sofra uma variação de temperatura ΔT haverá uma dilatação volumétrica do líquido, e seu volume passará a ser $V = V_0.(1 + \alpha \Delta T)$, sendo α o coeficiente de expansão térmica. Portanto,

$$p = \rho.g. V_0.(1 + \alpha \Delta T) / A$$

rearranjando os termos, e considerando $\Delta T = T - T_0$, temos

$$p = (1 - \alpha T_0) (g V_0/A).\rho + (\alpha g V_0/A).\rho.T \quad (11.1)$$

onde podemos ver um termo $\sim \rho.T$. É claro que esta análise é muito grosseira, então não temos uma compatibilidade quantitativa com os coeficientes do gráfico 5.2.1, mas isso pode nos indicar um comportamento grosso modo análogo a equação de estado dos gases.

De todo modo, para caso em que tivermos

$$p = p' + K.\rho.T \quad (11.2)$$

com p' e K constantes, introduzindo as perturbações na pressão, densidade e temperatura,

$$p_0 + p_1 = p' + K.(\rho_0 + \rho_1).(T_0 + T_1)$$

o que, substituindo (11.2) e desprezando termos de segunda ordem vai resultar

$$p_I = K.(\rho_0 T_I + \rho_I T_0) \quad (11.3)$$

Isolando T_I em (11.3) temos

$$T_I = (p_I - \rho_I T_0) / (K.\rho_0) \quad (11.4)$$

que corresponde a expressão $\frac{M}{R} \frac{1}{\rho_0} \left(p_1 - \frac{p_0}{\rho_0} \rho_1 \right)$, utilizada nos capítulos 2 e 3.