# Investigação analítica e numérica do efeito termoacústico com campo magnético


**Gabriel R. de Andrade Silva**

**Profº Drº Francisco Eugenio Mendonça da Silveira**


**Mestrado em Física**

UFABC

**Santo André**
**11/09/2019**

# O que temos por aqui?

1) **Introdução: definição e histórico**

2) **Modelagem efeito termoacústico**

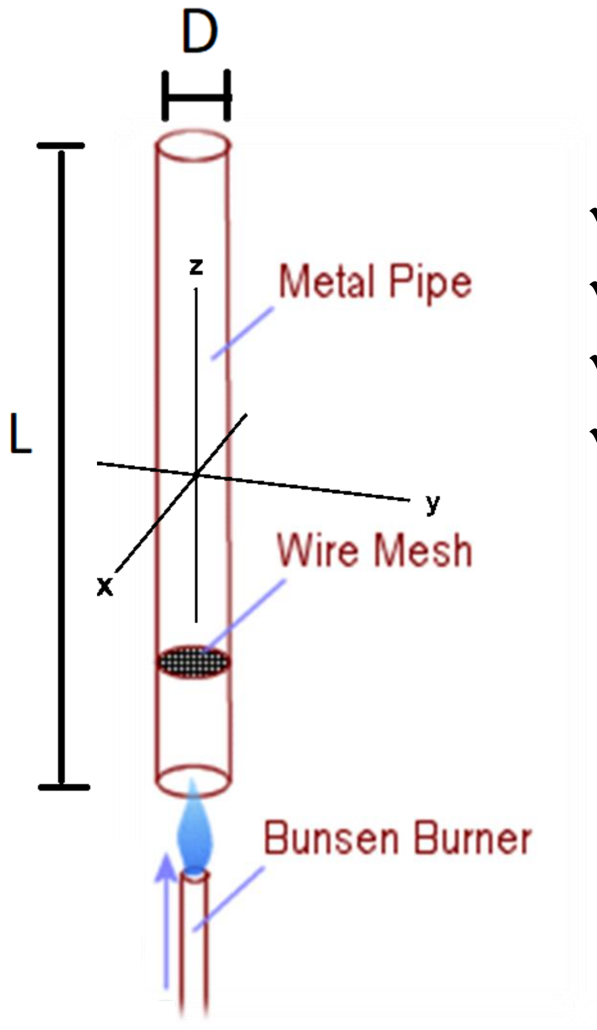
3) **Simulação efeito termoacústico**

4) **Modelagem efeito magneto termoacústico**

5) **Simulação efeito magneto termoacústico**

6) **Conclusões e perspectivas**

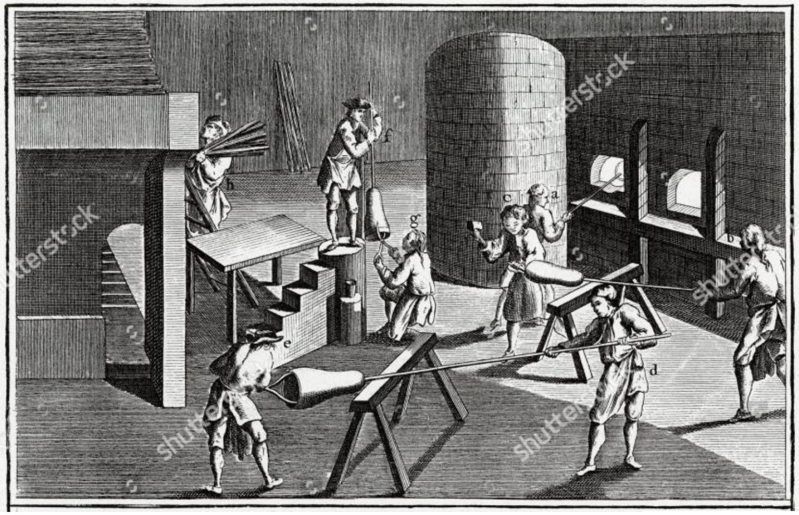
# Ondas termoacústicas



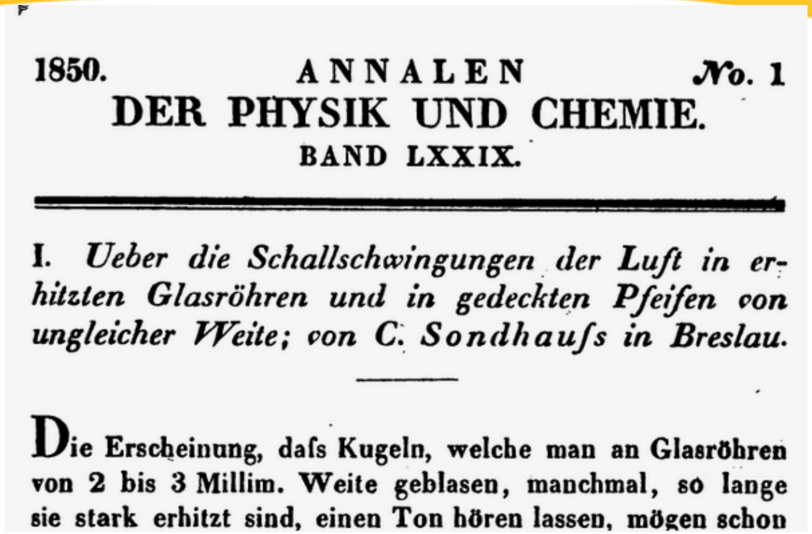

✓**Ocorrem em geometria cilíndrica**
✓**Forte gradiente de temperatura em z**
✓**Usualmente em tubos com L/D >> 1**
✓**Há uma relação entre o gradiente e L/D**

***https://www.youtube.com/watch?v=0Z0Zm_d2SaA***

# Histórico



Benard, After Goussier in the Encyclopedie of Diderot and D'alembert, **1765**

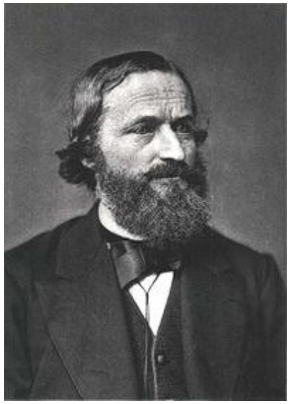


1850. ANNALEN №. 1
DER PHYSIK UND CHEMIE.
BAND LXXIX.

I. *Ueber die Schallschwingungen der Luft in erhitzten Glasröhren und in gedeckten Pfeifen von ungleicher Weite; von C. Sondhauſs in Breslau.*

Die Erscheinung, daſs Kugeln, welche man an Glasröhren von 2 bis 3 Millim. Weite geblasen, manchmal, so lange sie stark erhitzt sind, einen Ton hören lassen, mögen schon

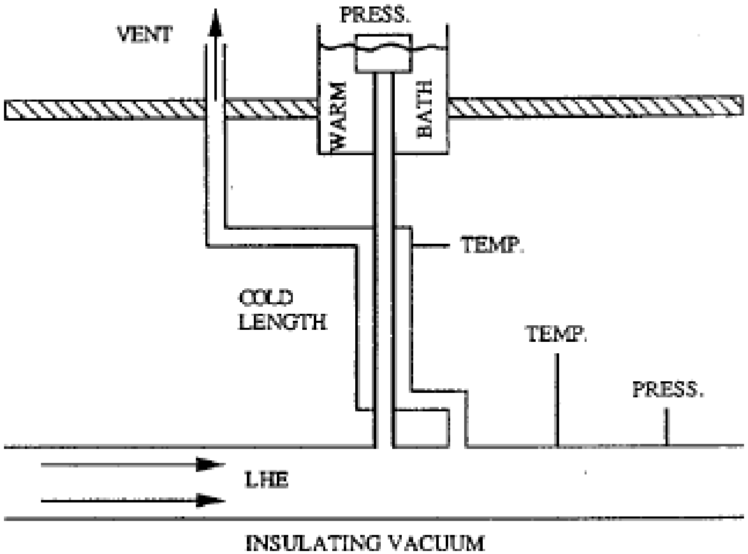
**1859**

*Gustav Kirchoff*
**1868**

*Hendrik Kramers*
**1949**

# Histórico




J.D. FUERST, *An Investigation of Thermally Driven Acoustical Oscillations in Helium Systems*, Proceedings of the Low Temperature Engineering and Cryogenics Conference (1990).

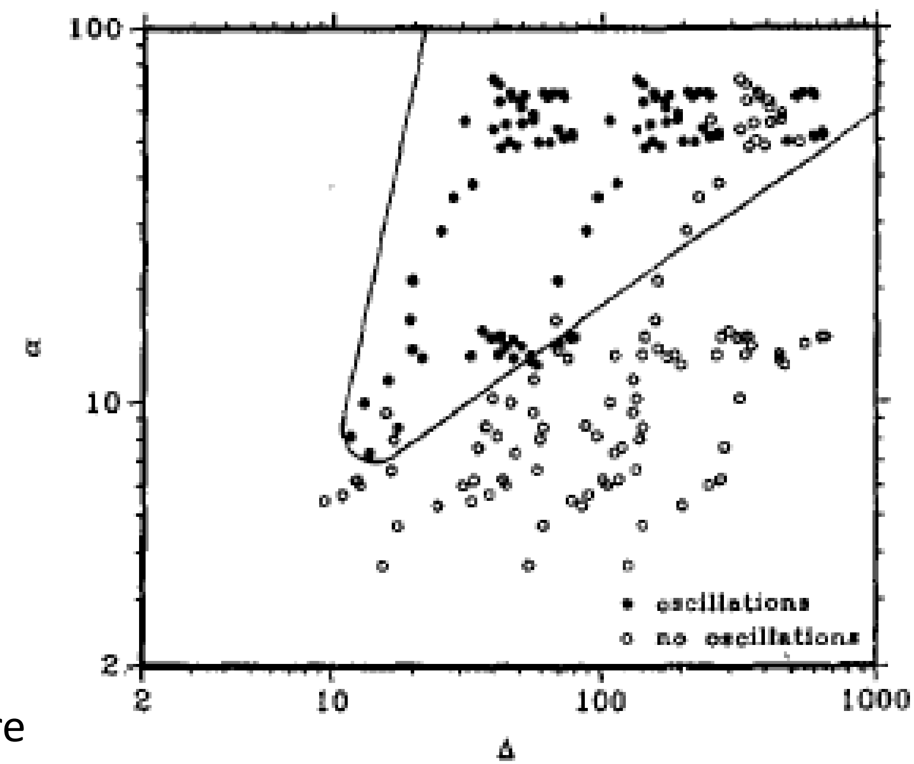
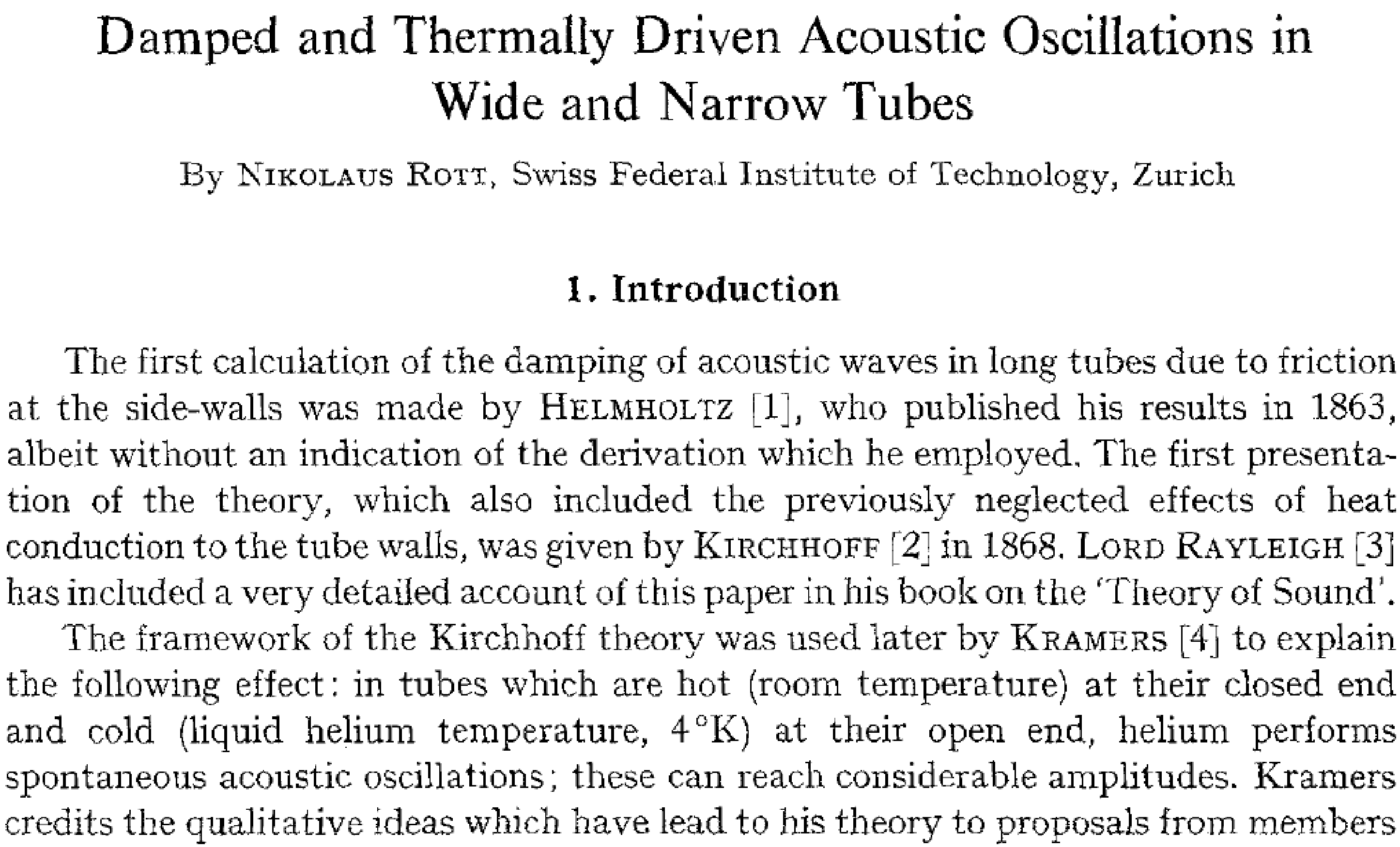



Figure 4: Data for length ratio $\varsigma = 2.0$

UFABC

# Histórico


Damped and Thermally Driven Acoustic Oscillations in Wide and Narrow Tubes

By Nikolaus Rott, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich

1. Introduction

The first calculation of the damping of acoustic waves in long tubes due to friction at the side-walls was made by Helmholtz [1], who published his results in 1863, albeit without an indication of the derivation which he employed. The first presentation of the theory, which also included the previously neglected effects of heat conduction to the tube walls, was given by Kirchhoff [2] in 1868. Lord Rayleigh [3] has included a very detailed account of this paper in his book on the 'Theory of Sound'.

The framework of the Kirchhoff theory was used later by Kramers [4] to explain the following effect: in tubes which are hot (room temperature) at their closed end and cold (liquid helium temperature, 4 °K) at their open end, helium performs spontaneous acoustic oscillations; these can reach considerable amplitudes. Kramers credits the qualitative ideas which have lead to his theory to proposals from members

UFABC

# Parâmetros envolvidos

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\mathrm{D}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{Dt}} = -\vec{\nabla} p + \eta \nabla^2 \vec{\mathrm{v}} \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial \mathrm{t}} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{\mathrm{v}}) = 0 \\ c_p \rho_0 \dfrac{DT}{Dt} - \dfrac{Dp}{Dt} = \dfrac{\eta c_p}{\sigma} \nabla^2 T \end{cases}$$

**No trabalho de Rott as propriedades do fluído estão representadas pelo calor específico $c_p$ , a densidade $\rho_0$ , a viscosidade $\eta$ e o *número de Prandtl* $\sigma = \eta c_p / k$.**

# As equações perturbadas

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \vec{\mathrm{v}}_1}{\partial \mathrm{t}} + \dfrac{1}{\rho_0}\vec{\nabla} p_1 = \nu \nabla^2 \vec{\mathrm{v}}_1 \\
\dfrac{\partial \rho_1}{\partial \mathrm{t}} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{\mathrm{v}}_1) = 0 \\
c_p \rho_0 \dfrac{\partial \mathrm{T}_1}{\partial t} + c_p \rho_0 \left(\vec{\mathrm{v}}_1 \cdot \vec{\nabla}\right) \mathrm{T}_0 - \dfrac{\partial p_1}{\partial t} = \dfrac{\eta c_p}{\sigma} \nabla^2 \mathrm{T}_1
\end{cases}
$$

Vamos agora entrar nas especificações do modelo de Rott...

# Suposições do modelo de Rott

**(1) O gradiente radial da oscilação de pressão é nulo.**

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} = 0$$

**(2) Variações radiais da temperatura média e da viscosidade são desprezíveis.**

$$\frac{\partial T_0}{\partial r} = 0 \qquad \nu \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} = 0$$

**(3) A condução axial de calor na onda acústica e o atrito devido aos gradientes axiais podem ser ignorados**

$$\frac{\partial T_1}{\partial z} = 0 \qquad \nu \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} = 0$$

# Sumário das equações

Partindo de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{\mathrm{v}}_1}{\partial \mathrm{t}} + \dfrac{1}{\rho_0}\vec{\nabla} p_1 = \nu \nabla^2 \vec{\mathrm{v}}_1 \\ \dfrac{\partial \rho_1}{\partial \mathrm{t}} + \vec{\nabla}\cdot(\rho_0 \vec{\mathrm{v}}_1) = 0 \\ c_p \rho_0 \dfrac{\partial \mathrm{T}_1}{\partial t} + c_p \rho_0 \left(\vec{\mathrm{v}}_1 \cdot \vec{\nabla}\right)\mathrm{T}_0 - \dfrac{\partial p_1}{\partial t} = \dfrac{\eta c_p}{\sigma}\nabla^2 \mathrm{T}_1 \end{cases}$$

Considerando ainda $\boldsymbol{\vec{v}_0 = 0}$ $\quad \boldsymbol{\dfrac{\partial}{\partial t} \longrightarrow i\omega}$

Obtivemos

$$\begin{cases} \mathrm{i}\omega v_z + \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{dp}{dz} - \nu \dfrac{1}{\mathrm{r}}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v_z}{\partial r}\right) = 0 \\ \mathrm{i}\omega\rho + v_z \dfrac{\mathrm{d}\rho_0}{dz} + \rho_0 \dfrac{1}{\mathrm{r}}\dfrac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \rho_0 \dfrac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\ \mathrm{i}\omega\left[\rho - \dfrac{1}{a^2}p\right] + v_z \dfrac{\mathrm{d}\rho_0}{dz} = \dfrac{\nu}{\sigma}\,\dfrac{1}{\mathrm{r}}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial \rho}{\partial r}\right) \end{cases}$$

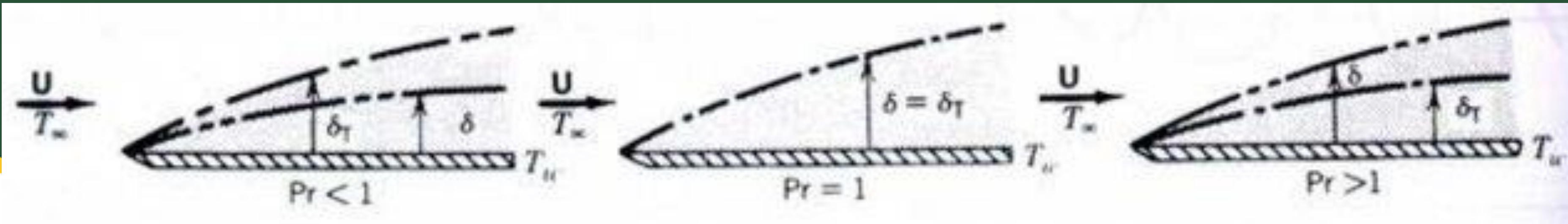
# A EDO de Rott

O artigo utiliza outras soluções locais, colocando todas em termos de *p* e seu gradiente . Talvez seu principal resultado tenha sido reduzir o sistema à seguinte equação ordinária:

$$\boxed{\frac{d}{dz}\left(\frac{a^2}{\omega^2}(1-f)\frac{dp}{dz}\right)-\frac{a^2}{\omega^2}\frac{\tilde{f}-f}{1-\sigma}\theta\frac{dp}{dz}+[1+(\gamma-1)\tilde{f}]p=0}$$

onde $\theta$ é o gradiente de $\ln T_0$ e $f_1$ é dada em termos das funções de Bessel,

$$f_1=\frac{2I_1\left(\sqrt{i}.\frac{r_0}{l_c}\right)}{i\sqrt{i}.\frac{r_0}{l_c}I_0\left(\sqrt{i}.\frac{r_0}{l_c}\right)}$$




| Valores característicos do número de Prandtl | |
|---|---|
| **Metais liquidos** | |
| Sódio | 0.011 |
| Mercúrio | 0.0196 |
| Bismuto | 0.0142 |
| **Gases** | |
| Ar | 0.70 |
| Dióxido de carbono | 0.75 |
| Monóxido de carbono | 0.73 |
| Hélio | 0.68 |
| Hidrogênio | 0.70 |
| **Outros liquidos** | |
| Água | 4.6 |
| **Fluidos viscosos** | |
| Óleo lubrificante de motor | 3400 |
| Glicerina | 3060 |

$\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$ tem dimensão de inverso de comprimento

$$\sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \equiv l_c \,.$$

| f (Hz) | omega (Hz) | raiz(omega/ni) | lc (microns) |
|---|---|---|---|
| 20 | 126 | 2884 | 347 |
| 100 | 628 | 6448 | 155 |
| 440 | 2765 | 13526 | 74 |
| 1000 | 6283 | 20392 | 49 |
| 20000 | 125664 | 91195 | 11 |

*Alguns valores para o ar a 20 graus Celsius*
*( viscosidade cinemática 15,11 x 10E-6 m²/s )*

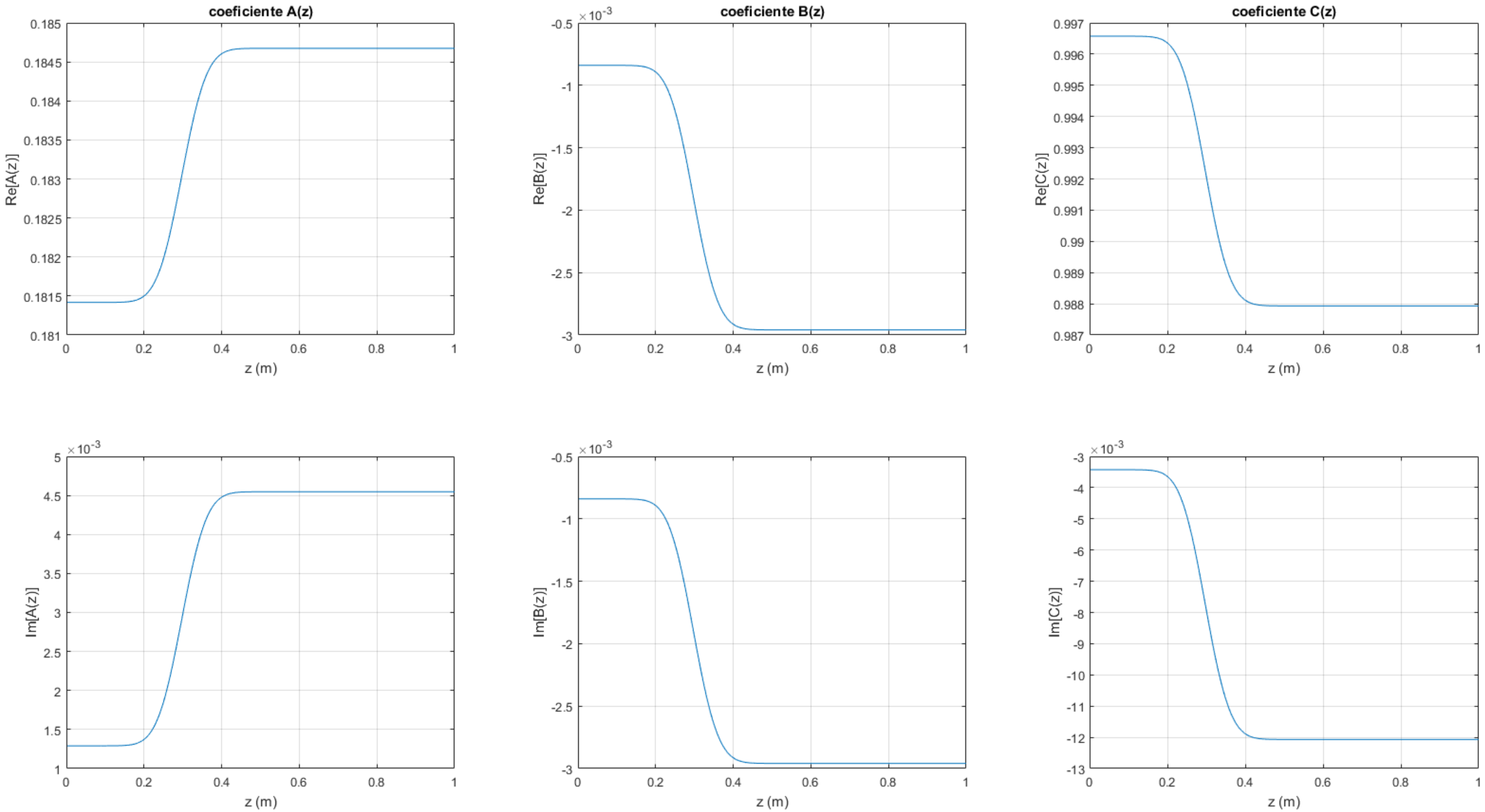
UFABC

# Computando a EDO

Integramos numericamente a EDO em *p(z)* :

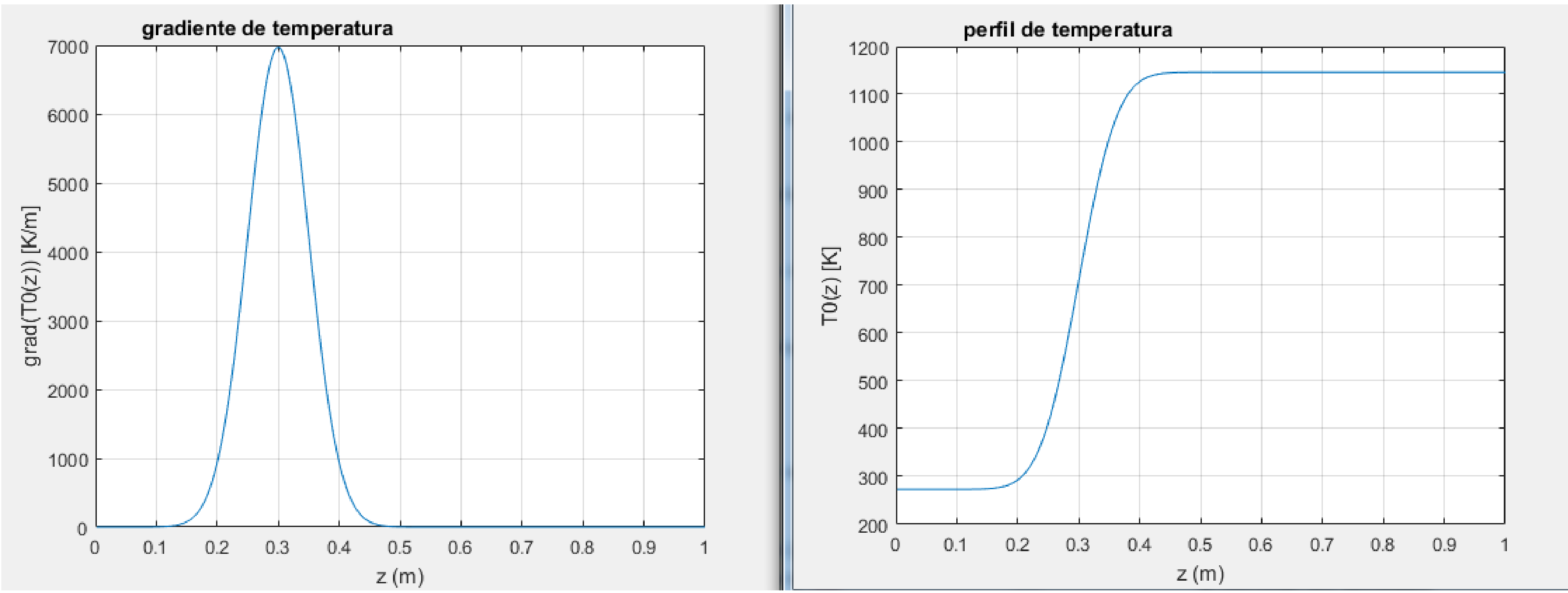
$$\underbrace{\frac{d}{dz}\left(\frac{a^2}{\omega^2}(1-f)\frac{dp}{dz}\right)}_{A(z)}-\underbrace{\frac{a^2}{\omega^2}\frac{\tilde{f}-f}{1-\sigma}\theta\frac{dp}{dz}}_{B(z)}+\underbrace{[1+(\gamma-1)\tilde{f}]p}_{C(z)}=0$$

considerando $lc = lc(z)$




coeficientes para uma fonte de calor gaussiana em $z_0 = 0{,}3$ m , tubo de 1 m com raio 1 polegada, perfil de temperatura a seguir

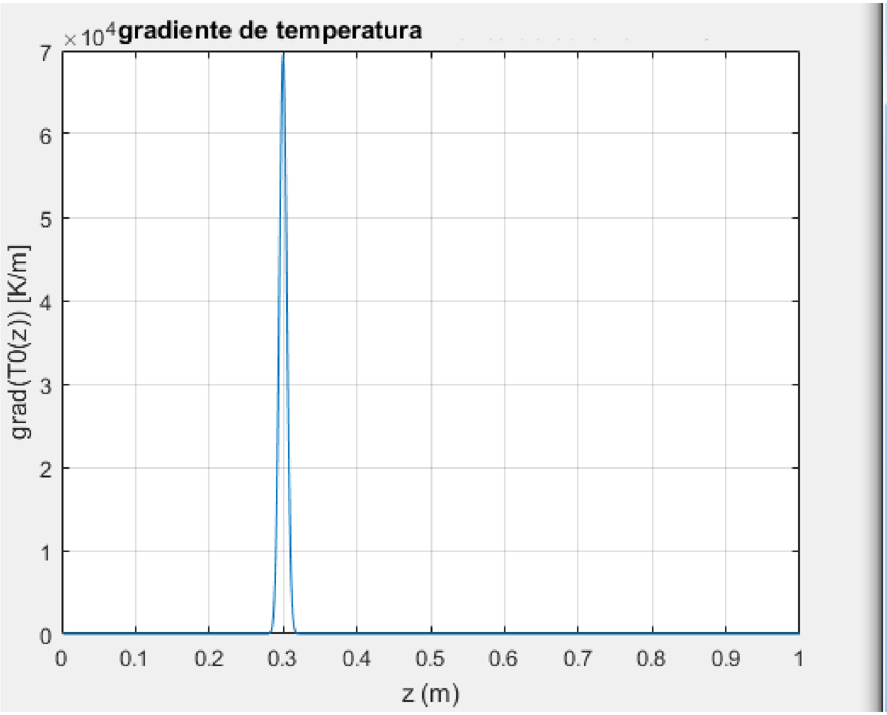
UFABC

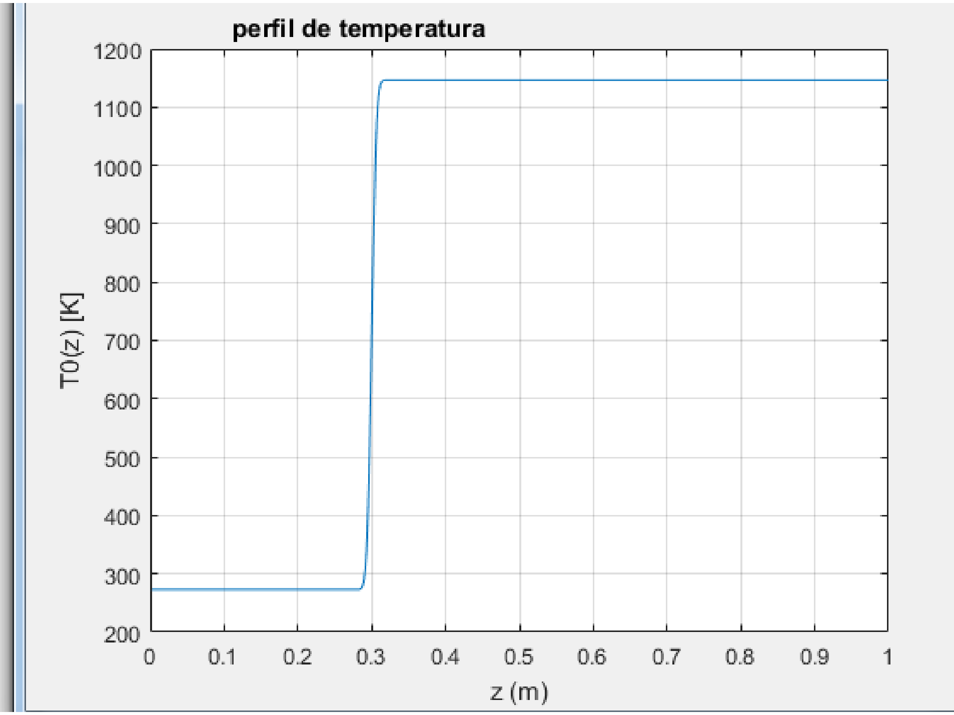


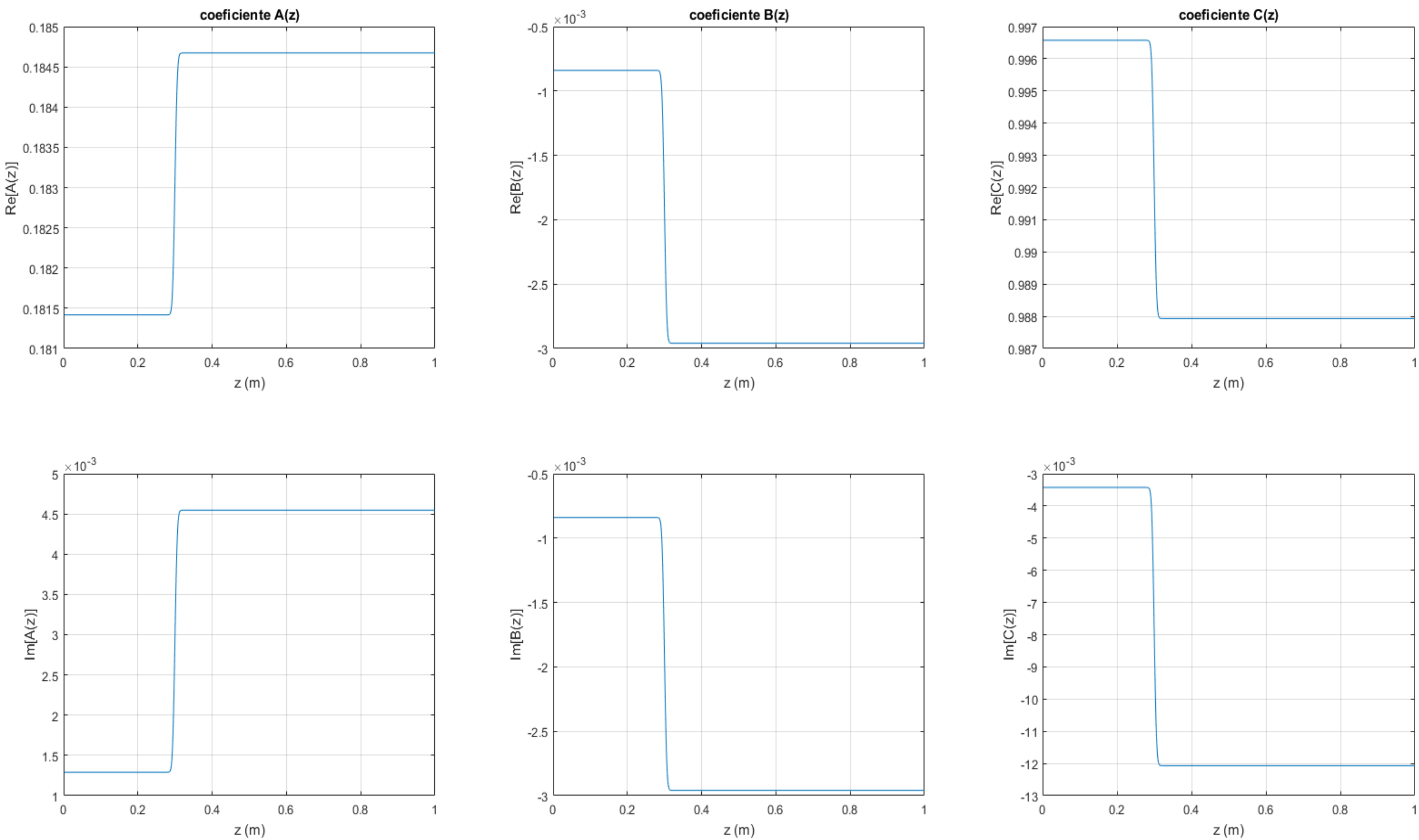

Usamos primeiramente este perfil gaussiano, com desvio padrão ~10 cm , representando uma fonte de calor desta ordem.

UFABC

Observe como uma gaussiana mais estreita reflete nos coeficientes...




coeficiente A(z)
coeficiente B(z)
coeficiente C(z)
Re[A(z)]
Re[B(z)]
Re[C(z)]
Im[A(z)]
Im[B(z)]
Im[C(z)]
×10-3
z (m)

# Computando a EDO

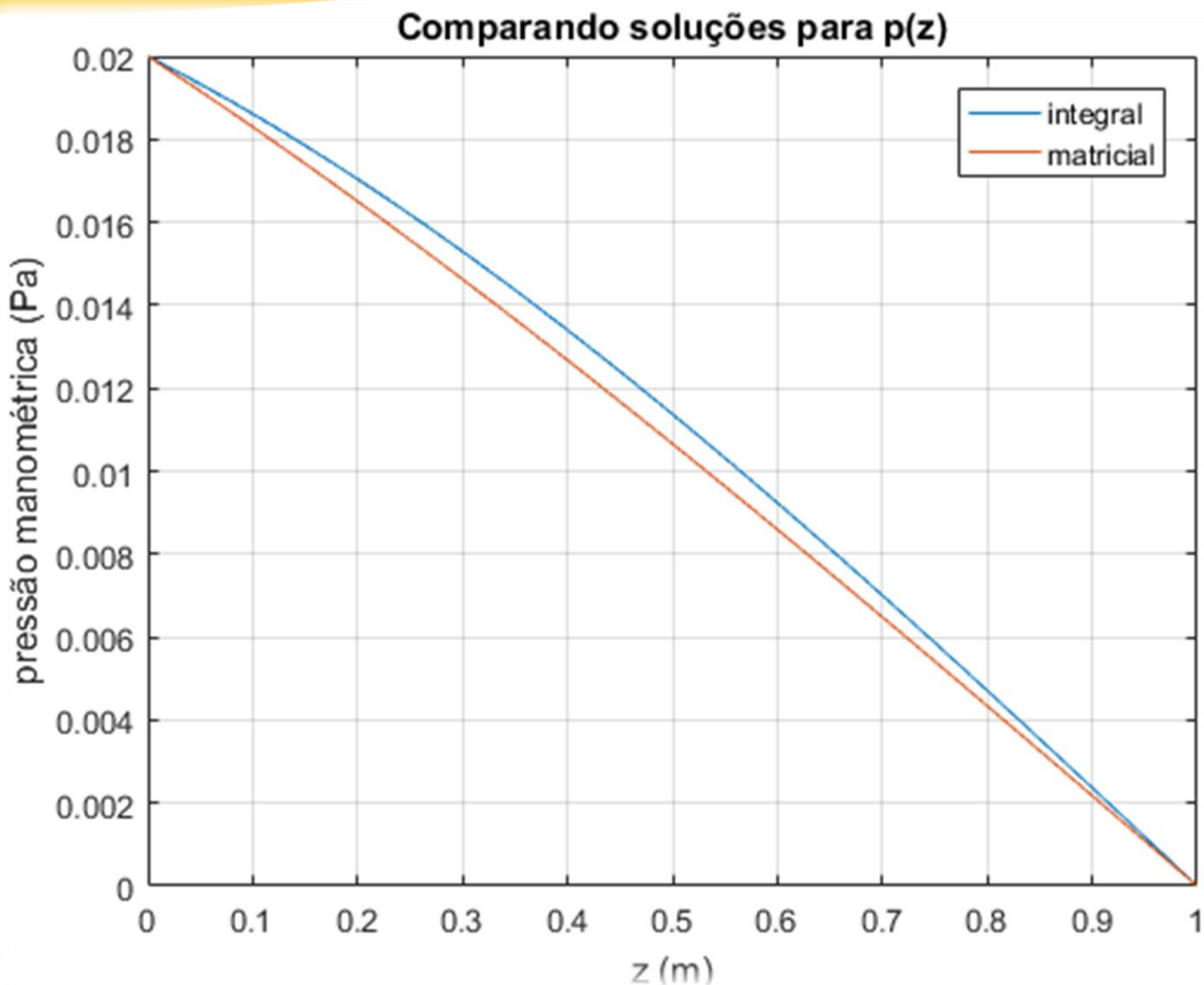
**Duas abordagens:**

**- Discreta : computa valores médios dos coeficientes nos patamares, impõe continuidade e conds de contorno,**

$$\begin{bmatrix} e^{k_{a1}z_0} & e^{k_{a2}z_0} & -e^{k_{b1}z_0} & -e^{k_{b2}z_0} \\ k_{a1}e^{k_{a1}z_0} & k_{a2}e^{k_{a2}z_0} & -k_{b1}e^{k_{b1}z_0} & -k_{b2}e^{k_{b2}z_0} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{k_{b1}L} & e^{k_{b2}L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{a1} \\ p_{a2} \\ p_{b1} \\ p_{b2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta_{a0} \cdot p_0 \\ \delta_{b0} \cdot p_0 \end{bmatrix}$$

**- Contínua : método da colocação, implementado com pacotes *bvp* do Matlab.**

UFABC


Comparando soluções para p(z)
pressão manométrica (Pa)
0.02
0.018
0.016
0.014
0.012
0.01
0.008
0.006
0.004
0.002
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
z (m)
integral
matricial

# Com relação a potência...

✓ **Não obtivemos resultados muito conclusivos, apenas esta curva, algo semelhante a publicada nos artigos posteriores de Rott e reproduzida no trabalho experimental do Fermilab citado no início**

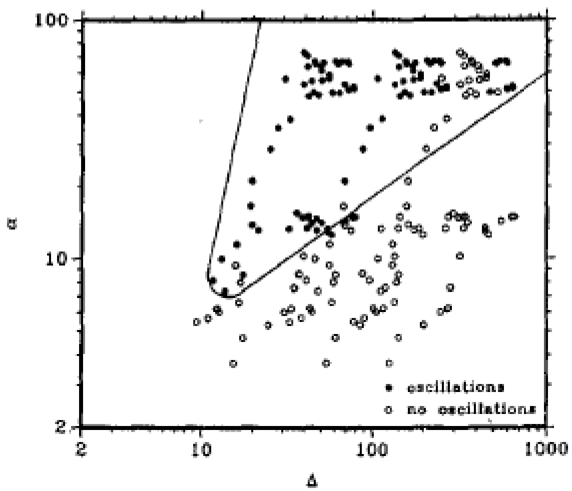
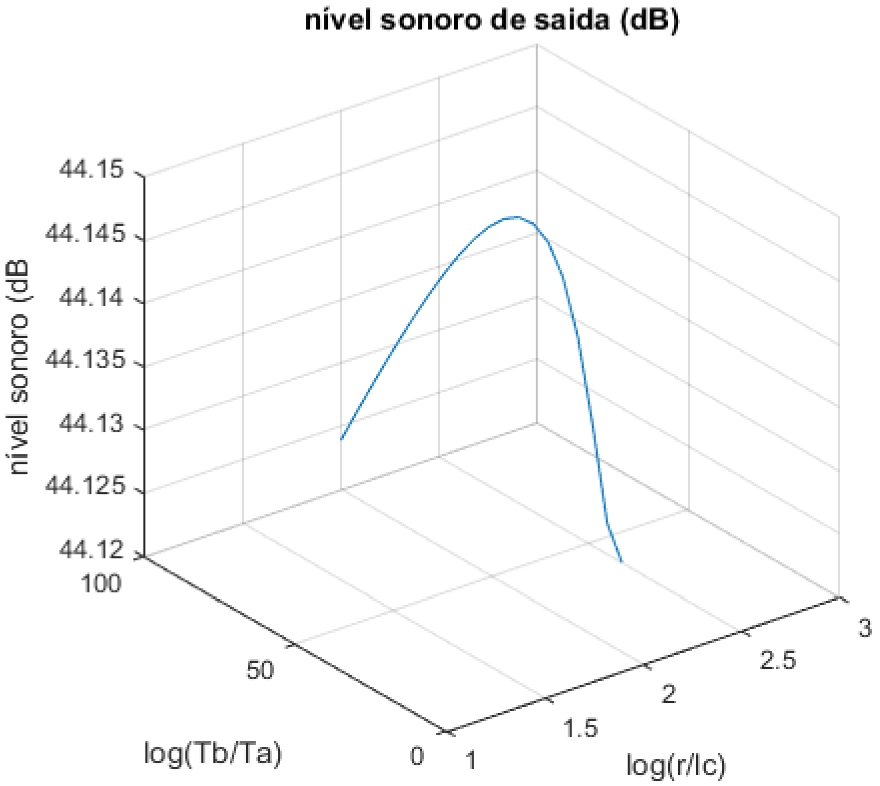



Figure 4: Data for length ratio $\varsigma$ = 2.0




UFABC

# Efeito magneto termoacústico

✓**Inicialmente consideramos incluir um termo de força magnética na equação de Navier-Stokes...**

$$\rho\frac{\mathrm{D}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{Dt}} = -\vec{\nabla}p + \eta\nabla^2\vec{\mathrm{v}} + \vec{f}_{mag}$$

$$\vec{f}_{mag} = \frac{1}{\mu}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)\times\vec{B} = \frac{1}{\mu}\left[\left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{B} - \nabla\left(B^2/2\right)\right]$$

$$\vec{v} \to \vec{v}_0 + \vec{v}_1$$

$$p \to p_0 + p_1$$

$$\rho \to \rho_0 + \rho_1$$

$$\vec{B} \to \vec{B}_0 + \vec{B}_1$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{f}_{mag} \cong \vec{f}_{mag}^{\,0} + \frac{1}{\mu}\left[\left(\vec{B}_0\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}_1 + \left(\vec{B}_1\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}_0 - \vec{\nabla}\left(\vec{B}_0\cdot\vec{B}_1\right)\right]$$

$$\boxed{\rho_0\frac{\mathrm{D}\vec{\mathrm{v}}_1}{\mathrm{Dt}} = -\vec{\nabla}p_1 + \eta\nabla^2\vec{\mathrm{v}}_1 - \frac{1}{\mu}\left\{\vec{\nabla}\left(\vec{B}_0\cdot\vec{B}_1\right) - \left[\left(\vec{B}_0\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}_1 + \left(\vec{B}_1\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}_0\right]\right\}}$$

***Equação de N-S com campo perturbada***

UFABC

# Efeito magneto termoacústico

✓**Levamos isto em consideração para obter uma primeira versão da equação do calor, considerando a pressão composta por uma parte magnética, além da mecânica:**

$$c_p \rho_0 \frac{DT}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} = k\nabla^2 T$$

$$\vec{v} \to \vec{v}_0 + \vec{v}_1 \quad , T \to T_0 + T_1 \quad , \quad p \to p + p_{mag} = p_0 + p_1 + \underbrace{p_{mag}^0}_{\frac{{B_0}^2}{2\mu}} + \underbrace{p_{mag}^1}_{\frac{\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1}{\mu}}$$

$$\boxed{c_p \rho_0 \frac{\partial \mathrm{T}_1}{\partial t} + c_p \rho_0 \left(\vec{\mathrm{v}}_1 \cdot \vec{\nabla}\right) \mathrm{T}_0 - \frac{\partial p_1}{\partial t} = k.\nabla^2 \mathrm{T}_1 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1}{\mu}\right)}$$

***Equação do calor com campo e perturbada***

UFABC

# Efeito magneto termoacústico

✓ **Temos uma variável a mais. Necessitamos mais uma equação. A Lei de Faraday nos pareceu a escolha lógica, pois nela poderíamos simplificar os cálculos considerando a baixa resistividade do fluído :** $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{J}$ **, com** $\eta \sim 0$ .

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$$

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = +\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{v} \rightarrow \vec{v}_0 + \vec{v}_1$$

$$\vec{B} \rightarrow \vec{B}_0 + \vec{B}_1$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = +\vec{\nabla} \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0)}$$

*Lei de Faraday perturbada*

**Para** $\vec{B}_0$ **checamos duas possibilidades :**

**1)** $\vec{B}_0 = B_{0\varphi}(r).\hat{\varphi}$ **2)** $\underline{\vec{B}_0 = B_{0z}\hat{z}}$

UFABC

**Usamos** $p \to p_0 + p_1 + p^0_{mag} + p^1_{mag}$

**se reorganizarmos isso na forma**

$$p \to \underbrace{(p_0 + p^0_{mag})}_{\widetilde{p_0}} + \underbrace{(p_1 + p^1_{mag})}_{\widetilde{p_1}}$$

$$p \to \widetilde{p_0} + \widetilde{p_1}$$

talvez possamos reescrever a primeira hipótese do modelo de modo mais coerente..

# Hipóteses revisadas

**(1) O gradiente radial da oscilação de pressão é nulo.**

$$\frac{\partial \widetilde{p_1}}{\partial r} = 0$$

**(2) Variações radiais da temperatura média e da viscosidade são desprezíveis.**

$$\frac{\partial T_0}{\partial r} = 0 \qquad \nu \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} = 0$$

**(3) A condução axial de calor na onda acústica e o atrito devido aos gradientes axiais podem ser ignorados**

$$\frac{\partial T_1}{\partial z} = 0 \qquad \nu \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} = 0$$

✓ **Vimos que a hipótese (1) modificada para**

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(p_1 + \frac{\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1}{\mu_0}\right) = 0,$$

**nos permitia obter equações efetivas idênticas as EDPs das quais Rott partiu.**

$$\begin{cases} i\omega v_z + \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{dp}{dz} - \nu\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v_z}{\partial r}\right) = 0 \\ i\omega\rho + v_z\dfrac{d\rho_0}{dz} + \rho_0\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \rho_0\dfrac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\ i\omega\left[\rho - \dfrac{1}{a^2}p\right] + v_z\dfrac{d\rho_0}{dz} = \dfrac{\nu}{\sigma}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial\rho}{\partial r}\right) \end{cases}$$

UFABC

## Reescrevemos a Lei de Faraday

$$i\omega\vec{B}_1 = \vec{\nabla}\times\left(\vec{v}_1\times\vec{B}_0\right)$$

**na forma** $i\omega\left(\hat{z}\cdot\vec{B}_1\right) = -B_0\Omega$ **, onde definimos** $\Omega \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r v_r\right)$ **.**

**A partir disso, reescrevemos o produto escalar** $\vec{B}_0\cdot\vec{B}_1$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(p_1 + \frac{\vec{B}_0\cdot\vec{B}_1}{\mu_0}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(p_1 - \frac{{B_0}^2}{i\omega\mu_0}\Omega\right) = 0$$

UFABC

A integral de $\frac{\partial}{\partial r}\left(p_1 - \frac{{B_0}^2}{i\omega\mu_0}\Omega\right) = 0$ é uma função apenas de z.

Tendo a dimensão de pressão, naturalmente, deve ser o perfil *p(z)*

para o caso sem campo, o qual rotulamos doravante como *efetivo :*

$$p_1(r,z) - \alpha^2\gamma p_0 \frac{\Omega(r,z)}{i\omega} \equiv p_1^{\text{eff}}(z)$$

$$p_1 = p_1^{eff} + \frac{\gamma p_0}{i}\frac{\alpha^2}{\omega}\Omega$$

$$\alpha = \frac{A(z)}{a(z)}, \quad A(z) = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0\rho_0}}, \quad a(z) = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}},$$

UFABC

$$p_1 = p_1^{eff} + \frac{\gamma p_0}{i}\frac{\alpha^2}{\omega}\Omega$$

**Substituindo isso nas demais equações obtemos as correções para vz e ρ :**

$$v_z = v_z^{eff} + \frac{a^2}{\omega}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\alpha^2\Omega}{\omega}\right)$$

$$\rho_1 = \rho_1^{eff} - \frac{a^2}{\omega^3}\frac{d\rho_0}{dz}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\alpha^2\Omega}{\omega}\right) - \frac{\rho_0}{i\omega}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{a^2}{\omega}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\alpha^2\Omega}{\omega}\right)\right)$$

UFABC

$$c_p \rho_0 \frac{\partial T_1}{\partial t} + c_p \rho_0 v_z \frac{dT_0}{dz} - \frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\eta c_p}{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T_1}{\partial r}\right)$$

**A nova hipótese (1) não muda a equação de estado, portanto, podemos eliminar $T_1$ com :**

$$T_1 = \frac{M}{R}\left[\frac{p_1}{\rho_0} - \frac{p_0}{{\rho_0}^2}\rho_1\right]$$

**mas, pela mesma hipótese, não temos mais uma oscilação de pressão totalmente independente de *r.* Assim, o laplaciano de $p_1$ em r não deve zerar quando substituirmos $T_1$ no membro direito.**

$$\frac{i\omega}{a^2}p_1 - i\omega\,\rho_1 = \frac{d\rho_0}{dz}v_z + \frac{\nu}{\sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\gamma}{a^2}r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right] - \frac{\nu}{\sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial \rho_1}{\partial r}\right]$$

**Inserindo agora**

$$p_1 = p_1^{eff} + \frac{\gamma p_0}{i}\frac{\alpha^2}{\omega}\Omega$$

$$v_z = v_z^{eff} + \frac{a^2}{\omega}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\alpha^2\Omega}{\omega}\right)$$

$$\rho_1 = \rho_1^{eff} - \frac{a^2}{\omega^3}\frac{d\rho_0}{dz}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\alpha^2\Omega}{\omega}\right) - \frac{\rho_0}{i\omega}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{a^2}{\omega}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\alpha^2\Omega}{\omega}\right)\right)$$

UFABC

$$\Omega + \frac{a^2}{\omega^2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2} + \frac{\gamma}{i\omega}\frac{\nu}{\sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right] = 0$$

✓**essa equação foi incorporada ao texto em função das variáveis adimensionais qsi e zeta:**

$$dz \to d\zeta.\frac{\omega}{a} \qquad dr \to d\xi.\left(\frac{\nu/\sigma}{i\omega}\right)^{1/2}$$

$$\frac{\gamma}{\Omega\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\right) + \frac{1}{\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\zeta^2} + 1 = 0$$

UFABC

# Condições de contorno em *r*

$$\boxed{\frac{\gamma}{\Omega\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\right)+\frac{1}{\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\zeta^2}+1=0}$$

✓**Partimos de**

$$\gamma\left(p_1\right)_{\mathrm{w}}=\left(\rho_1\right)_{\mathrm{w}}a^2$$

**considerando** $p_1=p_1^{eff}+\frac{\gamma p_0}{i}\frac{\alpha^2}{\omega}\Omega$ **e** $\rho_1=\rho_1^{eff}-\frac{\alpha^2}{\omega^3}\frac{d\rho_0}{dz}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\alpha^2\Omega}{\omega}\right)-\frac{\rho_0}{i\omega}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\alpha^2}{\omega}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\alpha^2\Omega}{\omega}\right)\right)$ **,**

**e trocando** $dz\to d\zeta.\frac{\omega}{a}$

$$\boxed{\frac{1}{\Omega_{\mathrm{w}}}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial\zeta^2}\right)_{\mathrm{w}}-\frac{1}{T_0}\frac{dT_0}{d\zeta}\frac{1}{\Omega_{\mathrm{w}}}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}\right)_{\mathrm{w}}+\gamma=0}$$

UFABC

- ✓ **Resolvendo a EDP encontramos** $\Omega = J_0\left(\sqrt{\frac{1-k^2}{\gamma}}\xi\right)\left[Ae^{k\zeta} + Be^{-k\zeta}\right]$
- ✓ **Impondo** $\frac{1}{\Omega_{\rm w}}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial\zeta^2}\right)_{\rm w} - \frac{1}{T_0}\frac{dT_0}{d\zeta}\frac{1}{\Omega_{\rm w}}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}\right)_{\rm w} + \gamma = 0$

**chegamos a**

$$\boxed{k^2 - (\ln T_0)'.\left(\frac{Ae^{k\zeta} - Be^{-k\zeta}}{Ae^{k\zeta} + Be^{-k\zeta}}\right)k + \gamma = 0}$$

- ✓ **Impondo as C.C. em z, vamos encontrar B = -A , então**

$$\boxed{\Omega \sim J_0\left(\sqrt{\frac{1-k^2}{\gamma}}\xi\right)\sinh(k\zeta)}$$

UFABC

**Disso temos o preço a pagar pela extensão do modelo:**

$$(\ln T_0)' . \left(\frac{e^{k\zeta}+e^{-k\zeta}}{e^{k\zeta}-e^{-k\zeta}}\right) = Cte$$

$$\boxed{(\ln T_0)' \sim tanh(k\zeta)}$$

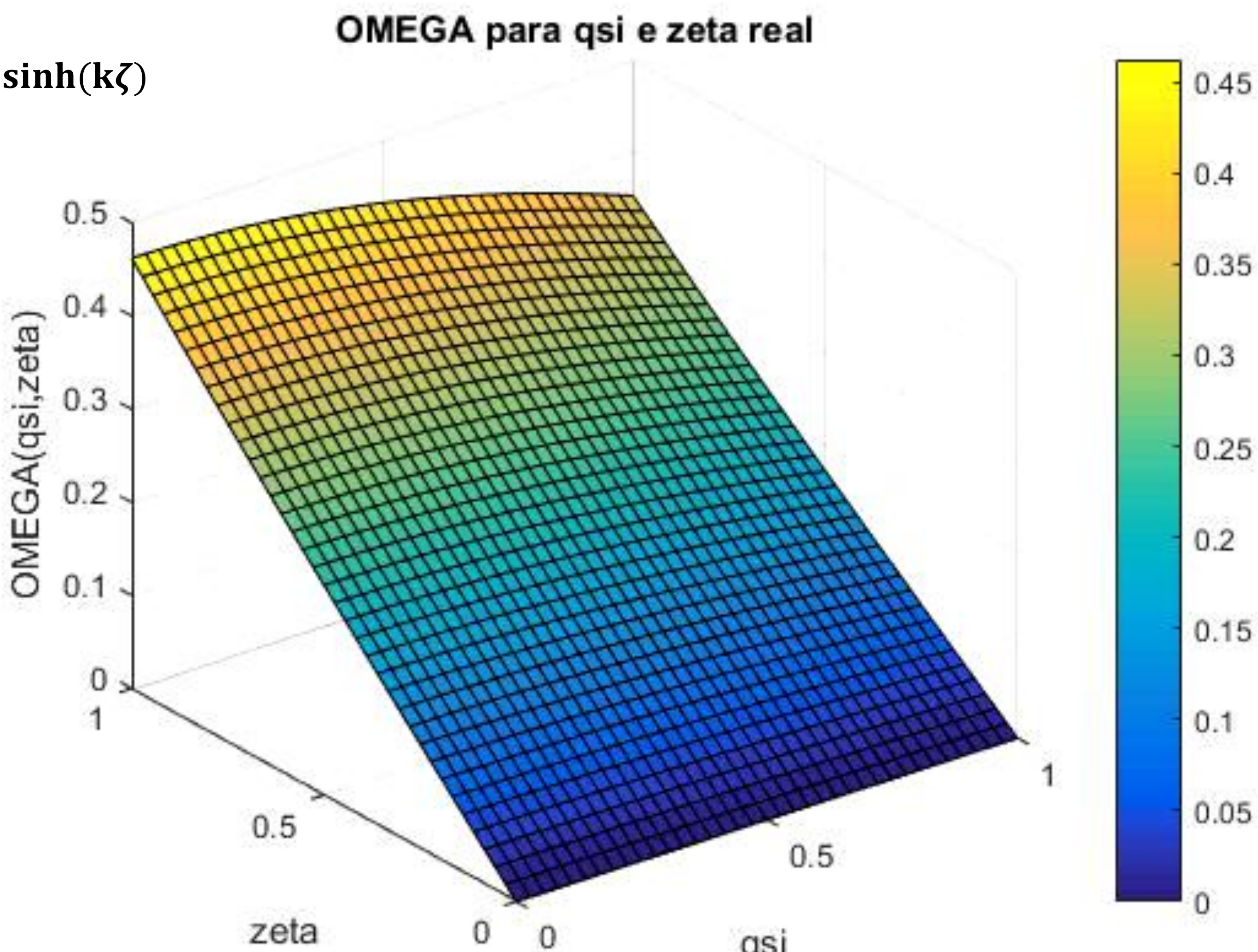
**o que, integrando, nos leva ao perfil de temperatura que deve ser adotado neste caso:**

$$\boxed{T_0(\zeta) = T_0(\zeta_0)\left[\frac{\cosh\left(\zeta\sqrt{\gamma-1}\right)}{\cosh\left(\zeta_0\sqrt{\gamma-1}\right)}\right]^{(2\gamma-1)/(\gamma-1)}}$$

UFABC

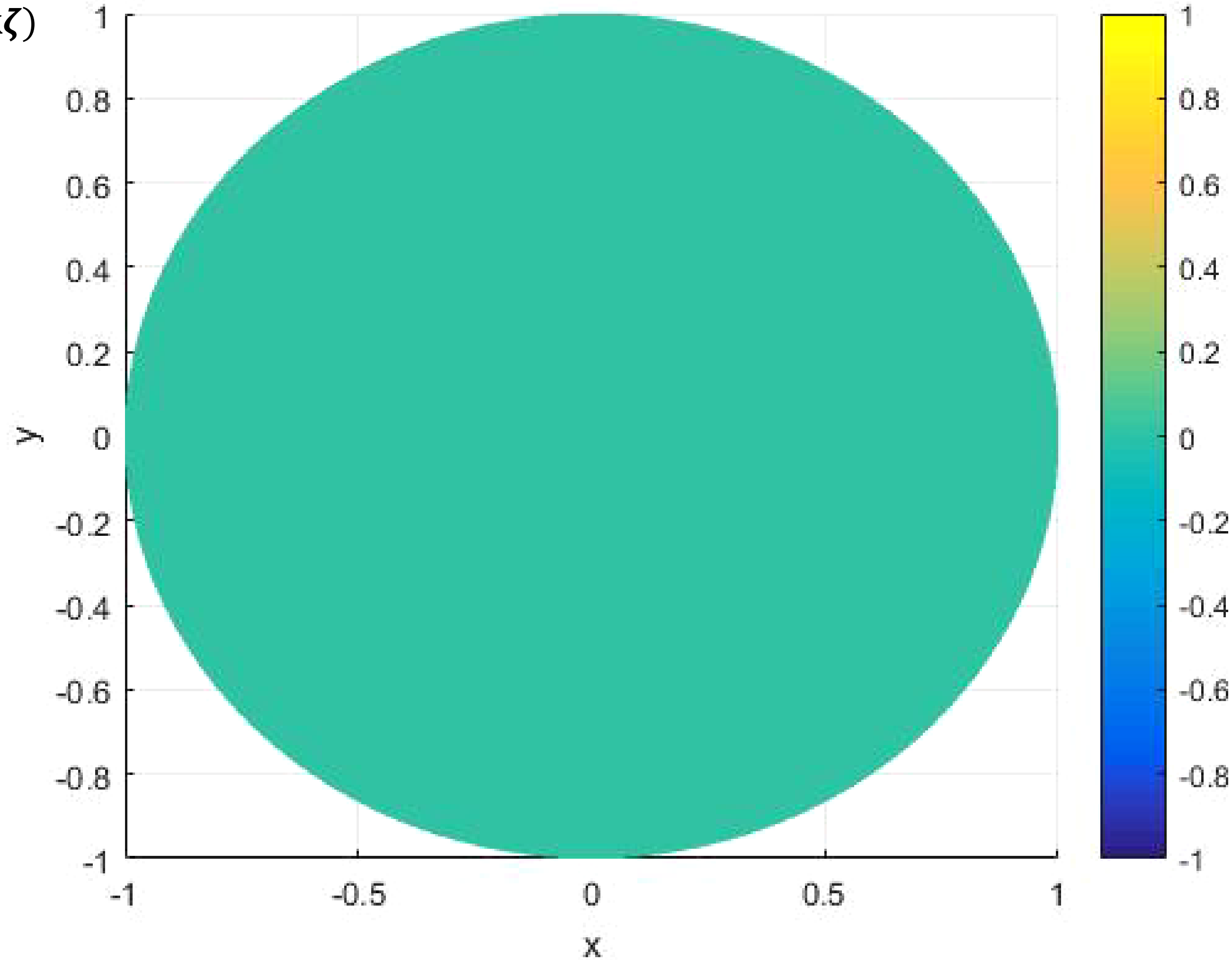
# Um plot de Ômega

$$\Omega = J_0\left(\sqrt{\frac{1-k^2}{\gamma}}\,\xi\right)\sinh(k\zeta)$$



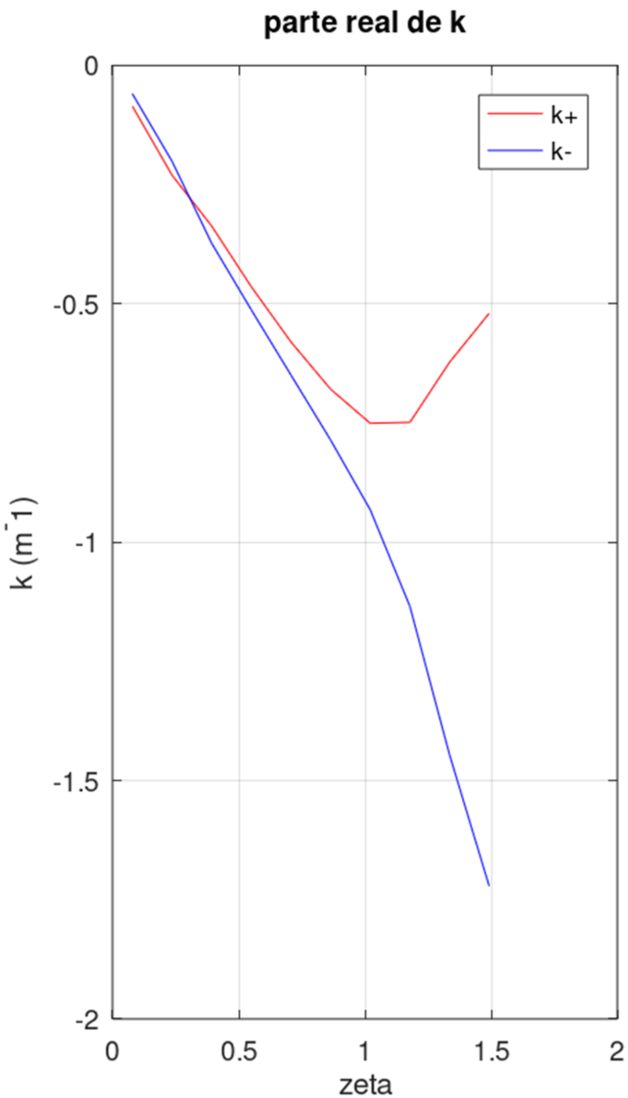
# Uma tomografia de Ômega

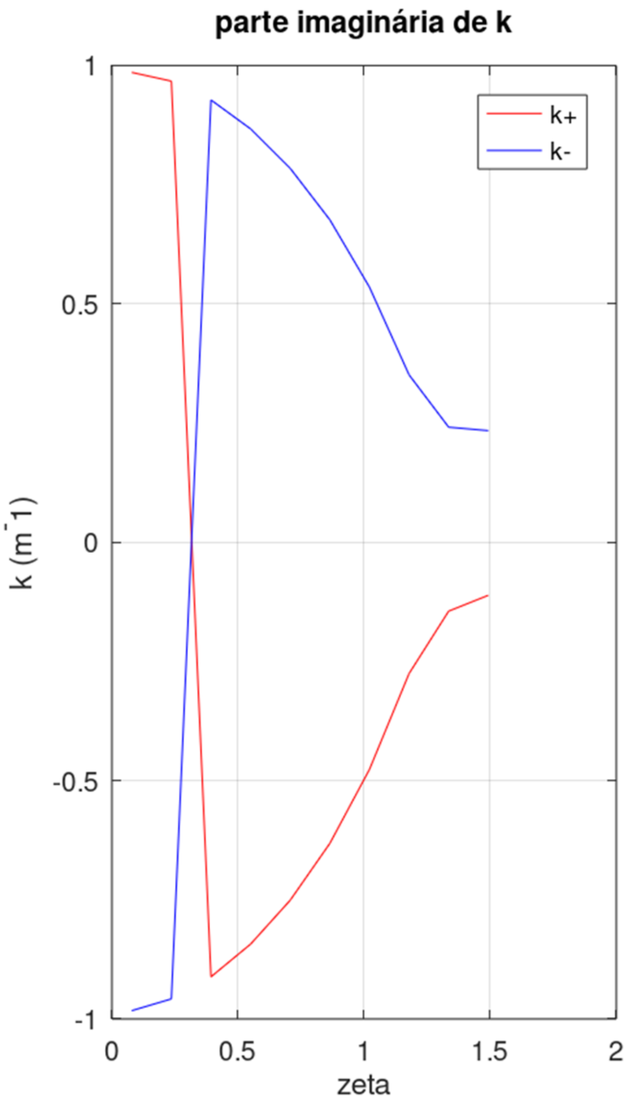
$$\boldsymbol{\Omega} = J_0\left(\sqrt{\frac{\mathbf{1} - k^2}{\gamma}}\,\xi\right)\mathbf{sinh(k\zeta)}$$



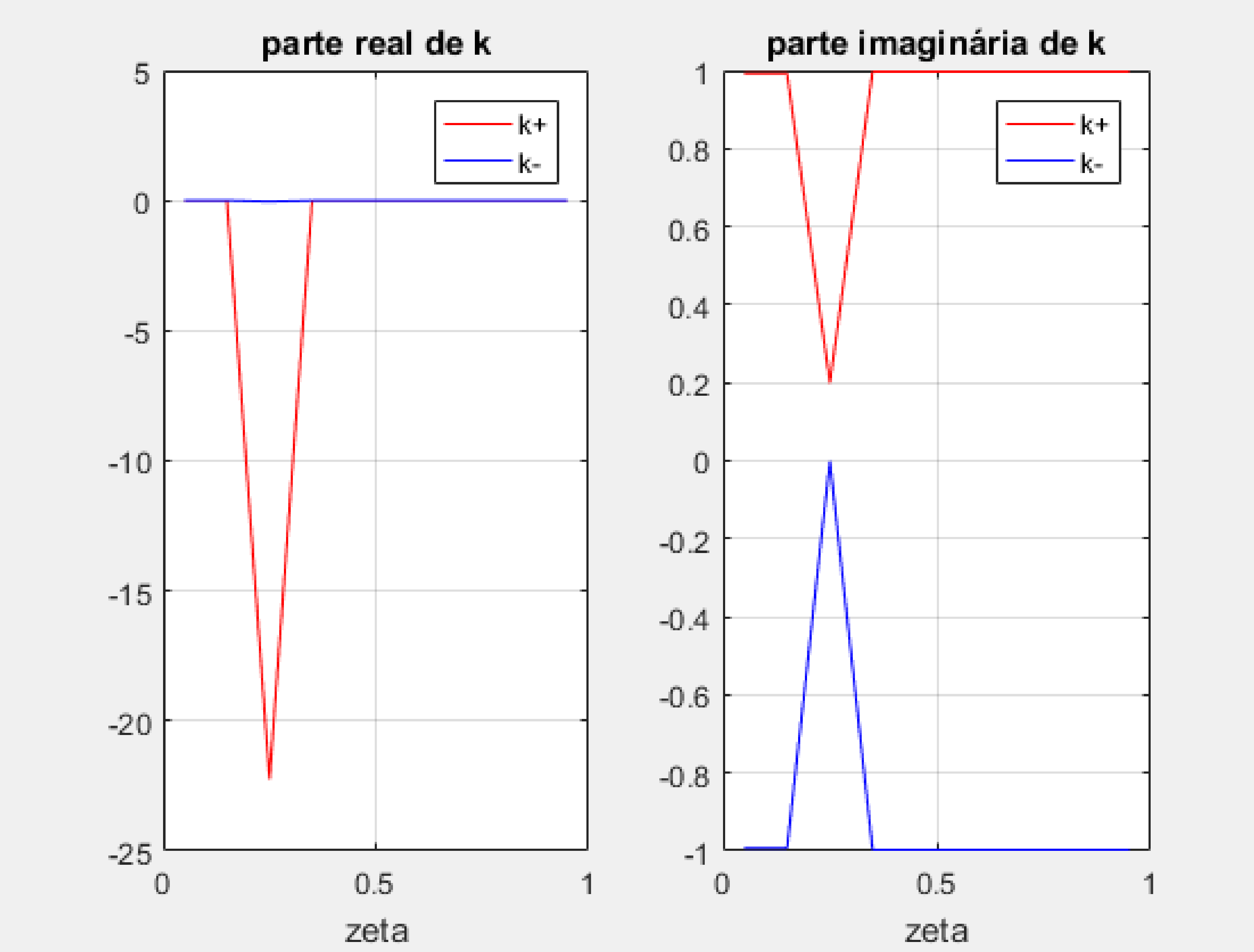
# Recomputando...

**T0~cosh(k.z)**




UFABC



parte real de k
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
0
0.5
1
zeta
k+
k-
parte imaginária de k
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
0.5
1
zeta
k+
k-

# Conclusões e perspectivas

- ✓ A, B e C(z) se assemelham ao $T_0(z)$ imposto.
- ✓ Largura do grad($T_0$) = largura dos degraus em A, B e C.
- ✓grad($T_0$) -> $\delta$(z-z0) => A, B e C -> H(z-z0) , como numa onda de choque.
- ✓ Encontramos um vínculo entre o problema original de Rott e o nosso, modificando a primeira suposição
- ✓ A conversão dos resultados de um problema em outro, via função $\Omega$, demandaria primeiramente a solução numérica do problema com o perfil hiperbólico de $T_0(z)$.

- ✓ Este e outros resultados, como por exemplo para os casos de fluídos com resistividade finita ou diferentes propriedades magnéticas, esperamos poder obter em trabalhos futuros, nos quais também não excluímos eventualmente alguma investigação por elementos finitos e eventuais colaborações para uma verificação experimental do fenômeno.

# Referências


[1] N. ROTT, *Damped and Thermally Driven Acoustic Oscillations in Wide and Narrow Tubes*, Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik 20, 230 (1969).

[2] LORD RAYLEIGH, *Theory of Sound*, Vol II (Macmillan 1896).

[3] J.D. FUERST, *An Investigation of Thermally Driven Acoustical Oscillations in Helium Systems*, Proceedings of the Low Temperature Engineering and Cryogenics Conference (1990).

[4] M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica vol. 2*, Editora Blucher (2002)

[5] G. W. SWIFT, *Thermoacoustics a Unifying Perspective for Some Engines and Refrigerators*, Springer, 2002.

# Referências


[6] *Dry air properties*. In: The Engineering Toolbox. Disponível em https://www.engineeringtoolbox.com/dry-air-properties-d_973.html . Acesso em 14-08-2019.

[7] R. FOX, A. MACDONALD, *Introdução à Mecânica dos Fluídos*, LTC Editora, Rio de Janeiro, 1998.

[8] *Rijke tube*. In: Wikipedia. Disponível em https://en.wikipedia.org/wiki/Rijke_tube
Acesso em 08-08-2018

[9] AYRINHAC, M GAUTHIER, G LE MARCHAND, M MORAND, F BERGAME ANDF DECREMPS, *Thermodynamic properties of liquid gallium from picosecond acoustic velocity measurements*, J. Phys.: Condens. Matter27(2015) 275103 (8pp).

# Obrigado!

UFABC