

# Homework 1

Roman Garipov M3138

22.09.2019

## 1 Задача №1

Докажите по определению, что  $\frac{n^3}{6} - 7n^2 = \Omega(n^3)$ .

$\frac{n^3}{6} - 7n^2 = \Omega(n^3)$  значит, что  $\exists c > 0, n \in \mathbb{N} : \forall n_0 > n, f(n_0) \geq cg(n_0)$ .  
Чтобы показать, что это правда, достаточно найти такие  $c$  и  $n$ , что выполняется определение.

$$\begin{aligned} \text{Выберем } c &= \frac{1}{36}. \\ \text{Тогда получим : } \frac{n^3}{6} - 7n^2 &\geq \frac{n^3}{36} \\ n^3 - 42n^2 &\geq \frac{n^3}{6}; \\ \frac{5}{6}n^3 - 42n^2 &\geq 0; \\ 5n^3 - 252n^2 &\geq 0; \\ n^2(5n - 252) &\geq 0 \\ 5n - 252 &\geq 0; \\ n &\geq \frac{252}{5}; n \geq 50.4; \\ n &\geq 51. \end{aligned}$$

Мы нашли такие  $c$  и  $n$ , что определение выполняется, следовательно доказали равенство.

## 2 Задача №2

- |                            |                         |                         |
|----------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 1. 1                       | 9. $2^{\log(n)}$        | 17. $n^{\log(\log(n))}$ |
| 2. $n^{\frac{1}{\log(n)}}$ | 10. $\log(n!)$          | 18. $n2^n$              |
| 3. $(\frac{3}{2})^2$       | 11. $n \log(n)$         | 19. $e^n$               |
| 4. $\log(\log(n))$         | 12. $\log(n)!$          | 20. $n!$                |
| 5. $\sqrt{\log(n)}$        | 13. $n^2$               | 21. $(n+1)!$            |
| 6. $\sqrt{2^{\log(n)}}$    | 14. $4^{\log(n)}$       | 22. $2^{2^n}$           |
| 7. $\log^2(n)$             | 15. $n^3$               | 23. $2^{2^{n+1}}$       |
| 8. $n$                     | 16. $\log^{\log(n)}(n)$ |                         |

## 3 Задача №3

Докажите или опровергните, что  $\log(n!) = \Theta(n \log(n))$ .  
По определению  $f(n) = \Theta(g(n))$  значит, что :

$$\exists c_1 > 0, c_2 > 0, N \in \mathbb{N} : \forall n > N, c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

Рассмотрим левое неравенство и запишем его в следующем виде:

$$c_1 n \log(n) \leq \log(n!)$$

Преобразуем  $\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$ , получаем

$$\begin{aligned} \log_a(b) \log_c(a) &= \log_c(b) \\ \log_2(n!) &= \log_2(n) \log_n(n!) \\ c_1 n \log_2(n) &\leq \log_2(n) \log_n(n!) \\ c_1 n &\leq \log_n(n!) \\ n^{c_1 n} &\leq n^{\log_n(n!)} \\ n^{c_1 n} &\leq n! \end{aligned}$$

Аналогично для правого неравенства, получаем :

$$n^{c_1 n} \leq n! \leq n^{c_2 n}$$

Если получится подобрать такие константы  $c_1$  и  $c_2$ , что неравенство выполняется, мы докажем, что  $\log(n!) = \Theta(n \log(n))$

### 3.1 Выбираем $c_1$

Попробуем взять  $c_1 = \frac{1}{4}$ . Получаем :  $n^{\frac{n}{4}} \leq n!$  . Для того, чтобы показать, что это верно, оценим  $n!$  .

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

Посмотрим на группы элементов выбранных следующим образом:

- $(1 \cdot 2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)) \geq n$
- $(3 \cdot 4 \cdot (n-4) \cdot (n-3)) \geq n$
- $(5 \cdot 6 \cdot (n-6) \cdot (n-5)) \geq n$
- $\vdots$
- $((\frac{n}{2}-1) \cdot (\frac{n}{2}) \cdot (\frac{n}{2}+1) \cdot (\frac{n}{2}+2)) \geq n$

(Таким образом будут сгруппированы элементы, если  $n$  кратно 4, в другом случае будет аналогично, только в последнем неравенстве элементы будут начинаться с  $\frac{n}{2}$ )

Всего таких неравенств  $\frac{n}{4}$ , перемножим их и получим следующее :

$$n! \geq n^{\frac{n}{4}}$$

### 3.2 Выбираем $c_2$

Попробуем взять его равным 1. Тогда, правая сторона неравенства будет выглядеть так :

$$n! \leq n^n$$

$$n! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2) \cdot (n-1) \cdot n}_{n \text{ членов}}$$

$$n^n = \underbrace{n \cdot n \cdot n \dots n \cdot n \cdot n}_{n \text{ членов}}$$

Отсюда видно, что  $n! \leq n^n$  начиная, к примеру, с  $n \geq 1$ .

### 3.3 Итого

Мы нашли такие  $c_1$  и  $c_2$ , что:

$$c_1 n \log(n) \leq \log(n!) \leq c_2 n \log(n)$$

Получается, что  $\log(n!) = \Theta(n \log(n))$ .

## 4 Задача №4

Найти  $\mathcal{O}$  и  $\Omega$  для  $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)}$ .

### 4.1 $\mathcal{O}$

Я утверждаю, что  $T(n) = \mathcal{O}(n \log(n))$ . Докажем по индукции. База —  $n = 2, T(2) = 2$ ,

Предположение индукции : Для всех  $n_0 < n$ ,  $T(n_0) \leq cn_0 \log(n_0)$ . Докажем, что и для  $n$  это утверждение верно.

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)} \leq 2c\frac{n}{2} \log(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)} \quad (\text{по предположению индукции})$$

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)} \leq cn(\log(n) - 1) + \frac{n}{\log(n)} = cn \log(n) - cn + \frac{n}{\log(n)}.$$

$$cn \log(n) - cn + \frac{n}{\log(n)} \leq cn \log(n) \quad (\text{Домножим обе части неравенства на } \log(n))$$

$$cn \log^2(n) - cn \log(n) + n \leq cn \log^2(n).$$

$n \leq cn \log(n)$ . При  $c = 1$  начиная с  $n > 1$  имеем верное неравенство, определение выполняется.

### 4.2 $\Omega$

$$\text{Докажем, что } T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)} = \Omega(n)$$

$$\text{А именно, что } T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)} \geq cn.$$

База индукции :  $n = 2, T(2) = 2$

$$\text{Предположение индукции : } T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)} \geq cn$$

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)} \geq 2\frac{cn}{2} + \frac{n}{\log(n)} \geq cn$$

$cn + \frac{n}{\log(n)} \geq cn$ . При  $c = 1$  начиная с  $n > 1$  имеем верное неравенство, определение выполняется.

В итоге,  $T(n) = \Omega(n)$  и  $T(n) = \mathcal{O}(n \log(n))$ .

## 5 Задача №5

### 5.1 Функция multiply

Функция multiply 4 раза вызывает себя, от аргументов, длины которых в два раза меньше длин текущих аргументов. А так же, несколько раз вызывает функции, которые работают за линейное от длины аргумента время. То есть, время работы для данной функции можно задать следующей функцией (пусть  $n$  в этой формуле будет максимум из длин аргументов)  $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^1$ .

Применим Мастер-теорему.  $a = 4$ ;  $b = 2$ ;  $c = 1$ .

$$c < \log_b(a), \text{ так как } 1 < \log_2(4)$$

Тогда, по Мастер-теореме,

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b(a)}), \log_b(a) = \log_2(4) = 2, T(n) = \mathcal{O}(n^2)$$

### 5.2 Функция multiply2

multiply2 вызывает саму себя 3 раза, от аргументов, длины которых в два раза меньше длин текущих аргументов. А так же, несколько раз вызывает функции, которые работают за линейное от длин аргументов время. В данном случае,  $a = 3$ ;  $b = 2$ ;  $c = 1$  (так как функции, которые вызывает multiply2 работают за линию, их время работы  $\mathcal{O}(n^1)$ )

$$c < \log_b(a), \text{ так как } 1 < \log_2(3)$$

Применив Мастер-теорему, получаем :

$$T(n) = \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b(a)}), \log_b(a) = \log_2(3), T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_2(3)})$$