Homework 1

Roman Garipov M3138

22.09.2019

1 Задача №1

Доказите по определению, что $\frac{n^3}{6} - 7n^2 = \Omega(n^3)$.

$\frac{n^3}{6} - 7n^2 = \Omega(n^3)$ значит, что $\exists\ c > 0, n \in \mathbb{N} : \forall\ n_0 > n, f(n_0) \geqslant cg(n_0)$. Чтобы показать, что это правда, достаточно найти такие c и n, что выполняется определение.

$$\text{Выберем } c = \frac{1}{36}.$$
$$\text{Тогда получим : } \frac{n^3}{6} - 7n^2 \geqslant \frac{n^3}{36}$$
$$n^3 - 42n^2 \geqslant \frac{n^3}{6};$$
$$\frac{5}{6}n^3 - 42n^3 \geqslant 0;$$
$$5n^3 - 252n^2 \geqslant 0;$$
$$n^2(5n - 252) \geqslant 0$$
$$5n - 252 \geqslant 0;$$
$$n \geqslant \frac{252}{5};\ n \geqslant 50.4;$$
$$n \geqslant 51.$$

Мы нашли такие c и n, что определение выполняется, следовательно доказали равенство.

2 Задача №2

1. 1
2. $n^{\frac{1}{\log(n)}}$
3. $(\frac{3}{2})^2$
4. $\log(\log(n))$
5. $\sqrt{\log(n)}$
6. $\sqrt{2}^{\log(n)}$
7. $\log^2(n)$
8. n
9. $2^{\log(n)}$
10. $\log(n!)$
11. $n\log(n)$
12. $\log(n)!$
13. n^2
14. $4^{\log(n)}$
15. n^3
16. $\log^{\log(n)}(n)$
17. $n^{\log(\log(n))}$
18. $n2^n$
19. e^n
20. $n!$
21. $(n+1)!$
22. 2^{2^n}
23. $2^{2^{n+1}}$

3 Задача №3

Докажите или опровергните, что $\log(n!) = \Theta(n\log(n))$.
По определению $f(n) = \Theta(g(n))$ значит, что :

$$\exists\ c_1 > 0, c_2 > 0, N \in \mathbb{N} : \forall n > N,\ c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

Рассмотрим левое неравенство и запишем его в следующем виде:

$$c_1 n \log(n) \leq \log(n!)$$

Преобразуем $\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$, получаем

$$\log_a(b)\log_c(a) = \log_c(b)$$
$$\log_2(n!) = \log_2(n)\log_n(n!)$$
$$c_1 n \log_2(n) \leq \log_2(n)\log_n(n!)$$
$$c_1 n \leq \log_n(n!)$$
$$n^{c_1 n} \leq n^{\log_n(n!)}$$
$$n^{c_1 n} \leq n!$$

Аналогично для правого неравенста, получаем :

$$n^{c_1 n} \leq n! \leq n^{c_2 n}$$

Если получится подобрать такие константы c_1 и c_2, что неравенство выполняется, мы докажем, что $\log(n!) = \Theta(n\log(n))$

3.1 Выбираем c_1

Попробуем взять $c_1 = \frac{1}{4}$. Получаем : $n^{\frac{n}{4}} \leq n!$. Для того, чтобы показать, что это верно, оценим $n!$.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

Посмотрим на группы элементов выбранных следующим образом:

- $(1 \cdot 2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)) \geq n$
- $(3 \cdot 4 \cdot (n-4) \cdot (n-3)) \geq n$
- $(5 \cdot 6 \cdot (n-6) \cdot (n-5)) \geq n$

  $\vdots$
- $((\frac{n}{2}-1) \cdot (\frac{n}{2}) \cdot (\frac{n}{2}+1) \cdot (\frac{n}{2}+2)) \geq n$

(Таким образом будут сгруппированы элементы, если n кратно 4, в другом случае будет аналогично, только в последнем неравенстве элементы будут начинаться с $\frac{n}{2}$)
Всего таких неравенств $\frac{n}{4}$, перемножим их и получим следующее :

$$n! \geq n^{\frac{n}{4}}$$

3.2 Выбираем c_2

Попробуем взять его равным 1. Тогда, правая сторона неравенства будет выглядеть так :

$$n! \leq n^n$$

$$n! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-2) \cdot (n-1) \cdot n}_{\text{n членов}}$$

$$n^n = \underbrace{n \cdot n \cdot n \ldots n \cdot n \cdot n}_{\text{n членов}}$$

Отсюда видно, что $n! \leq n^n$ начиная, к примеру, с $n \geq 1$.

3.3 Итого

Мы нашли такие c_1 и c_2, что:

$$c_1 n \log(n) \leq \log(n!) \leq c_2 n \log(n)$$

Получается, что $\log(n!) = \Theta(n \log(n))$.

4 Задача №4

Найти $\mathcal{O}$ и Ω для $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)}$.

4.1 $\mathcal{O}$

Я утверждаю, что $T(n) = \mathcal{O}(n \log(n))$. Докажем по индукции. База — $n = 2, T(2) = 2$,
Предположение индукции : Для всех $n_0 < n$, $T(n_0) \leq cn_0 \log(n_0)$. Докажем, что и для n это утверждение верно.
$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)} \leq 2c\frac{n}{2} \log(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)}$ (по предположению индукции)
$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)} \leq cn(\log(n) - 1) + \frac{n}{\log(n)} = cn \log(n) - cn + \frac{n}{\log(n)}$.
$cn \log(n) - cn + \frac{n}{\log(n)} \leq cn \log(n)$ (Домножим обе части неравенства на $\log(n)$)
$cn \log^2(n) - cn \log(n) + n \leq cn \log^2(n)$.
$n \leq cn \log(n)$. При $c = 1$ начиная с $n > 1$ имеем верное неравенство, определение выполняется.

4.2 Ω

Докажем, что $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)} = \Omega(n)$
А именно, что $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)} \geq cn$.
База индукции : $n = 2$, $T(2) = 2$
Предположение индукции : $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)} \geq cn$
$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)} \geq 2\frac{cn}{2} + \frac{n}{\log(n)} \geq cn$

$cn + \frac{n}{\log(n)} \geq cn$. При $c = 1$ начиная с $n > 1$ имеем верное неравенство, определение выполняется.

В итоге, $T(n) = \Omega(n)$ и $T(n) = \mathcal{O}(n \log(n))$.

5 Задача №5

5.1 Функция multiply

Функция multiply 4 раза вызывает себя, от аргументов, длины которых в два раза меньше длин текущих аргументов. А так же, несколько раз вызывает функции, которые работают за линейное от длины аргумента время. То есть, время работы для данной функции можно задать следующей функцией(пусть n в этой формуле будет максимум из длин аргументов) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^1$.

Применим Мастер-теорему. $a = 4$; $b = 2$; $c = 1$.

$$c < \log_b(a),\text{ так как } 1 < \log_2(4)$$

Тогда, по Мастер-теореме,

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b(a)}),\ \log_b(a) = \log_2(4) = 2,\ T(n) = \mathcal{O}(n^2)$$

.

5.2 Функция multiply2

multiply2 вызывает саму себя 3 раза, от аргументов, длины которых в два раза меньше длин текущих аргументов. А так же, несколько раз вызывает функции, которые работают за линейное от длин аргументов время. В данном случае, $a = 3$; $b = 2$; $c = 1$(так как функции, которые вызывает muliply2 работают за линию, их время работы $\mathcal{O}(n^1)$)

$$c < \log_b(a),\text{ так как } 1 < \log_2(3)$$

Применив Мастер-теорему, получаем :

$$T(n) = \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b(a)}),\ \log_b(a) = \log_2(3),\ T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_2(3)})$$