Homework 1

Roman Garipov M3138

10.09.2019

1 Задача №1

Докажите по определению, что $\frac{n^3}{6} - 7n^2 = \Omega(n^3)$.

$\frac{n^3}{6} - 7n^2 = \Omega(n^3)$ значит, что $\exists\ c > 0, n \in \mathbb{N} : \forall\ n_0 > n, f(n_0) \geqslant cg(n_0)$. Чтобы показать, что это правда, достаточно найти такие c и n, что выполняется определение.

$$\text{Выберем } c = \frac{1}{36}.$$
$$\text{Тогда получим : } \frac{n^3}{6} - 7n^2 \geqslant \frac{n^3}{36}$$
$$n^3 - 42n^2 \geqslant \frac{n^3}{6};$$
$$\frac{5}{6}n^3 - 42n^3 \geqslant 0;$$
$$5n^3 - 252n^2 \geqslant 0;$$
$$n^2(5n - 252) \geqslant 0$$
$$5n - 252 \geqslant 0;$$
$$n \geqslant \frac{252}{5};\ n \geqslant 50.4;$$
$$n \geqslant 51.$$

Мы нашли такие c и n, что определение выполняется, следовательно доказали равенство.

2 Задача №2

3 Задача №3

Докажите или опровергните, что $\log(n!) = \Theta(n\log(n))$.
По определению $f(n) = \Theta(g(n))$ значит, что :

$$\exists c_1 > 0, c_2 > 0, N \in \mathbb{N} : \forall n > N,\ c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

Рассмотрим левое неравенство и запишем его в следующем виде:

$$c_1 n \log(n) \leq \log(n!)$$

Преобразуем $\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$, получаем

$$\log_a(b)\log_c(a) = \log_c(b)$$
$$\log_2(n!) = \log_2(n)\log_n(n!)$$
$$c_1 n \log_2(n) \leq \log_2(n)\log_n(n!)$$
$$c_1 n \leq \log_n(n!)$$
$$n^{c_1 n} \leq n^{\log_n(n!)}$$
$$n^{c_1 n} \leq n!$$

Для $c \geq 1$ это всегда неверно.
Если решать это неравенство для какого-то конкретного $0 < c < 1$, то мы получим ограничение сверху на n, так как всегда найдется n такое, что : $n^{c_1 n} \geq n!$. Следовательно, это не будет выполнятся для какого-то аргумента, начиная с какого-то N. Значит, $\log(n!) \neq \Theta(n\log(n))$

4 Задача №4

Найти $\mathcal{O}$ и Ω для $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)}$.

4.1 $\mathcal{O}$

Я утверждаю, что $T(n) = \mathcal{O}(n\log(n))$. Докажем по индукции. База — $n = 2, T(2) = 2$
Предположение индукции : Для всех $n_0 < n$, $T(n_0) \leq cn_0\log(n_0)$. Докажем, что и для n это утверждение верно.
$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)} \leq 2c\frac{n}{2}\log(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)}$ (по предположению индукции)
$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)} \leq cn(\log(n) - 1) + \frac{n}{\log(n)} = cn\log(n) - cn + \frac{n}{\log(n)}$.
$cn\log(n) - cn + \frac{n}{\log(n)} \leq cn\log(n)$ (Домножим обе части неравенства на $\log(n)$)
$cn\log^2(n) - cn\log(n) + n \leq cn\log^2(n)$.
$n \leq cn\log(n)$. Например, При $c = 1$ получаем верное неравенство.

4.2 Ω

Докажем, что $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)} = \Omega(n)$
А именно, что $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)} \geq cn$.
База индукции : $n = 2$, $T(2) = 2$
Предположение индукции : $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)} \geq cn$
$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)} \geq 2\frac{cn}{2} + \frac{n}{\log(n)} \geq cn$
$cn + \frac{n}{\log(n)} \geq cn$. Например, при $c = 1$ это правда.
Что и требовалось доказать.