Алгоритмы и Структуры Данных КР2 Вариант 07

Гарипов Роман M3238

26.12.2020

Задача №1

Решение

Утверждается, что в произвольной сети G в которой существует положительный поток, можно составить функцию l длин рёбер таким образом :

$$l(uv) = \begin{cases} 1 & u \in S, v \in T \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \text{(где } (\langle S, T\rangle \text{ - минимальный разрез в } G)$$

так, чтобы выполнялось равенство:

$$|f_{max}| = \frac{V(G)}{\rho(s,t)}$$

Утверждение. $V(G) = c(S,T)$

Доказательство. Формально, распишем объём сети:

$$V(G) = \sum_{u,v} c(u,v) \cdot l(u,v) = \sum_{\substack{u \in S, \\ v \in T}} c(u,v) = c(S,T)$$

□

Утверждение. *При данном l будет выполнятся $\rho(s,t) = 1$*

Доказательство. Пусть не так, тогда $\rho(s,t) = 0$ либо 2.
Пусть $\rho(s,t) = 0$. Поскольку существует положительный поток, существует и путь $s \rightsquigarrow t$. Тогда как минимум один раз придётся перейти из множества S в множество T. То есть хотя бы одно ребро весом 1. Противоречие.
Пусть $\rho(s,t) = 2$. Тогда возьмём кратчайший путь $s \rightsquigarrow t$. Разделим его на 3 части: до первого ребра длиной 1, оставшаяся часть до второго ребра длиной 1 и всё остальное. Мы установили веса 1 рёбрам, которые соединяют вершины их разных множеста минимального разреза. Тогда понятно, что данный разрез не минимальный, так как можно уменьшить его, добавив вершины второй части пути в множество S. Противоречие с минимальностью. □

Применив два утверждения и Теорему Форда-Фалкерсона получаем:

$$\frac{V(G)}{\rho(s,t)} = \frac{c(S,T)}{1} = c(S,T) = |f_{max}|$$

Задача №2

Построим сеть следующим образом.

- Заведём вершины s и t - исток и сток
- Для каждой команды заведём по вершине, в каждую из них проведём ребро (s, v) с $capacity = a_v$
- Заведём $\binom{n}{2}$ вершин, для всех возможных матчей, матч характеризуется двумя командами, которые принимали участие, в вершину матча для команд u и v обозначенную за m проведём рёбра (u, m) и (v, m) с $capacity = 1$

- Так же из всех вершин для матчей добавим по ребру в сток с $capacity = 1$

Исходя из того, что такое величина потока в сети, понятно, что если максимальный поток в сети равен $\binom{n}{2}$, то такой турнир мог существовать. Возьмём вершину для конкретного матча, посмотрим какие по какому ребру в него пришёл поток величины 1. Команда соответсвующая этой вершине, из которой пришёл поток и выиграла этот матч.

По любому потоку в данной сети, величина которого $\binom{n}{2}$, мы можем однозначно определить результаты матчей. Так же, по любому корректному турниру, можем построить сеть с потоком в ней(выставлять потоки. Имеет место биекция между турниром и потоком в сети.

Задача №3

Формально, в задаче нужно максимизировать следующую сумму:

$$\sum_{v \in V} a_v \longrightarrow max$$

учитывая, что если взяли вершину v, то нужно взять все достижимые из неё вершины. Сведём тождественными преобразованиями к немного более удобной для решения потоками сумме:

$$\sum_{v \in V} a_v = \sum_{\substack{v \in A, \\ a_v \geq 0}} a_v + \sum_{\substack{v \in A, \\ a_v < 0}} a_v = \sum_{\substack{v \in A, \\ a_v \geq 0}} a_v + \sum_{\substack{v \in A, \\ a_v < 0}} a_v + \sum_{a_v \geq 0} a_v - \sum_{a_v \geq 0} a_v =$$

$$= \left(\sum_{\substack{v \in A, \\ a_v < 0}} a_v - \sum_{\substack{v \notin A, \\ a_v > 0}} a_v + \underbrace{\sum_{a_v \geq 0} a_v}_{const} \right) \longrightarrow max \Longleftrightarrow \left(\sum_{\substack{v \notin A, \\ a_v > 0}} a_v - \sum_{\substack{v \in A, \\ a_v < 0}} a_v \right) \longrightarrow min$$

Теперь попробуем построить сеть, в которой величина разреза будет задаваться именно такой формулой. Построим сеть следующим образом:

- ребро (s, v) – $capacity = a_v$, если $a_v \geq 0$
- ребро (v, u) – $capacity = \infty$, если $(v, u) \in E$
- ребро (v, t) – $capacity = -a_v$, если $a_v < 0$

Рёбра с $capacity = \infty$ необходимы, для того чтобы выполнялось свойство :

$$v \in A \Longrightarrow \forall u, u \text{ достижима из } v : u \in A$$

Действительно, возьмём минимальный разрез в такой сети. В нём(имеются в виду рёбра соединяющие две вершины разных множеств разреза) не может быть рёбер с бесконечной *capacity*, так как существует разрез

$$\langle S, T \rangle : S = \{s\} \cup V, T = \{t\}$$

размер которого очевидно конечный, ведь он содержит только рёбра из вершин с отрицательными значения, *capacity* которых положителен по построению сети. Это значит, что рёбра, соединяющие вершины их разных множеств разреза, будут иметь положительные значения, рёбра с бесконечным *capacity* будут находиться "внутри" множеств. Получается, что вышеописанная сумма, заменив в ней A на S, и будет задавать размер разреза в данной сети, ведь из вершин множества S исходят какие-то рёбра в вершины с положительными значениями a_i и в какие-то с отрицательными.
Теперь просто найдём минимальный разрез в таком графе, который по Теореме Форда-Фалкерсона равен максимальному потоку.
Важное замечание : множество S разреза будет соответствовать искомому множеству A, это и будет гарантировать выполнение вышеописанного свойства включения вершин в множество, так как все бесконечные рёбра находятся внутри множеств разреза, значит если взяли вершину в множество, то взяли и все достижимые.