

Алгоритмы и Структуры Данных ДЗ-5

Гарипов Роман М3138

26.10.2019

Задача №1

Покажем, что если для сортирующей сети не существует компараторов для двух соседних позиций i и $i+1$, то это вовсе не сортирующая сеть. Подадим на вход нашей сортирующей сети такую перестановку, что она отсортирована, за исключением того, что два подряд идущих элемента i и $i+1$ образуют инверсию. Для ясности, приведём пример с $i = 3$. $p = [1, 2, 4, 3 \dots n-1, n]$. Понятно, что такая перестановка не будет отсортирована. Следовательно, наша сеть не является сортирующей, так как есть входные данные, которые сеть не отсортирует.

Задача №2

Будем строить нашу сортирующую сеть по слоям.

На первом слое сравним наш элемент (обозначим его вход с номером n , остальные входы имеют номера $1 \dots n-1$) с каким-то одним элементом (поставим компаратор). Получим, что множество позиций на которых может находиться элемент со входа n теперь состоит из двух позиций.

На втором слое сравним каждую из позиций нашего множества, с какой-нибудь одной позицией, которая ещё не находится в нашем множестве. И продолжим делать так, пока не получим множество из n элементов.

Получим, что на каждой слое размер множества увеличивается в 2 раза, за исключением, возможно, последнего перехода, там может не хватить элементов для сравнения, но от этого глубина не изменится, ведь все равно на этой глубине есть какие-то компараторы.

Важно, что мы не можем добавить более одного компаратора для какой-то позиции на каждом слое, ведь если мы захотим добавить для какого-то элемента второй компаратор, его придётся разметить на третьем слое, это будет неоптимально.

Отсюда становится понятно, что за наращение одного слоя не получится увеличить наше множество больше чем в два раза.

Получаем, что всего слоёв будет хотя бы $\log_2(n)$.