

Homework 1

Roman Garipov M3138

10.09.2019

1 Задача №1

Докажите по определению, что $\frac{n^3}{6} - 7n^2 = \Omega(n^3)$.

$\frac{n^3}{6} - 7n^2 = \Omega(n^3)$ значит, что $\exists c > 0, n \in \mathbb{N} : \forall n_0 > n, f(n_0) \geq cg(n_0)$.

Чтобы показать, что это правда, достаточно найти такие c и n , что выполняется определение.

Выберем $c = \frac{1}{36}$

Тогда получим :

$$\frac{n^3}{6} - 7n^2 \geq \frac{n^3}{36}$$

$$n^3 - 42n^2 \geq \frac{n^3}{6}$$

$$\frac{5}{6}n^3 - 42n^2 \geq 0$$

$$5n^3 - 252n^2 \geq 0$$

$$n^2(5n - 252) \geq 0$$

$$5n - 252 \geq 0$$

$$n \geq \frac{252}{5}$$

$$n \geq 50.4$$

$$n \geq 51$$

Мы нашли такие c и n , что определение выполняется, следовательно доказали равенство.

2 Задача №2

3 Задача №3

Докажите или опровергните, что $\log(n!) = \Theta(n \log(n))$.

По определению $f(n) = \Theta(g(n))$ значит, что :

$$\exists c_1 > 0, c_2 > 0, N \in \mathbb{N} : \forall n > N, c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

Рассмотрим левое неравенство и запишем его в следующем виде:

$$c_1 n \log(n) \leq \log(n!)$$

Преобразуем $\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$, получаем $\log_a(b) \log_c(a) = \log_c(b)$

$$\log_2(n!) = \log_2(n) \log_n(n!)$$

$$c_1 n \log_2(n) \leq \log_2(n) \log_n(n!)$$

$$c_1 n \leq \log_n(n!)$$

$$n^{c_1 n} \leq n^{\log_n(n!)}$$

$$n^{c_1 n} \leq n!$$

Для $c > 1$ это всегда неверно.

Если решать это неравенство для какого-то конкретного $0 < c < 1$, то мы получим ограничение сверху на n , так как всегда найдется n такое, что : $n^{c_1^n} \geq n!$. Следовательно, это не будет выполняться для какого-то аргумента, начиная с какого-то N . Значит, $\log(n!) \neq \Theta(n \log(n))$

4 Задача №4

Найти \mathcal{O} и Ω для $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)}$.

4.1 \mathcal{O}

Я утверждаю, что $T(n) = \mathcal{O}(n \log(n))$. Докажем по индукции. База — $n = 2, T(2) = 2$

Предположение индукции : Для всех $n_0 < n$, $T(n_0) \leq cn_0 \log(n_0)$. Докажем, что и для n это утверждение верно.

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)} \leq 2c\frac{n}{2} \log(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)} \quad (\text{по предположению индукции})$$

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)} \leq cn(\log(n) - 1) + \frac{n}{\log(n)} = cn \log(n) - cn + \frac{n}{\log(n)}.$$

$$cn \log(n) - cn + \frac{n}{\log(n)} \leq cn \log(n) \quad (\text{Домножим обе части неравенства на } \log(n))$$

$$cn \log^2(n) - cn \log(n) + n \leq cn \log^2(n).$$

$n \leq cn \log(n)$. Например, При $c = 1$ получаем верное неравенство.

4.2 Ω

Докажем, что $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)} = \Omega(n)$

А именно, что $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)} \geq cn$.

База индукции : $n = 2, T(2) = 2$

Предположение индукции : $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)} \geq cn$

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log(n)} \geq 2\frac{cn}{2} + \frac{n}{\log(n)} \geq cn$$

$$cn + \frac{n}{\log(n)} \geq cn. \quad \text{Например, при } c = 1 \text{ это правда.}$$

Что и требовалось доказать.