0.1 Операторное разложение единицы. Корневые подпространства.

$\phi(t) = \prod\limits_{\lambda}(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ $\qquad$ $\sum\limits_{\lambda} m(\lambda) = m$

$deg\ \phi = m$

P_{m-1} – линейное пространство многочленов степени не выше $m-1$

$dim P_{m-1} = m$

$$\phi_\lambda(t) = \prod_{\mu\neq\lambda}(t-\mu)^{m(\mu)}$$

$\phi(t) = \underbrace{(t-\lambda)^{m(\lambda)}\phi_\lambda(t)}_{\text{вз. просты}}$ $\qquad$ $\phi_\lambda(\lambda) \neq 0$

$\phi_\lambda(\mu) = 0$

$\mu \neq \lambda$

Определение 1. $I_\lambda = \{p \in P_{m-1} | p \vdots \phi_\lambda\}$

***Главный идеал**, порожденный многочленом* $\phi_\lambda =$

$= \{f \in P_{m(\lambda)-1} | p = f_\lambda \phi_\lambda\}$

I_λ *– линейное подпространство* P_{m-1}

$p_{1,2} \vdots \phi_\lambda \Rightarrow (p_1 + \alpha p_2) \vdots \phi_\lambda$

Теорема 1. $P_{m-1} = \bigoplus\limits_{\lambda} I_\lambda$

Доказательство.

1. Дизъюнктность.

$$\mathbb{0} = \sum_\lambda \underbrace{f_\lambda \phi_\lambda}_{\in I_\lambda} = f_\lambda \cdot \phi_\lambda + \underbrace{\sum_{\mu\neq\lambda} f_\mu \underbrace{\phi_\mu}_{\vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)}}}_{\vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)}}$$

$$\Rightarrow f_\lambda \cdot \underbrace{\phi_\lambda \vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)}}_{\text{вз. просты}} \Rightarrow \underset{deg\ f_\lambda = m(\lambda)-1}{f_\lambda} \vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)} \Rightarrow f_\lambda \equiv 0$$

$$\Rightarrow \forall \lambda \quad f_\lambda \equiv 0 \Rightarrow f_\lambda \phi_\lambda \equiv \mathbb{0} \Rightarrow \text{Дизъюнктны}$$

2. $$\begin{array}{ccc} dim P_{m-1} & = & m \\ \| & & \\ \sum\limits_\lambda dim I_\lambda & = & \sum\limits_\lambda m(\lambda) = m \end{array}$$

$I_\lambda \subset P_{m-1}$

$$\Rightarrow P_{m-1} = \bigoplus_\lambda I_\lambda$$

□

Следствие 1. $\forall p \in P_{m-1}\ \exists!\ p = \sum\limits_\lambda p_\lambda$

$p_\lambda \in I_\lambda$

$$\boxed{1 = \sum_\lambda p_\lambda \text{ – полиномиальное разложение единицы}}$$

Замечание.

1. $\lambda \neq \mu$

$$\begin{array}{cccccc} p_\lambda & \cdot & p_\mu & & \vdots & \phi \\ || & & || & & & \\ f_\lambda \phi_\lambda & & f_\mu \phi_\lambda & & = & \eta \cdot \phi \\ & & \uparrow & & & \\ & & (t-\lambda)^{m(\lambda)} & & & \end{array}$$

2. $\forall \lambda \; m(\lambda) = 1$

   Если. Т. е. все корни ϕ взаимно простые.

   $f_\lambda = const \quad (def \;\; f_\lambda = m(\lambda) - 1 = 0)$

Теорема 2 (Лагранжа)**.**
$\forall \lambda : m(\lambda) = 1 \Rightarrow$
$\forall p \in P_{m-1} \;\; p(t) = \sum\limits_\lambda \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \cdot \phi_\lambda(t)$

Доказательство.

корень $\phi \to \mu \neq \lambda$ $\begin{array}{l} \phi_\lambda(\mu) = 0 \\ \phi_\lambda(\lambda) \neq 0 \end{array}$

$$p(t) \;\; \sum_\lambda p_\lambda(t) = \sum_\mu \underset{\substack{\uparrow \\ const, \text{ т.к.} \\ \text{корни взаимно} \\ \text{просты}}}{\boxed{f_\mu}} \cdot \phi_\mu(t)$$

$p(\lambda) = f_\lambda \cdot \phi_\lambda(\lambda) \Rightarrow \forall \lambda : f_\lambda = \frac{p(\lambda)}{\phi_\lambda(\lambda)}$
$\phi(t) = \prod\limits_\mu (t - \mu)$

$$\phi'(t) = \sum_\mu \underbrace{\prod_{\lambda \neq \mu}(t-\lambda)}_{\phi_\mu(t)} = \sum_\mu \phi_\mu(t)$$

$$\phi'(\lambda) = \sum_\mu \underset{\substack{|| \\ 0 \; \mu\neq\lambda}}{\phi_\mu(\lambda)} = \phi_\lambda(\lambda) \;\; \Rightarrow f_\lambda = \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \Rightarrow p = \sum_\lambda \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \phi_\lambda(t) \qquad \square$$

Следствие 1. $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$

$1 = \sum\limits_\lambda p_\lambda \Rightarrow \boxed{t = \sum\limits_\lambda \lambda p_\lambda}$

Доказательство. По теореме: $1 = \sum\limits_\lambda \boldsymbol{p_\lambda} = \sum\limits_\lambda f_\lambda \cdot \phi_\lambda = \sum\limits_\lambda \dfrac{1}{\boldsymbol{\phi'(\lambda)}} \cdot \boldsymbol{\phi_\lambda(t)}$

По теореме: $t = \sum\limits_\lambda \dfrac{\lambda}{\boldsymbol{\phi'(\lambda)}} \boldsymbol{\phi_\lambda(t)} = \sum\limits_\lambda \lambda p_\lambda$ $\square$

$\mathcal{A} \in End(V)$

ϕ минималный многочлен, все корни $\in K(\Rightarrow$ все корни $\chi \in K$

$\Rightarrow$ т.е. все с.ч. $\in K$ – I, II случаи)

$1 = \sum\limits_{\lambda} p_\lambda(t)$

$\mathcal{P}_\lambda := p_\lambda(\mathcal{A})$

$\mathcal{P}_\lambda \in End(V)$ $\quad \boxed{\mathcal{E} = \sum\limits_{\lambda} \mathcal{P}_\lambda}$ операторное разложение единицы

$\mathcal{P}_\lambda$ – проекторы ? $\quad \uparrow$ это уже есть

Достаточно проверить $\mathcal{P}_\lambda \underset{\lambda\neq\mu}{\cdot} \mathcal{P}_\mu = \mathbb{0}$

$\mathcal{P}_\lambda = p_\lambda(\mathcal{A}) = f_\lambda(\mathcal{A}) \cdot \phi_\lambda(\mathcal{A})$

$\lambda \neq \mu$

$\mathcal{P}_\mu = p_\mu(\mathcal{A}) = f_\mu(\mathcal{A}) \cdot \phi_\mu(\mathcal{A})$

перестановочны, т.к. многочлены от $\mathcal{A}$

$$\mathcal{P}_\lambda \mathcal{P}_\mu = f_\lambda(\mathcal{A}) \cdot f_\mu(\mathcal{A}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{содержит}}}{\phi_\lambda(\mathcal{A})} \cdot \boldsymbol{\phi_\mu(\mathcal{A})} = \mathbb{0}$$

$\updownarrow$

$(p_\lambda \cdot p_\mu \vdots \phi$ см. замеч. 1) $\quad \eta(\mathcal{A})\boldsymbol{(t-\mu)^{m(\mu)}} \quad \phi(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$

$\Rightarrow \mathcal{P}_\lambda$ проекторы – **спектральные проекторы** $\mathcal{A}$

$Im\mathcal{P}_\lambda$ **спектральное подпространство**

$\underset{7.5}{\Rightarrow} \boxed{V = \bigoplus\limits_{\lambda} Im\mathcal{P}_\lambda}$

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 = -1 & \alpha(\lambda_1) = 2 \\ \lambda_2 = 3 & \alpha(\lambda_2) = 1 \end{matrix}$

$V_{\lambda_1} = span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \gamma(\lambda_1) = 1 < \alpha(\lambda_1) \Rightarrow$ не о.п.с.

$V_{\lambda_2} = span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \gamma(\lambda_2) = 1$

$\chi(t) = -(t+1)^2(t-3) \quad \phi_{\lambda_1} = (t-3)$

$\phi(t) = (t+1)^2(t-3) \quad \phi_{\lambda_2} = (t+1)^2$

$1 = \sum\limits_{\lambda} p_\lambda = p_{\lambda_1} + p_{\lambda_2} = f_{\lambda_1}\phi_{\lambda_1} + f_{\lambda_2} \cdot \phi_{\lambda_2} =$

$= f_{\lambda_1}(t-3) + f_{\lambda_2}(t+1)^2$

Прав. дробь $\dfrac{1}{\phi} = \sum\limits_{\lambda} \underset{\text{Правильн.}}{\dfrac{f_\lambda \cdot \phi_\lambda}{\phi}} = \sum\limits_{\lambda} \underset{\text{Правильн. дробь}}{\dfrac{f_\lambda}{(t-\lambda)^{m(\lambda)}}}$

$deg\ f_\lambda < m(\lambda)$

$$\frac{1}{(t+1)^2(t-3)} = \underset{\text{простейшие}}{\frac{A_1}{t+1} + \frac{A_2}{(t+1)^2} + \frac{A_3}{t-3}} = \frac{-\frac{1}{16}t - \frac{5}{16}}{(t+1)^2} + \frac{\frac{1}{15}}{t-3}$$

$$1 = \underbrace{(-\frac{1}{16}t - \frac{5}{16})\overbrace{(t-3)}^{\phi_\lambda}}_{p_{\lambda_1}} + \underbrace{\frac{1}{15}\overbrace{(t+1)^2}^{\phi_{\lambda_2}}}_{p_{\lambda_2}}$$

$\mathcal{P}_1 = p_{\lambda_1}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $p_1 + p_2 = E$

$\mathcal{P}_2 = p_{\lambda_2}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Замечание. $\forall\lambda : m(\lambda) = 1$

Из следствия теоремы Лагранжа $t = \sum\limits_{\lambda} \lambda p_\lambda$

$\boxed{\mathcal{A} = \sum\limits_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_\lambda} \nearrow \quad 1 = \sum p_\lambda$ спектральное разложение о.п.с.

$\boxed{\mathcal{A} \text{ о.п.с.} \Leftrightarrow \forall\lambda : m(\lambda) = 1 \qquad \text{Доказательство позже}}$

Определение 2. $K_\lambda = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$
называется ***корневым подпространством*** $\mathcal{A}$

Теорема 3.

1. K_λ *инвариантно относительно* $\mathcal{A}$
2. $Im\mathcal{P}_\lambda = K_\lambda$
3. $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ *минимальный многочлен* $\mathcal{A}|_{K_\lambda = Im\mathcal{P}_\lambda}$

$\Rightarrow \boxed{V = \bigoplus\limits_{\lambda} K_\lambda}$

Доказательство.

1. $x \in K_\lambda \overset{?}{\Rightarrow} \mathcal{A}x \in K_\lambda$

   $(\mathcal{A} - \underset{\text{перестановочны}}{\lambda\mathcal{E}})^{m(\lambda)}\mathcal{A}x = \mathcal{A}\underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}x \in K_\lambda}_{=\mathbb{0}} = \mathbb{0}$

   $\Rightarrow \mathcal{A}x \in Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$

2. $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}\mathcal{P}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} f_\lambda(\mathcal{A})\phi_\lambda(\mathcal{A}) =$

   $= f_\lambda(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}\phi_\lambda(\mathcal{A})}_{\phi(\mathcal{A})} = \mathbb{0}$

   $\forall x \in V$

   $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} \underbrace{\mathcal{P}_\lambda x}_{\in Im\mathcal{P}_\lambda} = \mathbb{0} \Rightarrow Im\mathcal{P}_\lambda \subseteq Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} = K_\lambda$

   Обратно: $K_\lambda \overset{?}{\subseteq} Im\mathcal{P}_\lambda$

   $x \in K_\lambda$

   $\mu \neq K_\lambda$ $\mathcal{P}_\mu x = \underbrace{f_\mu(\mathcal{A})\underset{\text{содержит } (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}}{\phi_\mu(\mathcal{A})} x}_{\eta(\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}} = \eta(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}x \in K_\lambda}_{=\mathbb{0}} = \mathbb{0}$

   $x = \mathcal{E}x = \sum\limits_{\mu} \underbrace{\mathcal{P}_\mu x}_{\substack{\| \\ \mathbb{0} \ \mu\neq\lambda}} = \mathcal{P}_\lambda x \in Im\mathcal{P}_\lambda \Rightarrow K_\lambda \subseteq Im\mathcal{P}_\lambda$

   $\Rightarrow \boxed{K_\lambda = Im\mathcal{P}_\lambda}$

3. $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный многочлен для $\mathcal{A}|_{K_\lambda = Im\mathcal{P}_\lambda}$?
   $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$ аннулятор $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$
   Минимальный?

   $\sqsupset$ не $\overset{\psi}{\text{минимальный}}$
   $\psi_1 = (t-\lambda)^{m(\lambda)-1}$ $\sqsupset$ это минимальный многочлен
   $\phi_1 := (t-\lambda)^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(t) =$ аннулятор $\mathcal{A}$?
   $\underset{\mu\neq\lambda}{\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\mu} = (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(\mathcal{A})f_\mu(\mathcal{A})\phi_\mu(\mathcal{A}) =$
   $= \ldots \phi_\lambda(\mathcal{A})\phi_\mu(\mathcal{A}) = \eta(\mathcal{A})\cdot\phi(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$
   $\forall x\ \phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda x = (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}\phi_\lambda(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda x =$
   $$= \phi_\lambda(\mathcal{A})\underbrace{\underbrace{(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)-1}}_{\psi_1(\mathcal{A})}\quad\underbrace{\mathcal{P}_\lambda x}_{\in Im\mathcal{P}_\lambda = K_\lambda}}_{\substack{\psi_1(\mathcal{A}|_{K_\lambda})x \\ \text{мин. многочлен по предположению}}} = \mathbb{0}$$
   $\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda = \mathbb{0}$
   $$\phi_1(\mathcal{A})\cdot\mathcal{E} = \underbrace{\phi_1(\mathcal{A})\sum_\mu \mathcal{P}_\mu}_{\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\lambda + \sum\limits_{\mu\neq\lambda}\phi_1(\mathcal{A})\mathcal{P}_\mu} = \mathbb{0}$$
   $\Rightarrow \phi_1$ аннулятор $\mathcal{A}$, но степени $< \phi$
   $deg\ \phi_1 = m-1 \Rightarrow$ противоречие мин. $\phi \Rightarrow (t-\lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный мн-н $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$

$\square$

Следствие 1. *A о.п.с.* $\Leftrightarrow \forall\lambda : m(\lambda) = 1$

Доказательство. $(\Rightarrow)$ $\mathcal{A}$ о.п.с.
$\phi(t)\ \prod\limits_\lambda(t-\lambda)$ покажем что это минимальный многочлен $\mathcal{A}$
$V = \bigoplus\limits_\lambda V_\lambda$ – собственные подпространства $\mathcal{A}$
$\forall v \in V\ \exists!\ v = \sum\limits_\lambda v_\lambda, v_\lambda \in V_\lambda$
$\phi(\mathcal{A})v = \prod\limits_\lambda(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})\sum\limits_\mu v_\mu =$
$$= \sum_\mu \underbrace{\prod_\lambda(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})}_{\phi_\mu(\mathcal{A})\cdot(\mathcal{A}-\mu\mathcal{E})} v_\mu = \sum_\mu \phi_\mu(\mathcal{A})\underbrace{(\mathcal{A}-\mu\mathcal{E})v_\mu}_{\overset{||}{\mathbb{0}}} = \mathbb{0}$$
$v_\mu \in V_\mu = Ker(\mathcal{A}-\mu\mathcal{E}) \nearrow$
$\Rightarrow \phi$ аннулятор $\mathcal{A} \Rightarrow$ очевидно минимальная степень $\Rightarrow$ минимальный многочлен.
$(\Leftarrow)\forall\lambda : m(\lambda) = 1$
$\underset{\substack{|| \\ Im\mathcal{P}_\lambda}}{K_\lambda} = Ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^1 = V_\lambda$
$V = \bigoplus\limits_\lambda K_\lambda = \bigoplus\limits_\lambda V_\lambda \Leftrightarrow \mathcal{A}$ о.п.с.

$\square$

Примеры.
$Im\mathcal{P}_1 = Ker(A-\lambda_1 E)^2 = K_{\lambda_1}$
$Im\mathcal{P}_2 = Ker(A-\lambda_2 E)^2 = K_{\lambda_2}$ — упр.

0.2 Нильпотентный оператор. Разложение Жордана

Определение 1. $\mathcal{B} \in End(V)$ *называется* ***нильпотентным****, если* $\phi(t) = t^\nu$
Минимальный многочлен $\mathcal{B}$*, т.е.* $\mathcal{B}^\nu = \mathbb{0}$
$\underline{\nu}$ *<u>– индекс нильпотентности</u> (мин. степерь* $\mathcal{B}^\nu = \mathbb{0}$*)*

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathcal{P}_\lambda^2 = \mathcal{P}_\lambda \\ \textit{Идемпотентность}\end{array}}$$

Степень минимального многочлена $\rightarrow \nu \leq dimV \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{степень } \chi}}{=} n$

Утверждение. $\forall \lambda : m(\lambda) \leq dimV_\lambda$

Доказательство. $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный мн-н $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$
$\mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})|_{k_\lambda} \Rightarrow \mathcal{B}_\lambda^{m(\lambda)} = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}|_{K_\lambda} = \mathbb{0}$
$\Rightarrow m(\lambda)$ индекс нильпотентности $\mathcal{B}_\lambda \in End(K_\lambda)$
$m(\lambda) \leq dimK_\lambda$ □

Замечание. $\underbrace{\sum_\lambda m(\lambda)}_{deg\ \phi} \leq \underset{\substack{\shortparallel \\ deg\ \chi}}{\sum} dimK_\lambda = n$

$$\bigoplus_\lambda K_\lambda = V$$

Теорема 1 (Разложение Жордана)**.**
$\forall \mathcal{A} \in End(V)$ *можно представить в виде:*
$\mathcal{A} : \mathcal{D} + \mathcal{B}$*, где* $\mathcal{D}$ *о.п.с.*
$\mathcal{B}$ *нильпотентный, причем* $\mathcal{BD} = \mathcal{DB}$ *перестановочны*

Доказательство. sex □