0.1 Операторное разложение единицы. Корневые подпространства.

$\phi(t) = \prod_{\lambda}(t-\lambda)^{m(\lambda)}$

$\sum_{\lambda} m(\lambda) = m$

$deg\ \phi = m$

P_{m-1} – линейное пространство многочленов степени не выше $m-1$

$dim P_{m-1} = m$

$$\phi_\lambda(t) = \prod_{\mu \neq \lambda}(t-\mu)^{m(\mu)}$$

$\phi(t) = \underbrace{(t-\lambda)^{m(\lambda)}\phi_\lambda(t)}_{\text{вз. просты}}$

$$\phi_\lambda(\lambda) \neq 0$$
$$\phi_\lambda(\mu) = 0$$
$$\mu \neq \lambda$$

Определение 1. $I_\lambda = \{p \in P_{m-1} | p \vdots \phi_\lambda\}$

***Главный идеал**, порожденный многочленом* $\phi_\lambda =$

$= \{f \in P_{m(\lambda)-1} | p = f_\lambda \phi_\lambda\}$

I_λ *– линейное подпространство* P_{m-1}

$p_{1,2} \vdots \phi_\lambda \Rightarrow (p_1 + \alpha p_2) \vdots \phi_\lambda$

Теорема 1. $P_{m-1} = \bigoplus_{\lambda} I_\lambda$

Доказательство.

1. Дизъюнктность.

$$\mathbb{0} = \sum_{\lambda} \underbrace{f_\lambda \phi_\lambda}_{\in I_\lambda} = f_\lambda \cdot \phi_\lambda + \underbrace{\sum_{\mu \neq \lambda} f_\mu \underbrace{\phi_\mu}_{\vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)}}}_{\vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)}}$$

$$\Rightarrow f_\lambda \cdot \underbrace{\phi_\lambda \vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)}}_{\text{вз. просты}} \Rightarrow \underset{deg\ f_\lambda = m(\lambda)-1}{f_\lambda} \vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)} \Rightarrow f_\lambda \equiv 0$$

$\Rightarrow \forall \lambda \quad f_\lambda \equiv 0 \Rightarrow f_\lambda \phi_\lambda \equiv \mathbb{0} \Rightarrow$ Дизъюнктны

2. $$\begin{array}{lcl} dim P_{m-1} & = & m \\ \| & & \\ \sum_{\lambda} dim I_\lambda & = & \sum_{\lambda} m(\lambda) = m \end{array}$$

$I_\lambda \subset P_{m-1}$

$\Rightarrow P_{m-1} = \bigoplus_{\lambda} I_\lambda$

□

Следствие 1. $\forall p \in P_{m-1}\ \exists!\ p = \sum_{\lambda} p_\lambda$

$p_\lambda \in I_\lambda$

$\boxed{1 = \sum_{\lambda} p_\lambda \text{ – полиномиальное разложение единицы}}$

Замечание.

1. $\lambda \neq \mu$

$$\begin{array}{cccc} p_\lambda & \cdot & p_\mu & \vdots \ \phi \\ || & & || & \\ f_\lambda\phi_\lambda & & f_\mu\phi_\lambda & = \ \eta \cdot \phi \\ & & \uparrow & \\ & & (t-\lambda)^{m(\lambda)} & \end{array}$$

2. $\forall\lambda \ m(\lambda) = 1$

   Если. Т. е. все корни ϕ взаимно простые.

   $f_\lambda = const \quad (def \ f_\lambda = m(\lambda) - 1 = 0)$