Конспекты по линейной алгебре, 2 сем

Пак Александр

13 марта 2020 г.

Содержание

7 Линейные отображения

7.1 Основные определения

Определение 1. U, V – *линейные пространства над полем* $K(\mathbb{R}/\mathbb{C})$
Линейным отображением $\mathcal{A}$ *называется* $\mathcal{A}: U \to V$, *обладающее свойством линейности:*
$\forall \lambda \in K, \forall u, v \in U$
$\mathcal{A}(u + \lambda v) = \mathcal{A}(u) + \lambda \mathcal{A}(v)$

Замечание.

1. Записываем не $\mathcal{A}(u)$, а $\mathcal{A}u$
2. "Поточечно"выполняются все арифметические операции, свойственные функциям
3. $\mathcal{A}\mathbb{0}_U = \mathbb{0}_V$

Примеры.

1. $\mathbb{0}$ – нулевое отображение $U \to V$
   $\forall u \in U : \mathbb{0}u = \mathbb{0}_v$
2. $\mathcal{E}$ – тождественное отображение: $V \to V$
   $\forall v \in V : \mathcal{E}v = v$
3. $U = V = P_n$ – многочлены степени до n
   $\mathcal{A}: V \to V$
   $\mathcal{A}p = p'(t)$ – дифференциальный оператор
   $\mathcal{A}(p_1 + \lambda p_2) = (p_1 + \lambda p_2)' = p_1' + \lambda p_2' = \mathcal{A}p_1 + \lambda \mathcal{A}p_2$
   Линейное отображение $\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$
4. $U = \mathbb{R}^n$ $V = \mathbb{R}^m$
   $\mathcal{A} = (a_{ij})_{m \times n}$
   $\mathcal{A}: x \in U \to y = \mathcal{A}x \in V$
   $x_1 + \lambda x_2 \in \mathbb{R}^n \to y = \mathcal{A}(x_1 + \lambda x_2) = \mathcal{A}x_1 + \lambda \mathcal{A}x_2$
5. $U \cong V$. То есть отображение, на котором строится изоморфизм является линейным.

Определение 2. $\lambda \in K$ $\mathcal{A}: U \to V$
Произведение линейного отображения на скаляр называется линейное отображение
$\mathcal{B} = \lambda \mathcal{A}$
$\mathcal{B}: U \to V$ $\forall u \in U$ $\mathcal{B}u = \lambda \mathcal{A}u$

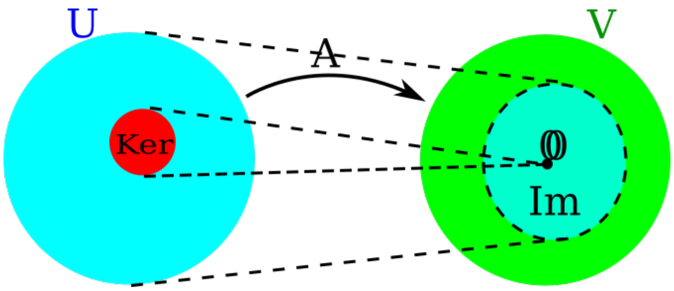
Определение 3. *Суммой линейных отображений* $\mathcal{A}, \mathcal{B}: U \to V$ *называется* $\mathcal{C}: U \to V$
$\forall u \in U$ $\mathcal{C}u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u$ $\boxed{\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}}$

Определение 4. $-\mathcal{A}$ – *отображение противоположное* $\mathcal{A}$
$\forall u \in U$ $(-\mathcal{A})u = -1 \cdot \mathcal{A}u$

$L(U, V) = Hom_K(U, V) = Hom(U, V) = \mathcal{L}(U, V)$
$L(U, V)$ – множество всех линейных отображений из U в V.
Линейное отображение = гомоморфизм с операциями $\lambda \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} + \mathcal{B}$
Выполнены свойства 1–8 линейного пространства (проверить самим).
Значит $\boxed{L(U, V) \text{ – линейное пространство}}$

Определение 5. $\mathcal{A} \in L(U, V)$
$Ker\mathcal{A} = \{u \in U \mid \mathcal{A}u = \mathbb{0}_v\}$ – *ядро линейного отображения.*

Определение 6. $Im\mathcal{A} = \{v \in V = \mathcal{A}u \ \forall u \in U\} =$
$\{v \in V \mid \exists u \in U \ v = \mathcal{A}u\}$ – *образ линейного отображения.*



Упр: $Ker\mathcal{A}$ и $Im\mathcal{A}$ - это подпространства соответственно пространств U и V. То есть они замкнуты относительно линейных операций.
Если $Ker\mathcal{A}$ конечномерное подпространство U, то
$\boxed{dim\ Ker\mathcal{A} = def\mathcal{A}}$ – дефект линейного отображения.
Если $Im\mathcal{A}$ конечномерное подпространство V, то
$\boxed{dimIm\mathcal{A} = rg\mathcal{A}}$ – ранг линейного отображения.

Утверждение. $\mathcal{A}$ *изоморфно между* U *и* $V \Leftrightarrow$

1. $\mathcal{A} \in L(U, V)$
2. $Im\mathcal{A} = V$
3. $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$ *тривиально*

Доказательство. $\mathcal{A}$ изоморфно $\Leftrightarrow$ взаимнооднозначное соответствие + линейность – $\mathcal{A} \in L(U, V)$
$\mathbb{0}_u \leftrightarrow \mathbb{0}_v$, т. к. изоморфизм $\Rightarrow Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$
Пусть $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$
Докажем инъективность $v_1 = v_2 \Leftrightarrow u_1 = u_2$
$v_1 = \mathcal{A}u_1 \ v_2 = \mathcal{A}u_2$
$\mathbb{0} = v_1 - v_2 = \mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2 = \mathcal{A}(u_1 - u_2) = \mathbb{0}$ т. к. ядро тривиально.
Сюръективность. $Im\mathcal{A} = V \Leftrightarrow \forall v \in V : \exists u \in U \mathcal{A}u = v$. Последнее и означает сюръекцию. □

Определение 7. $\mathcal{A} \in L(U, V)$
–инъективно, если $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\}$
–сюръективно, если $Im\mathcal{A} = v$
–биективно $\equiv$ *изоморфизм, если инъекция + сюръекция.*
–эндоморфизм $\equiv$ *линейный оператор, если* $U \equiv V$
$End_k(V) = End(V) = L(V, V)$
–автоморфизм $\equiv$ *эндоморфизм + изоморфизм.*
$Aut_k(V) = Aut(V)$

Определение 8. *Произведением линейных отображений* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$
$\mathcal{A} \in L(W, V) \quad \mathcal{B} \in L(U, W) \quad U \xrightarrow{\mathcal{B}} W \xrightarrow{\mathcal{A}} V$
называется $\mathcal{C} \in L(U, V) : \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$, *которое является композицией функций, определяющих отображения* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$.

$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$

$\forall u \in U : (\mathcal{A}\mathcal{B})u = \mathcal{A}(\mathcal{B}u)$

Очевидно, $\mathcal{C}$ – линейное отображение.

$\Omega \xrightarrow{\mathcal{C}} U \xrightarrow{\mathcal{B}_{1,2}} W \xrightarrow{\mathcal{A}_{1,2}} V$

Упр:

1. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ изоморфизмы $\Rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ изоморфизм
2. $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)\mathcal{B} = \mathcal{A}_1\mathcal{B} + \mathcal{A}_2\mathcal{B}$
   $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2$ – дистрибутивность
3. $\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C}$ – ассоциативность
4. $\lambda\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{A}\lambda\mathcal{B}$

$End(V)$ – ассоциативная унитарная алгебра

$\mathcal{E}$ – единица $\mathcal{E}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{E}$

Определение 9. $\mathcal{A} \in L(U, V)$ *изоморфно.*

$\forall v \in V \exists! u \in U : v = \mathcal{A}u$

$\mathcal{A}^{-1} : V \to U$

$\boxed{\mathcal{A}^{-1}v = u}$

Упр: $\mathcal{A}^{-1} \in L(V, U)$

$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}_v \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}_u$

$\mathcal{A} \in End(U)$ – линейный оператор

$\mathcal{A}^{-1} \in End(V)$ – обратный оператор

Определение 10. $U_0 \subset U \quad \mathcal{A} \in L(U, V)$

Сужением линейного отображения $\mathcal{A}$ на линейное подпространство U_0 называется

$\mathcal{A}|_{U_0} : U_0 \to V \quad \forall u \in U_0 \ \mathcal{A}|_{U_0}u = \mathcal{A}u$

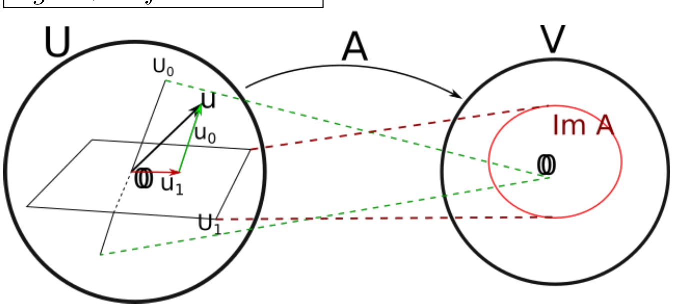
Утверждение. $\mathcal{A}$ *изоморфизм* $\in L(U, V) \Rightarrow \mathcal{A}|_{U_0} \in L(U_0, Im(\mathcal{A}|_{U_0}))$ *– изоморфизм*

Примеры.

1. $\mathbb{0} : U \to U$ – не сюръекция, не инъекция, эндоморфизм, не автоморфизм.
2. $\mathcal{E} : U \to U$ – автоморфизм
3. $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} \quad \mathcal{A} : P_n \to P_n$ – эндоморфизм, не инъекция, не сюръекция.
4. $x \in \mathbb{R}^n \to y = \mathcal{A}x \in \mathbb{R}^n$ – эндоморфизм.
   Сюръекция $\Leftrightarrow rg\mathcal{A} = n \Leftrightarrow \exists \mathcal{A}^{-1} \Leftrightarrow$ инъекция.
   То есть автоморфизм.

Теорема 1 (о rg и def линейного отображения)**.** $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\boxed{rg\mathcal{A} + def\mathcal{A} = dimU}$



Доказательство. $U_0 = Ker\mathcal{A}$
Дополним линейное пространство U_1 до пр-ва U:
$U = U_0 \oplus U_1 \quad U_1 \cap U_0 = \{\mathbb{0}\}$
$\forall u \in U : u = u_0 + u_1$ (единственным образом)
$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1 \qquad Im\mathcal{A} = \mathcal{A}(U_1)$
$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} : U_1 \to Im\mathcal{A}$
$\mathcal{A}_1$ – изоморфизм? $Im\mathcal{A}_1 = Im\mathcal{A}$ – сюръекция
$\left.\begin{array}{c} \forall w \in Ker\mathcal{A}_1 \in U_1 \\ KerA_1 \subset KerA = U_0 \end{array}\right\} \Rightarrow w \in U_1 \cap U_0 = \{\mathbb{0}\} \Rightarrow Ker\mathcal{A}_1 = \{\mathbb{0}\} \Rightarrow \mathcal{A}_1$ изоморфизм.
$U_1 \cong Im\mathcal{A} \Leftrightarrow dimU_1 = dim(Im\mathcal{A})$ – инъекция.
Т. к. $U = U_0 \oplus U_1$, то $dimU = dimU_0 + dimU_1 = \underbrace{dimKer\mathcal{A}}_{def\mathcal{A}} + \underbrace{dimIm\mathcal{A}}_{rg\mathcal{A}}$ □

Следствие 1 (Характеристика изоморфизма)**.**
$\mathcal{A} \in L(U, V)$ *Следующие условия эквивалентны:*

1. $\mathcal{A}$ *изоморфно*
2. $dimU = dimV = rg\mathcal{A}$
3. $dimU = dimV$
   $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\} \Leftrightarrow def\mathcal{A} = 0$

Следствие 2. $\mathcal{A} \in End(V)$ *Следующие условия эквивалентны:*

1. $\mathcal{A} \in Aut(V)$
2. $dimV = rg\mathcal{A}$
3. $Ker\mathcal{A} = \{\mathbb{0}\} \Leftrightarrow def\mathcal{A} = 0$

7.2 Матрица линейного отображения. Изоморфизм алгебр. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса.

$\mathcal{A} \in L(U, V)$
$\xi_1 \dots \xi_n$ базис U
$\eta_1 \dots \eta_m$ базис V
$\forall u \in U \;\; u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\xi_i \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$
$\mathcal{A}u = \mathcal{A}(\sum\limits_{i=1}^{n} u_i\xi_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\mathcal{A}\xi_i$ Достаточно знать, как $\mathcal{A}$ работает на базисных векторах $\xi_1 \dots \xi_n$

$Im\mathcal{A} = span(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$

$$\mathcal{A}\xi_i \in V = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m) \qquad a_{ji} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$\boxed{A = (A_1 \dots A_i \dots A_n) = (a_{ij})_{m \times n}}$ матрица линейного отображения $\mathcal{A}$ относительно базисов (ξ, η)

Частный случай: $\mathcal{A} \in End(V) : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \to \underset{e_1 \dots e_n}{V}$

$A = (a_{ji})_{n \times n}$ – матрица линейного оператора

$Ae_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$

Примеры.

1. $\mathcal{E} : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \to \underset{e_1 \dots e_n}{V} \quad \mathcal{E} e_i = e_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow E_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

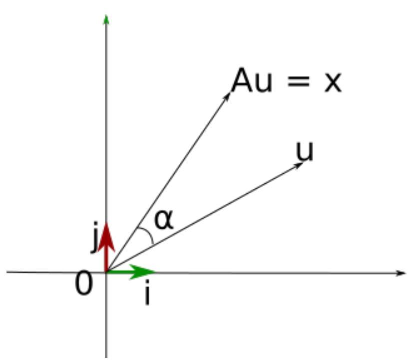
2.

$$\mathcal{E} : \underset{e'_1 \dots e'_n}{V} \to \underset{e_1 \dots e_n}{V}$$

$$\mathcal{E} e'_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ji} e_j \leftrightarrow T_i = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix}$$

$$[\mathcal{E}]_e = T = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix} = T_{e \to e'}$$

3.

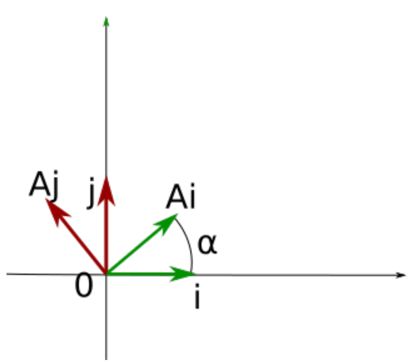


$\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$v = \mathcal{A} u$

Поворот векторов в плоскости на угол α.

Очевидно, линейный оператор.



$\mathcal{A}_i = \cos\alpha i + \sin\alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$

$\mathcal{A}_j = -\sin\alpha i \cos\alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$

$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

4. $\mathcal{A} : \overset{1,t,t^2}{p_2} \to \overset{1,t,t^2}{p_2}$

$\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$

$$\mathcal{A}1 = 1' = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}t = t' = 1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}t^2 = (t^2)' = 2t \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \underset{(1,t,t^2)}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A} : \underset{1,t,t^2}{p_2} \to \underset{1,t}{p_1}$

$$\mathcal{A} = \frac{d}{dt} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Утверждение. $L(U, V) \cong M_{m \times n}$

(Линейное пространство матриц с вещ.(компл.) элементами размерности $m \times n$.

Доказательство. Изоморфизм $\equiv$ биекция + линейность.

Биекция. $\mathcal{A} \to A_{m \times n}$ – поняли, как сопоставлять.

Теперь обратно. Пусть $A_{m \times n} = (a_{ij})$

$U\ \xi_1 \ldots \xi_n$ базис $\qquad \mathcal{A} : U \to V$

$V\ \eta_1 \ldots \eta_m$ базис $\qquad \mathcal{A}\xi_i = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j \in V$

$\forall u \in U\ u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \xi_i$

$\mathcal{A}u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \mathcal{A}\xi_i \in V \Rightarrow \mathcal{A} \in L(U, V)\ \mathcal{A}, \mathcal{B} \leftrightarrow A, B$

$\forall \lambda \in K\ \mathcal{A} + \lambda\mathcal{B} \overset{?}{\leftrightarrow} A + \lambda B$

$$(\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B})\xi_i = \mathcal{A}\xi_i + \lambda\mathcal{B}\xi_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} n_j + \lambda \sum_{j=1}^{m} b_{ji}\eta_j = \sum_{j=1}^{m} (a_{ji} + \lambda b_{ji})\eta_j \leftrightarrow c_i = A_i + \lambda B_i \leftrightarrow A + \lambda B \Rightarrow$$

линейность $\Rightarrow$ изоморфизм. $\square$

$\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B} \leftrightarrow A + \lambda B$

$\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow A \cdot B$

$\mathcal{A}, \mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A, A^{-1}$

$End(V) \cong M_{n \times n}$ – ассоциативные унитарные алгебры. (Координатный изоморфизм).

Алгебры изоморфны, т.к. сохраняются свойства дистрибутивности, ассоциативности и т. д.

Я не особо понял, что мы дальше делаем, но у меня это записано

$U \xi_1 \ldots \xi_n \quad \forall u \in U \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

$V \eta_1 \ldots \eta_m \qquad u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \xi_i$

$$\forall v \in V \leftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$v = \sum\limits_{j=1}^{m} v_j \eta_j$

$\mathcal{A} \in L(U,V) \underset{\xi,\eta}{\leftrightarrow} A$

$\sum\limits_{j=1}^{m} v_j \eta_j = v = \mathcal{A}u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \mathcal{A}\xi_i = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji}\eta_j = \sum\limits_{j=1}^{m} (\sum\limits_{i=1}^{n} u_i a_{ji})\eta_j$

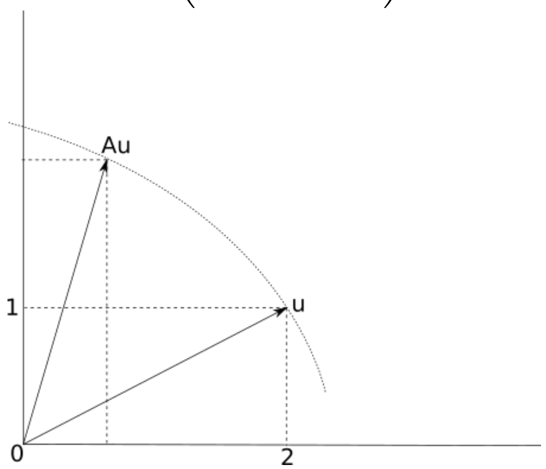
Так как координаты определяются единственным образом:

$\boxed{v_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji} u_i} \;\leftrightarrow\; \boxed{v = Au} \;\leftrightarrow v = \mathcal{A}u$

Примеры.

1. $\mathcal{A}$ поворот на угол α

   $(i,j) \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$



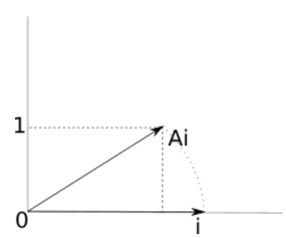
   $\alpha = 45^\circ \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

   $\boldsymbol{u} \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\mathcal{A}u} \leftrightarrow v = Au = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

   $i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $\mathcal{A}i \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$



2. $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} : \underset{1,t,t^2}{p_2} \to \underset{1,t,t^2}{p_2}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\overbrace{3t^3 + 6t + 4}^{u(t)})' = 6t + 6$$

$$3t^2 + 6t + 4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}u \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow 6 + 6t$$

Теорема 1 (Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса)**.** $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$U \quad \xi = (\xi_1 \dots \xi_n) \quad$ *– базисы* $\quad \mathcal{A} \xrightarrow{(\xi,\eta)} A$

$\quad \xi' = (\xi'_1 \dots \xi'_n)$

$T_{\eta \to \eta'}$ *– матрица перехода*

$V \quad \eta = (\eta_1 \dots \eta_m) \quad$ *– базисы* $\quad \mathcal{A} \xrightarrow{(\xi',\eta')} A'$

$\quad \eta' = (\eta'_1 \dots \eta'_m)$

$\boxed{\mathcal{A}' = T^{-1}_{\eta \to \eta'} \cdot A \cdot T_{\xi \to \xi'}}$

Ну видимо сейчас доказательство, но я не уверен.

Доказательство.

$$\begin{array}{ccc} \underset{\xi_1 \dots \xi_n}{U} & \overset{\mathcal{A}}{\rightrightarrows} & \underset{\eta_1 \dots \eta_m}{V} \\ \mathcal{E}_u \uparrow\upharpoonleft & & \downharpoonleft\uparrow \mathcal{E}_v \\ \underset{\xi'_1 \dots \xi'_n}{U} & \overset{\mathcal{A}}{\rightarrow} & \underset{\eta'_1 \dots \eta'_m}{V} \end{array}$$

$\mathcal{A} = \mathcal{E}_v^{-1} \mathcal{A} \mathcal{E}_u \leftrightarrow A' = T^{-1}_{\eta \to \eta'} A T_{\xi \to \xi'}$

$\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow AB$

$\mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A^{-1}$

$\mathcal{E}_v^{-1} \leftrightarrow T^{-1}_{\eta \to \eta'}$ Смотри пример 2 $\square$

Следствие 1.

$\mathcal{A} \in End(V) \quad \mathcal{A} : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \to \underset{e_1 \dots e_n}{V}$

$e_1 \dots e_n$ *базис* $V \leftrightarrow A$

$e'_1 \dots e'_n$ *базис* $\leftrightarrow A'$

$\mathcal{A} : \underset{e'_1 \dots e'_n}{V} \xrightarrow{A'} \underset{e'_1 \dots e'_n}{V}$

$T = T_{e \to e'}$

$\boxed{A' = T^{-1} A T}$

Замечание. В условиях теоремы $v = \mathcal{A}u \begin{array}{l} \xleftrightarrow{(\xi,\eta)} v = Au \\ \xleftrightarrow{(\xi',\eta')} v' = A'u \end{array}$

$V = T_{\eta \to \eta'} V'$

$U = T_{\xi\to\xi'}U'$
$T_{\eta\to\eta'}v' = AT_{\xi\to\xi'}u'$
$v' = \underbrace{\boxed{T^{-1}_{\eta\to\eta'}AT_{\xi\to\xi'}}}_{A'}u'$

7.3 Инварианты линейного отображения

Инвариант - свойство, которое сохраняется при некоторых определенных преобразованиях

$\boldsymbol{v} = \mathcal{A}\boldsymbol{u} \leftrightarrow v = Au$

Форма записи действия линейного отображения на вектор инвариантна относительно замены базиса.

$v' = A'u'$

Определение 1. $A_{m\times n}$

$ImA = span(A_1, A_2, \dots A_n) = \{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i A_i | \alpha_i \in K\} =$

$\{y = Ax \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m) | x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)\}$

$x = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$

$rgA = dimImA$ — *ранг матрицы*

$KerA = \{x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n) | Ax = \mathbb{0}\} = \{$*множество решений СЛОУ* $\}$ — *ядро матрицы*

$dimKerA = n - rgA = defA$ — *дефект матрицы*

$\boxed{rgA + defA = n}$ — *аналогично теореме о ранге и дефекте*

Теорема 1. $\forall\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\boxed{\begin{matrix} rg\mathcal{A} = rgA \\ def\mathcal{A} = defA \end{matrix}}$,

где матрица A – матрица линейного отображения в некоторых базисах пространств U и V.

$rg\mathcal{A}$, $def\mathcal{A}$ инвариантны относительно выбора базиса.

Доказательство. $\mathcal{A} \leftrightarrow \underset{(\xi,\eta)}{A}$ $\xi = (\xi_1 \dots \xi_n)$ базис U

$\eta = (\eta_1 \dots \eta_m)$ базис V

$Im\mathcal{A} = span(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n)$

$\mathcal{A}\xi_i \underset{\cong}{\overset{\leftrightarrow}{}} A_i$

Координатный изоморфизм.

Пусть $rgA = k \Rightarrow k$ столбцов линейно независимы, а остальные – их линейная комбинация.

По свойствам изоморфизма это означает, то из $\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n$ k линейно независимые, а остальные – их линейная комбинация $\Rightarrow rg\mathcal{A} = dimIm\mathcal{A} = k$

$$\begin{array}{ccc} dimU & = & rg\mathcal{A} \; +def\mathcal{A} \\ \| & & \| \\ n & & rgA \\ & & \| \\ & & k \end{array}$$

$def\mathcal{A} = n - rgA = n - k = dim$ пространства решений $Ax = 0 = defA$ $\square$

Следствие 1. *$\mathcal{A}$ изоморфизм $\Leftrightarrow A$ невырожденная ($\exists A^{-1}$), где A матрица в некотором базисе.*

Доказательство. Изоморфизм $\Leftrightarrow \begin{matrix} defA = 0 \\ dimU = dimV \end{matrix} \Leftrightarrow rgA = n \Leftrightarrow A$ невырожденная. □

Теорема 2. *$det\mathcal{A}$ не зависит от выбора базиса пространства V (т.е. является инвариантом относительно выбора базиса). И при этом $det\mathcal{A} = detA$, где A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе.*

Доказательство. $V\ e_1 \dots e_n$

$det\mathcal{A} = det(\mathcal{A}e_1 \dots \mathcal{A}e_n)$

$$\mathcal{A}e_k = \sum_{i_k=1}^{n} a_{i_k k} e_{i_k} \xrightarrow{A=(a_{ij})} A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = (det\ n\text{-форма, т. е. полиномиальная форма})$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=2}^{n} \dots \sum_{i_n=n}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n}\ det(e_{i_1}, e_{i_2} \dots e_{i_n}) = (n\text{-форма} - 2 \text{ одинаковых аргумента} \Rightarrow det = 0)$$

$$= \sum_{\sigma=(i_1 \dots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \overbrace{\underset{\text{все разные}}{det(e_{i_1} \dots e_{i_n})}}^{(-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} \quad det(e_1 \dots e_n)=1} = \sum_{\sigma=(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} = detA$$

$e'_1 \dots e'_n$ базис V

$T = T_{e \to e'}$

$det\mathcal{A} = detA' \stackrel{?}{=} detA$

$A' = T^{-1}AT$

$detA' = detT^{-1} \cdot detA \cdot detT = detA$ □

Определение 2. *A, B называются подобными, если*
$\exists$ невырожденная $C : B = C^{-1}AC$

Примеры. Матрицы линейного оператора в разных базисах подобны

$A' = T^{-1}AT$

A, B подобны $\Rightarrow detA = detB$

Следствие 1. *f – n-форма на V*

$\forall \xi_1 \dots \xi_n \quad \forall \mathcal{A} \in End(V)$

$\Rightarrow \boxed{f(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n) = det\mathcal{A}\ f(\xi_1 \dots \xi_n)}$

Доказательство. $f(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n) =$

$\underset{n\text{-форма}}{g(\xi_1 \dots \xi_n)} = det(\xi_1 \dots \xi_n) \cdot g(e_1 \dots e_n) =$

$det(\xi_1 \dots \xi_n) \cdot \underset{\text{смотри док-во теоремы}}{f(\mathcal{A}e_1 \dots \mathcal{A}e_n)} = det(\xi_1 \dots \xi_n) \sum_{\sigma} (-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \cdot f(e_1 \dots e_n) =$

$$\mathcal{A}e_k = \sum_{k=1}^{n} a_{i_k k} e_{i_k} = \underbrace{det(\xi_1 \dots \xi_n) f(e_1 \dots e_n)}_{f(\xi_1 \dots \xi_n)} \underbrace{detA}_{det\mathcal{A}}$$ □

Замечание. A – линейный оператор, $B_{n \times n}$

$AB = (AB_1\ AB_2 \dots AB_n)$

$det(AB) = det(AB_1 \dots AB_n) =$

$= detA \cdot det(B_1 \dots B_n) = detA \cdot detB$

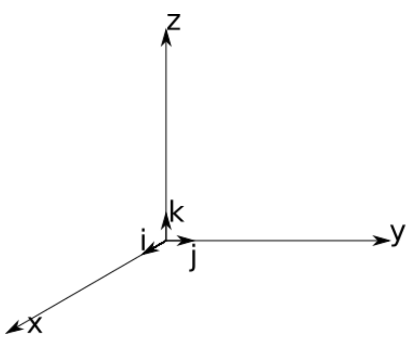
Следствие 2. $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in End(V)$
$det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = det\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$

Доказательство. $det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = det(AB) = detA \cdot detB = det\mathcal{A} \cdot det\mathcal{B}$ □

Следствие 3. $\mathcal{A} \in Aut(V)$
$\Leftrightarrow det\mathcal{A} \neq 0$
Причем $det \det \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{det\mathcal{A}}$

Доказательство. Из следствия 2
$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}$
$det\mathcal{A} \cdot det\mathcal{A}^{-1} = det\mathcal{E} = 1 \Rightarrow \ldots$ □

Примеры. V_3



$V_{abc\text{–правая тройка}} = \underbrace{\overline{a}\overline{b}\overline{c}}_{\text{смешанное пр-е}} = f(\underbrace{\overline{a}\overline{b}\overline{c}}_{\text{3-форма}})$
$\mathcal{A} \in End(V_3)$ $u \in V_3 \to v = \mathcal{A}u \in V_3$
Как поменяется объем параллелепипеда при линейном преобразовании?

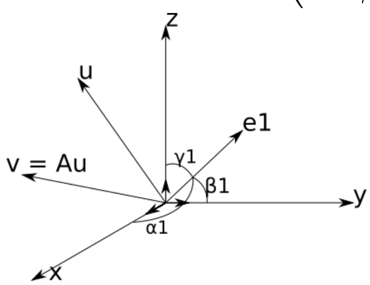
$\mathcal{A}(V_{(\overline{a}\overline{b}\overline{c})}) = f(\mathcal{A}\overline{a}, \mathcal{A}\overline{b}, \mathcal{A}\overline{c}) = det\mathcal{A} \cdot f(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = det\mathcal{A} \cdot V(\overline{a}\overline{b}\overline{c})$
$\lambda = |det\mathcal{A}|$ Объем увеличится в λ раз.

1. $\mathcal{A} : V_3 \to V_3$
   Оператор подобия
   $\forall u \in V_3 : \mathcal{A}u = \mu u, \mu \in \mathbb{R}$
   $$\mathcal{A}\overline{i} = \mu\overline{i} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   $A?$
   $$\mathcal{A}\overline{j} = \mu\overline{j} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$
   $$\mathcal{A}\overline{k} = \mu\overline{k} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix}$$
   $\lambda = |det\mathcal{A}| = |detA| = |\mu^3|$

2. $\mathcal{A}: V_3 \to V_3$

Оператор поворота

$$\mathcal{A}: \quad \begin{array}{l} \bar{i} \to e_1 \nearrow \\ \bar{j} \to e_2 \to \\ \bar{k} \to e_3 \searrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\beta_1 \\ \cos\gamma_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 \\ \cos\beta_2 \\ \cos\gamma_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_3 \end{pmatrix} \end{array}$$



$|e_i| = 1$
$(e_i, e_j) = 0$
$i \neq j$

$"\mathcal{A}(V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}})" = det\mathcal{A} \cdot V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$detA = |\cdots| \underbrace{e_1 e_2 e_3}_{\text{Смешанное произведение}} = 1$$

$$(detA)^2 = detA \cdot detA^T = det(AA^T) = det \begin{pmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,e_2) & (e_1,e_3) \\ (e_2,e_1) & (e_2,e_2) & (e_2,e_3) \\ (e_3,e_1) & (e_3,e_2) & (e_3,e_3) \end{pmatrix} = detE = 1$$

$|detA| = 1$

Утверждение. *A, B подобные матрицы $\Rightarrow trA = trB$*
$trace =$ след

Доказательство. A, B подобные $\Rightarrow$
$\exists\, C$ невырожденная: $C^{-1}(AC) = B$

$$trB = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}^{"-1"}(AC)ji = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_{ij}^{''-1''} a_{jk} C_{ki} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_{ki} C_{ij}^{''-1''}}_{\delta_{kj}} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = trA$$

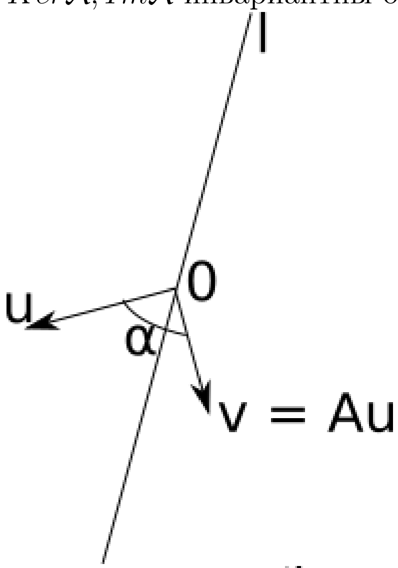
$$\boxed{\delta_{kj} = \left[\begin{array}{l} 1, k = j \\ 0, k \neq j \end{array}\right.} \quad CC^{-1} = E$$ □

Определение 3. *$tr\mathcal{A} = trA$, где A – матрица оператора в некотором базисе.*
$tr\mathcal{A} = trA = trA'$ — не зависит от выбора базиса, т.к. A и A' подобны.

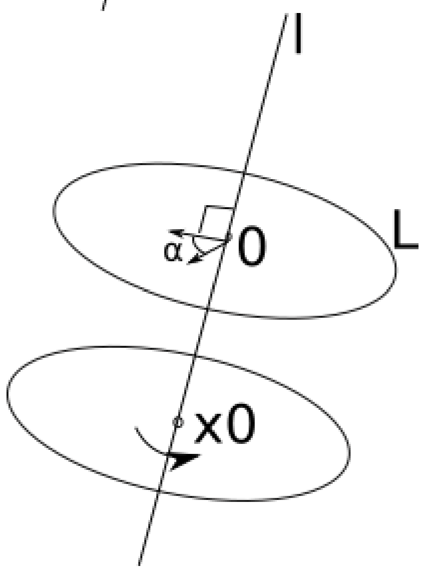
Определение 4. *$L \subset V$ L инвариантно относительно $\mathcal{A} \in End(V)$ если $\forall u \in L : \mathcal{A}u \in L$*

Примеры.

1. $\mathbb{0}, V$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$
2. $Ker\mathcal{A}, Im\mathcal{A}$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$



$\mathcal{A} : V_3 \to V_3$
Поворот вектора(пр-ва) относительно оси l на угол α



Плоскость $\perp l$ инвариантна относительно $\mathcal{A}$
$P = x_0 + L$ инвариантно

Теорема 3. *$L \subset B$ $\mathcal{A} \in End(V)$. Линейное пространство инвариантно относительно $\mathcal{A}$ $\Rightarrow \exists$ базис пространства V, т.ч. матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе будет иметь вид: $A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline \mathbb{0} & A_3 \end{array}\right)$*
$A_1 k \times k$ где $k = dimL$

Доказательство. $L = span(\underset{\text{базис}}{e_1 \dots e_k})$
Дополним до базиса $V : e_1 \dots e_k e_{k+1} \dots e_n$

$$e_i \in L \Rightarrow \underset{1\le i\le k}{\mathcal{A}e_i} \in L = \sum_{m=1}^{k} a_{mi}e_m + \sum_{m=k+1}^{n} 0\cdot e_m \leftrightarrow A_i^1 = \begin{pmatrix} a_{1i}\\ \vdots \\ a_{ki} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{k+1\le i\le n}{\mathcal{A}e_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j \leftrightarrow A_i^{2,3} = \begin{pmatrix} a_{1i}\\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{1i} & \\ \vdots & A_i^1 \\ a_{ki} & \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} A_i^{2,3} \\ \dots \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix}} \end{pmatrix}$$ □

Следствие 1. $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i \quad L_i$ *инвариантно* $\mathcal{A}$

$\Rightarrow \exists$ *базис пр-ва* V*, в котором матрица оператора* $\mathcal{A}$ *будет иметь* <u>*блочно-диагональный вид:*</u>

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A^1} & \dots & 0 \\ & \boxed{A^2} & \\ 0 & & \boxed{A^n} \end{pmatrix}$$

$$\Bigg(\underset{\textit{размерность матрицы}}{A^i}\Bigg) = dimL_i$$

Доказательство. $L_1 = span(\underset{\text{базис}}{e_i^1 \dots e_i^{i_k}})$

т.к. $\bigoplus$, то базис V – объединение базисов L_i

$V = span(e_1^1 \dots e_m^{i_m})$

$\mathcal{A}^j e_i \in L_i \Rightarrow$ раскладываем по базису $L_i \Rightarrow$

на остальных позициях в столбике матрицы оператора будут нули.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} & \overset{L_1}{\underline{1 \dots i_1}} & & & \overset{L_2}{\underline{i_1+1 \dots i_2}} & & \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ отвечает позиции базисных элементов пр-ва L_iв базисе V □

Следствие 2. $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i \quad L_i$ *инвариантно относительно* $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} \in End(V) \Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^{m} Im\mathcal{A}|_{L_i}$$

Доказательство. $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i \Rightarrow \forall\ u \in V\ \ \exists! u = \sum\limits_{i=1}^{m} u_i \in L_i$

$Im\mathcal{A} \subset \sum\limits_{i=1}^{m} Im\mathcal{A}|_{L_i}$

$v \in Im\mathcal{A} = \mathcal{A}u = \sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{A}u_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i}$

Верно и "$\supset$"

Пусть $v_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i} : v_i = \mathcal{A}u_i, u_i \in L_i$

$\sum\limits_{i=1}^{m} v_i = \sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{A}u_i = \mathcal{A}(\sum\limits_{i=1}^{m} u_i \in V) \in Im\mathcal{A}$

$Im\mathcal{A} = \sum\limits_{i=1}^{m} Im\mathcal{A}|_{L_i}$

$\bigoplus$ прямая?

$v_i \in Im\mathcal{A}|_{L_i}$

$v_i = \mathcal{A}u_i \quad u_i \in L_i$

$\sum\limits_{i=1}^{m} v_i = \mathbb{0} \longleftarrow$

Т.к. L_i инвариантна $\Rightarrow \mathcal{A}u_i \in L_i \Rightarrow v_i \in L_i$, но L_i дизъюнктны $\nwarrow \Rightarrow \forall i : v_i = \mathbb{0}$

$\Rightarrow Im\mathcal{A}|_{L_i}$ дизъюнктны $\Rightarrow \bigoplus$ $\square$

7.4 Собственные числа и собственные вектора линейного оператора.

$\mathcal{A} \in End(v) \quad V$ линейное пространство над K

Определение 1. *$\lambda \in K$ – **собственное число** (с.ч.) линейного оператора $\mathcal{A}$, если $\exists\ \boxed{v \in V \neq \mathbb{0}}$, который называется **собственным вектором** (с.в.), такой что $\boxed{\mathcal{A}v = \lambda v}$*

Пусть $v : \mathcal{A}v = \lambda v \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})v = 0 \Leftrightarrow v \in Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$

Определение 2. *$V_\lambda = Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = \{$с.в. v и $\mathbb{0}\}$ называется собственным подпространством.*
$\boxed{\gamma(\lambda) := \dim V_\lambda}$ – геометрическая кратность с.ч.

$\gamma \geq 1$

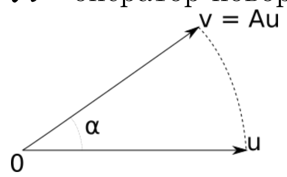
V_λ и $\gamma(\lambda)$ – инварианты относительно выбора базиса.

$v \in V_\lambda\ \ \mathcal{A}v = \lambda v \overset{?}{\in} V_\lambda$

$\mathcal{A}(\lambda v) = \lambda\mathcal{A}v = \lambda^2 v = \lambda(\lambda v)$

Примеры.

1. $\mathcal{A}$ – оператор подобия:
   $\mathcal{A}v = \mu \cdot v \quad \mu \in K$
   μ с.ч. $\quad V_\lambda = V$
2. $\mathcal{A}$ – оператор поворота на плоскости на угол α



$\alpha \neq \pi k \Rightarrow$ нет с.в.

3. Пусть λ с.ч.$= 0$ $\quad \mathcal{A}v = \mathbb{0}$ с.в. $\neq \mathbb{0} \quad \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow Ker\mathcal{A}$ нетривиально $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ не автоморфизм $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ необратимо $\Leftrightarrow det\mathcal{A} = 0$
4. $\mathcal{A} : V \to V$
   $v_1 \dots v_n$ базис, т.ч. $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \Lambda$
   Базис состоит из с.в. отвечающих с.ч. $\lambda_1 \dots \lambda_n$
   $\mathcal{A}v_i = \lambda_i v_i \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
   λ – с.ч. v с.в. $\neq \mathbb{0} \Leftrightarrow Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$ нетривиально $\Leftrightarrow det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = 0$

Определение 3. $\chi_{\mathcal{A}}(t) = det(\mathcal{A} - t\mathcal{E})$ – *характеристический многочлен оператора* $\mathcal{A}, t \in K$

$V e_1 \dots e_n$ базис $\quad \mathcal{A} \leftrightarrow A$
$\chi_{\mathcal{A}}(t) = det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) = det(A - tE)$ т.к. det оператора инвариантен относительно выбора базиса.

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = det(A - tE) = \begin{vmatrix} (a_{11} - t) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - t) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & (a_{nn} - t) \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} (\underbrace{a_{11} + \dots + a_{nn}}_{trA = tr\mathcal{A}}) t^{n-1} + \dots + \underbrace{detA}_{det\mathcal{A}}$$

По теореме Виета: $det\mathcal{A} = \underbrace{\lambda_1 \dots \lambda_n}_{\text{корни } \chi_{\mathcal{A}}(t)}$

$\underline{\underline{\lambda \in K}}$ с.ч. $\Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0 \quad (\underline{\underline{\lambda \in K}})$
λ корень характеристического многочлена.
$k = \mathbb{C} \Rightarrow n$ с.ч. с учетом кратности корней характеристического многочлена.
$k = \mathbb{R} \Rightarrow$ только вещественные корни χ_A будут с.ч.
$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n \prod\limits_{\lambda \text{ корень}} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)}$
$\alpha(\lambda)$ называется алгебраической кратностью с.ч. λ (если $\lambda \in K$)

Определение 4. *Множество всех с.ч. с учетом алгебраической кратности называется* ***спектром*** *линейного оператора.* $(\lambda, \alpha(\lambda))$
Спектр – простой, если все с.ч. попарно-различны.
$\alpha(\lambda) = 1 \ \forall \ \lambda$

Немножко про алгебраическую кратность
$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 = a_n \prod\limits_{a\text{–корень}} (t - a)^{m_a}$

a–корень $f \Leftrightarrow f(a) = 0 \Leftrightarrow f \vdots (t - a)$

a – корень f **кратности** $m \Leftrightarrow \begin{matrix} f \mid (t - a)^m \\ f \nmid (t - a)^{m+1} \end{matrix}$

$\Leftrightarrow f(t) = (t-a)^m g(t)$

a_0 – произведение всех корней с учетом кратности $= (-1)^n \prod a \qquad a$–корень с учетом кратности

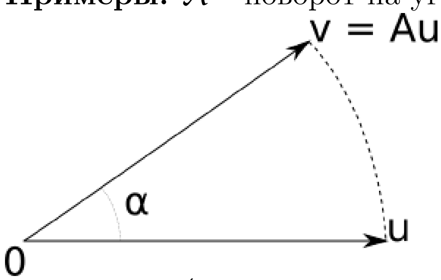
$\det \mathcal{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n$

$(-1)^n t^n + \ldots = (-1)^n (t-a_1)(t-a_2)\dots(t-a_n)$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n t^n + \ldots = (-1)^n (t-\lambda_1)\dots(t-\lambda_n)$

$\det \mathcal{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ с.ч.

Примеры. $\mathcal{A}$ – поворот на угол α



$\bar{i}\ \bar{j}$

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = det \begin{pmatrix} \cos\alpha - t & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - t \end{pmatrix} =$$

$\cos^2\alpha - 2\cos\alpha t + t^2 + sin^2\alpha = t^2 - 2\cos\alpha t + 1$

$D = 4\cos^2\alpha - 4 < 0 \quad \alpha \neq \pi k$

нет вещ. корней $\Rightarrow$ нет с.ч.

$K = \mathbb{R}$

Теорема 1. *λ с.ч. $\mathcal{A} \Rightarrow$* $\boxed{1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)}$

Доказательство. Пусть $\gamma(\lambda) = k = dimV_\lambda = span(\underbrace{v_1 \dots v_k}_{\text{базис}})$

V_λ инвариантно относительно $\mathcal{A} \Rightarrow \exists$ базис: матрица оператора будет иметь вид:

(инвариантное линейное подпространство. Смотри Теорему пункта 7.3

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A^1 & A^2 \\ \hline 0 & A^3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & \\ 0 & \lambda & A^2 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & A^3 \end{array}\right) \quad A^1_{k\times k}$$

Базис $= v_1 \dots v_k v_{k+1} \dots v_n$

$$\mathcal{A} \underset{i=1\dots k}{v_i} \in V_\lambda = \lambda v_i \leftrightarrow A^1_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = det \left(\begin{array}{cc|c} \lambda - t & 0 & \\ 0 & \lambda - t & A^2 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & A^3 - tE_{n-k} \end{array}\right) \underset{\text{св-ва } det}{=} \begin{vmatrix} \lambda - t & 0 \\ 0 & \lambda - t \end{vmatrix} |A^3 - tE_{n-k}| = (\lambda - t)^k \chi_{\mathcal{A}^3}(t)$$

Очевидно, λ корень $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ кратности не меньше, чем $k \Rightarrow \alpha(\lambda) \geq k = \gamma(\lambda)$ $\square$

Теорема 2. *$\lambda_1 \dots \lambda_m$ – различные с.ч. $\mathcal{A}$*

$v_1 \dots v_m$ соответствующие им с.в. $\Rightarrow$

$\Rightarrow v_1 \dots v_m$ линейно независимы.

Доказательство. Метод математической индукции

1. База. $m = 1 \quad \lambda_1 v_1$ с.в. – линейно независимы, т.к. $v_1 \neq \mathbb{0}$
2. Индукционное предположение. Пусть верно для $m-1$
3. Индукционный переход. Докажем, что верно для m

   От противного. Пусть $\lambda_1 \dots \lambda_m$ попарно различные с.ч. $\mathcal{A}$,

   а $v_1 \dots v_m$ линейно зависимы.

   Пусть $v_m = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$

   $$\begin{array}{l} \mathcal{A}_{v_m} = \sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i \mathcal{A}_{v_i} = \sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i \lambda_i v_i \\ || \\ \lambda_m v_m = \sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i \lambda_m v_i \end{array}$$

   $\sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i \underset{\overset{\nparallel}{0}}{(\lambda_i - \lambda_m)} v_i = \mathbb{0} \;\; v_i$ линейно независим по инд. предположению

   $\Leftrightarrow \alpha_i = 0 \;\; \forall \; i = 1 \dots m-1 \Rightarrow$

   $\Rightarrow v_m = \mathbb{0}$ — Противоречие, т.к. v_m с.в. и значит не может быть $\mathbb{0}$

$\square$

Следствие 1. *$\lambda_1 \dots \lambda_m$ различные с.ч. $\mathcal{A} \Rightarrow V_{\lambda_1} \dots V_{\lambda_m}$ дизъюнктны.* $\left(\bigoplus\limits_{\substack{\lambda \\ \text{с.ч.}}} V_\lambda \right)$

Доказательство. $v_1 + \dots + v_m = \mathbb{0} \;\; v_i \; \in V_{\lambda_i}$

Если хотя бы 1 слагаемое $\neq \mathbb{0} \Rightarrow$ это слагаемое с.в. $\Rightarrow$ противоречие с линейной независимостью с.в., отвечающих различным с.ч. $\Rightarrow \forall \; i : v_i = \mathbb{0} \Rightarrow$ дизъюнктны. $\square$

Теорема 3. *$V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i \;\; L_i$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$*

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{L_i} : L_i \to L_i \Rightarrow \boxed{\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{i=1}^{m} \chi_{\mathcal{A}_i}(t)}$$

Доказательство. см. теорему - следствие п. 7.3

Базис V – объединение базисов L_i

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{A^1} & & 0 \\ & \boxed{A^2} & \\ 0 & & \boxed{A^m} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}_i \leftrightarrow A^i \qquad A_{k_i \times k_i}$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = |A - tE| \underset{\text{свойства } det}{=} |A^1 - tE_{k_1}||A^2 - tE_{k_2}| \dots |A^m - tE_{k_m}| =$

$$\begin{array}{cccc} \chi_{A^1}(t) & \chi_{A^2}(t) & \dots & \chi_{A^m}(t) \\ || & || & & || \\ \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & & \mathcal{A}^m \end{array}$$

$\square$

Все свойства с.ч. и с.в. доказанные для оператора верны для числовых матриц пространств $\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m$.

$A_{n \times n} \quad \lambda$ с.ч. $A : \exists x \in \mathbb{R}^n \neq \mathbb{0} \quad Ax = \lambda x$

$y = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{линейный оператор}}}{Ax}$

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$

с.ч., с.в.? $\alpha(\lambda), \gamma(\lambda)$?

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi(t) = \begin{vmatrix} 4-t & -5 & 2 \\ 5 & -7-t & 3 \\ 6 & -9 & 4-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-t & 1-t & 2 \\ 5 & 1-t & 3 \\ 6 & 1-t & 4-t \end{vmatrix} = (1-t) \begin{vmatrix} 4-t & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 4-t \end{vmatrix} = (1-t)t^2$

$t_1 = 0 \ \ \alpha(0) = 2$

$t_2 = 1 \ \ \alpha(1) = 1$

$V_\lambda = Ker(A - \lambda E) \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 0 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \alpha \in]R$

$V_{\lambda_1} = 0 = span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\gamma(0) = 1 < \alpha(0)$

$\lambda_2 \ \ 1 \leq \gamma \leq \alpha = 1$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$V_{\lambda_2} = span \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\gamma(1) = 1$

7.5 Оператор простой структуры. (о.п.с.) Проекторы. Спектральное разложение о.п.с. Функция от матрицы.

Определение 1. $\mathcal{A} \in End(V)$

$\mathcal{A}$ называется о.п.с., если $\exists$ базис пространтсва V, т.ч. матрица оператора в этом базисе имеет диагональный вид $\Lambda = diag(\lambda_1 \ldots \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists$ базис V из с.ч. $\mathcal{A} \Leftrightarrow V = \bigoplus\limits_{\lambda \text{с.ч. } \mathcal{A}} V_\lambda$

$V = span(v_1 \ldots v_n)$

Теорема 1. *Пусть $\sum\limits_{\lambda \text{с.ч. } \mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n = dimV$*

$\Leftrightarrow$все корни $\chi(t) \in K \Leftrightarrow$ все корни $\chi(t)$ являются с.ч. $\mathcal{A}$

$\boxed{\mathcal{A} \text{о.п.с.} \Leftrightarrow \forall \text{с.ч.} \lambda \quad 1 \leq \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)}$

Доказательство. $\mathcal{A}$ о.п.с. $\Leftrightarrow V = \bigoplus\limits_{\lambda \text{с.ч.}} V_\lambda \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = dimV = \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \gamma(\lambda) = \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \alpha(\lambda)$

$1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$

$\sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \alpha(\lambda) = n \quad \to \quad \nearrow \Rightarrow \forall \lambda : \boxed{\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)}$ $\square$

Следствие 1. $\sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \alpha(\lambda) = n = dimV$

$\mathcal{A}$о.п.с. $\Leftarrow$ спектр – простой.

(n попарно различных с.ч. $\forall \lambda \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) = 1$)

Определение 2. *$A_{n\times m}$ называется диагонализируемой, если $\exists$ невырожденная $T_{n\times n}$, т.ч. $T^{-1}AT = \Lambda = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)$*

("А подобна диагональной матрице")

Следствие 2. *Если матрица $A_{n\times n}$ – матрица некоторого о.п.с. $\mathcal{A}$, то она **диагонализируема**. И обратно, любая диагонализируемая матрица является матрицей о.п.с. в некотором базисе.*

Доказательство.

$$\begin{array}{llcll}
\mathcal{A} & \text{о.п.с.} & \Leftrightarrow & \exists \text{ базис} & \underset{\text{с.в.}}{v_1 \dots v_n} \\
\updownarrow & \underset{\text{базис}}{(e_1 \dots e_n)} V & & & \underset{\text{с.ч.}}{\lambda_1 \dots \lambda_n} \\
A & & & & \updownarrow
\end{array}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$T = T_{e \to v}$ невырожденная.

$\Lambda = T^{-1}AT$

$A = T\Lambda T^{-1}$ $\square$

$$\boxed{\begin{array}{r} A \text{ диагонализируема } \Leftrightarrow \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \alpha(\lambda) = n \\ \forall\ \lambda \text{ с.ч. } \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) \end{array}}$$

Определение 3.

$$\begin{array}{ccc}
V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i & & p_i : V \to L_i \subset V \\
\nwarrow\Leftarrow & \Leftrightarrow & \Rightarrow\searrow \\
\underset{\textit{линейное подпр.}}{L_i \subset V} & & \forall v \in V\ \exists! : v = \sum\limits_{i=1}^{m} v_i \in L_i
\end{array}$$

$\boxed{\forall\ v \in V \quad \mathcal{P}_i v \overset{def}{:=} v_i}$ $\qquad i = 1 \dots m$

Оператор проектирования (проектор)

$\mathcal{P}_i \overset{?}{\in} End(V)$

$\mathcal{P}_i(u + \lambda v) = u_i + \lambda v_i = \mathcal{P}_i u + \lambda \mathcal{P}_i v \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_i$ линейный оператор.

$u + \lambda V = \sum\limits_{i=1}^{m} u_i \in L_i + \lambda \sum\limits_{i=1}^{m} v_i \in L_i = \sum\limits_{i=1}^{m} (\underbrace{u_i + \lambda v_i}_{\in L_i})$

$u_i = \mathcal{P}_i u \quad v_i = \mathcal{P}_i v$

Свойства проекторов:

1. $\forall\ i \neq j \quad \mathcal{P}_i \mathcal{P}_i j = \mathbb{0}$
2. $\forall i : \mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i \quad (\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \varnothing_i^k = \mathcal{P}_i)$
3. $\sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{P}_i = \mathcal{E}$
4. $Ker \mathcal{P}_i = \sum\limits_{j \neq i} L_j \quad \forall i = 1 \ldots m$

   $Im \mathcal{P}_i = L_i$

Доказательство.

1. $\forall v \in V \quad \mathcal{P}_i \mathcal{P}_i j(v) = \mathcal{P}_i v_j \in L_j = \mathbb{0} \Rightarrow \mathcal{P}_i \mathcal{P}_i j = \mathbb{0}$

   Т.к. L_i дизъюнктны

   $v = v_1 + v_i + \underbrace{v_j}_{\text{Ед. образом}} + \ldots + v_n$

   $v_j = v_j + \mathbb{0}$
2. $\forall v \in V \quad \mathcal{P}_i \underbrace{\mathcal{P}_i(v)}_{v_i \in L_i} = v_i = \mathcal{P}_i v$

   Т.к. верно $\forall v \in V$, то верно и для базиса $\Rightarrow$ операторы совпадают. $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i$
3. $\forall v \in V (\sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{P}_i) v = \sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{P}_i v = \sum\limits_{i=1}^{m} v_i = v = \mathcal{E} v \Rightarrow \ldots \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{m} = \mathcal{E}$
4. $\mathcal{P}_i(v_1 + \ldots + v_{i-1} + v_{i+1} + \ldots + v_m) + \mathbb{0}$

   $= \sum\limits_{j \neq i} \underbrace{\mathcal{P}_i v_j}_{\mathbb{0}}$

   $$\boxed{\begin{array}{c} \sum\limits_{j \neq i} L_j \subset Ker\ \mathcal{P}_i \\ \text{т.к. } v = \bigoplus\limits_{j \neq i} L_j \oplus L_i \end{array}} \Rightarrow Ker\ \mathcal{P}_i = \bigoplus_{j \neq i} L_j$$

   $Im\ \mathcal{P}_i = L_i$ по $def\ \ " \subset "$

   Верно "$\supset$" $\forall v_i \in L_i \rightsquigarrow v_i \in V = \mathcal{P} v_i = v_i$

$\square$

Утверждение. $\mathcal{P}_i \underset{i=1\ldots m}{\in} End(V) : V \to V$ *и выполнены свойства 1, 3* $\Rightarrow$

$\Rightarrow V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} Im \mathcal{P}_i$ *(т.е. $\mathcal{P}_i$ проекторы на $L_i = Im \mathcal{P}_i$)*

Доказательство.

1. Если выполнены 1, 3, то верно 2

   $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_i \overset{?}{=} \mathcal{P}_i$

   $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i \mathcal{E} = p_i \sum\limits_{j=1}^{m} \mathcal{P}_j = \sum\limits_{j=1}^{m} \underset{\substack{\| \\ \mathbb{0} \\ i \neq j}}{\mathcal{P}_i \mathcal{P}_j} = \mathcal{P}_i^2$
2. $v_1 + v_2 + \ldots + v_m = \mathbb{0}$

   $v_i \in Im \mathcal{P}_i$ дизъюнктно?

   $v_i = \mathcal{P}_i w_i \ w_i \in V$

$$v_i = \mathcal{P}_i w_i \underset{\uparrow}{=} \mathcal{P}_i(\underbrace{\sum_{j=1}^{m} \underbrace{\mathcal{P}_j w_j}_{v_j}}_{=\mathbb{0}}) = \mathbb{0}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \underbrace{\mathcal{P}_i(p_j}_{=\mathbb{0}\ i\neq j} w_j) = \mathcal{P}_i^2 w_i = \mathcal{P}_i w_i$$

$$\forall\ v \in V\ \mathcal{E}v = v = \sum_{j=1}^{m} \underset{\substack{\| \\ v_j \in Im\mathcal{P}_j}}{\mathcal{P}_j v} \Rightarrow v = \sum_{j=1}^{m} Im\mathcal{P}_j$$

□

Теорема 2 (О спектральном разложении о.п.с.)**.** $v = \bigoplus\limits_{\lambda с.ч.} V_\lambda \quad \underset{проекторы}{\mathcal{P}_\lambda : V \to V_\lambda}$
$\mathcal{A}$ *о.п.с.* $\Leftrightarrow \mathcal{A} = \sum\limits_{\lambda с.ч.} \lambda\mathcal{P}_\lambda \leftarrow$*спектральные проекторы*

Доказательство.

1. $\mathcal{P}_\lambda\mathcal{P}_\mu = \mathbb{0}$
2. $\mathcal{P}_\lambda^2 = \mathcal{P}_\lambda$
3. $\sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \mathcal{P}_\lambda = \mathcal{E}$

$\forall v \in V$

$$\mathcal{A}v \underset{\substack{\uparrow \\ V=\bigoplus_\lambda V_\lambda}}{=} \mathcal{A}(\sum_\lambda v_\lambda \in V_\lambda) = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \underbrace{\mathcal{A}v_\lambda}_{=\lambda v_\lambda} =$$

$$\sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda v_\lambda = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda\mathcal{P}_\lambda v$$

Доказательство верно $\forall$ векторного про-ва V. В частности для базиса $\Rightarrow \boxed{\mathcal{A} = \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda\mathcal{P}_\lambda}$ □

Следствие 1. $A_{n\times n}$ ***диагонализируема*** $\Leftrightarrow\ \exists \underset{проекторы}{\mathcal{P}_{\lambda\ n\times n}}\ 1^\circ\ 2^\circ\ 3^\circ$

$$A = \sum_{\lambda с.ч.} \lambda\mathcal{P}_\lambda$$

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -23 & 13 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 1\ \alpha(\lambda_1) = \gamma(\alpha_1) = 2$

$V_{\lambda_1} = span \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = span(v_1, v_2)$

$\lambda_2 = -1\ \alpha(\lambda_2) = \gamma(\lambda_2) = 1$

$V_{\lambda_2} = span \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = span\ V_3$

$\Rightarrow$ о.п.с. $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} = span(V_1, V_2, V_3)$

$T_{e\to v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \Lambda \quad \boxed{AT = T\Lambda}$

$\mathcal{P}_1 : V \to V_{\lambda_1} \subset V$

$\mathcal{P}_2 : V \to V_{\lambda_2} \subset V$

$\mathcal{P}_1'$ матрица $\mathcal{P}_1$ в базисе $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$– матрицы проекторов в базисе e(канонич.)

$\mathcal{P}_1 v_i = \left[\begin{array}{l} v_i, i = 1, 2 \\ \mathbb{0}, i = 3 \end{array} \right.$

1° 2° 3°

$\mathcal{P}_1' + \mathcal{P}_2' = E$

$\mathcal{P}_1' \mathcal{P}_2' = \mathbb{0} \dots$

$\mathcal{P}_2'$ матрица $\mathcal{P}_2$ в базисе $v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Примеры.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{P}_i' = T^{-1} \mathcal{P}_i T \qquad i = 1, 2$

$\mathcal{P}_i = T \mathcal{P}_i' T^{-1} \qquad \begin{array}{c} \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 = \mathbb{0} \\ \mathcal{P}_1^2 = \mathcal{P}_1 \end{array}$

$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 6 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix} = E - \mathcal{P}_1$

Определение 4. $(A_k) = ((a_{ij}^k))_{k=1}^{\infty}$ – *последовательность матриц*

$\exists \lim\limits_{k\to\infty} A_k = A = (a_{ij}) \Leftrightarrow \forall\ i, j\ \exists a_{ij} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{ij}^k$

$$S = \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} A_m}_{\substack{\text{Ряд.} \\ \text{Сумма ряда.}}} \overset{\exists}{=} \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{m=1}^{N} A_m}_{\substack{s_N \text{ частичная} \\ \text{сумма ряда}}}$$

$$f(x) \textit{ аналитическая в } |x| < R \Leftrightarrow f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m (x)^m \quad C_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}$$

Ряд Тейлора.

$e^x = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{x^m}{m!}\ R = \infty\ \cos x = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} \quad R = \infty$

$\ln(1 + x) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{m-1} x^m}{m} \quad |x| < 1 \quad$ либо $x = 1$

Определение 5. *Функция от матрицы.*

$A_{n\times n}$

$f(A)=\sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m A^m$, *где* $\boxed{\begin{array}{rcl} C_m & = & \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \\ f(x) & = & \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m x^m \end{array}}$

$e^A=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{A^m}{m!}$

$\cos A=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}A^{2m}$

Теорема 3. *f аналитическая в $|x|<R$*

$A_{n\times n}$ все с.ч. $|\lambda|<R$

*A **диагонализируемая** То есть:*

$\exists \underset{\text{невырожд.}}{T}:\Lambda=T^{-1}AT$

$\exists\mathcal{P}_\lambda: A=\sum\limits_\lambda \lambda\mathcal{P}_\lambda$

$\Downarrow$

1. $\underset{f(A)}{\exists}=T\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n)\end{pmatrix}T^{-1}$
2. $\underset{f(A)}{\exists}=\sum\limits_{\lambda\text{с.ч.}} f(\lambda)\mathcal{P}_\lambda$

Доказательство.

1. $$f(A)=\sum_{m=0}^{\infty} C_m A^m \qquad \boxed{\begin{array}{l} f(x)=\sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m x^m \\ |x|<R \end{array}}$$
$$A^m=(T\Lambda T^{-1})^m=$$
$$=T\Lambda\underbrace{T^{-1}T}_{E}\Lambda T^{-1}\dots T\Lambda T^{-1}1=$$
$$=T\Lambda^m T^{-1}=T\begin{pmatrix}\lambda_1^m & 0 \\ 0 & \lambda_n^m\end{pmatrix}T^{-1}$$
$$f(A)=\sum_{m=0}^{\infty} C_m T\Lambda^m T^{-1}=T(\sum_{m=0}^{\infty} C_m\Lambda^m)T^{-1}=$$
$$=T\begin{pmatrix}\sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m\lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m\lambda_n^m\end{pmatrix}T^{-1}=T\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n)\end{pmatrix}T^{-1}$$
$|\lambda_i|<R$
2. $$A^m=(\sum_{\lambda\text{с.ч.}}\lambda\mathcal{P}_\lambda)^m \underset{\substack{\lambda\neq\mu \\ \mathcal{P}_\lambda\mathcal{P}_\mu=\mathbb{0}}}{=} \sum_\lambda \lambda^m\mathcal{P}_\lambda^m=\sum_\lambda\lambda^m\mathcal{P}_\lambda$$
$$f(A)=\sum_{m=0}^{\infty} C_m(\sum_\lambda\lambda^m\mathcal{P}_\lambda)=\sum_\lambda(\underset{|\lambda|<R}{\sum_{m=0}^{\infty} C_m\lambda^m=f(\lambda)})\mathcal{P}_\lambda=\sum_\lambda f(\lambda)\mathcal{P}_\lambda$$

$\square$

Замечание. A диагон. $\Leftrightarrow A = T\Lambda T^{-1}$

$\Leftrightarrow A = \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda$

$f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m x^m$

$f(A) = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$

$f(A) = \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} f(\lambda) \mathcal{P}_\lambda$

$t \in \mathbb{R}$

$f(At) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m A^m t^m$

$t^m A^m = t^m T \Lambda^m T^{-1} = T \begin{pmatrix} (\lambda_1 t)^m & 0 \\ 0 & f(\lambda_n t) \end{pmatrix} T^{-1}$

$$\boxed{f(At) = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1 t) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n t) \end{pmatrix} T^{-1}}$$

$t^m A^m = \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} t^m \lambda^m \mathcal{P}_\lambda$

$$\boxed{f(At) = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} f(t\lambda) \mathcal{P}_\lambda}$$

Примеры. e^{At}

$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$

$\chi(t) = det(A - tE) = (t-1)^2(t+1)$

$\lambda_1 = 1 \quad \alpha(\lambda_1) = 2$

$\lambda_2 = -1 \quad \alpha(\lambda_2) = 1$

$V_{\lambda_1} : \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -12 & 6 & 0 \\ 10 & -20 & 10 & 0 \\ 12 & -24 & 12 & 0 \end{array}\right)$

$V_{\lambda_1} = span \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_2} \quad \gamma(\lambda_1) = 2$

$V_{\lambda_2} : \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -12 & 6 & 0 \\ 10 & -18 & 10 & 0 \\ 12 & -24 & 14 & 0 \end{array}\right)$

$V_{\lambda_2} = span \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}}_{v_3} \quad \gamma(\lambda_2) = 1$

$$\forall\ \lambda : \left.\begin{array}{rcl} \alpha(\lambda) & = & \gamma(\lambda) \\ \sum\limits_{\lambda} \alpha(\lambda) & = & 3 \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ диагонализируемая}$$

$$T_{e\to v} = (v_1 v_2 v_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$e^{At} = T \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 4e^t - 3e^{-t} & -6e^t + 6e^{-t} & 3e^t - 3e^{-t} \\ 5e^t - 5e^{-t} & -9e^t + 10e^{-t} & 5e^t - 5e^{-t} \\ 6e^t - 6e^{-t} & -12e^t + 12e^{-t} & 7e^t - 6e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_i : V \underset{i=1,2}{\rightarrow} V_{\lambda_i} \subset V$$

$$\mathcal{P}_1 = T \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) T^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} \quad Im\mathcal{P}_1 = span(v_1, v_2) = V_{\lambda_1}$$

$$\mathcal{P}_2 = T \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) T^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix} \quad Im\mathcal{P}_2 = span(v_3) = V_{\lambda_2}$$

$$A = 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = e^t \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} + e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A_{n\times n} \quad x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \dot{x} - \text{производная}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\dot{x} = Ax} \qquad x = e^{At}C \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

с.л.д.у. с постоянным коэффициентом однородности $\quad \begin{gathered} (e^{At})' = Ae^{At} \\ e^{A\cdot 0} = E \end{gathered}$

$$e^{At} = \left(\sum_{\lambda \text{с.ч.}} e^{\lambda t}\mathcal{P}_\lambda\right)' = \underline{\underline{\sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \lambda e^{\lambda t}\mathcal{P}_\lambda}}$$

$$A \cdot e^{At} = \sum_\mu \mu \mathcal{P}_\mu \cdot \sum_\lambda e^{\lambda t}\mathcal{P}_\lambda \underset{\mu=\lambda}{=} \underline{\underline{\sum_\lambda \lambda e^{\lambda t}\mathcal{P}_\lambda}}$$

Замечание. $\exists\ A^{-1} \Leftrightarrow detA \neq 0 \Leftrightarrow$ все с.ч. $\lambda \neq 0$
(все корни хар. многочлена)

$\sqsupset$ A диагонализируема. Все с.ч. $\lambda \neq 0$

$$A^{-1} = T\Lambda^{-1}T^{-1} = T \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$$

$\Lambda\Lambda^{-1} = E$

$$AA^{-1} = \underbrace{T\, \underbrace{\Lambda\, \underbrace{T^{-1}T}_{E}\, \Lambda^{-1}}_{E}\, T^{-1}}_{E} = E$$

$A^{-1} = \sum\limits_{\lambda \text{с.ч.}} \frac{1}{\lambda}\mathcal{P}_\lambda$

($AA^{-1} = E$ <u>упр.</u>)

$$\sqrt[m]{A} = T\, \sqrt[m]{\Lambda} T^{-1} = T \begin{pmatrix} \sqrt[n]{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt[m]{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$$

$\sqsupset$ все $\lambda_i \geq 0$

(m нечет $\Rightarrow \lambda$ любого знака)

$(\sqrt[m]{\Lambda})^m = \Lambda$

$$(\sqrt[m]{A})^m = T\, \underbrace{\sqrt[m]{\Lambda}\, \underbrace{T^{-1}T}_{E}\, \sqrt[m]{\Lambda}\, \underbrace{T^{-1} \dots T}_{E}\, \sqrt[m]{\Lambda}}_{\Lambda}\, T^{-1} = T\Lambda T^{-1} = A$$

$$\boxed{\sqrt[m]{A} = \sum_{\lambda \text{с.ч.}} \sqrt[m]{\lambda}\mathcal{P}_\lambda}$$

(упр.: $(\sqrt[m]{A})^m = A$)

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix} \quad A^{-1} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\mathcal{P}_1 + \frac{1}{(-1)}\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 = A$$

$A^2 = E$

7.6 Комплексификаци линейного вещ. пространства. Продолжение вещ. линейного оператора.

$\mathcal{A} \in End(V) \quad V$ над полем K

$$\chi(\lambda) \underset{\lambda \text{ корень}}{=0}$$

$\swarrow$

$K = \mathbb{R}/\mathbb{C}$

Все корни $\lambda \in K$

Т.е. каждый корень с.ч.

$\sum\limits_{\lambda \text{с.ч}} \alpha(\lambda) = n = dimV$

I $\swarrow$

$\forall\ \lambda : \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$

$\mathcal{A}$ – о.п.с. $\to A$ диагонализир.

$\searrow$ II

$\exists\ \lambda : \gamma(\lambda) < \alpha(\lambda)$

$\mathcal{A}$ не о.п.с.

$\to A$ приводится к Жордановой форме

$\searrow$ III

$K = \mathbb{R}$

Не все корни вещ.

т.е. $\exists \lambda \notin K = \mathbb{R}$

$\sum\limits_{\text{вещ.}\lambda\text{с.ч.}} \alpha(\lambda) < n = dimV$

$\mathcal{A} \to A?$

Определение 1. *V – линейное пространство над $\mathbb{R}$*

$\forall\ x, y \in V \quad v := x + iy\ \in V_{\mathbb{C}}$

$\forall\ v, v' \in V_{\mathbb{C}} : \quad \begin{matrix} x = Re\ v \\ y = Im\ v \end{matrix}$

Определим

1. $v = v' \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x = x' \in V \\ y = y' \end{matrix}\right.$
2. $v + v' = \omega = a + bi \in V_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} a = x + x' \in V \\ b = y + y' \end{matrix}\right.$
3. $\forall\ \lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

   $$a + bi = \omega = \lambda \cdot v \Leftrightarrow (\alpha + i\beta)(x + iy) = \underbrace{\overbrace{\alpha x - \beta y}^{a \in V} + i\,\overbrace{\beta x + \alpha y}^{b \in V}}_{\in V_{\mathbb{C}}}$$

4. $\forall\ x \in V \leftrightarrow x + i\mathbb{0} \in V_{\mathbb{C}}$

   $V \subset V_{\mathbb{C}}$

   $\mathbb{0} \leftrightarrow \mathbb{0} + i\mathbb{0}$

Упр.: *$V_{\mathbb{C}}$ – линейное пространство над $\mathbb{C}$*

$\boxed{V_{\mathbb{C}} \text{ – комплексификация линейного вещественного пространства } V}$

Утверждение. *$e_1 \dots e_n$ базис $V \Rightarrow e_1 \dots e_n$ базис $V_{\mathbb{C}}$*

Т.е. $dimV = dimV_{\mathbb{C}} = n$

$V \subset V_{\mathbb{C}}$ структуры над разными полями.

Доказательство. $e_1 \dots e_n$ базис $V_{\mathbb{C}}$?

– порождающая?

– линейно независимая?

1. $\forall\ v \in V_{\mathbb{C}}\ \ v = x \in V + iy \in V = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j + i \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j =$

$\sum\limits_{j=1}^{n} \underbrace{\boxed{x_j + iy_j}}_{\alpha_j \in \mathbb{C}} e_j \Rightarrow e_1 \dots e_n$ порождающая.

2. $\sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_j e_j = \mathbb{0} \qquad \begin{matrix} \gamma_j \in \mathbb{C} \\ \gamma_j = \alpha_j + i\beta_j \end{matrix}$

$||$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} \overset{\text{вещ.}}{\alpha_j}\, e_j}_{x} + i \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \overset{\text{вещ.}}{\beta_j}\, e_j}_{y} = \mathbb{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \mathbb{0} = \sum\limits_{j=1}^{n} \overset{\text{вещ.}}{\alpha_j}\, e_j \\ y = \mathbb{0} = \sum\limits_{j=1}^{n} \overset{\text{вещ.}}{\beta_j}\, e_j \end{cases} \ \underset{e_1 \dots e_n \text{ линейно независ.}}{\Leftrightarrow} \ \begin{cases} \forall\ j\ \alpha_j = 0 \\ \forall\ j\ \beta_j = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall j\ \gamma_j = 0$$

$\Rightarrow \underset{\text{лин. незав.}}{e_1 \dots e_n}$ в $V_{\mathbb{C}}$

$\square$

Определение 2. $z = x + iy \ \ x, y \in V$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

вектор сопряженный к z:

$\overline{z} = x - iy$

$(\overline{\overline{z}} = z, (\overline{z_1 + z_2}) = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \overline{(\lambda z)} = \overline{\lambda}\overline{z})$

$$\overline{z} = \begin{pmatrix} \overline{z}_1 \\ \overline{z}_2 \\ \vdots \\ \overline{z}_n \end{pmatrix}$$

Утверждение. *$v_1 \dots v_m$ линейно незав. в $V_{\mathbb{C}} \Rightarrow \overline{v}_1 \dots \overline{v}_m$ линейно независимы в $V_{\mathbb{C}}$*

Очевидно, $v_1 \dots v_m$ линейно зависимы $\Rightarrow \overline{v}_1 \dots \overline{v}_m$ линейно зависимы.

Доказательство.

$$\left.\begin{matrix} \overline{\sum\limits_{j=1}^{m} \gamma_j \overline{v}_j} = \overline{\mathbb{0}} = \mathbb{0} \\ || \\ \sum\limits_{j=1}^{m} \overline{\gamma}_j \overline{\overline{v}_j} = \sum\limits_{j=1}^{m} \underset{\text{линейно незав.}}{\gamma'_j v_j} \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \forall j\ \gamma'_j = 0 = \overline{\gamma}_j \Leftrightarrow \gamma_j = 0$$

$\Rightarrow$ линейно независим.

$\square$

$\boxed{rg(v_1 \dots v_m) = rg(\overline{v}_1 \dots \overline{v}_m)}$

Определение 3. $\mathcal{A} \in End(V)$

$V_{\mathbb{C}}$

$\forall v = x \in V + i \underset{\in V}{y} \in V_{\mathbb{C}} \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} v = \mathcal{A}x \in V + i \underset{\in V}{\mathcal{A}y} \in V_{\mathbb{C}}$

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in End(V_{\mathbb{C}})$

Линейность?

1. *Аддитивность.* $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(v_1+v_2)=\mathcal{A}_{\mathbb{C}}v_1+\mathcal{A}_{\mathbb{C}}v_2$

   Очевидно, из аддитивности $\mathcal{A}$

   $v_1+v_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$
2. *Однородность*

   $\forall\lambda=\alpha+i\beta\in\mathbb{C}\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

   $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\lambda v)=\mathcal{A}_{\mathbb{C}}((\alpha+i\beta)(x+iy))=$

   $=\mathcal{A}_{\mathbb{C}}((\alpha x-\beta y)+i(\alpha y+\beta x))=$

   $=\mathcal{A}(\alpha x-\beta y)+i\mathcal{A}(\alpha y+\beta x)=$

   $=\alpha\mathcal{A}x-\beta\mathcal{A}y+i\alpha\mathcal{A}y+i\beta\mathcal{A}x=$

   $=(\alpha+i\beta)\mathcal{A}x+i(\alpha+i\beta)\mathcal{A}y=\lambda\mathcal{A}x+i\lambda\mathcal{A}y=$

   $=\lambda(\mathcal{A}x+i\mathcal{A}y)=\lambda\mathcal{A}_{\mathbb{C}}v$

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ – ***продолжение линейного вещ. оператора*** $\mathcal{A}$

с пространства V *на его комплексификацию* $V_{\mathbb{C}}$

Свойства $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$:

1. $$\left.\begin{array}{c}\underset{\text{веществ.}}{e_1\dots e_n}\text{ базис } V(V_{\mathbb{C}})\\ \mathcal{A}\leftrightarrow A\\ \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\leftrightarrow A_{\mathbb{C}}\end{array}\right\}\Rightarrow A_{\mathbb{C}}=A$$

   Т.е. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ в вещ. базисе имеет вещ. матрицу, совпадающую с матр. $\mathcal{A}$
2. $\forall z\in V_{\mathbb{C}}\ \ \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}z}=\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\overline{z}$

   $z=x+iy\ \ \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}z}=\overline{\underset{\text{вещ.}}{\mathcal{A}x}+i\underset{\text{вещ.}}{\mathcal{A}y}}=\mathcal{A}x-i\mathcal{A}y=$

   $=\mathcal{A}x+i\mathcal{A}(-y)=\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(x-iy)=\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\overline{z}$
3. $$\begin{array}{ccccc}\chi_{\mathcal{A}}(t) & = & \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t) & & \sqsupset e_1\dots e_n\text{базис}V\\ || & & || & & \mathcal{A}\leftrightarrow A\\ det(A-tE) & & det(A_{\mathbb{C}}-tE) & & \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\leftrightarrow A_{\mathbb{C}}=A\end{array}$$

   Все корни характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}$ являются собственными числами $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$
4. $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)=\chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(\lambda)=0$

   Т.к. многочлен с вещ. коэф. $\Rightarrow\overline{\lambda}$ тоже корень.

   $\lambda=\alpha+i\beta$ корень $\chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}\quad \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(\overline{\lambda})=0$

   v соотв. с.в.

   $\Rightarrow\overline{v}$ с.в. для $\overline{\lambda}=\alpha-i\beta$

   $$\boxed{\text{для } \mathcal{A}_{\mathbb{C}}:\begin{array}{c}dimV_{\lambda}=dimV_{\overline{\lambda}}(\text{из утв. 2})\\ \gamma(\lambda)=\gamma(\overline{\lambda})\end{array}}$$

   $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\overline{v}\underset{\text{св-во 2}}{=}\overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{с.в. для }\lambda}}{v}}=\overline{\lambda v}=\overline{\lambda}\overline{v}\Rightarrow\overline{v}$ с.в. для $\overline{\lambda}$

"III": $\mathcal{A}\in End(V)$

V над $\mathbb{R}$

$\sum\limits_{\lambda\text{с.ч.}}\alpha(\lambda)<n=dimV$

Т.е. не все корни $\chi_{\mathcal{A}}$ **вещ.**

$\rightarrow$ строим$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\in End(V_{\mathbb{C}})\quad A_{\mathbb{C}}=A$

Все корни с.ч. $\Rightarrow$ матрица для $A_{\mathbb{C}}$ будет сведена либо к I, либо к II

Примеры.
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$
$\chi_A(t) = det(A - tE) = -(t-1)(t^2 - 4t + 13)$
$D = -36 < 0$
$\lambda_1 = 1$ с.ч. $\alpha(\lambda_1) = 1 \qquad \lambda_{2,3} = 2 + \pm i3\ \alpha(2,3) = 1$
$A_{\mathbb{C}} = A : \lambda_{2,3} = 2 \pm i$
$\lambda_1 = 1 \ \ V_{\lambda_1}]span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\lambda_2 = 2 + 3i \qquad 1 \leq \gamma(\lambda_2) \leq \alpha(\lambda_2) = 1 \Rightarrow \gamma(\lambda_2) = 1$
Решаем СЛОУ методом Гаусса точно так же, как мы решали для вещ. чисел.
Только теперь арифметические операции с комплексными.
$V_{\lambda_2} = span \begin{pmatrix} 3-3i \\ 5-3i \\ 4 \end{pmatrix}$
$\lambda_3 = 2 - 3i \quad V_{\lambda_3} = span \begin{pmatrix} 3+3i \\ 5+3i \\ 4 \end{pmatrix} = v_3$
$\forall \lambda : \ \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) \Rightarrow A_{\mathbb{C}} = A$ диагонализир.
$T_{e \to v} = \begin{pmatrix} 1 & 3-3i & 3+3i \\ 2 & 5-3i & 5+3i \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$
$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3i & 0 \\ 0 & 0 & 2-3i \end{pmatrix} T^{-1} = \ldots$

7.7 Минимальный многочлен. Теорема Кэли-Гамильтона

Определение 1. *Нормализованный (старший коэф. = 1) многочлен $\psi(t)$ называется* ***аннулятором элемента*** *$v \in V$, если $\psi(\mathcal{A})v = \mathbb{0}$*

$\psi(t) = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \ldots + a_1 t + a_0$
$\psi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^t + a_{m-1}\mathcal{A}^{m-1} + \ldots + a_1\mathcal{A} + a_0\mathcal{E} \in End(V)$
$\mathcal{A}^0 = \mathcal{E}$
$\psi(t) = \prod\limits_{\lambda \text{ корень}} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$
$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} \cdot (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{m(\mu)} = (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{m(\mu)} \cdot (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$
$\mathcal{A}^k\mathcal{E}^r = \mathcal{E}^r\mathcal{A}^k$
Т.е. перестановочны.

Определение 2. *$\psi(t)$ аннулятор элемента $v \in V$ наименьший возможной степени называется* ***минимальным аннулятором элемента*** *v*

Теорема 1 (О минимальном аннуляторе элемента)**.**
$\mathcal{A} \in End(V)$

1. *$\forall v \in V$ $\exists!$ минимальный аннулятор v*
2. *$\forall$ аннулятор элемента делится на его минимальный.*

Доказательство.

1. (a) $\sqsupset v = \mathbb{0} \quad \psi(t) = 1$ Очевидно, минимальный аннулятор.
   $\psi(\mathcal{A})v = \mathcal{E}v = \mathbb{0}$

   (b) $\sqsupset v \neq \mathbb{0}$

   $$\underbrace{\underbrace{(\mathcal{E})v, \mathcal{A}v, \mathcal{A}^2 v, \ldots, \mathcal{A}^{m-1}v,}_{\text{линейно независимая система}} \quad \mathcal{A}^m v}_{\text{линейно зависимая система}}$$

   $dimV = n$

   $m \leq n + 1$

   $\mathcal{A}^m v = \sum\limits_{k=0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k v$

   $\mathbb{0} = \mathcal{A}^m v - \sum\limits_{k=0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k v = (\mathcal{A}^m - \sum\limits_{k-0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k)v \leftarrow$ Алгоритм

   $\psi(t) = t^m - \sum\limits_{k=0}^{m-1} a_k t^k$

   Очевидно, по построению это минимальный аннулятор элемента v

2. ψ_1 – аннулятор v

   $\psi_1(t) = a(t)\psi(t) + r(t)$

   $deg\ r(t) < deg\ \psi(t)$

   $\mathbb{0} = \psi_1(\mathcal{A})v = (a(\mathcal{A})\psi(\mathcal{A}) + r(\mathcal{A}))v = a(\mathcal{A}) \underbrace{\psi(\mathcal{A})v}_{=\mathbb{0}} + r(\mathcal{A})v = r(\mathcal{A})v \Rightarrow$

   $$\Rightarrow \left.\begin{matrix} r(t) \text{ аннулятор } v \\ deg\ r < deg\ \psi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{Противоречие с минимальностью } \psi \Rightarrow$$

   $\Rightarrow r(t) \equiv 0 \Rightarrow \psi_1 \vdots \psi$

$\square$

Определение 3. *Нормализованный многочлен $\phi(t)$* ***называется аннулятором*** *$\mathcal{A}$, если $\phi(\mathcal{A}) = 0$*
$(\Leftrightarrow \forall v \in V \quad \phi(\mathcal{A})v = \mathbb{0})$
Аннулятор $\mathcal{A}$ минимальной степени называется ***минимальный многочленом***

Теорема 2 (о минимальном многочлене)**.** $\mathcal{A} \in End(V)$

1. *$\forall \mathcal{A}$ $\exists!$ минимальный многочлен*
2. *$\forall$ аннулятор $\mathcal{A}$ делится на минимальный многочлен*

Доказательство.
$e_1 \ldots e_n$ базис V
$\Rightarrow$ по Теореме 1 для $\forall e_j$ $\exists!$ ψ_j минимальный аннулятор e_j

$\psi_j(\mathcal{A})e_j = \mathbb{0}$

$\psi(t) =$ Н.О.К. $(\psi_1 \dots \psi_n)$

$\forall v \in V \quad \phi(\mathcal{A})v = \phi(\mathcal{A}) \sum\limits_{i=1}^{n} v_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \phi(\mathcal{A}) e_i =$

$= \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \xi_i(\mathcal{A}) \underbrace{\psi_i(\mathcal{A}) e_i}_{=\mathbb{0}} = \mathbb{0}$

$\phi \vdots \psi_j \Leftrightarrow \phi(t) = \xi_j(t)\psi_j(t)$

$\Rightarrow \phi(\mathcal{A}) = \mathbb{0} \Rightarrow \phi$ аннулятор $\mathcal{A}$

Давайте покажем, что у ϕ степень минимальная.

От противного.

$\exists \phi_1$ аннулятор $\mathcal{A} \quad \sqsupset deg\ \phi_1 < deg\ \phi$

$\forall e_j : \phi_1(\mathcal{A})e_j = \mathbb{0} \Rightarrow \phi_1$ аннулятор элемента $e_j \overset{\text{по Теореме 1}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \underset{\text{аннулятор } e_j}{\phi_1} \vdots \underset{\text{минимальный аннулятор } e_j}{\psi_j} \Rightarrow \phi_1 \vdots \phi \Rightarrow deg\ \phi_1 \geq deg\ \phi$. Противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow deg\ \phi$ минимальный $\Rightarrow$ п.2 доказан, т.к. $\forall$ аннулятор $\mathcal{A} \vdots \phi$

Единственность?

$\sqsupset \quad \phi_1, \phi \quad$ минимальные аннуляторы одной степени.

нормализов. $\Rightarrow$ ст. коэф. 1

$deg(\phi_1 - \phi) < deg(\phi) = deg(\phi_1)$

$\forall v \in V \quad (\phi_1 - \phi)(\mathcal{A})v = \underset{=\mathbb{0}}{\phi_1(\mathcal{A})}v - \underset{=\mathbb{0}}{\phi(\mathcal{A})}v = \mathbb{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \phi_1 - \phi$ аннулятор $\mathcal{A}$ меньшей степени $\Rightarrow$ противоречие <u>минимальн.</u> $\square$

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \phi =?$ минимальный многочлен

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \phi_1?$

$$\underbrace{\underbrace{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{линейно независ.}} \quad \mathcal{A}^2 e_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ -8 \end{pmatrix}}_{\text{линейно завис.}}$$

$\mathcal{A}^2 e_1 = -4e_1 + 4\mathcal{A}e_1$

$\psi_1(t) = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$

$$\underbrace{\underbrace{e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{линейно независ.}} \quad \mathcal{A}^2 e_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}}_{\text{линейно завис.}}$$

$\mathcal{A}^2 e_2 = 4\mathcal{A}e_2 - 4e_2$

$\psi_2(t) = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$

$$\underbrace{e_2 = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\text{лин. нез.}} \qquad \mathcal{A}e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}}_{\text{линейно завис.}}$$

$\mathcal{A}e_3 = 2e_3$

$\psi_3(t) = t - 2$

$\phi(t) = \text{Н.О.К.}\ ((t-2)^2, (t-2)) = (t-2)^2$

Теорема 3 (Кэли-Гамильтона)**.** $\mathcal{A} \in End(V)$

$\underbrace{\chi(t)}_{\textit{характерист. многочлен}} = det(\mathcal{A} - t\mathcal{E})$ – *аннулятор* $\mathcal{A}$

Доказательство. $\chi(\mathcal{A}) = det(\mathcal{A} - \mathcal{A}) = \mathbb{0}$ □

Я так и не понял это норм доказательство или нет. В любом случае далее идет длинное док-во.

Доказательство. μ – не корень $\chi(t)$

$det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E}) \neq 0$

$\Leftrightarrow \exists(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{-1}$

$e_1 \dots e_n$ базис v. $\mathcal{A} \leftrightarrow A$

$(A - \mu E)^{-1} = \dfrac{1}{det(A - \mu E)} B \leftarrow$ союзная матрица (прис-ная)

$B = (b_{ij}) \quad b_{ij} = (-1)^{ij} M_{ij} \leftarrow$ определиитель $(n-1)$-го порядкка $A - \mu E$

Т.е. мн-н степени $n-1$ относительно μ

$B = B_{n-1}\mu^{n-1} + B_{n-2}\mu^{n-2} + \ldots + B_1\mu + B_0$

$det(A - \mu E) \cdot E = \ (A - \mu E)(B_{n-1}\mu^{n-1} + \ldots + B_1\mu + B_0)$

$||$

$\chi(\mu) \cdot E$

$||$

$\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \mu^k \cdot E$

$$\begin{array}{rl|l}
\mu^0: & \alpha_0 E = AB_0 & A^0 \\
\mu^1: & \alpha_1 E = AB_1 - B_0 & A^1 \\
\mu^2: & \alpha_2 E = AB_2 - B_1 & A^2 \\
\dots & & \\
\mu^{n-1}: & \alpha_{n-1} E = AB_{n-1} - B_{n-2} & A^{n-1} \\
\mu^n: & \alpha_n E = -B_{n-1} & A^n
\end{array}$$

$\chi(\mathcal{A}) = \chi(A) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k A^k = AB_0 + A^2B_1 - AB_0 + A^3B_2 - A^2B_1 + \ldots + A^nB_{n-1}$

$- A^{n-1}B_{n-2} - A^nB_{n-1} = \mathbb{0}$

χ – аннулятор $\mathcal{A}$ □

Теорема 4. $\mathcal{A} \in End(V)$

Множество корнеq характеристического многочлена $\mathcal{A}$ совпадает с множеством корней минимального многочлена $\mathcal{A}$ (без учета кратности)

Доказательство. $\chi(t)$ – характерист., $\phi(t)$ – минимальный многочлен.

$" \Leftarrow "$ $\quad \sqsupset \phi(\lambda) = 0 \ \Rightarrow$ т.к. χ аннулятор $\mathcal{A}$, то по Т-ме 2 $\chi \vdots \phi \Rightarrow \chi(\lambda) = 0$

$" \Rightarrow "$ $\quad \sqsupset \chi(\lambda) = 0$

1. $\sqsupset \lambda \in K \Rightarrow \lambda$ с.ч. $\mathcal{A} \qquad \exists v \neq \mathbb{0} : \mathcal{A}v = \lambda V \Rightarrow$

   $\Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})v = \mathbb{0} \Rightarrow \psi(t) = (t - \lambda)$ минимальный аннулятор v

   Т.к. $\phi \vdots \psi \Rightarrow \lambda$ корень ϕ

   $\phi(\lambda) = 0$

2. $\lambda \notin K$ т.е. III случай: $K = \mathbb{R}$

   $\exists$ комплексные корни характерист. многочлена.

   $V \to V_{\mathbb{C}} \quad e_1 \ldots e_n$ базис $V \to$ базис $V_{\mathbb{C}}$

   $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} e_j = \mathcal{A} e_j + i\mathcal{A}\mathbb{0} = \mathcal{A} e_j$

   $e_j = e_j + i\mathbb{0}$

   $\Rightarrow \forall k \ \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^k e_j = \mathcal{A}^k e_j$

   $\Rightarrow$ Применим алгоритм построения минимального многочлена (Теоремы 1, 2).

   Получим, что минимальные многочлены $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ и $\mathcal{A}$ совпадают.

   $$\left.\begin{array}{c} \text{Т.е. } \phi \text{ мин. мн-н для } \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \\ \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} = \chi_{\mathcal{A}} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Применим случай а) для } \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$$

   $\Rightarrow \lambda$ с.ч. λ корень ϕ

□

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 & 0 \\ -4 & 4-t & 0 \\ -2 & 1 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)(t^2 - 4t + 4) = -(t-2)^3$$

Корни $\chi : 2$

Корни $\phi : 2$

$\rightsquigarrow$ еще один способ найти с.ч. – **найти корни многочлена.**

Следствие 1.

1. $\qquad \psi \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \phi$

   характер. (аннулятор) минимальный (аннулятор мин.)
2. *$deg\ \phi = n = dimV \Rightarrow (-1)^n \chi = \phi$*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \chi(t) & = & \prod\limits_{\lambda} (t-\lambda)^{\alpha(\lambda)} \\ \phi(t) & = & \prod\limits_{\lambda} (t-\lambda)^{m(\lambda)} \end{array} \quad 1 \leq m(\lambda) \leq \alpha(\lambda)}$$

7.8 Операторное разложение единицы. Корневые подпространства.

$\phi(t) = \prod\limits_\lambda (t-\lambda)^{m(\lambda)}$ $\qquad$ $\sum\limits_\lambda m(\lambda) = m$

$deg\ \phi = m$

P_{m-1} – линейное пространство многочленов степени не выше $m-1$

$dimP_{m-1} = m$

$$\phi_\lambda(t) = \prod_{\mu\neq\lambda}(t-\mu)^{m(\mu)}$$

$$\phi(t) = \underset{\text{вз. просты}}{(t-\lambda)^{m(\lambda)}\phi_\lambda(t)} \qquad \begin{array}{c} \phi_\lambda(\lambda)\neq 0 \\ \phi_\lambda(\mu) = 0 \\ \mu\neq\lambda \end{array}$$

Определение 1. $I_\lambda = \{p\in P_{m-1} | p\vdots\phi_\lambda\}$

Главный идеал, *порожденный многочленом* $\phi_\lambda =$

$= \{f\in P_{m(\lambda)-1} | p = f_\lambda\phi_\lambda\}$

I_λ *– линейное подпространство* P_{m-1}

$p_{1,2}\vdots\phi_\lambda \Rightarrow (p_1+\alpha p_2)\vdots\phi_\lambda$

Теорема 1. $P_{m-1} = \bigoplus\limits_\lambda I_\lambda$

Доказательство.

1. Дизъюнктность.

$$\mathbb{0} = \sum_\lambda \underbrace{f_\lambda\phi_\lambda}_{\in I_\lambda} = f_\lambda\cdot\phi_\lambda + \underbrace{\sum_{\mu\neq\lambda} f_\mu \underbrace{\phi_\mu}_{\vdots(t-\lambda)^{m(\lambda)}}}_{\vdots(t-\lambda)^{m(\lambda)}}$$

$$\Rightarrow f_\lambda\cdot\underset{\text{вз. просты}}{\phi_\lambda\vdots(t-\lambda)^{m(\lambda)}} \Rightarrow \underset{deg\ f_\lambda = m(\lambda)-1}{f_\lambda} \vdots(t-\lambda)^{m(\lambda)} \Rightarrow f_\lambda\equiv 0$$

$\Rightarrow \forall\lambda \quad f_\lambda\equiv 0 \Rightarrow f_\lambda\phi_\lambda\equiv\mathbb{0}\Rightarrow$ Дизъюнктны

2. $$\begin{array}{ccc} dimP_{m-1} & = & m \\ \| & & \\ \sum\limits_\lambda dimI_\lambda & = & \sum\limits_\lambda m(\lambda) = m \end{array}$$

$I_\lambda\subset P_{m-1}$

$$\Rightarrow P_{m-1} = \bigoplus_\lambda I_\lambda$$

□

Следствие 1. $\forall p\in P_{m-1}\ \exists!\ p = \sum\limits_\lambda p_\lambda$

$p_\lambda\in I_\lambda$

$$\boxed{1 = \sum_\lambda p_\lambda \text{ – \textit{полиномиальное разложение единицы}}}$$

Замечание.

1. $\lambda \neq \mu$

$$\begin{array}{ccccc} p_\lambda & \cdot & p_\mu & \vdots & \phi \\ || & & || & & \\ f_\lambda \phi_\lambda & & f_\mu \phi_\lambda & = & \eta \cdot \phi \\ & & \uparrow & & \\ & & (t-\lambda)^{m(\lambda)} & & \end{array}$$

2. $\forall \lambda \; m(\lambda) = 1$

   Если. Т. е. все корни ϕ взаимно простые.

   $f_\lambda = const \quad (def \; f_\lambda = m(\lambda) - 1 = 0)$