

0.1 Операторное разложение единицы. Корневые подпространства.

$$\phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$$

$$\sum_{\lambda} m(\lambda) = m$$

P_{m-1} – линейное пространство многочленов степени не выше $m - 1$

$$\dim P_{m-1} = m$$

$$\phi_{\lambda}(t) = \prod_{\mu \neq \lambda} (t - \mu)^{m(\mu)}$$

$$\phi(t) = (t - \lambda)^{m(\lambda)} \phi_{\lambda}(t)$$

$$\phi_{\lambda}(\lambda) \neq 0$$

$$\phi_{\lambda}(\mu) = 0$$

$$\mu \neq \lambda$$

вз. простоы

Определение 1. $I_{\lambda} = \{p \in P_{m-1} | p : \phi_{\lambda}\}$

Главный идеал, порожденный многочленом $\phi_{\lambda} =$

$$= \{f \in P_{m(\lambda)-1} | p = f_{\lambda} \phi_{\lambda}\}$$

I_{λ} – линейное подпространство P_{m-1}

$$p_{1,2} : \phi_{\lambda} \Rightarrow (p_1 + \alpha p_2) : \phi_{\lambda}$$

Теорема 1. $P_{m-1} = \bigoplus_{\lambda} I_{\lambda}$

Доказательство.

1. Дизъюнктность.

$$0 = \sum_{\lambda} \underbrace{f_{\lambda} \phi_{\lambda}}_{\in I_{\lambda}} = f_{\lambda} \cdot \phi_{\lambda} + \underbrace{\sum_{\mu \neq \lambda} f_{\mu} \underbrace{\phi_{\mu}}_{\dot{:(t-\lambda)^{m(\lambda)}}}}_{\dot{:(t-\lambda)^{m(\lambda)}}$$

$$\Rightarrow f_{\lambda} \cdot \phi_{\lambda} : (t - \lambda)^{m(\lambda)} \Rightarrow \underbrace{f_{\lambda}}_{\substack{\uparrow \\ \text{вз. простоы}}} : (t - \lambda)^{m(\lambda)} \Rightarrow f_{\lambda} \equiv 0$$

$$\Rightarrow \forall \lambda \quad f_{\lambda} \equiv 0 \Rightarrow f_{\lambda} \phi_{\lambda} \equiv 0 \Rightarrow \text{Дизъюнкты}$$

2. $\dim P_{m-1} = m$

||

$$\sum_{\lambda} \dim I_{\lambda} = \sum_{\lambda} m(\lambda) = m$$

$$I_{\lambda} \subset P_{m-1}$$

$$\Rightarrow P_{m-1} = \bigoplus_{\lambda} I_{\lambda}$$

□

Следствие 1. $\forall p \in P_{m-1} \exists! p = \sum_{\lambda} p_{\lambda}$

$$p_{\lambda} \in I_{\lambda}$$

$$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda} - \text{полиномиальное разложение единицы}$$

Замечание.

1. $\lambda \neq \mu$

$$\begin{array}{ccc} p_\lambda & \cdot & p_\mu & \vdots & \phi \\ \parallel & & \parallel & & \\ f_\lambda \phi_\lambda & & f_\mu \phi_\lambda & = & \eta \cdot \phi \\ & & \uparrow & & \\ & & (t - \lambda)^{m(\lambda)} & & \end{array}$$

2. $\forall \lambda \ m(\lambda) = 1$

Если. Т. е. все корни ϕ взаимно простые.

$$f_\lambda = \text{const} \quad (\text{def } f_\lambda = m(\lambda) - 1 = 0)$$

Теорема 2 (Лагранжа).

$$\forall \lambda : m(\lambda) = 1 \Rightarrow$$

$$\forall p \in P_{m-1} \quad p(t) = \sum_{\lambda} \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \cdot \phi_\lambda(t)$$

Доказательство.

$$\begin{array}{l} \text{корень } \phi \rightarrow \mu \neq \lambda \\ \phi_\lambda(\mu) = 0 \\ \phi_\lambda(\lambda) \neq 0 \end{array}$$

$$p(t) = \sum_{\lambda} p_\lambda(t) = \sum_{\mu} \boxed{f_\mu} \cdot \phi_\mu(t)$$

\uparrow
 const, т.к.

корни взаимно

просты

$$p(\lambda) = f_\lambda \cdot \phi_\lambda(\lambda) \Rightarrow \forall \lambda : f_\lambda = \frac{p(\lambda)}{\phi_\lambda(\lambda)}$$

$$\phi(t) = \prod_{\mu} (t - \mu)$$

$$\phi'(t) = \sum_{\mu} \underbrace{\prod_{\lambda \neq \mu} (t - \lambda)}_{\phi_\mu(t)} = \sum_{\mu} \phi_\mu(t)$$

$$\phi'(\lambda) = \sum_{\mu} \underbrace{\phi_\mu(\lambda)}_{\parallel} = \phi_\lambda(\lambda) \Rightarrow f_\lambda = \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \Rightarrow p = \sum_{\lambda} \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \phi_\lambda(t)$$

0 $\mu \neq \lambda$

□

Следствие 1. $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$

$$1 = \sum_{\lambda} p_\lambda \Rightarrow \boxed{t = \sum_{\lambda} \lambda p_\lambda}$$

$$\text{Доказательство. По теореме: } 1 = \sum_{\lambda} p_\lambda = \sum_{\lambda} f_\lambda \cdot \phi_\lambda = \sum_{\lambda} \frac{1}{\phi'(\lambda)} \cdot \phi_\lambda(t)$$

$$\text{По теореме: } t = \sum_{\lambda} \frac{\lambda}{\phi'(\lambda)} \phi_\lambda(t) = \sum_{\lambda} \lambda p_\lambda$$

□

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

ϕ минимальный многочлен, все корни $\in K (\Rightarrow \text{ все корни } \chi \in K$

\Rightarrow т.е. все с.ч. $\in K - \mathbb{I}$, II случаи)

$$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda}(t)$$

$$\mathcal{P}_{\lambda} := p_{\lambda}(\mathcal{A})$$

$$\mathcal{P}_{\lambda} \in \text{End}(V)$$

$$\mathcal{P}_{\lambda} - \text{проекторы ?} \quad \uparrow \text{ это уже есть}$$

$$\boxed{\mathcal{E} = \sum_{\lambda} \mathcal{P}_{\lambda}} \text{ операторное разложение единицы}$$

$$\text{Достаточно проверить } \mathcal{P}_{\lambda} \cdot \mathcal{P}_{\mu} = \mathbb{O}$$

$$\mathcal{P}_{\lambda} = p_{\lambda}(\mathcal{A}) = f_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot \underset{\nwarrow \nearrow}{\phi_{\lambda}(\mathcal{A})}^{\lambda \neq \mu}$$

$$\lambda \neq \mu$$

$$\mathcal{P}_{\mu} = p_{\mu}(\mathcal{A}) = f_{\mu}(\mathcal{A}) \cdot \underset{\nwarrow \nearrow}{\phi_{\mu}(\mathcal{A})}$$

перестановочны, т.к. многочлены от \mathcal{A}

$$\mathcal{P}_{\lambda} \mathcal{P}_{\mu} = f_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot f_{\mu}(\mathcal{A}) \underset{\uparrow}{\phi_{\lambda}(\mathcal{A})} \cdot \phi_{\mu}(\mathcal{A}) = \mathbb{O}$$

$$\updownarrow \quad \text{содержит}$$

$$(p_{\lambda} \cdot p_{\mu} : \phi \text{ см. замеч. 1}) \quad \eta(\mathcal{A})(t - \mu)^{m(\mu)} \quad \phi(\mathcal{A}) = \mathbb{O}$$

$\Rightarrow \mathcal{P}_{\lambda}$ проекторы – **спектральные проекторы** \mathcal{A}

$\text{Im } \mathcal{P}_{\lambda}$ **спектральное подпространство**

$$\xRightarrow{7.5} \boxed{V = \bigoplus_{\lambda} \text{Im } \mathcal{P}_{\lambda}}$$

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = -1 & \alpha(\lambda_1) = 2 \\ \lambda_2 = 3 & \alpha(\lambda_2) = 1 \end{matrix}$

$$V_{\lambda_1} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \gamma(\lambda_1) = 1 < \alpha(\lambda_1) \Rightarrow \text{не о.п.с.}$$

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \gamma(\lambda_2) = 1$$

$$\chi(t) = -(t+1)^2(t-3) \quad \phi_{\lambda_1} = (t-3)$$

$$\phi(t) = (t+1)^2(t-3) \quad \phi_{\lambda_2} = (t+1)^2$$

$$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda} = p_{\lambda_1} + p_{\lambda_2} = f_{\lambda_1} \phi_{\lambda_1} + f_{\lambda_2} \cdot \phi_{\lambda_2} =$$

$$= f_{\lambda_1}(t-3) + f_{\lambda_2}(t+1)^2$$

$$\text{Прав. дробь } \frac{1}{\phi} = \sum_{\lambda} \underset{\text{Правильн.}}{\frac{f_{\lambda} \cdot \phi_{\lambda}}{\phi}} = \sum_{\lambda} \underset{\text{Правильн. дробь}}{\frac{f_{\lambda}}{(t-\lambda)^{m(\lambda)}}}$$

$$\deg f_{\lambda} < m(\lambda)$$

$$\frac{1}{(t+1)^2(t-3)} = \frac{A_1}{t+1} + \frac{A_2}{(t+1)^2} + \frac{A_3}{t-3} = \frac{-\frac{1}{16}t - \frac{5}{16}}{(t+1)^2} + \frac{\frac{1}{15}}{t-3}$$

простейшие

$$1 = \underbrace{\left(-\frac{1}{16}t - \frac{5}{16}\right) \overset{\phi_{\lambda}}{(t-3)}}_{p_{\lambda_1}} + \frac{1}{15} \overset{\phi_{\lambda_2}}{(t+1)^2}_{p_{\lambda_2}}$$

$$\mathcal{P}_1 = p_{\lambda_1}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad p_1 + p_2 = E$$

$$\mathcal{P}_2 = p_{\lambda_2}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Замечание. $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$

Из следствия теоремы Лагранжа $t = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}$

$$\boxed{\mathcal{A} = \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_{\lambda}} \nearrow \quad 1 = \sum p_{\lambda} \quad \text{спектральное разложение о.п.с.}$$

$$\boxed{\mathcal{A} \text{ о.п.с.} \Leftrightarrow \forall \lambda : m(\lambda) = 1} \quad \text{Доказательство позже}$$

Определение 2. $K_{\lambda} = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}$

называется **корневым подпространством** \mathcal{A}

Теорема 3.

1. K_{λ} инвариантно относительно \mathcal{A}
 2. $\text{Im} \mathcal{P}_{\lambda} = K_{\lambda}$
 3. $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный многочлен $\mathcal{A}|_{K_{\lambda} = \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}}$
- $$\Rightarrow \boxed{V = \bigoplus_{\lambda} K_{\lambda}}$$

Доказательство.

1. $x \in K_{\lambda} \xrightarrow{?} \mathcal{A}x \in K_{\lambda}$
 $(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \mathcal{A}x = \mathcal{A} \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} x}_{=0} = 0$
 $\xleftarrow{\text{перестановочны}} \Rightarrow \mathcal{A}x \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}$
2. $(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \mathcal{P}_{\lambda} = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} f_{\lambda}(\mathcal{A}) \phi_{\lambda}(\mathcal{A}) =$
 $= f_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \phi_{\lambda}(\mathcal{A})}_{\phi(\mathcal{A})} = 0$

$\forall x \in V$

$$(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \underbrace{\mathcal{P}_{\lambda} x}_{\in \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}} = 0 \Rightarrow \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda} \subseteq \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} = K_{\lambda}$$

Обратно: $K_{\lambda} \xrightarrow{?} \subseteq \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}$

$x \in K_{\lambda}$

$$\mu \neq \lambda \quad \mathcal{P}_{\mu} x = f_{\mu}(\mathcal{A}) \phi_{\mu}(\mathcal{A}) x = \eta(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} x}_{=0} = 0$$

$$\xleftarrow{\text{содержит}} \underbrace{\eta(\mathcal{A}) (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}}_{\eta(\mathcal{A}) (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}}$$

$$x = \mathcal{E}x = \sum_{\substack{\mu \\ \mu \neq \lambda}} \mathcal{P}_{\mu} x = \mathcal{P}_{\lambda} x \in \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda} \Rightarrow K_{\lambda} \subseteq \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{K_{\lambda} = \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}}$$

3. $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный многочлен для $\mathcal{A}|_{K_\lambda = \text{Im } \mathcal{P}_\lambda}$?

$(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}$ аннулятор $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$

Минимальный?

\square не минимальный

$\psi_1 = (t - \lambda)^{m(\lambda)-1}$ \square это минимальный многочлен

$\phi_1 := (t - \lambda)^{m(\lambda)-1} \phi_\lambda(t) =$ аннулятор \mathcal{A} ?

$$\phi_1(\mathcal{A}) \mathcal{P}_\mu = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)-1} \phi_\lambda(\mathcal{A}) f_\mu(\mathcal{A}) \phi_\mu(\mathcal{A}) =$$

$$= \dots \phi_\lambda(\mathcal{A}) \phi_\mu(\mathcal{A}) = \eta(\mathcal{A}) \cdot \phi(\mathcal{A}) = 0$$

$$\forall x \phi_1(\mathcal{A}) \mathcal{P}_\lambda x = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)-1} \phi_\lambda(\mathcal{A}) \mathcal{P}_\lambda x =$$

$$= \phi_\lambda(\mathcal{A}) \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)-1}}_{\psi_1(\mathcal{A})} \underbrace{\mathcal{P}_\lambda x}_{\in \text{Im } \mathcal{P}_\lambda = K_\lambda} = 0$$

$\underbrace{\psi_1(\mathcal{A}) \mathcal{P}_\lambda x}_{\psi_1(\mathcal{A}|_{K_\lambda})x}$
мин. многочлен по предположению

$$\phi_1(\mathcal{A}) \mathcal{P}_\lambda = 0$$

$$\phi_1(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{E} = \phi_1(\mathcal{A}) \sum_{\mu} \mathcal{P}_\mu = 0$$

$\underbrace{\phi_1(\mathcal{A}) \mathcal{P}_\lambda + \sum_{\mu \neq \lambda} \phi_1(\mathcal{A}) \mathcal{P}_\mu}_{\phi_1(\mathcal{A}) \mathcal{E}}$

$\Rightarrow \phi_1$ аннулятор \mathcal{A} , но степени $< \phi$

$\deg \phi_1 = m - 1 \Rightarrow$ противоречие мин. $\phi \Rightarrow (t - \lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный мн-н $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$

\square

Следствие 1. \mathcal{A} о.п.с. $\Leftrightarrow \forall \lambda : m(\lambda) = 1$

Доказательство. (\Rightarrow) \mathcal{A} о.п.с.

$\phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)$ покажем что это минимальный многочлен \mathcal{A}

$V = \bigoplus_{\lambda} V_\lambda$ – собственные подпространства \mathcal{A}

$$\forall v \in V \exists! v = \sum_{\lambda} v_\lambda, v_\lambda \in V_\lambda$$

$$\phi(\mathcal{A})v = \prod_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \sum_{\mu} v_\mu =$$

$$= \sum_{\mu} \prod_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) v_\mu = \sum_{\mu} \phi_\mu(\mathcal{A}) \underbrace{(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E}) v_\mu}_{\parallel 0} = 0$$

$\underbrace{\phi_\mu(\mathcal{A}) \cdot (\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})}_{\parallel 0}$

$$v_\mu \in V_\mu = \text{Ker}(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E}) \nearrow$$

$\Rightarrow \phi$ аннулятор $\mathcal{A} \Rightarrow$ очевидно минимальная степень \Rightarrow минимальный многочлен.

$(\Leftarrow) \forall \lambda : m(\lambda) = 1$

$$K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^1 = V_\lambda$$

$$\parallel$$

$$V = \bigoplus_{\lambda} K_\lambda = \bigoplus_{\lambda} V_\lambda \Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ о.п.с.}$$

\square

Примеры.

$$\text{Im } \mathcal{P}_1 = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})^2 = K_{\lambda_1}$$

$$\text{Im } \mathcal{P}_2 = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{E})^2 = K_{\lambda_2} \quad \text{— упр.}$$