

# Конспекты по линейной алгебре, 2 сем

Пак Александр

5 марта 2020 г.

# Содержание

<b>7</b>	<b>Линейные отображения</b>	<b>2</b>
7.1	Основные определения . . . . .	2
7.2	Матрица линейного отображения. Изоморфизм алгебр. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса. . . . .	5
7.3	Инварианты линейного отображения . . . . .	10
7.4	Собственные числа и собственные вектора линейного оператора. . . . .	16
7.5	Оператор простой структуры. (о.п.с.) Проекторы. Спектральное разложение о.п.с. Функция от матрицы. . . . .	20

## 7 Линейные отображения

### 7.1 Основные определения

**Определение 1.**  $U, V$  – линейные пространства над полем  $K(\mathbb{R}/\mathbb{C})$

Линейным отображением  $\mathcal{A}$  называется  $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ , обладающее свойством линейности:

$$\forall \lambda \in K, \forall u, v \in U$$

$$\mathcal{A}(u + \lambda v) = \mathcal{A}(u) + \lambda \mathcal{A}(v)$$

Замечание.

1. Записываем не  $\mathcal{A}(u)$ , а  $\mathcal{A}u$
2. "Поточечно" выполняются все арифметические операции, свойственные функциям
3.  $\mathcal{A}0_U = 0_V$

**Примеры.**

1.  $0$  – нулевое отображение  $U \rightarrow V$

$$\forall u \in U : 0u = 0_v$$

2.  $\mathcal{E}$  – тождественное отображение:  $V \rightarrow V$

$$\forall v \in V : \mathcal{E}v = v$$

3.  $U = V = P_n$  – многочлены степени до  $n$

$$\mathcal{A} : V \rightarrow V$$

$\mathcal{A}p = p'(t)$  – дифференциальный оператор

$$\mathcal{A}(p_1 + \lambda p_2) = (p_1 + \lambda p_2)' = p_1' + \lambda p_2' = \mathcal{A}p_1 + \lambda \mathcal{A}p_2$$

Линейное отображение  $\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$

4.  $U = \mathbb{R}^n, V = \mathbb{R}^m$

$$\mathcal{A} = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$\mathcal{A} : x \in U \rightarrow y = \mathcal{A}x \in V$$

$$x_1 + \lambda x_2 \in \mathbb{R}^n \rightarrow y = \mathcal{A}(x_1 + \lambda x_2) = \mathcal{A}x_1 + \lambda \mathcal{A}x_2$$

5.  $U \cong V$ . То есть отображение, на котором строится изоморфизм является линейным.

**Определение 2.**  $\lambda \in K, \mathcal{A} : U \rightarrow V$

Произведение линейного отображения на скаляр называется линейное отображение

$$\mathcal{B} = \lambda \mathcal{A}$$

$$\mathcal{B} : U \rightarrow V \quad \forall u \in U \quad \mathcal{B}u = \lambda \mathcal{A}u$$

**Определение 3.** Суммой линейных отображений  $\mathcal{A}, \mathcal{B} : U \rightarrow V$  называется  $\mathcal{C} : U \rightarrow V$

$$\forall u \in U \quad \mathcal{C}u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u \quad \boxed{\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}}$$

**Определение 4.**  $-\mathcal{A}$  – отображение противоположное  $\mathcal{A}$

$$\forall u \in U \quad (-\mathcal{A})u = -1 \cdot \mathcal{A}u$$

$$L(U, V) = \text{Hom}_K(U, V) = \text{Hom}(U, V) = \mathcal{L}(U, V)$$

$L(U, V)$  – множество всех линейных отображений из  $U$  в  $V$ .

Линейное отображение = гомоморфизм с операциями  $\lambda \mathcal{A}$  и  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$

Выполнены свойства 1–8 линейного пространства (проверить самим).

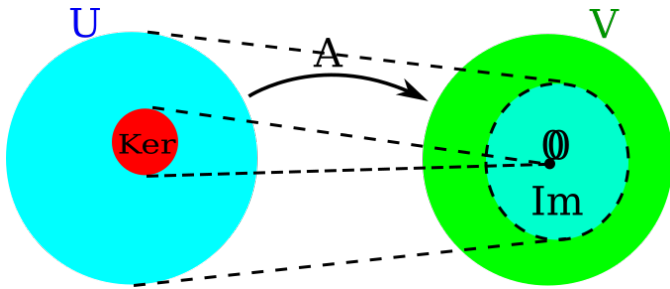
Значит  $\boxed{L(U, V) \text{ – линейное пространство}}$

**Определение 5.**  $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\text{Ker} \mathcal{A} = \{u \in U \mid \mathcal{A}u = 0_v\}$  – ядро линейного отображения.

**Определение 6.**  $\text{Im} \mathcal{A} = \{v \in V \mid v = \mathcal{A}u \ \forall u \in U\} =$

$\{v \in V \mid \exists u \in U \ v = \mathcal{A}u\}$  – образ линейного отображения.



Упр:  $\text{Ker} \mathcal{A}$  и  $\text{Im} \mathcal{A}$  – это подпространства соответственно пространств  $U$  и  $V$ . То есть они замкнуты относительно линейных операций.

Если  $\text{Ker} \mathcal{A}$  конечномерное подпространство  $U$ , то

$\boxed{\dim \text{Ker} \mathcal{A} = \text{def} \mathcal{A}}$  – дефект линейного отображения.

Если  $\text{Im} \mathcal{A}$  конечномерное подпространство  $V$ , то

$\boxed{\dim \text{Im} \mathcal{A} = \text{rg} \mathcal{A}}$  – ранг линейного отображения.

**Утверждение.**  $\mathcal{A}$  изоморфно между  $U$  и  $V \Leftrightarrow$

1.  $\mathcal{A} \in L(U, V)$
2.  $\text{Im} \mathcal{A} = V$
3.  $\text{Ker} \mathcal{A} = \{0\}$  тривиально

*Доказательство.*  $\mathcal{A}$  изоморфно  $\Leftrightarrow$  взаимнооднозначное соответствие + линейность –  $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$0_u \leftrightarrow 0_v$ , т. к. изоморфизм  $\Rightarrow \text{Ker} \mathcal{A} = \{0\}$

Пусть  $\text{Ker} \mathcal{A} = \{0\}$

Докажем инъективность  $v_1 = v_2 \Leftrightarrow u_1 = u_2$

$$v_1 = \mathcal{A}u_1 \quad v_2 = \mathcal{A}u_2$$

$$0 = v_1 - v_2 = \mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2 = \mathcal{A}(u_1 - u_2) = 0 \text{ т. к. ядро тривиально.}$$

Сюръективность.  $\text{Im} \mathcal{A} = V \Leftrightarrow \forall v \in V : \exists u \in U \mathcal{A}u = v$ . Последнее и означает сюръекцию. □

**Определение 7.**  $\mathcal{A} \in L(U, V)$

–инъективно, если  $\text{Ker} \mathcal{A} = \{0\}$

–сюръективно, если  $\text{Im} \mathcal{A} = v$

–биективно  $\equiv$  изоморфизм, если инъекция + сюръекция.

–эндоморфизм  $\equiv$  линейный оператор, если  $U \equiv V$

$$\text{End}_k(V) = \text{End}(V) = L(V, V)$$

–автоморфизм  $\equiv$  эндоморфизм + изоморфизм.

$$\text{Aut}_k(V) = \text{Aut}(V)$$

**Определение 8.** Произведением линейных отображений  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$

$$\mathcal{A} \in L(W, V) \quad \mathcal{B} \in L(U, W) \quad U \xrightarrow{\mathcal{B}} W \xrightarrow{\mathcal{A}} V$$

называется  $\mathcal{C} \in L(U, V) : \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ , которое является композицией функций, определяющих отображения  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ .

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$$

$$\forall u \in U : (\mathcal{A}\mathcal{B})u = \mathcal{A}(\mathcal{B}u)$$

Очевидно,  $\mathcal{C}$  – линейное отображение.

$$\Omega \xrightarrow{\mathcal{C}} U \xrightarrow{\mathcal{B}_{1,2}} W \xrightarrow{\mathcal{A}_{1,2}} V$$

Упр:

1.  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  изоморфизмы  $\Rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$  изоморфизм
2.  $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)\mathcal{B} = \mathcal{A}_1\mathcal{B} + \mathcal{A}_2\mathcal{B}$   
 $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2$  – дистрибутивность
3.  $\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C}$  – ассоциативность
4.  $\lambda\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{A}\lambda\mathcal{B}$

$End(V)$  – ассоциативная унитарная алгебра

$\mathcal{E}$  – единица  $\mathcal{E}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{E}$

**Определение 9.**  $\mathcal{A} \in L(U, V)$  изоморфно.

$$\forall v \in V \exists! u \in U : v = \mathcal{A}u$$

$$\mathcal{A}^{-1} : V \rightarrow U$$

$$\boxed{\mathcal{A}^{-1}v = u}$$

$$Упр: \mathcal{A}^{-1} \in L(V, U)$$

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}_v \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}_u$$

$\mathcal{A} \in End(U)$  – линейный оператор

$\mathcal{A}^{-1} \in End(V)$  – обратный оператор

**Определение 10.**  $U_0 \subset U \quad \mathcal{A} \in L(U, V)$

Сужением линейного отображения  $\mathcal{A}$  на линейное подпространство  $U_0$  называется

$$\mathcal{A}|_{U_0} : U_0 \rightarrow V \quad \forall u \in U_0 \quad \mathcal{A}|_{U_0}u = \mathcal{A}u$$

**Утверждение.**  $\mathcal{A}$  изоморфизм  $\in L(U, V) \Rightarrow \mathcal{A}|_{U_0} \in L(U_0, Im(\mathcal{A}|_{U_0}))$  – изоморфизм

**Примеры.**

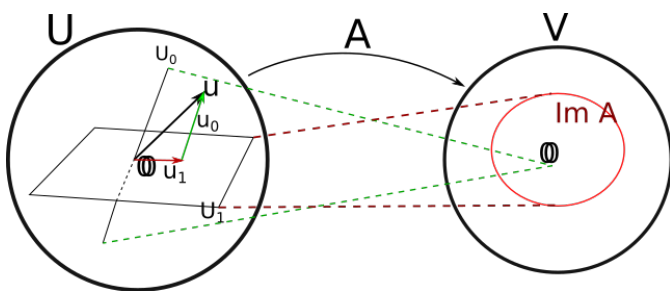
1.  $\mathbb{0} : U \rightarrow U$  – не сюръекция, не инъекция, эндоморфизм, не автоморфизм.
2.  $\mathcal{E} : U \rightarrow U$  – автоморфизм
3.  $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} : P_n \rightarrow P_n$  – эндоморфизм, не инъекция, не сюръекция.
4.  $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow y = \mathcal{A}x \in \mathbb{R}^n$  – эндоморфизм.

Сюръекция  $\Leftrightarrow rg\mathcal{A} = n \Leftrightarrow \exists \mathcal{A}^{-1} \Leftrightarrow$  инъекция.

То есть автоморфизм.

**Теорема 1** (о  $rg$  и  $def$  линейного отображения).  $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$$\boxed{rg\mathcal{A} + def\mathcal{A} = dim U}$$



*Доказательство.*  $U_0 = \text{Ker } \mathcal{A}$

Дополним линейное пространство  $U_1$  до пр-ва  $U$ :

$$U = U_0 \oplus U_1 \quad U_1 \cap U_0 = \{0\}$$

$\forall u \in U : u = u_0 + u_1$  (единственным образом)

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1 \quad \text{Im } \mathcal{A} = \mathcal{A}(U_1)$$

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} : U_1 \rightarrow \text{Im } \mathcal{A}$$

$\mathcal{A}_1$  – изоморфизм?  $\text{Im } \mathcal{A}_1 = \text{Im } \mathcal{A}$  – сюръекция

$$\left. \begin{array}{l} \forall w \in \text{Ker } \mathcal{A}_1 \in U_1 \\ \text{Ker } \mathcal{A}_1 \subset \text{Ker } \mathcal{A} = U_0 \end{array} \right\} \Rightarrow w \in U_1 \cap U_0 = \{0\} \Rightarrow \text{Ker } \mathcal{A}_1 = \{0\} \Rightarrow \mathcal{A}_1 \text{ изоморфизм.}$$

$U_1 \cong \text{Im } \mathcal{A} \Leftrightarrow \dim U_1 = \dim(\text{Im } \mathcal{A})$  – инъекция.

Т. к.  $U = U_0 \oplus U_1$ , то  $\dim U = \dim U_0 + \dim U_1 = \dim_{\text{def } \mathcal{A}} \text{Ker } \mathcal{A} + \dim_{\text{rg } \mathcal{A}} \text{Im } \mathcal{A}$  □

**Следствие 1** (Характеристика изоморфизма).

$\mathcal{A} \in L(U, V)$  Следующие условия эквивалентны:

1.  $\mathcal{A}$  изоморфно
2.  $\dim U = \dim V = \text{rg } \mathcal{A}$
3.  $\dim U = \dim V$   
 $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\} \Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0$

**Следствие 2.**  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$  Следующие условия эквивалентны:

1.  $\mathcal{A} \in \text{Aut}(V)$
2.  $\dim V = \text{rg } \mathcal{A}$
3.  $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\} \Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0$

## 7.2 Матрица линейного отображения. Изоморфизм алгебр. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса.

$$\mathcal{A} \in L(U, V)$$

$\xi_1 \dots \xi_n$  базис  $U$

$\eta_1 \dots \eta_m$  базис  $V$

$$\forall u \in U \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$$

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^n u_i \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i \quad \text{Достаточно знать, как } \mathcal{A} \text{ работает на базисных векторах } \xi_1 \dots \xi_n$$

$$\text{Im } \mathcal{A} = \text{span}(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$$

$$\mathcal{A}\xi_i \in V = \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m) \quad a_{ji} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$$\boxed{A = (A_1 \dots A_i \dots A_n) = (a_{ij})_{m \times n}} \quad \text{матрица линейного отображения } \mathcal{A} \text{ относительно базисов } (\xi, \eta)$$

Частный случай:  $\mathcal{A} \in \text{End}(V) : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$   
 $A = (a_{ji})_{n \times n}$  – матрица линейного оператора  
 $Ae_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j$

Примеры.

$$1. \mathcal{E} : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V} \quad \mathcal{E}e_i = e_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow E_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

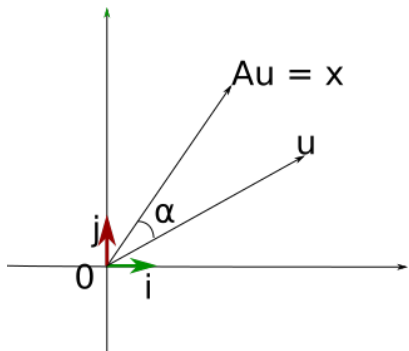
2.

$$\mathcal{E} : \underset{e'_1 \dots e'_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$$

$$\mathcal{E}e'_i = \sum_{j=1}^n t_{ji} e_j \leftrightarrow T_i = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix}$$

$$[\mathcal{E}]_e = T = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix} = T_{e \rightarrow e'}$$

3.

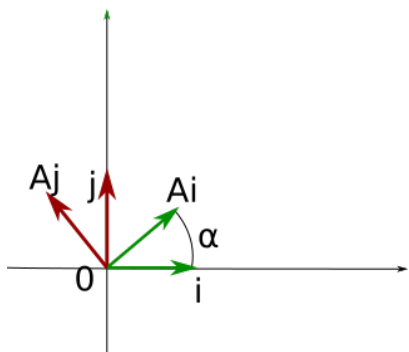


$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$v = \mathcal{A}u$$

Поворот векторов в плоскости на угол  $\alpha$ .

Очевидно, линейный оператор.



$$\mathcal{A}_i = \cos \alpha i + \sin \alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_j = -\sin \alpha i + \cos \alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$4. \mathcal{A} : \begin{smallmatrix} 1, t, t^2 \\ p_2 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 1, t, t^2 \\ p_2 \end{smallmatrix}$$

$$\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$$

$$\mathcal{A}t^2 = (t^2)' = 2t \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}1 = 1' = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \xleftrightarrow{(1, t, t^2)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}t = t' = 1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} : \begin{smallmatrix} p_2 \\ 1, t, t^2 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} p_1 \\ 1, t \end{smallmatrix}$$

$$\mathcal{A} = \frac{d}{dt} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Утверждение.**  $L(U, V) \cong M_{m \times n}$

(Линейное пространство матриц с вещ.(компл.) элементами размерности  $m \times n$ .)

*Доказательство.* Изоморфизм  $\equiv$  биекция + линейность.

Биекция.  $\mathcal{A} \rightarrow A_{m \times n}$  – поняли, как сопоставлять.

Теперь обратно. Пусть  $A_{m \times n} = (a_{ij})$

$U \quad \xi_1 \dots \xi_n$  базис

$\mathcal{A} : U \rightarrow V$

$V \quad \eta_1 \dots \eta_m$  базис

$$\mathcal{A}\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji}\eta_j \in V$$

$$\forall u \in U \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i$$

$$\mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i \in V \Rightarrow \mathcal{A} \in L(U, V) \quad \mathcal{A}, \mathcal{B} \leftrightarrow A, B$$

$$\forall \lambda \in K \quad \mathcal{A} + \lambda \mathcal{B} \overset{?}{\leftrightarrow} A + \lambda B$$

$$(\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B})\xi_i = \mathcal{A}\xi_i + \lambda \mathcal{B}\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji}\eta_j + \lambda \sum_{j=1}^m b_{ji}\eta_j = \sum_{j=1}^m (a_{ji} + \lambda b_{ji})\eta_j \leftrightarrow c_i = A_i + \lambda B_i \leftrightarrow A + \lambda B \Rightarrow$$

линейность  $\Rightarrow$  изоморфизм. □

$$\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B} \leftrightarrow A + \lambda B$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow A \cdot B$$

$$\mathcal{A}, \mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A, A^{-1}$$

$End(V) \cong M_{n \times n}$  – ассоциативные унитарные алгебры. (Координатный изоморфизм).

Алгебры изоморфны, т.к. сохраняются свойства дистрибутивности, ассоциативности и т. д.

Я не особо понял, что мы дальше делаем, но у меня это записано

$$U\xi_1 \dots \xi_n \quad \forall u \in U \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$V\eta_1 \dots \eta_m \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i$$



$$\forall v \in V \leftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$$v = \sum_{j=1}^m v_j \eta_j$$

$$\mathcal{A} \in L(U, V) \leftrightarrow A_{\xi, \eta}$$

$$\sum_{j=1}^m v_j \eta_j = v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i = \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n u_i a_{ji} \right) \eta_j$$

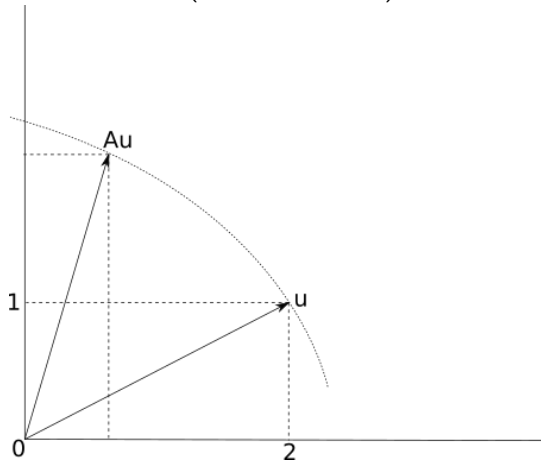
Так как координаты определяются единственным образом:

$$\boxed{v_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} u_i} \leftrightarrow \boxed{v = Au} \leftrightarrow v = \mathcal{A}u$$

**Примеры.**

1.  $\mathcal{A}$  поворот на угол  $\alpha$

$$(i, j) \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$



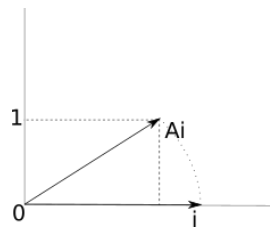
$$\alpha = 45^\circ \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$u \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v = \mathcal{A}u \leftrightarrow v = Au = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}i \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$



2.  $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} : p_{2,1,t,t^2} \rightarrow p_{2,1,t,t^2}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{(3t^3 + 6t + 4)}^{u(t)} = 6t + 6$$

$$3t^2 + 6t + 4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}u \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow 6 + 6t$$

**Теорема 1** (Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса).  $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$$U \quad \xi = (\xi_1 \dots \xi_n) \quad - \text{базисы} \quad \mathcal{A} \xrightarrow{(\xi, \eta)} A$$

$$\xi' = (\xi'_1 \dots \xi'_n)$$

$$T_{\eta \rightarrow \eta'} - \text{матрица перехода}$$

$$V \quad \eta = (\eta_1 \dots \eta_m) \quad - \text{базисы} \quad \mathcal{A} \xrightarrow{(\xi', \eta')} A'$$

$$\eta' = (\eta'_1 \dots \eta'_m)$$

$$\mathcal{A}' = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} \cdot A \cdot T_{\xi \rightarrow \xi'}$$

Ну видимо сейчас доказательство, но я не уверен.

*Доказательство.*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{A} & V \\ \xi_1 \dots \xi_n & & \eta_1 \dots \eta_m \\ \mathcal{E}_u \uparrow \uparrow & & \downarrow \uparrow \mathcal{E}_v \\ U & \xrightarrow{A} & V \\ \xi'_1 \dots \xi'_n & & \eta'_1 \dots \eta'_m \end{array}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{E}_v^{-1} \mathcal{A} \mathcal{E}_u \leftrightarrow A' = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} A T_{\xi \rightarrow \xi'}$$

$$\mathcal{A} \mathcal{B} \leftrightarrow AB$$

$$\mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A^{-1}$$

$$\mathcal{E}_v^{-1} \leftrightarrow T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} \quad \text{Смотри пример 2}$$

□

**Следствие 1.**

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V) \quad \mathcal{A}: \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$$

$$e_1 \dots e_n \text{ базис } V \leftrightarrow A$$

$$e'_1 \dots e'_n \text{ базис } \leftrightarrow A'$$

$$\mathcal{A}: \underset{e'_1 \dots e'_n}{V} \xrightarrow{A'} \underset{e'_1 \dots e'_n}{V}$$

$$T = T_{e \rightarrow e'}$$

$$A' = T^{-1} A T$$

*Замечание.* В условиях теоремы  $v = \mathcal{A}u \xrightarrow{(\xi, \eta)} v = Au$   
 $\xrightarrow{(\xi', \eta')} v' = A'u$

$$V = T_{\eta \rightarrow \eta'} V'$$

$$\begin{aligned}
U &= T_{\xi \rightarrow \xi'} U' \\
T_{\eta \rightarrow \eta'} v' &= A T_{\xi \rightarrow \xi'} u' \\
v' &= \boxed{T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} A T_{\xi \rightarrow \xi'}}_{A'} u'
\end{aligned}$$

### 7.3 Инварианты линейного отображения

**Инвариант** - свойство, которое сохраняется при некоторых определенных преобразованиях

$$v = Au \leftrightarrow v = Au$$

Форма записи действия линейного отображения на вектор инвариантна относительно замены базиса.

$$v' = A' u'$$

**Определение 1.**  $A_{m \times n}$

$$Im A = span(A_1, A_2, \dots, A_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i \mid \alpha_i \in K \right\} =$$

$$\{y = Ax \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m) \mid x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)\}$$

$$x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$rg A = dim Im A$  — ранг матрицы

$Ker A = \{x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n) \mid Ax = 0\} = \{\text{множество решений СЛОУ}\}$  — ядро матрицы

$dim Ker A = n - rg A = def A$  — дефект матрицы

$rg A + def A = n$  — аналогично теореме о ранге и дефекте

**Теорема 1.**  $\forall A \in L(U, V)$

$$\boxed{
\begin{aligned}
rg A &= rg A \\
def A &= def A
\end{aligned}
},$$

где матрица  $A$  — матрица линейного отображения в некоторых базисах пространств  $U$  и  $V$ .

$rg A, def A$  инвариантны относительно выбора базиса.

*Доказательство.*  $A \leftrightarrow_{(\xi, \eta)} A \xi = (\xi_1 \dots \xi_n)$  базис  $U$

$\eta = (\eta_1 \dots \eta_m)$  базис  $V$

$$Im A = span(A \xi_1 \dots A \xi_n)$$

$$A \xi_i \stackrel{\leftrightarrow}{\cong} A_i$$

Координатный изоморфизм.

Пусть  $rg A = k \Rightarrow k$  столбцов линейно независимы, а остальные — их линейная комбинация.

По свойствам изоморфизма это означает, то из  $A \xi_1 \dots A \xi_n$   $k$  линейно независимые, а остальные — их линейная комбинация  $\Rightarrow rg A = dim Im A = k$

$$dim U = rg A + def A$$

$$\begin{array}{ccc}
\parallel & & \parallel \\
n & & rg A \\
& & \parallel \\
& & k
\end{array}$$

$$def A = n - rg A = n - k = dim \text{ пространства решений } Ax = 0 = def A$$

□

**Следствие 1.**  $\mathcal{A}$  изоморфизм  $\Leftrightarrow A$  невырожденная ( $\exists A^{-1}$ ), где  $A$  матрица в некотором базисе.

*Доказательство.* Изоморфизм  $\Leftrightarrow \begin{matrix} \text{def } A = 0 \\ \dim U = \dim V \end{matrix} \Leftrightarrow \text{rg } A = n \Leftrightarrow A \text{ невырожденная.}$   $\square$

**Теорема 2.**  $\det \mathcal{A}$  не зависит от выбора базиса пространства  $V$  (т.е. является инвариантом относительно выбора базиса). И при этом  $\det \mathcal{A} = \det A$ , где  $A$  – матрица оператора  $\mathcal{A}$  в некотором базисе.

*Доказательство.*  $V$   $e_1 \dots e_n$

$$\det \mathcal{A} = \det(\mathcal{A}e_1 \dots \mathcal{A}e_n)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}e_k &= \sum_{i_k=1}^n a_{i_k k} e_{i_k} \xrightarrow{A=(a_{ij})} A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = (\det \text{ } n\text{-форма, т. е. полиномиальная форма}) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=2}^n \dots \sum_{i_n=n}^n a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \det(e_{i_1}, e_{i_2} \dots e_{i_n}) = (n\text{-форма} - 2 \text{ одинаковых аргумента} \Rightarrow \det = 0) \\ &= \sum_{\sigma=(i_1 \dots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \overbrace{\det(e_{i_1} \dots e_{i_n})}^{(-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} \det(e_1 \dots e_n)=1} = \sum_{\sigma=(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} = \det A \end{aligned}$$

$e'_1 \dots e'_n$  базис  $V$

$$T = T_{e \rightarrow e'}$$

$$\det \mathcal{A} = \det \mathcal{A}' \stackrel{?}{=} \det A$$

$$A' = T^{-1} A T$$

$$\det A' = \det T^{-1} \cdot \det A \cdot \det T = \det A$$

$\square$

**Определение 2.**  $A, B$  называются подобными, если

$$\exists \text{ невырожденная } C : B = C^{-1} A C$$

**Примеры.** Матрицы линейного оператора в разных базисах подобны

$$A' = T^{-1} A T$$

$$A, B \text{ подобны} \Rightarrow \det A = \det B$$

**Следствие 1.**  $f$  –  $n$ -форма на  $V$

$$\forall \xi_1 \dots \xi_n \quad \forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n) = \det \mathcal{A} f(\xi_1 \dots \xi_n)}$$

*Доказательство.*  $f(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n) =$

$$g(\xi_1 \dots \xi_n) = \det(\xi_1 \dots \xi_n) \cdot g(e_1 \dots e_n) =$$

$$\det(\xi_1 \dots \xi_n) \cdot \underbrace{f(\mathcal{A}e_1 \dots \mathcal{A}e_n)}_{\text{смотри док-во теоремы}} = \det(\xi_1 \dots \xi_n) \sum_{\sigma} (-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \cdot f(e_1 \dots e_n) =$$

$$\mathcal{A}e_k = \sum_{i_k=1}^n a_{i_k k} e_{i_k} = \underbrace{\det(\xi_1 \dots \xi_n) f(e_1 \dots e_n)}_{f(\xi_1 \dots \xi_n)} \underbrace{\det A}_{\det A}$$

$\square$

*Замечание.*  $A$  – линейный оператор,  $B_{n \times n}$

$$AB = (AB_1 \ AB_2 \ \dots \ AB_n)$$

$$\det(AB) = \det(AB_1 \dots AB_n) =$$

$$= \det A \cdot \det(B_1 \dots B_n) = \det A \cdot \det B$$

**Следствие 2.**  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{End}(V)$

$$\det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{B}$$

*Доказательство.*  $\det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det(AB) = \det A \cdot \det B = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{B}$  □

**Следствие 3.**  $\mathcal{A} \in \text{Aut}(V)$

$$\Leftrightarrow \det \mathcal{A} \neq 0$$

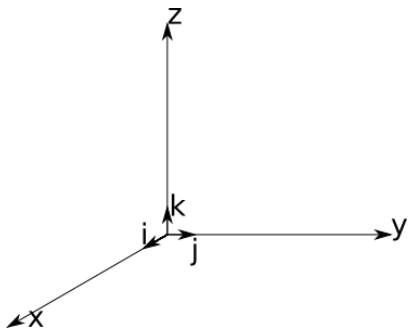
$$\text{Причем } \det \det \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}}$$

*Доказательство.* Из следствия 2

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}$$

$$\det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{A}^{-1} = \det \mathcal{E} = 1 \Rightarrow \dots$$
 □

**Примеры.**  $V_3$



$$V_{abc\text{-правая тройка}} = \underset{\text{смешанное пр-е}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = f(\underset{\text{3-форма}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}})$$

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V_3) \quad u \in V_3 \rightarrow v = \mathcal{A}u \in V_3$$

Как поменяется объем параллелепипеда при линейном преобразовании?

$$\mathcal{A}(V_{(\bar{a}\bar{b}\bar{c})}) = f(\mathcal{A}\bar{a}, \mathcal{A}\bar{b}, \mathcal{A}\bar{c}) = \det \mathcal{A} \cdot f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \det \mathcal{A} \cdot V(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$$

$$\lambda = |\det \mathcal{A}| \quad \text{Объем увеличится в } \lambda \text{ раз.}$$

$$1. \mathcal{A} : V_3 \rightarrow V_3$$

Оператор подобия

$$\forall u \in V_3 : \mathcal{A}u = \mu u, \mu \in \mathbb{R}$$

$A?$

$$\mathcal{A}\bar{i} = \mu\bar{i} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}\bar{j} = \mu\bar{j} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}\bar{k} = \mu\bar{k} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix}$$

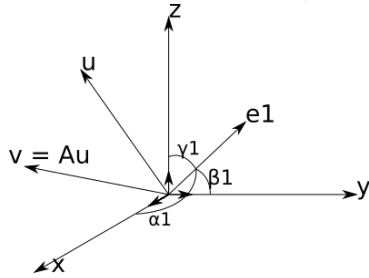
$$A = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

$$\lambda = |\det \mathcal{A}| = |\det A| = |\mu^3|$$

2.  $\mathcal{A} : V_3 \rightarrow V_3$

**Оператор поворота**

$$\mathcal{A} : \begin{array}{l} \bar{i} \rightarrow e_1 \nearrow \\ \bar{j} \rightarrow e_2 \rightarrow \\ \bar{k} \rightarrow e_3 \searrow \end{array} \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \beta_1 \\ \cos \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 \\ \cos \beta_2 \\ \cos \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_3 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} |e_i| &= 1 \\ (e_i, e_j) &= 0 \\ i &\neq j \end{aligned}$$

$$"A(V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}})" = \det A \cdot V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = |\cdots|_{\text{Смешанное произведение}} e_1 e_2 e_3 = 1$$

$$(\det A)^2 = \det A \cdot \det A^T = \det(AA^T) = \det \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{pmatrix} = \det E = 1$$

$$|\det A| = 1$$

**Утверждение.**  $A, B$  подобные матрицы  $\Rightarrow \text{tr} A = \text{tr} B$

*trace = след*

*Доказательство.*  $A, B$  подобные  $\Rightarrow$

$\exists C$  невырожденная:  $C^{-1}(AC) = B$

$$\text{tr} B = \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij}^{\prime\prime-1} (AC)_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C_{ij}^{\prime\prime-1} a_{jk} C_{ki} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \underbrace{\sum_{i=1}^n C_{ki} C_{ij}^{\prime\prime-1}}_{\delta_{kj}} = \sum_{k=1}^n a_{kk} = \text{tr} A$$

$$\boxed{\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}} \quad CC^{-1} = E$$

□

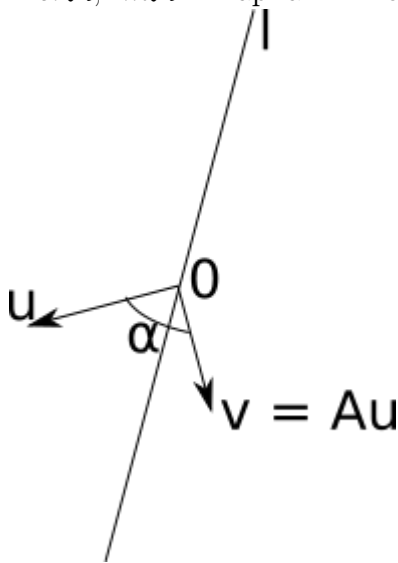
**Определение 3.**  $\text{tr} \mathcal{A} = \text{tr} A$ , где  $A$  – матрица оператора в некотором базисе.

$\text{tr} \mathcal{A} = \text{tr} A = \text{tr} A'$  – не зависит от выбора базиса, т.к.  $A$  и  $A'$  подобны.

**Определение 4.**  $L \subset V$   $L$  инвариантно относительно  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$  если  $\forall u \in L : \mathcal{A}u \in L$

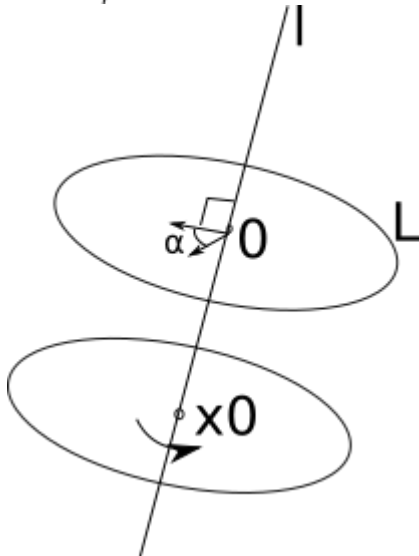
**Примеры.**

1.  $\{0\}, V$  инвариантны относительно  $\mathcal{A}$
2.  $\text{Ker } \mathcal{A}, \text{Im } \mathcal{A}$  инвариантны относительно  $\mathcal{A}$



$\mathcal{A} : V_3 \rightarrow V_3$

Поворот вектора(пр-ва) относительно оси  $l$  на угол  $\alpha$



Плоскость  $\perp l$  инвариантна относительно  $\mathcal{A}$

$P = x_0 + L$  инвариантно

**Теорема 3.**  $L \subset V$   $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ . Линейное пространство инвариантно относительно  $\mathcal{A}$

$\Rightarrow \exists$  базис пространства  $V$ , т.ч. матрица оператора  $\mathcal{A}$  в этом базисе

будет иметь вид:  $A = \left( \begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0 & A_3 \end{array} \right)$

$A_1 k \times k$  где  $k = \dim L$

*Доказательство.*  $L = \text{span}(e_1 \dots e_k)$   
базис

Дополним до базиса  $V : e_1 \dots e_k e_{k+1} \dots e_n$

$$e_i \in L \Rightarrow \mathcal{A}e_i \in L = \sum_{m=1}^k a_{mi}e_m + \sum_{m=k+1}^n 0 \cdot e_m \leftrightarrow A_i^1 = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}e_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}e_j \leftrightarrow A_i^{2,3} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ a_{ni} \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{1i}} & \boxed{A_i^1} & \boxed{A_i^{2,3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boxed{a_{ki}} & \boxed{A_i^1} & \boxed{A_i^{2,3}} \\ 0 & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

□

**Следствие 1.**  $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$   $L_i$  инвариантно  $\mathcal{A}$

$\Rightarrow \exists$  базис пр-ва  $V$ , в котором матрица оператора  $\mathcal{A}$  будет иметь блочно-диагональный вид:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A^1} & \dots & 0 \\ & \boxed{A^2} & \\ 0 & & \boxed{A^n} \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{matrix} A^i \\ \text{размерность матрицы} \end{matrix} \right) = \dim L_i$$

*Доказательство.*  $L_1 = \text{span}(e_i^1 \dots e_{i_k}^{i_k})$   
базис

т.к.  $\bigoplus$ , то базис  $V$  – объединение базисов  $L_i$

$$V = \text{span}(e_1^1 \dots e_m^{i_m})$$

$\mathcal{A}^j e_i \in L_i \Rightarrow$  раскладываем по базису  $L_i \Rightarrow$

на остальных позициях в столбике матрицы оператора будут нули.

$$A = \left( \begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} \underline{L_1} \\ \underline{1 \dots i_1} \end{matrix} & \begin{matrix} \underline{L_2} \\ \underline{i_1+1 \dots i_2} \end{matrix} & \\ \hline \begin{matrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{matrix} & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right)$$

отвечает позиции базисных элементов пр-ва  $L_i$  в базисе  $V$

□

**Следствие 2.**  $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$   $L_i$  инвариантно относительно  $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V) \Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im} \mathcal{A}|_{L_i}$$



Доказательство.  $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i \Rightarrow \forall u \in V \exists! u = \sum_{i=1}^m u_i \in L_i$

$$Im \mathcal{A} \subset \sum_{i=1}^m Im \mathcal{A}|_{L_i}$$

$$v \in Im \mathcal{A} = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^m \mathcal{A}u_i \in Im \mathcal{A}|_{L_i}$$

Верно и " $\supset$ "

Пусть  $v_i \in Im \mathcal{A}|_{L_i} : v_i = \mathcal{A}u_i, u_i \in L_i$

$$\sum_{i=1}^m v_i = \sum_{i=1}^m \mathcal{A}u_i = \mathcal{A}(\sum_{i=1}^m u_i \in V) \in Im \mathcal{A}$$

$$Im \mathcal{A} = \sum_{i=1}^m Im \mathcal{A}|_{L_i}$$

$\bigoplus$  прямая?

$$v_i \in Im \mathcal{A}|_{L_i}$$

$$v_i = \mathcal{A}u_i \quad u_i \in L_i$$

$$\sum_{i=1}^m v_i = 0 \longleftarrow$$

Т.к.  $L_i$  инвариантна  $\Rightarrow \mathcal{A}u_i \in L_i \Rightarrow v_i \in L_i$ , но  $L_i$  дизъюнкты  $\swarrow \Rightarrow \forall i : v_i = 0$

$\Rightarrow Im \mathcal{A}|_{L_i}$  дизъюнкты  $\Rightarrow \bigoplus$

□

## 7.4 Собственные числа и собственные вектора линейного оператора.

$\mathcal{A} \in End(V)$   $V$  линейное пространство над  $K$

**Определение 1.**  $\lambda \in K$  – **собственное число** (с.ч.) линейного оператора  $\mathcal{A}$ , если

$\exists \boxed{v \in V \neq 0}$ , который называется **собственным вектором** (с.в.), такой что  $\boxed{\mathcal{A}v = \lambda v}$

Пусть  $v : \mathcal{A}v = \lambda v \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})v = 0 \Leftrightarrow v \in Ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})$

**Определение 2.**  $V_\lambda = Ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) = \{ \text{с.в. } v \text{ и } 0 \}$  называется **собственным подпространством**.

$\boxed{\gamma(\lambda) := \dim V_\lambda}$  – **геометрическая кратность** с.ч.

$$\gamma \geq 1$$

$V_\lambda$  и  $\gamma(\lambda)$  – инварианты относительно выбора базиса.

$$v \in V_\lambda \quad \mathcal{A}v = \lambda v \stackrel{?}{\in} V_\lambda$$

$$\mathcal{A}(\lambda v) = \lambda \mathcal{A}v = \lambda^2 v = \lambda(\lambda v)$$

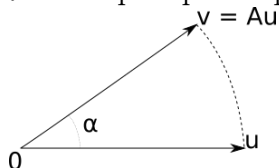
**Примеры.**

1.  $\mathcal{A}$  – оператор подобия:

$$\mathcal{A}v = \mu \cdot v \quad \mu \in K$$

$$\mu \text{ с.ч.} \quad V_\lambda = V$$

2.  $\mathcal{A}$  – оператор поворота на плоскости на угол  $\alpha$



$\alpha \neq \pi k \Rightarrow$  нет с.в.

3. Пусть  $\lambda$  с.ч. = 0  $\mathcal{A}v = 0$  с.в.  $\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{Ker } \mathcal{A}$  нетривиально  $\Leftrightarrow \mathcal{A}$  не автоморфизм  $\Leftrightarrow \mathcal{A}$  необратимо  $\Leftrightarrow \det \mathcal{A} = 0$

4.  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$

$$v_1 \dots v_n \text{ базис, т.ч. } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \Lambda$$

Базис состоит из с.в. отвечающих с.ч.  $\lambda_1 \dots \lambda_n$

$$\mathcal{A}v_i = \lambda_i v_i \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda$  – с.ч.  $v$  с.в.  $\neq 0 \Leftrightarrow \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})$  нетривиально  $\Leftrightarrow \det(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) = 0$

**Определение 3.**  $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E})$  – характеристический многочлен оператора  $\mathcal{A}, t \in K$

$V e_1 \dots e_n$  базис  $\mathcal{A} \leftrightarrow A$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) = \det(A - tE)$  т.к.  $\det$  оператора инвариантен относительно выбора базиса.

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tE) &= \begin{vmatrix} (a_{11} - t) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - t) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & (a_{nn} - t) \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} (a_{11} + \dots + a_{nn}) t^{n-1} + \dots + \frac{\det A}{\det A} \end{aligned}$$

По теореме Виета:  $\det \mathcal{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n$   
корни  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$

$\lambda \in K$  с.ч.  $\Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0$  ( $\lambda \in K$ )

$\lambda$  корень характеристического многочлена.

$k = \mathbb{C} \Rightarrow n$  с.ч. с учетом кратности корней характеристического многочлена.

$k = \mathbb{R} \Rightarrow$  только вещественные корни  $\chi_{\mathcal{A}}$  будут с.ч.

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n \prod_{\lambda \text{ корень}} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)}$$

$\alpha(\lambda)$  называется алгебраической кратностью с.ч.  $\lambda$  (если  $\lambda \in K$ )

**Определение 4.** Множество всех с.ч. с учетом алгебраической кратности называется **спектром** линейного оператора.  $(\lambda, \alpha(\lambda))$

Спектр – простой, если все с.ч. попарно-различны.

$$\alpha(\lambda) = 1 \quad \forall \lambda$$

**Немного про алгебраическую кратность**

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 = a_n \prod_{a-\text{корень}} (t - a)^{m_a}$$

$$a\text{-корень } f \Leftrightarrow f(a) = 0 \Leftrightarrow f : (t - a)$$

$$a\text{-корень } f \text{ кратности } m \Leftrightarrow \begin{matrix} f \mid (t - a)^m \\ f \nmid (t - a)^{m+1} \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow f(t) = (t - a)^m g(t)$$

$a_0$  – произведение всех корней с учетом кратности  $= (-1)^n \prod a$   $a$  – корень с учетом кратности

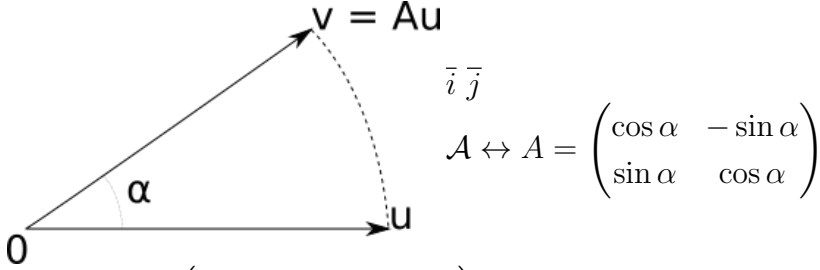
$$\det \mathcal{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n$$

$$(-1)^n t^n + \dots = (-1)^n (t - a_1)(t - a_2) \dots (t - a_n)$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n t^n + \dots = (-1)^n (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_n)$$

$$\det \mathcal{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ с.ч.}$$

**Примеры.**  $\mathcal{A}$  – поворот на угол  $\alpha$



$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det \begin{pmatrix} \cos \alpha - t & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha - t \end{pmatrix} =$$

$$\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha t + t^2 + \sin^2 \alpha = t^2 - 2 \cos \alpha t + 1$$

$$D = 4 \cos^2 \alpha - 4 < 0 \quad \alpha \neq \pi k$$

нет вещ. корней  $\Rightarrow$  нет с.ч.

$$K = \mathbb{R}$$

**Теорема 1.**  $\lambda$  с.ч.  $\mathcal{A} \Rightarrow \boxed{1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)}$

*Доказательство.* Пусть  $\gamma(\lambda) = k = \dim V_\lambda = \text{span}(v_1 \dots v_k)$   
базис

$V_\lambda$  инвариантно относительно  $\mathcal{A} \Rightarrow \exists$  базис: матрица оператора будет иметь вид:

(инвариантное линейное подпространство. Смотри Теорему пункта 7.3)

$$A = \left( \begin{array}{c|c} A^1 & A^2 \\ \hline 0 & A^3 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & A^2 \\ 0 & \lambda & \\ \hline 0 & & A^3 \end{array} \right) \quad A_{k \times k}^1$$

$$\text{Базис} = v_1 \dots v_k v_{k+1} \dots v_n$$

$$\mathcal{A} \begin{matrix} v_i \\ i=1 \dots k \end{matrix} \in V_\lambda = \lambda v_i \leftrightarrow A_i^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det \left( \begin{array}{cc|c} \lambda - t & 0 & A^2 \\ 0 & \lambda - t & \\ \hline 0 & & A^3 - tE_{n-k} \end{array} \right) \stackrel{\text{св-ва } \det}{=} \begin{vmatrix} \lambda - t & 0 \\ 0 & \lambda - t \end{vmatrix} |A^3 - tE_{n-k}| = (\lambda - t)^k \chi_{A^3}(t)$$

Очевидно,  $\lambda$  корень  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  кратности не меньше, чем  $k \Rightarrow \alpha(\lambda) \geq k = \gamma(\lambda)$  □

**Теорема 2.**  $\lambda_1 \dots \lambda_m$  – различные с.ч.  $\mathcal{A}$

$v_1 \dots v_m$  соответствующие им с.в.  $\Rightarrow$

$\Rightarrow v_1 \dots v_m$  линейно независимы.

*Доказательство.* Метод математической индукции

1. База.  $m = 1$   $\lambda_1 v_1$  с.в. – линейно независимы, т.к.  $v_1 \neq 0$
2. Индукционное предположение. Пусть верно для  $m - 1$
3. Индукционный переход. Докажем, что верно для  $m$

От противного. Пусть  $\lambda_1 \dots \lambda_m$  попарно различные с.ч.  $\mathcal{A}$ ,

а  $v_1 \dots v_m$  линейно зависимы.

Пусть  $v_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$

$$\mathcal{A}_{v_m} = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \mathcal{A}_{v_i} = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \lambda_i v_i$$

||

$$\lambda_m v_m = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \lambda_m v_i$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_m) v_i = 0 \quad v_i \text{ линейно независим по инд. предположению}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots m-1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow v_m = 0$  – Противоречие, т.к.  $v_m$  с.в. и значит не может быть 0

□

**Следствие 1.**  $\lambda_1 \dots \lambda_m$  различные с.ч.  $\mathcal{A} \Rightarrow V_{\lambda_1} \dots V_{\lambda_m}$  дизъюнкты.  $\left( \bigoplus_{\substack{\lambda \\ \text{с.ч.}}} V_{\lambda} \right)$

*Доказательство.*  $v_1 + \dots + v_m = 0 \quad v_i \in V_{\lambda_i}$

Если хотя бы 1 слагаемое  $\neq 0 \Rightarrow$  это слагаемое с.в.  $\Rightarrow$  противоречие с линейной независимостью с.в., отвечающих различным с.ч.  $\Rightarrow \forall i : v_i = 0 \Rightarrow$  дизъюнкты. □

**Теорема 3.**  $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i \quad L_i$  инвариантно относительно  $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{L_i} : L_i \rightarrow L_i \Rightarrow \boxed{\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{i=1}^m \chi_{\mathcal{A}_i}(t)}$$

*Доказательство.* см. теорему - следствие п. 7.3

Базис  $V$  – объединение базисов  $L_i$

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{A^1} & & 0 \\ & \boxed{A^2} & \\ 0 & & \boxed{A^m} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_i \leftrightarrow A^i \quad A_{k_i \times k_i}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = |A - tE| \underset{\text{свойства det}}{=} |A^1 - tE_{k_1}| |A^2 - tE_{k_2}| \dots |A^m - tE_{k_m}| =$$

$$\chi_{A^1}(t) \quad \chi_{A^2}(t) \quad \dots \quad \chi_{A^m}(t)$$

||

||

||

$\mathcal{A}_1$

$\mathcal{A}_2$

$\mathcal{A}^m$

□

Все свойства с.ч. и с.в. доказанные для оператора верны для числовых матриц пространств  $\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m$ .

$A_{n \times n} \quad \lambda \text{ с.ч. } A : \exists x \in \mathbb{R}^n \neq 0 \quad Ax = \lambda x$

$y = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{линейный оператор}}}{Ax}$

**Примеры.**  $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$

с.ч., с.в.?  $\alpha(\lambda), \gamma(\lambda)$ ?

$$\chi_A(t) = \chi(t) = \begin{vmatrix} 4-t & -5 & 2 \\ 5 & -7-t & 3 \\ 6 & -9 & 4-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-t & 1-t & 2 \\ 5 & 1-t & 3 \\ 6 & 1-t & 4-t \end{vmatrix} = (1-t) \begin{vmatrix} 4-t & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 4-t \end{vmatrix} = (1-t)t^2$$

$$t_1 = 0 \quad \alpha(0) = 2$$

$$t_2 = 1 \quad \alpha(1) = 1$$

$$V_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda E) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \dots \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \alpha \in ]R$$

$$V_{\lambda_1} = 0 = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\gamma(0) = 1 < \alpha(0)$$

$$\lambda_2 \quad 1 \leq \gamma \leq \alpha = 1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \dots \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma(1) = 1$$

## 7.5 Оператор простой структуры. (о.п.с.)

**Проекторы. Спектральное разложение о.п.с.**

**Функция от матрицы.**

**Определение 1.**  $A \in \text{End}(V)$

$A$  называется о.п.с., если  $\exists$  базис пространства  $V$ , т.ч. матрица оператора в этом базисе имеет

$$\text{диагональный вид } \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists \text{ базис } V \text{ из с.ч. } \mathcal{A} \Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda \text{ с.ч. } \mathcal{A}} V_\lambda$$

$$V = \text{span}(v_1 \dots v_n)$$

**Теорема 1.** Пусть  $\sum_{\lambda \text{ с.ч. } \mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$

$\Leftrightarrow$  все корни  $\chi(t) \in K \Leftrightarrow$  все корни  $\chi(t)$  являются с.ч.  $\mathcal{A}$

$$\boxed{\mathcal{A} \text{ о.п.с.} \Leftrightarrow \forall \text{ с.ч. } \lambda \quad 1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)}$$

Доказательство.  $\mathcal{A}$  о.п.с.  $\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda \text{ с.ч.}} V_\lambda \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow n = \dim V = \sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \gamma(\lambda) \overset{\nearrow}{=} \sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \alpha(\lambda)$   
 $1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda) \quad \nearrow$   
 $\sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \alpha(\lambda) = n \rightarrow \nearrow \Rightarrow \forall \lambda : \boxed{\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)}$  □

**Следствие 1.**  $\sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$

$\mathcal{A}$  о.п.с.  $\Leftarrow$  спектр – простой.

( $n$  попарно различных с.ч.  $\forall \lambda \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) = 1$ )

**Определение 2.**  $A_{n \times m}$  называется диагонализируемой, если  $\exists$  невырожденная  $T_{n \times n}$ , т.ч.

$$T^{-1}AT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$$

("A подобна диагональной матрице")

**Следствие 2.** Если матрица  $A_{n \times n}$  – матрица некоторого о.п.с.  $\mathcal{A}$ , то она **диагонализируема**. И  
 обратно, любая диагонализируемая матрица является матрицей о.п.с. в некотором базисе.

Доказательство.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \text{ о.п.с.} & \Leftrightarrow \exists \text{ базис} & \begin{array}{c} v_1 \dots v_n \\ \text{с.в.} \end{array} \\ \updownarrow & (e_1 \dots e_n)V & \begin{array}{c} \lambda_1 \dots \lambda_n \\ \text{с.ч.} \end{array} \\ A & & \begin{array}{c} \updownarrow \\ \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$

$T = T_{e \rightarrow v}$  невырожденная.

$$\Lambda = T^{-1}AT$$

$$A = T\Lambda T^{-1}$$

□

$$A \text{ диагонализируема} \Leftrightarrow \sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \alpha(\lambda) = n$$

$$\forall \lambda \text{ с.ч. } \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$$

**Определение 3.**

$$\begin{array}{ccc} V = \bigoplus_{i=1}^m L_i & p_i : V \rightarrow L_i \subset V & \\ \nwarrow \Leftarrow \Leftrightarrow \Rightarrow \searrow & & \\ L_i \subset V & \forall v \in V \exists! : v = \sum_{i=1}^m v_i \in L_i & \\ \text{линейное подпр.} & & \end{array}$$

$\forall v \in V \quad \mathcal{P}_i v \stackrel{\text{def}}{=} v_i \quad i = 1 \dots m$

**Оператор проектирования (проектор)**

$$\mathcal{P}_i \overset{?}{\in} \text{End}(V)$$

$$\mathcal{P}_i(u + \lambda v) = u_i + \lambda v_i = \mathcal{P}_i u + \lambda \mathcal{P}_i v \Rightarrow \mathcal{P}_i \text{ линейный оператор.}$$

$$u + \lambda V = \sum_{i=1}^m u_i \in L_i + \lambda \sum_{i=1}^m v_i \in L_i = \sum_{i=1}^m \underbrace{(u_i + \lambda v_i)}_{\in L_i}$$

$$u_i = \mathcal{P}_i u \quad v_i = \mathcal{P}_i v$$

### Свойства проекторов:

1.  $\forall i \neq j \quad \mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = 0$
2.  $\forall i : \mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i \quad (\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \mathcal{P}_i^k = \mathcal{P}_i)$
3.  $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i = \mathcal{E}$
4.  $\text{Ker} \mathcal{P}_i = \sum_{j \neq i} L_j \quad \forall i = 1 \dots m$   
 $\text{Im} \mathcal{P}_i = L_i$

Доказательство.

1.  $\forall v \in V \quad \mathcal{P}_i \mathcal{P}_i j(v) = \mathcal{P}_i v_j \in L_j = 0 \Rightarrow \mathcal{P}_i \mathcal{P}_i j = 0$

Т.к.  $L_i$  дизъюнкты

$$v = v_1 + v_i + \underbrace{v_j}_{\text{Ед. образом}} + \dots + v_n$$

$$v_j = v_j + 0$$

2.  $\forall v \in V \quad \mathcal{P}_i \underbrace{\mathcal{P}_i(v)}_{v_i \in L_i} = v_i = \mathcal{P}_i v$

Т.к. верно  $\forall v \in V$ , то верно и для базиса  $\Rightarrow$  операторы совпадают.  $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i$

3.  $\forall v \in V (\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i) v = \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i v = \sum_{i=1}^m v_i = v = \mathcal{E} v \Rightarrow \dots \Rightarrow \sum_{i=1}^m = \mathcal{E}$
4.  $\mathcal{P}_i(v_1 + \dots + v_{i-1} + v_{i+1} + \dots + v_m) + 0$   
 $= \sum_{j \neq i} \underbrace{\mathcal{P}_i v_j}_0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum_{j \neq i} L_j \subset \text{Ker } \mathcal{P}_i \\ \text{Т.к. } v = \bigoplus_{j \neq i} L_j \oplus L_i \end{array}} \Rightarrow \text{Ker } \mathcal{P}_i = \bigoplus_{j \neq i} L_j$$

$\text{Im } \mathcal{P}_i = L_i$  по def "  $\subset$  "

Верно " $\supset$ "  $\forall v_i \in L_i \rightsquigarrow v_i \in V = \mathcal{P} v_i = v_i$

□

**Утверждение.**  $\mathcal{P}_i \in \text{End}(V) : V \rightarrow V$  и выполнены свойства 1, 3  $\Rightarrow$   
 $i=1 \dots m$

$$\Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } \mathcal{P}_i \quad (\text{т.е. } \mathcal{P}_i \text{ проекторы на } L_i = \text{Im } \mathcal{P}_i)$$

Доказательство.

1. Если выполнены 1, 3, то верно 2

$$\mathcal{P}_i \mathcal{P}_i \stackrel{?}{=} \mathcal{P}_i$$

$$\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i \mathcal{E} = \mathcal{P}_i \sum_{j=1}^m \mathcal{P}_j = \sum_{j=1}^m \mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \mathcal{P}_i^2$$

$$\parallel$$

$$0$$

$$i \neq j$$

2.  $v_1 + v_2 + \dots + v_m = 0$

$v_i \in \text{Im } \mathcal{P}_i$  дизъюнктно?

$$v_i = \mathcal{P}_i w_i \quad w_i \in V$$

$$v_i = \mathcal{P}_i w_i = \mathcal{P}_i \left( \underbrace{\sum_{j=1}^m \mathcal{P}_j w_j}_{=0} \right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^m \underbrace{\mathcal{P}_i(\mathcal{P}_j w_j)}_{=0, i \neq j} = \mathcal{P}_i^2 w_i = \mathcal{P}_i w_i$$

$$\forall v \in V \quad \mathcal{E}v = v = \sum_{j=1}^m \underbrace{\mathcal{P}_j v}_{\parallel v_j \in Im \mathcal{P}_j} \Rightarrow v = \sum_{j=1}^m Im \mathcal{P}_j$$

□

**Теорема 2** (О спектральном разложении о.п.с.).  $v = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} V_\lambda$   $\mathcal{P}_\lambda : V \rightarrow V_\lambda$   
*проекторы*

$\mathcal{A}$  о.п.с.  $\Leftrightarrow \mathcal{A} = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda \mathcal{P}_\lambda$  ← спектральные проекторы

*Доказательство.*

1.  $\mathcal{P}_\lambda \mathcal{P}_\mu = 0$
2.  $\mathcal{P}_\lambda^2 = \mathcal{P}_\lambda$
3.  $\sum_{\lambda \in \sigma(A)} \mathcal{P}_\lambda = \mathcal{E}$

$\forall v \in V$

$$\mathcal{A}v = \mathcal{A} \left( \sum_{\lambda} v_\lambda \in V_\lambda \right) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \underbrace{\mathcal{A}v_\lambda}_{= \lambda v_\lambda}$$

$$\sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda v_\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda \mathcal{P}_\lambda v$$

Доказательство верно  $\forall$  векторного про-ва  $V$ . В частности для базиса  $\Rightarrow \boxed{\mathcal{A} = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda \mathcal{P}_\lambda}$

□

**Следствие 1.**  $A_{n \times n}$  *диагонализируема*  $\Leftrightarrow \exists \mathcal{P}_\lambda_{n \times n}$  1° 2° 3°  
*проекторы*  
 $A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda \mathcal{P}_\lambda$

**Примеры.**  $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -23 & 13 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 = 1 \quad \alpha(\lambda_1) = \gamma(\lambda_1) = 2$$

$$V_{\lambda_1} = \text{span} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \text{span}(v_1, v_2)$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \alpha(\lambda_2) = \gamma(\lambda_2) = 1$$

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \text{span } V_3$$

$$\Rightarrow \text{о.п.с. } V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} = \text{span}(V_1, V_2, V_3)$$

$$T_{e \rightarrow v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$



$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \Lambda \quad \boxed{AT = T\Lambda}$$

$$\mathcal{P}_1 : V \rightarrow V_{\lambda_1} \subset V$$

$$\mathcal{P}_2 : V \rightarrow V_{\lambda_2} \subset V$$

$$\mathcal{P}'_1 \text{ матрица } \mathcal{P}_1 \text{ в базисе } v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 - \text{матрицы проекторов в базисе } e (\text{канонич.})$$

$$\mathcal{P}_1 v_i = \begin{cases} v_i, i = 1, 2 \\ 0, i = 3 \end{cases}$$

$$1^\circ \quad 2^\circ \quad 3^\circ$$

$$\mathcal{P}'_1 + \mathcal{P}'_2 = E$$

$$\mathcal{P}'_1 \mathcal{P}'_2 = 0 \dots$$

$$\mathcal{P}'_2 \text{ матрица } \mathcal{P}_2 \text{ в базисе } v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Примеры.**

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}'_i = T^{-1} \mathcal{P}_i T \quad i = 1, 2$$

$$\mathcal{P}_i = T \mathcal{P}'_i T^{-1} \quad \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 = 0$$

$$\mathcal{P}_1^2 = \mathcal{P}_1$$

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 6 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix} = E - \mathcal{P}_1$$

**Определение 4.**  $(A_k) = ((a_{ij}^k))_{k=1}^\infty$  – последовательность матриц

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A = (a_{ij}) \Leftrightarrow \forall i, j \exists a_{ij} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^k$$

$$S = \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} A_m}_{\substack{\text{Ряд.} \\ \text{Сумма ряда.}}} \stackrel{\exists}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{m=1}^N A_m}_{\substack{S_N \text{ частичная} \\ \text{сумма ряда}}}$$

$$f(x) \text{ аналитическая в } |x| < R \Leftrightarrow f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m(x)^m \quad C_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}$$

Ряд Тейлора.

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \quad R = \infty \quad \cos x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} \quad R = \infty$$

$$\ln(1+x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} x^m}{m} \quad |x| < 1 \quad \text{либо } x = 1$$

**Определение 5.** Функция от матрицы.

$A_{n \times n}$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m A^m, \text{ где } \boxed{\begin{aligned} C_m &= \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \\ f(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m \end{aligned}}$$

$$e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$$

$$\cos A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} A^{2m}$$

**Теорема 3.**  $f$  аналитическая в  $|x| < R$

$A_{n \times n}$  все с.ч.  $|\lambda| < R$

$A$  диагонализируемая То есть:

$$\exists T : \Lambda = T^{-1}AT$$

невырожд.

$$\exists \mathcal{P}_{\lambda} : A = \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_{\lambda}$$

$\Downarrow$

$$1. \quad \exists_{f(A)} = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$2. \quad \exists_{f(A)} = \sum_{\lambda \text{ с.ч.}} f(\lambda) \mathcal{P}_{\lambda}$$

Доказательство.

1.

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m A^m$$

$$A^m = (T \Lambda T^{-1})^m =$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m \\ |x| &< R \end{aligned}}$$

$$= T \Lambda \underbrace{T^{-1} T}_{E} \Lambda T^{-1} \dots T \Lambda T^{-1} =$$

$$= T \Lambda^m T^{-1} = T \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 \\ 0 & \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m T \Lambda^m T^{-1} = T \left( \sum_{m=0}^{\infty} C_m \Lambda^m \right) T^{-1} =$$

$$= T \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} C_m \lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{m=0}^{\infty} C_m \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1} = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$|\lambda_i| < R$$

$$2. \quad A^m = \left( \sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_{\lambda} \right)^m = \sum_{\substack{\lambda \\ \mathcal{P}_{\lambda} \mathcal{P}_{\mu} = 0}} \lambda^m \mathcal{P}_{\lambda}^m = \sum_{\lambda} \lambda^m \mathcal{P}_{\lambda}$$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \left( \sum_{\lambda} \lambda^m \mathcal{P}_{\lambda} \right) = \sum_{\lambda} \left( \sum_{m=0}^{\infty} C_m \lambda^m = f(\lambda) \right) \mathcal{P}_{\lambda} = \sum_{\lambda} f(\lambda) \mathcal{P}_{\lambda}$$

$$|\lambda| < R$$

□

*Замечание.*  $A$  диагон.  $\Leftrightarrow A = T\Lambda T^{-1}$

$$\Leftrightarrow A = \sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda$$

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

$$f(A) = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$f(A) = \sum_{\lambda \text{ с.ч.}} f(\lambda) \mathcal{P}_\lambda$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$f(At) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m A^m t^m$$

$$t^m A^m = t^m T \Lambda^m T^{-1} = T \begin{pmatrix} (\lambda_1 t)^m & 0 \\ 0 & f(\lambda_n t) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$\boxed{f(At) = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1 t) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n t) \end{pmatrix} T^{-1}}$$

$$t^m A^m = \sum_{\lambda \text{ с.ч.}} t^m \lambda^m \mathcal{P}_\lambda$$

$$\boxed{f(At) = \sum_{\lambda \text{ с.ч.}} f(t\lambda) \mathcal{P}_\lambda}$$

**Примеры.**  $e^{At}$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$