

Конспекты по линейной алгебре, 2 сем

Пак Александр

15 марта 2020 г.

Содержание

7	Линейные отображения	2
7.1	Основные определения	2
7.2	Матрица линейного отображения. Изоморфизм алгебр. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса.	5
7.3	Инварианты линейного отображения	10
7.4	Собственные числа и собственные вектора линейного оператора.	16
7.5	Оператор простой структуры. (о.п.с.) Проекторы. Спектральное разложение о.п.с. Функция от матрицы.	20
7.6	Комплексификация линейного вещ. пространства. Продолжение вещ. линейного оператора.	29
7.7	Минимальный многочлен. Теорема Кэли-Гамильтона	32
7.8	Операторное разложение единицы. Корневые подпространства.	37
7.9	Нильпотентный оператор. Разложение Жордана	42
7.10	Жорданова форма матрицы, Жорданов базис	46

7 Линейные отображения

7.1 Основные определения

Определение 1. U, V – линейные пространства над полем $K(\mathbb{R}/\mathbb{C})$

Линейным отображением \mathcal{A} называется $\mathcal{A} : U \rightarrow V$, обладающее свойством линейности:

$$\forall \lambda \in K, \forall u, v \in U$$

$$\mathcal{A}(u + \lambda v) = \mathcal{A}(u) + \lambda \mathcal{A}(v)$$

Замечание.

1. Записываем не $\mathcal{A}(u)$, а $\mathcal{A}u$
2. "Поточечно" выполняются все арифметические операции, свойственные функциям
3. $\mathcal{A}0_U = 0_V$

Примеры.

1. 0 – нулевое отображение $U \rightarrow V$

$$\forall u \in U : 0u = 0_v$$

2. \mathcal{E} – тождественное отображение: $V \rightarrow V$

$$\forall v \in V : \mathcal{E}v = v$$

3. $U = V = P_n$ – многочлены степени до n

$$\mathcal{A} : V \rightarrow V$$

$\mathcal{A}p = p'(t)$ – дифференциальный оператор

$$\mathcal{A}(p_1 + \lambda p_2) = (p_1 + \lambda p_2)' = p_1' + \lambda p_2' = \mathcal{A}p_1 + \lambda \mathcal{A}p_2$$

Линейное отображение $\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$

4. $U = \mathbb{R}^n, V = \mathbb{R}^m$

$$\mathcal{A} = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$\mathcal{A} : x \in U \rightarrow y = \mathcal{A}x \in V$$

$$x_1 + \lambda x_2 \in \mathbb{R}^n \rightarrow y = \mathcal{A}(x_1 + \lambda x_2) = \mathcal{A}x_1 + \lambda \mathcal{A}x_2$$

5. $U \cong V$. То есть отображение, на котором строится изоморфизм является линейным.

Определение 2. $\lambda \in K, \mathcal{A} : U \rightarrow V$

Произведение линейного отображения на скаляр называется линейное отображение

$$\mathcal{B} = \lambda \mathcal{A}$$

$$\mathcal{B} : U \rightarrow V \quad \forall u \in U \quad \mathcal{B}u = \lambda \mathcal{A}u$$

Определение 3. Суммой линейных отображений $\mathcal{A}, \mathcal{B} : U \rightarrow V$ называется $\mathcal{C} : U \rightarrow V$

$$\forall u \in U \quad \mathcal{C}u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u \quad \boxed{\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}}$$

Определение 4. $-\mathcal{A}$ – отображение противоположное \mathcal{A}

$$\forall u \in U \quad (-\mathcal{A})u = -1 \cdot \mathcal{A}u$$

$$L(U, V) = \text{Hom}_K(U, V) = \text{Hom}(U, V) = \mathcal{L}(U, V)$$

$L(U, V)$ – множество всех линейных отображений из U в V .

Линейное отображение = гомоморфизм с операциями $\lambda \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} + \mathcal{B}$

Выполнены свойства 1–8 линейного пространства (проверить самим).

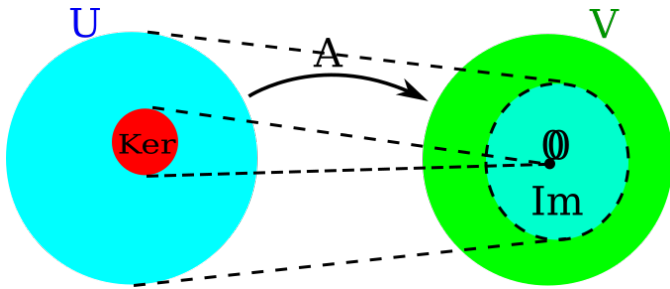
Значит $\boxed{L(U, V) \text{ – линейное пространство}}$

Определение 5. $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\text{Ker} \mathcal{A} = \{u \in U \mid \mathcal{A}u = 0_v\}$ – ядро линейного отображения.

Определение 6. $\text{Im} \mathcal{A} = \{v \in V \mid v = \mathcal{A}u \ \forall u \in U\} =$

$\{v \in V \mid \exists u \in U \ v = \mathcal{A}u\}$ – образ линейного отображения.



Упр: $\text{Ker} \mathcal{A}$ и $\text{Im} \mathcal{A}$ – это подпространства соответственно пространств U и V . То есть они замкнуты относительно линейных операций.

Если $\text{Ker} \mathcal{A}$ конечномерное подпространство U , то

$\boxed{\dim \text{Ker} \mathcal{A} = \text{def} \mathcal{A}}$ – дефект линейного отображения.

Если $\text{Im} \mathcal{A}$ конечномерное подпространство V , то

$\boxed{\dim \text{Im} \mathcal{A} = \text{rg} \mathcal{A}}$ – ранг линейного отображения.

Утверждение. \mathcal{A} изоморфно между U и $V \Leftrightarrow$

1. $\mathcal{A} \in L(U, V)$
2. $\text{Im} \mathcal{A} = V$
3. $\text{Ker} \mathcal{A} = \{0\}$ тривиально

Доказательство. \mathcal{A} изоморфно \Leftrightarrow взаимнооднозначное соответствие + линейность – $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$0_u \leftrightarrow 0_v$, т. к. изоморфизм $\Rightarrow \text{Ker} \mathcal{A} = \{0\}$

Пусть $\text{Ker} \mathcal{A} = \{0\}$

Докажем инъективность $v_1 = v_2 \Leftrightarrow u_1 = u_2$

$$v_1 = \mathcal{A}u_1 \quad v_2 = \mathcal{A}u_2$$

$$0 = v_1 - v_2 = \mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2 = \mathcal{A}(u_1 - u_2) = 0 \text{ т. к. ядро тривиально.}$$

Сюръективность. $\text{Im} \mathcal{A} = V \Leftrightarrow \forall v \in V : \exists u \in U \mathcal{A}u = v$. Последнее и означает сюръекцию. □

Определение 7. $\mathcal{A} \in L(U, V)$

–инъективно, если $\text{Ker} \mathcal{A} = \{0\}$

–сюръективно, если $\text{Im} \mathcal{A} = v$

–биективно \equiv изоморфизм, если инъекция + сюръекция.

–эндоморфизм \equiv линейный оператор, если $U \equiv V$

$$\text{End}_k(V) = \text{End}(V) = L(V, V)$$

–автоморфизм \equiv эндоморфизм + изоморфизм.

$$\text{Aut}_k(V) = \text{Aut}(V)$$

Определение 8. Произведением линейных отображений \mathcal{A}, \mathcal{B}

$$\mathcal{A} \in L(W, V) \quad \mathcal{B} \in L(U, W) \quad U \xrightarrow{\mathcal{B}} W \xrightarrow{\mathcal{A}} V$$

называется $\mathcal{C} \in L(U, V) : \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$, которое является композицией функций, определяющих отображения \mathcal{A} и \mathcal{B} .

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$$

$$\forall u \in U : (\mathcal{A}\mathcal{B})u = \mathcal{A}(\mathcal{B}u)$$

Очевидно, \mathcal{C} – линейное отображение.

$$\Omega \xrightarrow{\mathcal{C}} U \xrightarrow{\mathcal{B}_{1,2}} W \xrightarrow{\mathcal{A}_{1,2}} V$$

Упр:

1. \mathcal{A}, \mathcal{B} изоморфизмы $\Rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ изоморфизм
2. $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)\mathcal{B} = \mathcal{A}_1\mathcal{B} + \mathcal{A}_2\mathcal{B}$
 $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2$ – дистрибутивность
3. $\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C}$ – ассоциативность
4. $\lambda\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{A}\lambda\mathcal{B}$

$End(V)$ – ассоциативная унитарная алгебра

\mathcal{E} – единица $\mathcal{E}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{E}$

Определение 9. $\mathcal{A} \in L(U, V)$ изоморфно.

$$\forall v \in V \exists! u \in U : v = \mathcal{A}u$$

$$\mathcal{A}^{-1} : V \rightarrow U$$

$$\boxed{\mathcal{A}^{-1}v = u}$$

$$Упр: \mathcal{A}^{-1} \in L(V, U)$$

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}_v \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}_u$$

$\mathcal{A} \in End(U)$ – линейный оператор

$\mathcal{A}^{-1} \in End(V)$ – обратный оператор

Определение 10. $U_0 \subset U \quad \mathcal{A} \in L(U, V)$

Сужением линейного отображения \mathcal{A} на линейное подпространство U_0 называется

$$\mathcal{A}|_{U_0} : U_0 \rightarrow V \quad \forall u \in U_0 \quad \mathcal{A}|_{U_0}u = \mathcal{A}u$$

Утверждение. \mathcal{A} изоморфизм $\in L(U, V) \Rightarrow \mathcal{A}|_{U_0} \in L(U_0, Im(\mathcal{A}|_{U_0}))$ – изоморфизм

Примеры.

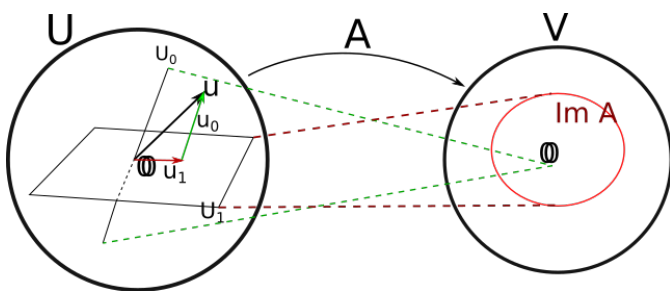
1. $\mathbb{0} : U \rightarrow U$ – не сюръекция, не инъекция, эндоморфизм, не автоморфизм.
2. $\mathcal{E} : U \rightarrow U$ – автоморфизм
3. $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} : P_n \rightarrow P_n$ – эндоморфизм, не инъекция, не сюръекция.
4. $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow y = \mathcal{A}x \in \mathbb{R}^n$ – эндоморфизм.

Сюръекция $\Leftrightarrow rg\mathcal{A} = n \Leftrightarrow \exists \mathcal{A}^{-1} \Leftrightarrow$ инъекция.

То есть автоморфизм.

Теорема 1 (о rg и def линейного отображения). $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$$\boxed{rg\mathcal{A} + def\mathcal{A} = dimU}$$



Доказательство. $U_0 = \text{Ker } \mathcal{A}$

Дополним линейное пространство U_1 до пр-ва U :

$$U = U_0 \oplus U_1 \quad U_1 \cap U_0 = \{0\}$$

$\forall u \in U : u = u_0 + u_1$ (единственным образом)

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1 \quad \text{Im } \mathcal{A} = \mathcal{A}(U_1)$$

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} : U_1 \rightarrow \text{Im } \mathcal{A}$$

\mathcal{A}_1 – изоморфизм? $\text{Im } \mathcal{A}_1 = \text{Im } \mathcal{A}$ – сюръекция

$$\left. \begin{array}{l} \forall w \in \text{Ker } \mathcal{A}_1 \in U_1 \\ \text{Ker } \mathcal{A}_1 \subset \text{Ker } \mathcal{A} = U_0 \end{array} \right\} \Rightarrow w \in U_1 \cap U_0 = \{0\} \Rightarrow \text{Ker } \mathcal{A}_1 = \{0\} \Rightarrow \mathcal{A}_1 \text{ изоморфизм.}$$

$U_1 \cong \text{Im } \mathcal{A} \Leftrightarrow \dim U_1 = \dim(\text{Im } \mathcal{A})$ – инъекция.

Т. к. $U = U_0 \oplus U_1$, то $\dim U = \dim U_0 + \dim U_1 = \dim_{\text{def } \mathcal{A}} \text{Ker } \mathcal{A} + \dim_{\text{rg } \mathcal{A}} \text{Im } \mathcal{A}$ □

Следствие 1 (Характеристика изоморфизма).

$\mathcal{A} \in L(U, V)$ Следующие условия эквивалентны:

1. \mathcal{A} изоморфно
2. $\dim U = \dim V = \text{rg } \mathcal{A}$
3. $\dim U = \dim V$
 $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\} \Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0$

Следствие 2. $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ Следующие условия эквивалентны:

1. $\mathcal{A} \in \text{Aut}(V)$
2. $\dim V = \text{rg } \mathcal{A}$
3. $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\} \Leftrightarrow \text{def } \mathcal{A} = 0$

7.2 Матрица линейного отображения. Изоморфизм алгебр. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса.

$$\mathcal{A} \in L(U, V)$$

$\xi_1 \dots \xi_n$ базис U

$\eta_1 \dots \eta_m$ базис V

$$\forall u \in U \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$$

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^n u_i \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i \quad \text{Достаточно знать, как } \mathcal{A} \text{ работает на базисных векторах } \xi_1 \dots \xi_n$$

$$\text{Im } \mathcal{A} = \text{span}(\mathcal{A}\xi_1, \mathcal{A}\xi_2, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$$

$$\mathcal{A}\xi_i \in V = \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m) \quad a_{ji} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$$\boxed{A = (A_1 \dots A_i \dots A_n) = (a_{ij})_{m \times n}} \quad \text{матрица линейного отображения } \mathcal{A} \text{ относительно базисов } (\xi, \eta)$$

Частный случай: $\mathcal{A} \in \text{End}(V) : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$
 $A = (a_{ji})_{n \times n}$ – матрица линейного оператора
 $Ae_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j$

Примеры.

$$1. \mathcal{E} : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V} \quad \mathcal{E}e_i = e_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow E_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

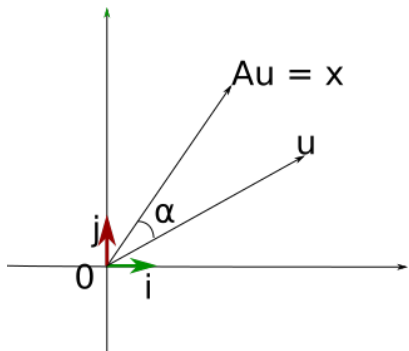
2.

$$\mathcal{E} : \underset{e'_1 \dots e'_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$$

$$\mathcal{E}e'_i = \sum_{j=1}^n t_{ji} e_j \leftrightarrow T_i = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix}$$

$$[\mathcal{E}]_e = T = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix} = T_{e \rightarrow e'}$$

3.

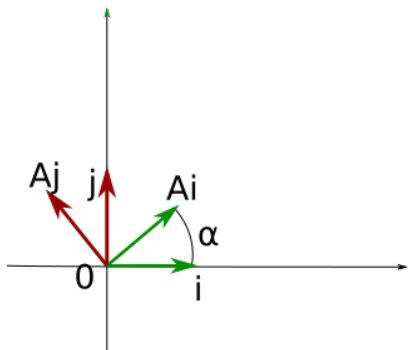


$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$v = \mathcal{A}u$$

Поворот векторов в плоскости на угол α .

Очевидно, линейный оператор.



$$\mathcal{A}_i = \cos \alpha i + \sin \alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_j = -\sin \alpha i + \cos \alpha j \leftrightarrow \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$4. \mathcal{A} : \begin{smallmatrix} 1, t, t^2 \\ p_2 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 1, t, t^2 \\ p_2 \end{smallmatrix}$$

$$\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$$

$$\mathcal{A}t^2 = (t^2)' = 2t \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}1 = 1' = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \xleftrightarrow{(1, t, t^2)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}t = t' = 1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} : \begin{smallmatrix} p_2 \\ 1, t, t^2 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} p_1 \\ 1, t \end{smallmatrix}$$

$$\mathcal{A} = \frac{d}{dt} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Утверждение. $L(U, V) \cong M_{m \times n}$

(Линейное пространство матриц с вещ.(компл.) элементами размерности $m \times n$.)

Доказательство. Изоморфизм \equiv биекция + линейность.

Биекция. $\mathcal{A} \rightarrow A_{m \times n}$ – поняли, как сопоставлять.

Теперь обратно. Пусть $A_{m \times n} = (a_{ij})$

$U \quad \xi_1 \dots \xi_n$ базис

$\mathcal{A} : U \rightarrow V$

$V \quad \eta_1 \dots \eta_m$ базис

$$\mathcal{A}\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji}\eta_j \in V$$

$$\forall u \in U \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i$$

$$\mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i \in V \Rightarrow \mathcal{A} \in L(U, V) \quad \mathcal{A}, \mathcal{B} \leftrightarrow A, B$$

$$\forall \lambda \in K \quad \mathcal{A} + \lambda \mathcal{B} \overset{?}{\leftrightarrow} A + \lambda B$$

$$(\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B})\xi_i = \mathcal{A}\xi_i + \lambda \mathcal{B}\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ji}\eta_j + \lambda \sum_{j=1}^m b_{ji}\eta_j = \sum_{j=1}^m (a_{ji} + \lambda b_{ji})\eta_j \leftrightarrow c_i = A_i + \lambda B_i \leftrightarrow A + \lambda B \Rightarrow$$

линейность \Rightarrow изоморфизм. □

$$\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B} \leftrightarrow A + \lambda B$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow A \cdot B$$

$$\mathcal{A}, \mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A, A^{-1}$$

$End(V) \cong M_{n \times n}$ – ассоциативные унитарные алгебры. (Координатный изоморфизм).

Алгебры изоморфны, т.к. сохраняются свойства дистрибутивности, ассоциативности и т. д.

Я не особо понял, что мы дальше делаем, но у меня это записано

$$U\xi_1 \dots \xi_n \quad \forall u \in U \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$V\eta_1 \dots \eta_m \quad u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i$$

$$\forall v \in V \leftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$$v = \sum_{j=1}^m v_j \eta_j$$

$$\mathcal{A} \in L(U, V) \leftrightarrow A_{\xi, \eta}$$

$$\sum_{j=1}^m v_j \eta_j = v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i = \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^m a_{ji} \eta_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n u_i a_{ji} \right) \eta_j$$

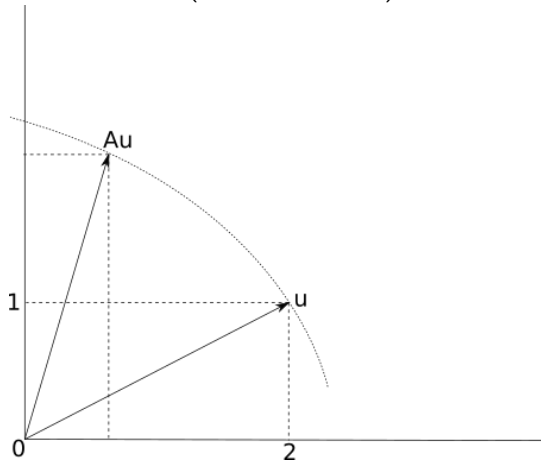
Так как координаты определяются единственным образом:

$$\boxed{v_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} u_i} \leftrightarrow \boxed{v = Au} \leftrightarrow v = \mathcal{A}u$$

Примеры.

1. \mathcal{A} поворот на угол α

$$(i, j) \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$



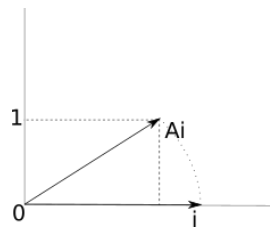
$$\alpha = 45^\circ \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$u \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v = \mathcal{A}u \leftrightarrow v = Au = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}i \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$



2. $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} : p_{2,1,t,t^2} \rightarrow p_{2,1,t,t^2}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{(3t^3 + 6t + 4)}^{u(t)} = 6t + 6$$

$$3t^2 + 6t + 4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}u \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow 6 + 6t$$

Теорема 1 (Преобразование матрицы линейного отображения при замене базиса). $\mathcal{A} \in L(U, V)$

$$U \quad \xi = (\xi_1 \dots \xi_n) \quad - \text{базисы} \quad \mathcal{A} \xrightarrow{(\xi, \eta)} A$$

$$\xi' = (\xi'_1 \dots \xi'_n)$$

$T_{\eta \rightarrow \eta'}$ - матрица перехода

$$V \quad \eta = (\eta_1 \dots \eta_m) \quad - \text{базисы} \quad \mathcal{A} \xrightarrow{(\xi', \eta')} A'$$

$$\eta' = (\eta'_1 \dots \eta'_m)$$

$$\boxed{\mathcal{A}' = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} \cdot A \cdot T_{\xi \rightarrow \xi'}}$$

Ну видимо сейчас доказательство, но я не уверен.

Доказательство.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\mathcal{A}} & V \\ \xi_1 \dots \xi_n & & \eta_1 \dots \eta_m \end{array}$$

$$\mathcal{E}_u \uparrow \uparrow \quad \downarrow \uparrow \mathcal{E}_v$$

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\mathcal{A}} & V \\ \xi'_1 \dots \xi'_n & & \eta'_1 \dots \eta'_m \end{array}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{E}_v^{-1} \mathcal{A} \mathcal{E}_u \leftrightarrow A' = T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} A T_{\xi \rightarrow \xi'}$$

$$\mathcal{A}B \leftrightarrow AB$$

$$\mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A^{-1}$$

$$\mathcal{E}_v^{-1} \leftrightarrow T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} \quad \text{Смотри пример 2}$$

□

Следствие 1.

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V) \quad \mathcal{A}: \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$$

$$e_1 \dots e_n \text{ базис } V \leftrightarrow A$$

$$e'_1 \dots e'_n \text{ базис } \leftrightarrow A'$$

$$\mathcal{A}: \underset{e'_1 \dots e'_n}{V} \xrightarrow{A'} \underset{e'_1 \dots e'_n}{V}$$

$$T = T_{e \rightarrow e'}$$

$$\boxed{A' = T^{-1} A T}$$

$$\text{Замечание. В условиях теоремы } v = \mathcal{A}u \xrightarrow{(\xi, \eta)} v = Au \xrightarrow{(\xi', \eta')} v' = A'u$$

$$V = T_{\eta \rightarrow \eta'} V'$$

$$\begin{aligned}
U &= T_{\xi \rightarrow \xi'} U' \\
T_{\eta \rightarrow \eta'} v' &= A T_{\xi \rightarrow \xi'} u' \\
v' &= \boxed{T_{\eta \rightarrow \eta'}^{-1} A T_{\xi \rightarrow \xi'}}_{A'} u'
\end{aligned}$$

7.3 Инварианты линейного отображения

Инвариант - свойство, которое сохраняется при некоторых определенных преобразованиях

$$v = Au \leftrightarrow v = Au$$

Форма записи действия линейного отображения на вектор инвариантна относительно замены базиса.

$$v' = A' u'$$

Определение 1. $A_{m \times n}$

$$Im A = span(A_1, A_2, \dots, A_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i \mid \alpha_i \in K \right\} =$$

$$\{y = Ax \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m) \mid x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)\}$$

$$x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$rg A = dim Im A$ — ранг матрицы

$Ker A = \{x \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n) \mid Ax = 0\} = \{\text{множество решений СЛОУ}\}$ — ядро матрицы

$dim Ker A = n - rg A = def A$ — дефект матрицы

$\boxed{rg A + def A = n}$ — аналогично теореме о ранге и дефекте

Теорема 1. $\forall A \in L(U, V)$

$$\boxed{\begin{aligned} rg A &= rg A \\ def A &= def A \end{aligned}}$$

где матрица A — матрица линейного отображения в некоторых базисах пространств U и V .

$rg A, def A$ инвариантны относительно выбора базиса.

Доказательство. $A \leftrightarrow_{(\xi, \eta)} A \xi = (\xi_1 \dots \xi_n)$ базис U

$\eta = (\eta_1 \dots \eta_m)$ базис V

$$Im A = span(A \xi_1 \dots A \xi_n)$$

$$A \xi_i \stackrel{\leftrightarrow}{\cong} A_i$$

Координатный изоморфизм.

Пусть $rg A = k \Rightarrow k$ столбцов линейно независимы, а остальные — их линейная комбинация.

По свойствам изоморфизма это означает, то из $A \xi_1 \dots A \xi_n$ k линейно независимые, а остальные — их линейная комбинация $\Rightarrow rg A = dim Im A = k$

$$dim U = rg A + def A$$

$$\begin{array}{ccc}
\parallel & & \parallel \\
n & & rg A \\
& & \parallel \\
& & k
\end{array}$$

$$def A = n - rg A = n - k = dim \text{ пространства решений } Ax = 0 = def A$$

□

Следствие 1. \mathcal{A} изоморфизм $\Leftrightarrow A$ невырожденная ($\exists A^{-1}$), где A матрица в некотором базисе.

Доказательство. Изоморфизм $\Leftrightarrow \begin{matrix} \text{def } A = 0 \\ \dim U = \dim V \end{matrix} \Leftrightarrow \text{rg } A = n \Leftrightarrow A \text{ невырожденная.}$ \square

Теорема 2. $\det \mathcal{A}$ не зависит от выбора базиса пространства V (т.е. является инвариантом относительно выбора базиса). И при этом $\det \mathcal{A} = \det A$, где A – матрица оператора \mathcal{A} в некотором базисе.

Доказательство. V $e_1 \dots e_n$

$$\det \mathcal{A} = \det(\mathcal{A}e_1 \dots \mathcal{A}e_n)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}e_k &= \sum_{i_k=1}^n a_{i_k k} e_{i_k} \xrightarrow{A=(a_{ij})} A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = (\det \text{ } n\text{-форма, т. е. полиномиальная форма}) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=2}^n \dots \sum_{i_n=n}^n a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \det(e_{i_1}, e_{i_2} \dots e_{i_n}) = (n\text{-форма} - 2 \text{ одинаковых аргумента} \Rightarrow \det = 0) \\ &= \sum_{\sigma=(i_1 \dots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} \overbrace{\det(e_{i_1} \dots e_{i_n})}^{(-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} \det(e_1 \dots e_n)=1} = \sum_{\sigma=(i_1 \dots i_n)} (-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} = \det A \end{aligned}$$

$e'_1 \dots e'_n$ базис V

$$T = T_{e \rightarrow e'}$$

$$\det \mathcal{A} = \det \mathcal{A}' \stackrel{?}{=} \det A$$

$$A' = T^{-1} A T$$

$$\det A' = \det T^{-1} \cdot \det A \cdot \det T = \det A$$

\square

Определение 2. A, B называются подобными, если

$$\exists \text{ невырожденная } C : B = C^{-1} A C$$

Примеры. Матрицы линейного оператора в разных базисах подобны

$$A' = T^{-1} A T$$

$$A, B \text{ подобны} \Rightarrow \det A = \det B$$

Следствие 1. f – n -форма на V

$$\forall \xi_1 \dots \xi_n \quad \forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n) = \det \mathcal{A} f(\xi_1 \dots \xi_n)}$$

Доказательство. $f(\mathcal{A}\xi_1 \dots \mathcal{A}\xi_n) =$

$$g(\xi_1 \dots \xi_n) = \det(\xi_1 \dots \xi_n) \cdot g(e_1 \dots e_n) =$$

$$\det(\xi_1 \dots \xi_n) \cdot \underbrace{f(\mathcal{A}e_1 \dots \mathcal{A}e_n)}_{\text{смотри док-во теоремы}} = \det(\xi_1 \dots \xi_n) \sum_{\sigma} (-1)^{\mathcal{E}(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \cdot f(e_1 \dots e_n) =$$

$$\mathcal{A}e_k = \sum_{i_k=1}^n a_{i_k k} e_{i_k} = \underbrace{\det(\xi_1 \dots \xi_n) f(e_1 \dots e_n)}_{f(\xi_1 \dots \xi_n)} \underbrace{\det A}_{\det A}$$

\square

Замечание. A – линейный оператор, $B_{n \times n}$

$$AB = (AB_1 \ AB_2 \ \dots \ AB_n)$$

$$\det(AB) = \det(AB_1 \dots AB_n) =$$

$$= \det A \cdot \det(B_1 \dots B_n) = \det A \cdot \det B$$

Следствие 2. $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{End}(V)$

$$\det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{B}$$

Доказательство. $\det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det(AB) = \det A \cdot \det B = \det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{B}$ □

Следствие 3. $\mathcal{A} \in \text{Aut}(V)$

$$\Leftrightarrow \det \mathcal{A} \neq 0$$

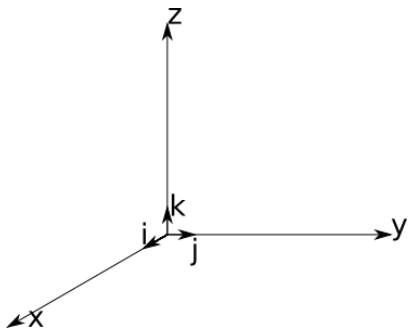
$$\text{Причем } \det \det \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}}$$

Доказательство. Из следствия 2

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}$$

$$\det \mathcal{A} \cdot \det \mathcal{A}^{-1} = \det \mathcal{E} = 1 \Rightarrow \dots$$
 □

Примеры. V_3



$$V_{abc}\text{-правая тройка} = \underset{\text{смешанное пр-е}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = f(\underset{\text{3-форма}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}})$$

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V_3) \quad u \in V_3 \rightarrow v = \mathcal{A}u \in V_3$$

Как поменяется объем параллелепипеда при линейном преобразовании?

$$\mathcal{A}(V_{(\bar{a}\bar{b}\bar{c})}) = f(\mathcal{A}\bar{a}, \mathcal{A}\bar{b}, \mathcal{A}\bar{c}) = \det \mathcal{A} \cdot f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \det \mathcal{A} \cdot V(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$$

$$\lambda = |\det \mathcal{A}| \quad \text{Объем увеличится в } \lambda \text{ раз.}$$

$$1. \mathcal{A} : V_3 \rightarrow V_3$$

Оператор подобия

$$\forall u \in V_3 : \mathcal{A}u = \mu u, \mu \in \mathbb{R}$$

$A?$

$$\mathcal{A}\bar{i} = \mu\bar{i} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}\bar{j} = \mu\bar{j} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}\bar{k} = \mu\bar{k} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix}$$

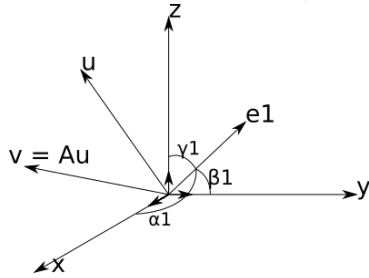
$$A = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

$$\lambda = |\det \mathcal{A}| = |\det A| = |\mu^3|$$

2. $\mathcal{A} : V_3 \rightarrow V_3$

Оператор поворота

$$\mathcal{A} : \begin{array}{l} \bar{i} \rightarrow e_1 \nearrow \\ \bar{j} \rightarrow e_2 \rightarrow \\ \bar{k} \rightarrow e_3 \searrow \end{array} \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \beta_1 \\ \cos \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 \\ \cos \beta_2 \\ \cos \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_3 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} |e_i| &= 1 \\ (e_i, e_j) &= 0 \\ i &\neq j \end{aligned}$$

$$"A(V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}})" = \det A \cdot V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = |\cdots|_{\text{Смешанное произведение}} e_1 e_2 e_3 = 1$$

$$(\det A)^2 = \det A \cdot \det A^T = \det(AA^T) = \det \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{pmatrix} = \det E = 1$$

$$|\det A| = 1$$

Утверждение. A, B подобные матрицы $\Rightarrow \text{tr} A = \text{tr} B$

trace = след

Доказательство. A, B подобные \Rightarrow

$\exists C$ невырожденная: $C^{-1}(AC) = B$

$$\text{tr} B = \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij}^{\prime\prime-1} (AC)_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C_{ij}^{\prime\prime-1} a_{jk} C_{ki} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \underbrace{\sum_{i=1}^n C_{ki} C_{ij}^{\prime\prime-1}}_{\delta_{kj}} = \sum_{k=1}^n a_{kk} = \text{tr} A$$

$$\boxed{\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}} \quad CC^{-1} = E$$

□

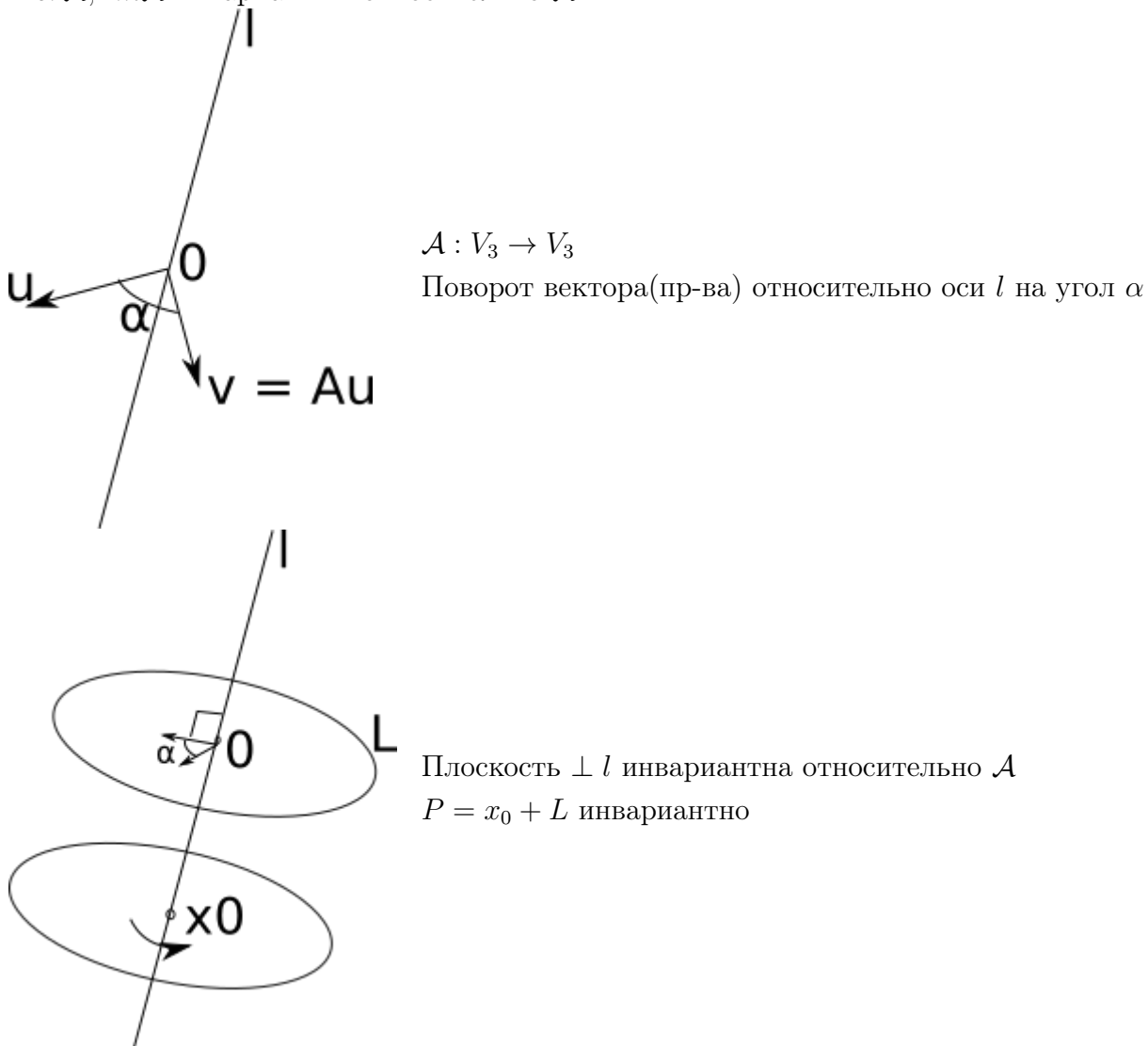
Определение 3. $\text{tr} \mathcal{A} = \text{tr} A$, где A – матрица оператора в некотором базисе.

$\text{tr} \mathcal{A} = \text{tr} A = \text{tr} A'$ – не зависит от выбора базиса, т.к. A и A' подобны.

Определение 4. $L \subset V$ L инвариантно относительно $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ если $\forall u \in L : \mathcal{A}u \in L$

Примеры.

1. $\{0\}, V$ инвариантны относительно \mathcal{A}
2. $\text{Ker } \mathcal{A}, \text{Im } \mathcal{A}$ инвариантны относительно \mathcal{A}



Теорема 3. $L \subset V$ $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$. Линейное пространство инвариантно относительно \mathcal{A}
 $\Rightarrow \exists$ базис пространства V , т.ч. матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе

будет иметь вид:
$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0 & A_3 \end{array} \right)$$

$A_1 k \times k$ где $k = \dim L$

Доказательство. $L = \text{span}(e_1 \dots e_k)$
базис

Дополним до базиса $V : e_1 \dots e_k e_{k+1} \dots e_n$

$$e_i \in L \Rightarrow \mathcal{A}e_i \in L = \sum_{m=1}^k a_{mi}e_m + \sum_{m=k+1}^n 0 \cdot e_m \leftrightarrow A_i^1 = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}e_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}e_j \leftrightarrow A_i^{2,3} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ a_{ni} \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{1i}} & \boxed{A_i^1} & \boxed{A_i^{2,3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boxed{a_{ki}} & \boxed{A_i^1} & \boxed{A_i^{2,3}} \\ 0 & \boxed{\dots} & \boxed{\dots} \end{pmatrix}$$

□

Следствие 1. $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$ L_i инвариантно \mathcal{A}

$\Rightarrow \exists$ базис пр-ва V , в котором матрица оператора \mathcal{A} будет иметь блочно-диагональный вид:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A^1} & \dots & 0 \\ & \boxed{A^2} & \\ 0 & & \boxed{A^n} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{matrix} A^i \\ \text{размерность матрицы} \end{matrix} \right) = \dim L_i$$

Доказательство. $L_1 = \text{span}(e_i^1 \dots e_{i_k}^{i_k})$
базис

т.к. \bigoplus , то базис V – объединение базисов L_i

$$V = \text{span}(e_1^1 \dots e_m^{i_m})$$

$\mathcal{A}^j e_i \in L_i \Rightarrow$ раскладываем по базису $L_i \Rightarrow$

на остальных позициях в столбике матрицы оператора будут нули.

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} \underline{L_1} \\ \underline{1 \dots i_1} \end{matrix} & \begin{matrix} \underline{L_2} \\ \underline{i_1+1 \dots i_2} \end{matrix} & \\ \hline \begin{matrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{matrix} & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right)$$

отвечает позиции базисных элементов пр-ва L_i в базисе V

□

Следствие 2. $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$ L_i инвариантно относительно \mathcal{A}

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V) \Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } \mathcal{A}|_{L_i}$$

Доказательство. $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i \Rightarrow \forall u \in V \exists! u = \sum_{i=1}^m u_i \in L_i$

$$Im \mathcal{A} \subset \sum_{i=1}^m Im \mathcal{A}|_{L_i}$$

$$v \in Im \mathcal{A} = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^m \mathcal{A}u_i \in Im \mathcal{A}|_{L_i}$$

Верно и " \supset "

Пусть $v_i \in Im \mathcal{A}|_{L_i} : v_i = \mathcal{A}u_i, u_i \in L_i$

$$\sum_{i=1}^m v_i = \sum_{i=1}^m \mathcal{A}u_i = \mathcal{A}(\sum_{i=1}^m u_i \in V) \in Im \mathcal{A}$$

$$Im \mathcal{A} = \sum_{i=1}^m Im \mathcal{A}|_{L_i}$$

\bigoplus прямая?

$$v_i \in Im \mathcal{A}|_{L_i}$$

$$v_i = \mathcal{A}u_i \quad u_i \in L_i$$

$$\sum_{i=1}^m v_i = 0 \longleftarrow$$

Т.к. L_i инвариантна $\Rightarrow \mathcal{A}u_i \in L_i \Rightarrow v_i \in L_i$, но L_i дизъюнкты $\swarrow \Rightarrow \forall i : v_i = 0$

$\Rightarrow Im \mathcal{A}|_{L_i}$ дизъюнкты $\Rightarrow \bigoplus$

□

7.4 Собственные числа и собственные вектора линейного оператора.

$\mathcal{A} \in End(V)$ V линейное пространство над K

Определение 1. $\lambda \in K$ – **собственное число** (с.ч.) линейного оператора \mathcal{A} , если

$\exists \boxed{v \in V \neq 0}$, который называется **собственным вектором** (с.в.), такой что $\boxed{\mathcal{A}v = \lambda v}$

Пусть $v : \mathcal{A}v = \lambda v \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})v = 0 \Leftrightarrow v \in Ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})$

Определение 2. $V_\lambda = Ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) = \{ \text{с.в. } v \text{ и } 0 \}$ называется **собственным подпространством**.

$\boxed{\gamma(\lambda) := \dim V_\lambda}$ – **геометрическая кратность** с.ч.

$$\gamma \geq 1$$

V_λ и $\gamma(\lambda)$ – инварианты относительно выбора базиса.

$$v \in V_\lambda \quad \mathcal{A}v = \lambda v \stackrel{?}{\in} V_\lambda$$

$$\mathcal{A}(\lambda v) = \lambda \mathcal{A}v = \lambda^2 v = \lambda(\lambda v)$$

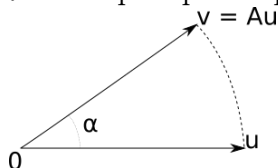
Примеры.

1. \mathcal{A} – оператор подобия:

$$\mathcal{A}v = \mu \cdot v \quad \mu \in K$$

$$\mu \text{ с.ч.} \quad V_\lambda = V$$

2. \mathcal{A} – оператор поворота на плоскости на угол α



$\alpha \neq \pi k \Rightarrow$ нет с.в.

3. Пусть λ с.ч. $= 0 \quad \mathcal{A}v = 0 \text{ с.в. } \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{Ker } \mathcal{A} \text{ нетривиально} \Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ не автоморфизм} \Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ необратимо} \Leftrightarrow \det \mathcal{A} = 0$

4. $\mathcal{A}: V \rightarrow V$

$$v_1 \dots v_n \text{ базис, т.ч. } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \Lambda$$

Базис состоит из с.в. отвечающих с.ч. $\lambda_1 \dots \lambda_n$

$$\mathcal{A}v_i = \lambda_i v_i \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda - \text{с.ч. } v \text{ с.в. } \neq 0 \Leftrightarrow \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \text{ нетривиально} \Leftrightarrow \det(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) = 0$

Определение 3. $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E})$ – характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}, t \in K$

$V e_1 \dots e_n$ базис $\mathcal{A} \leftrightarrow A$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) = \det(A - tE)$ т.к. \det оператора инвариантен относительно выбора базиса.

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tE) = \begin{vmatrix} (a_{11} - t) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - t) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & (a_{nn} - t) \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} (a_{11} + \dots + a_{nn}) t^{n-1} + \dots + \frac{\det A}{\det A}$$

По теореме Виета: $\det \mathcal{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n$
корни $\chi_{\mathcal{A}}(t)$

$\lambda \in K$ с.ч. $\Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0 \quad (\lambda \in K)$

λ корень характеристического многочлена.

$k = \mathbb{C} \Rightarrow n$ с.ч. с учетом кратности корней характеристического многочлена.

$k = \mathbb{R} \Rightarrow$ только вещественные корни $\chi_{\mathcal{A}}$ будут с.ч.

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n \prod_{\lambda \text{ корень}} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)}$$

$\alpha(\lambda)$ называется алгебраической кратностью с.ч. λ (если $\lambda \in K$)

Определение 4. Множество всех с.ч. с учетом алгебраической кратности называется **спектром** линейного оператора. $(\lambda, \alpha(\lambda))$

Спектр – простой, если все с.ч. попарно-различны.

$$\alpha(\lambda) = 1 \quad \forall \lambda$$

Немного про алгебраическую кратность

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 = a_n \prod_{a-\text{корень}} (t - a)^{m_a}$$

$$a-\text{корень } f \Leftrightarrow f(a) = 0 \Leftrightarrow f : (t - a)$$

$$a - \text{корень } f \text{ кратности } m \Leftrightarrow \begin{matrix} f \mid (t - a)^m \\ f \nmid (t - a)^{m+1} \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow f(t) = (t - a)^m g(t)$$

a_0 – произведение всех корней с учетом кратности $= (-1)^n \prod a$ a – корень с учетом кратности

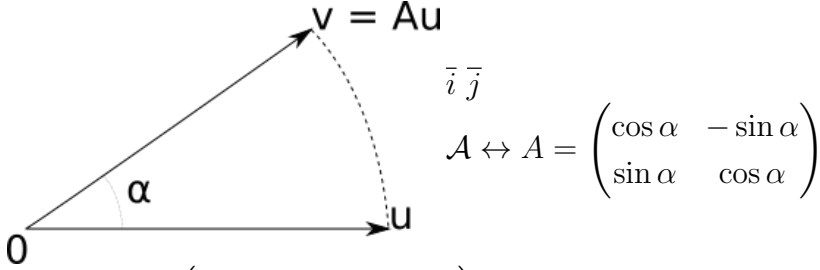
$$\det \mathcal{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n$$

$$(-1)^n t^n + \dots = (-1)^n (t - a_1)(t - a_2) \dots (t - a_n)$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n t^n + \dots = (-1)^n (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_n)$$

$$\det \mathcal{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ с.ч.}$$

Примеры. \mathcal{A} – поворот на угол α



$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det \begin{pmatrix} \cos \alpha - t & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha - t \end{pmatrix} =$$

$$\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha t + t^2 + \sin^2 \alpha = t^2 - 2 \cos \alpha t + 1$$

$$D = 4 \cos^2 \alpha - 4 < 0 \quad \alpha \neq \pi k$$

нет вещ. корней \Rightarrow нет с.ч.

$$K = \mathbb{R}$$

Теорема 1. λ с.ч. $\mathcal{A} \Rightarrow \boxed{1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)}$

Доказательство. Пусть $\gamma(\lambda) = k = \dim V_\lambda = \text{span}(v_1 \dots v_k)$
базис

V_λ инвариантно относительно $\mathcal{A} \Rightarrow \exists$ базис: матрица оператора будет иметь вид:

(инвариантное линейное подпространство. Смотри Теорему пункта 7.3)

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A^1 & A^2 \\ \hline 0 & A^3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & A^2 \\ 0 & \lambda & \\ \hline 0 & & A^3 \end{array} \right) \quad A_{k \times k}^1$$

$$\text{Базис} = v_1 \dots v_k v_{k+1} \dots v_n$$

$$\mathcal{A} \begin{matrix} v_i \\ i=1 \dots k \end{matrix} \in V_\lambda = \lambda v_i \leftrightarrow A_i^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det \left(\begin{array}{cc|c} \lambda - t & 0 & A^2 \\ 0 & \lambda - t & \\ \hline 0 & & A^3 - tE_{n-k} \end{array} \right) \stackrel{\text{св-ва } \det}{=} \begin{vmatrix} \lambda - t & 0 \\ 0 & \lambda - t \end{vmatrix} |A^3 - tE_{n-k}| = (\lambda - t)^k \chi_{A^3}(t)$$

Очевидно, λ корень $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ кратности не меньше, чем $k \Rightarrow \alpha(\lambda) \geq k = \gamma(\lambda)$ □

Теорема 2. $\lambda_1 \dots \lambda_m$ – различные с.ч. \mathcal{A}

$v_1 \dots v_m$ соответствующие им с.в. \Rightarrow

$\Rightarrow v_1 \dots v_m$ линейно независимы.

Доказательство. Метод математической индукции

1. База. $m = 1$ $\lambda_1 v_1$ с.в. – линейно независимы, т.к. $v_1 \neq 0$
2. Индукционное предположение. Пусть верно для $m - 1$
3. Индукционный переход. Докажем, что верно для m

От противного. Пусть $\lambda_1 \dots \lambda_m$ попарно различные с.ч. \mathcal{A} ,

а $v_1 \dots v_m$ линейно зависимы.

Пусть $v_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$

$$\mathcal{A}_{v_m} = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \mathcal{A}_{v_i} = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \lambda_i v_i$$

||

$$\lambda_m v_m = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \lambda_m v_i$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_m) v_i = 0 \quad v_i \text{ линейно независим по инд. предположению}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots m-1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow v_m = 0$ – Противоречие, т.к. v_m с.в. и значит не может быть 0

□

Следствие 1. $\lambda_1 \dots \lambda_m$ различные с.ч. $\mathcal{A} \Rightarrow V_{\lambda_1} \dots V_{\lambda_m}$ дизъюнкты. $\left(\bigoplus_{\substack{\lambda \\ \text{с.ч.}}} V_{\lambda} \right)$

Доказательство. $v_1 + \dots + v_m = 0 \quad v_i \in V_{\lambda_i}$

Если хотя бы 1 слагаемое $\neq 0 \Rightarrow$ это слагаемое с.в. \Rightarrow противоречие с линейной независимостью с.в., отвечающих различным с.ч. $\Rightarrow \forall i : v_i = 0 \Rightarrow$ дизъюнкты. □

Теорема 3. $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i \quad L_i$ инвариантно относительно \mathcal{A}

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{L_i} : L_i \rightarrow L_i \Rightarrow \boxed{\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{i=1}^m \chi_{\mathcal{A}_i}(t)}$$

Доказательство. см. теорему - следствие п. 7.3

Базис V – объединение базисов L_i

$$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{A^1} & & 0 \\ & \boxed{A^2} & \\ 0 & & \boxed{A^m} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_i \leftrightarrow A^i \quad A_{k_i \times k_i}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = |A - tE| \underset{\text{свойства det}}{=} |A^1 - tE_{k_1}| |A^2 - tE_{k_2}| \dots |A^m - tE_{k_m}| =$$

$$\chi_{A^1}(t) \quad \chi_{A^2}(t) \quad \dots \quad \chi_{A^m}(t)$$

||

||

||

\mathcal{A}_1

\mathcal{A}_2

\mathcal{A}^m

□

Все свойства с.ч. и с.в. доказанные для оператора верны для числовых матриц пространств $\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m$.

$A_{n \times n} \quad \lambda \text{ с.ч. } A : \exists x \in \mathbb{R}^n \neq 0 \quad Ax = \lambda x$

$y = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{линейный оператор}}}{Ax}$

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$

с.ч., с.в.? $\alpha(\lambda), \gamma(\lambda)$?

$$\chi_A(t) = \chi(t) = \begin{vmatrix} 4-t & -5 & 2 \\ 5 & -7-t & 3 \\ 6 & -9 & 4-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-t & 1-t & 2 \\ 5 & 1-t & 3 \\ 6 & 1-t & 4-t \end{vmatrix} = (1-t) \begin{vmatrix} 4-t & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 4-t \end{vmatrix} = (1-t)t^2$$

$$t_1 = 0 \quad \alpha(0) = 2$$

$$t_2 = 1 \quad \alpha(1) = 1$$

$$V_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda E) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \dots \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \alpha \in]R$$

$$V_{\lambda_1} = 0 = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\gamma(0) = 1 < \alpha(0)$$

$$\lambda_2 \quad 1 \leq \gamma \leq \alpha = 1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \dots \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma(1) = 1$$

7.5 Оператор простой структуры. (о.п.с.)

Проекторы. Спектральное разложение о.п.с.

Функция от матрицы.

Определение 1. $A \in \text{End}(V)$

A называется о.п.с., если \exists базис пространства V , т.ч. матрица оператора в этом базисе имеет

$$\text{диагональный вид } \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists \text{ базис } V \text{ из с.ч. } \mathcal{A} \Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda \text{ с.ч. } \mathcal{A}} V_\lambda$$

$$V = \text{span}(v_1 \dots v_n)$$

Теорема 1. Пусть $\sum_{\lambda \text{ с.ч. } \mathcal{A}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$

\Leftrightarrow все корни $\chi(t) \in K \Leftrightarrow$ все корни $\chi(t)$ являются с.ч. \mathcal{A}

$$\boxed{\mathcal{A} \text{ о.п.с.} \Leftrightarrow \forall \text{ с.ч. } \lambda \quad 1 \leq \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)}$$

Доказательство. \mathcal{A} о.п.с. $\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda \text{ с.ч.}} V_\lambda \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow n = \dim V = \sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \gamma(\lambda) \overset{\nearrow}{=} \sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \alpha(\lambda)$
 $1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda) \quad \nearrow$
 $\sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \alpha(\lambda) = n \rightarrow \nearrow \Rightarrow \forall \lambda : \boxed{\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)}$ □

Следствие 1. $\sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$

\mathcal{A} о.п.с. \Leftarrow спектр – простой.

(n попарно различных с.ч. $\forall \lambda \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) = 1$)

Определение 2. $A_{n \times m}$ называется диагонализируемой, если \exists невырожденная $T_{n \times n}$, т.ч.

$$T^{-1}AT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$$

("A подобна диагональной матрице")

Следствие 2. Если матрица $A_{n \times n}$ – матрица некоторого о.п.с. \mathcal{A} , то она **диагонализируема**. И
 обратно, любая диагонализируемая матрица является матрицей о.п.с. в некотором базисе.

Доказательство.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \text{ о.п.с.} & \Leftrightarrow \exists \text{ базис} & \begin{array}{c} v_1 \dots v_n \\ \text{с.в.} \end{array} \\ \updownarrow & (e_1 \dots e_n)V & \begin{array}{c} \lambda_1 \dots \lambda_n \\ \text{с.ч.} \end{array} \\ A & & \begin{array}{c} \updownarrow \\ \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$

$T = T_{e \rightarrow v}$ невырожденная.

$$\Lambda = T^{-1}AT$$

$$A = T\Lambda T^{-1}$$

□

$$A \text{ диагонализируема} \Leftrightarrow \sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \alpha(\lambda) = n$$

$$\forall \lambda \text{ с.ч. } \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$$

Определение 3.

$$\begin{array}{ccc} V = \bigoplus_{i=1}^m L_i & p_i : V \rightarrow L_i \subset V & \\ \nwarrow \Leftarrow \Leftrightarrow \Rightarrow \searrow & & \\ L_i \subset V & \forall v \in V \exists! : v = \sum_{i=1}^m v_i \in L_i & \\ \text{линейное подпр.} & & \end{array}$$

$\forall v \in V \quad \mathcal{P}_i v \stackrel{\text{def}}{=} v_i \quad i = 1 \dots m$

Оператор проектирования (проектор)

$$\mathcal{P}_i \overset{?}{\in} \text{End}(V)$$

$$\mathcal{P}_i(u + \lambda v) = u_i + \lambda v_i = \mathcal{P}_i u + \lambda \mathcal{P}_i v \Rightarrow \mathcal{P}_i \text{ линейный оператор.}$$

$$u + \lambda V = \sum_{i=1}^m u_i \in L_i + \lambda \sum_{i=1}^m v_i \in L_i = \sum_{i=1}^m \underbrace{(u_i + \lambda v_i)}_{\in L_i}$$

$$u_i = \mathcal{P}_i u \quad v_i = \mathcal{P}_i v$$

Свойства проекторов:

1. $\forall i \neq j \quad \mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = 0$
2. $\forall i : \mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i \quad (\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \mathcal{P}_i^k = \mathcal{P}_i)$
3. $\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i = \mathcal{E}$
4. $\text{Ker} \mathcal{P}_i = \sum_{j \neq i} L_j \quad \forall i = 1 \dots m$
 $\text{Im} \mathcal{P}_i = L_i$

Доказательство.

1. $\forall v \in V \quad \mathcal{P}_i \mathcal{P}_i j(v) = \mathcal{P}_i v_j \in L_j = 0 \Rightarrow \mathcal{P}_i \mathcal{P}_i j = 0$

Т.к. L_i дизъюнкты

$$v = v_1 + v_i + \underbrace{v_j}_{\text{Ед. образом}} + \dots + v_n$$

$$v_j = v_j + 0$$

2. $\forall v \in V \quad \mathcal{P}_i \underbrace{\mathcal{P}_i(v)}_{v_i \in L_i} = v_i = \mathcal{P}_i v$

Т.к. верно $\forall v \in V$, то верно и для базиса \Rightarrow операторы совпадают. $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i$

3. $\forall v \in V (\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i) v = \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i v = \sum_{i=1}^m v_i = v = \mathcal{E} v \Rightarrow \dots \Rightarrow \sum_{i=1}^m = \mathcal{E}$
4. $\mathcal{P}_i(v_1 + \dots + v_{i-1} + v_{i+1} + \dots + v_m) + 0$
 $= \sum_{j \neq i} \underbrace{\mathcal{P}_i v_j}_0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum_{j \neq i} L_j \subset \text{Ker } \mathcal{P}_i \\ \text{Т.к. } v = \bigoplus_{j \neq i} L_j \oplus L_i \end{array}} \Rightarrow \text{Ker } \mathcal{P}_i = \bigoplus_{j \neq i} L_j$$

$\text{Im } \mathcal{P}_i = L_i$ по def " \subset "

Верно " \supset " $\forall v_i \in L_i \rightsquigarrow v_i \in V = \mathcal{P} v_i = v_i$

□

Утверждение. $\mathcal{P}_i \in \text{End}(V) : V \rightarrow V$ и выполнены свойства 1, 3 \Rightarrow
 $i=1 \dots m$

$$\Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } \mathcal{P}_i \quad (\text{т.е. } \mathcal{P}_i \text{ проекторы на } L_i = \text{Im } \mathcal{P}_i)$$

Доказательство.

1. Если выполнены 1, 3, то верно 2

$$\mathcal{P}_i \mathcal{P}_i \stackrel{?}{=} \mathcal{P}_i$$

$$\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i \mathcal{E} = \mathcal{P}_i \sum_{j=1}^m \mathcal{P}_j = \sum_{j=1}^m \mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \mathcal{P}_i^2$$

$$\parallel$$

$$0$$

$$i \neq j$$

2. $v_1 + v_2 + \dots + v_m = 0$

$v_i \in \text{Im } \mathcal{P}_i$ дизъюнктно?

$$v_i = \mathcal{P}_i w_i \quad w_i \in V$$

$$v_i = \mathcal{P}_i w_i = \mathcal{P}_i \left(\underbrace{\sum_{j=1}^m \mathcal{P}_j w_j}_{=0} \right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^m \underbrace{\mathcal{P}_i(\mathcal{P}_j w_j)}_{=0, i \neq j} = \mathcal{P}_i^2 w_i = \mathcal{P}_i w_i$$

$$\forall v \in V \quad \mathcal{E}v = v = \sum_{j=1}^m \underbrace{\mathcal{P}_j v}_{v_j \in Im \mathcal{P}_j} \Rightarrow v = \sum_{j=1}^m Im \mathcal{P}_j$$

□

Теорема 2 (О спектральном разложении о.п.с.). $v = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} V_\lambda$ $\mathcal{P}_\lambda : V \rightarrow V_\lambda$
проекторы

\mathcal{A} о.п.с. $\Leftrightarrow \mathcal{A} = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda \mathcal{P}_\lambda$ ← спектральные проекторы

Доказательство.

1. $\mathcal{P}_\lambda \mathcal{P}_\mu = 0$
2. $\mathcal{P}_\lambda^2 = \mathcal{P}_\lambda$
3. $\sum_{\lambda \in \sigma(A)} \mathcal{P}_\lambda = \mathcal{E}$

$\forall v \in V$

$$\mathcal{A}v = \mathcal{A} \left(\sum_{\lambda} v_\lambda \in V_\lambda \right) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \underbrace{\mathcal{A}v_\lambda}_{= \lambda v_\lambda}$$

$$\sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda v_\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda \mathcal{P}_\lambda v$$

Доказательство верно \forall векторного про-ва V . В частности для базиса $\Rightarrow \boxed{\mathcal{A} = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda \mathcal{P}_\lambda}$

□

Следствие 1. $A_{n \times n}$ *диагонализируема* $\Leftrightarrow \exists \mathcal{P}_\lambda_{n \times n}$ 1° 2° 3°
проекторы
 $A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda \mathcal{P}_\lambda$

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -23 & 13 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 = 1 \quad \alpha(\lambda_1) = \gamma(\lambda_1) = 2$$

$$V_{\lambda_1} = \text{span} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \text{span}(v_1, v_2)$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \alpha(\lambda_2) = \gamma(\lambda_2) = 1$$

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \text{span } V_3$$

$$\Rightarrow \text{о.п.с. } V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} = \text{span}(V_1, V_2, V_3)$$

$$T_{e \rightarrow v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \Lambda \quad \boxed{AT = T\Lambda}$$

$$\mathcal{P}_1 : V \rightarrow V_{\lambda_1} \subset V$$

$$\mathcal{P}_2 : V \rightarrow V_{\lambda_2} \subset V$$

$$\mathcal{P}'_1 \text{ матрица } \mathcal{P}_1 \text{ в базисе } v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 - \text{матрицы проекторов в базисе } e (\text{канонич.})$$

$$\mathcal{P}_1 v_i = \begin{cases} v_i, i = 1, 2 \\ 0, i = 3 \end{cases}$$

$$1^\circ \quad 2^\circ \quad 3^\circ$$

$$\mathcal{P}'_1 + \mathcal{P}'_2 = E$$

$$\mathcal{P}'_1 \mathcal{P}'_2 = 0 \dots$$

$$\mathcal{P}'_2 \text{ матрица } \mathcal{P}_2 \text{ в базисе } v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Примеры.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}'_i = T^{-1} \mathcal{P}_i T \quad i = 1, 2$$

$$\mathcal{P}_i = T \mathcal{P}'_i T^{-1} \quad \begin{matrix} \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 = 0 \\ \mathcal{P}_1^2 = \mathcal{P}_1 \end{matrix}$$

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 6 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix} = E - \mathcal{P}_1$$

Определение 4. $(A_k) = ((a_{ij}^k))_{k=1}^\infty$ – последовательность матриц

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A = (a_{ij}) \Leftrightarrow \forall i, j \exists a_{ij} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^k$$

$$S = \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} A_m}_{\substack{\text{Ряд.} \\ \text{Сумма ряда.}}} \stackrel{\exists}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{m=1}^N A_m}_{\substack{S_N \text{ частичная} \\ \text{сумма ряда}}}$$

$$f(x) \text{ аналитическая в } |x| < R \Leftrightarrow f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m(x)^m \quad C_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}$$

Ряд Тейлора.

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \quad R = \infty \quad \cos x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} \quad R = \infty$$

$$\ln(1+x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} x^m}{m} \quad |x| < 1 \quad \text{либо } x = 1$$

Определение 5. Функция от матрицы.

$A_{n \times n}$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m A^m, \text{ где } \boxed{\begin{aligned} C_m &= \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \\ f(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m \end{aligned}}$$

$$e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$$

$$\cos A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} A^{2m}$$

Теорема 3. f аналитическая в $|x| < R$

$A_{n \times n}$ все с.ч. $|\lambda| < R$

A диагонализируемая То есть:

$$\exists T : \Lambda = T^{-1}AT$$

невырожд.

$$\exists \mathcal{P}_\lambda : A = \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_\lambda$$

\Downarrow

$$1. \quad \exists_{f(A)} = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$2. \quad \exists_{f(A)} = \sum_{\lambda \text{ с.ч.}} f(\lambda) \mathcal{P}_\lambda$$

Доказательство.

1.

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m A^m$$

$$A^m = (T \Lambda T^{-1})^m =$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m \\ |x| &< R \end{aligned}}$$

$$= T \Lambda \underbrace{T^{-1} T}_{E} \Lambda T^{-1} \dots T \Lambda T^{-1} =$$

$$= T \Lambda^m T^{-1} = T \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 \\ 0 & \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m T \Lambda^m T^{-1} = T \left(\sum_{m=0}^{\infty} C_m \Lambda^m \right) T^{-1} =$$

$$= T \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} C_m \lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{m=0}^{\infty} C_m \lambda_n^m \end{pmatrix} T^{-1} = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$|\lambda_i| < R$$

$$2. \quad A^m = \left(\sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda \right)^m = \sum_{\substack{\lambda \neq \mu \\ \mathcal{P}_\lambda \mathcal{P}_\mu = 0}} \lambda^m \mathcal{P}_\lambda^m = \sum_{\lambda} \lambda^m \mathcal{P}_\lambda$$

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \left(\sum_{\lambda} \lambda^m \mathcal{P}_\lambda \right) = \sum_{\lambda} \left(\sum_{m=0}^{\infty} C_m \lambda^m = f(\lambda) \right) \mathcal{P}_\lambda = \sum_{\lambda} f(\lambda) \mathcal{P}_\lambda$$

$$|\lambda| < R$$

□

Замечание. A диагон. $\Leftrightarrow A = T\Lambda T^{-1}$

$$\Leftrightarrow A = \sum_{\lambda \in \text{с.ч.}} \lambda \mathcal{P}_\lambda$$

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

$$f(A) = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$f(A) = \sum_{\lambda \in \text{с.ч.}} f(\lambda) \mathcal{P}_\lambda$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$f(At) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m A^m t^m$$

$$t^m A^m = t^m T \Lambda^m T^{-1} = T \begin{pmatrix} (\lambda_1 t)^m & 0 \\ 0 & f(\lambda_n t) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$\boxed{f(At) = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1 t) & 0 \\ 0 & f(\lambda_n t) \end{pmatrix} T^{-1}}$$

$$t^m A^m = \sum_{\lambda \in \text{с.ч.}} t^m \lambda^m \mathcal{P}_\lambda$$

$$\boxed{f(At) = \sum_{\lambda \in \text{с.ч.}} f(t\lambda) \mathcal{P}_\lambda}$$

Примеры. e^{At}

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = \det(A - tE) = (t - 1)^2(t + 1)$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \alpha(\lambda_1) = 2$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \alpha(\lambda_2) = 1$$

$$V_{\lambda_1} : \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -12 & 6 & 0 \\ 10 & -20 & 10 & 0 \\ 12 & -24 & 12 & 0 \end{array} \right)$$

$$V_{\lambda_1} = \text{span} \left(\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \right) \quad \gamma(\lambda_1) = 2$$

$$V_{\lambda_2} : \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -12 & 6 & 0 \\ 10 & -18 & 10 & 0 \\ 12 & -24 & 14 & 0 \end{array} \right)$$

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \left(\underset{v_3}{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}} \right) \quad \gamma(\lambda_2) = 1$$

$$\forall \lambda : \left. \begin{array}{l} \alpha(\lambda) = \gamma(\lambda) \\ \sum_{\lambda} \alpha(\lambda) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow A \text{ диагонализируемая}$$

$$T_{e \rightarrow v} = (v_1 v_2 v_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$e^{At} = T \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 4e^t - 3e^{-t} & -6e^t + 6e^{-t} & 3e^t - 3e^{-t} \\ 5e^t - 5e^{-t} & -9e^t + 10e^{-t} & 5e^t - 5e^{-t} \\ 6e^t - 6e^{-t} & -12e^t + 12e^{-t} & 7e^t - 6e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_i : V \xrightarrow{i=1,2} V_{\lambda_i} \subset V$$

$$\mathcal{P}_1 = T \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) T^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} \quad Im \mathcal{P}_1 = span(v_1, v_2) = V_{\lambda_1}$$

$$\mathcal{P}_2 = T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{1} \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix} \quad Im \mathcal{P}_2 = span(v_3) = V_{\lambda_2}$$

$$A = 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = e^t \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix} + e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -5 & 10 & -5 \\ -6 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A_{n \times n} \quad x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \dot{x} - \text{производная}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\dot{x} = Ax} \quad x = e^{At} C \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\text{с.л.д.у. с постоянным коэффициентом однородности} \quad \begin{aligned} (e^{At})' &= A e^{At} \\ e^{A \cdot 0} &= E \end{aligned}$$

$$e^{At} = \left(\sum_{\lambda \text{ с.ч.}} e^{\lambda t} \mathcal{P}_\lambda \right)' = \sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \lambda e^{\lambda t} \mathcal{P}_\lambda$$

$$A \cdot e^{At} = \sum_{\mu} \mu \mathcal{P}_\mu \cdot \sum_{\lambda} e^{\lambda t} \mathcal{P}_\lambda \underset{\mu=\lambda}{=} \sum_{\lambda} \lambda e^{\lambda t} \mathcal{P}_\lambda$$

Замечание. $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow$ все с.ч. $\lambda \neq 0$
(все корни хар. многочлена)

$\square A$ диагонализируема. Все с.ч. $\lambda \neq 0$

$$A^{-1} = T \Lambda^{-1} T^{-1} = T \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$\Lambda \Lambda^{-1} = E$$

$$AA^{-1} = T \underbrace{\Lambda \underbrace{T^{-1} T}_E \Lambda^{-1}}_E T^{-1} = E$$

$$A^{-1} = \sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \frac{1}{\lambda} \mathcal{P}_\lambda$$

$$(AA^{-1} = E \text{ упр.})$$

$$\sqrt[m]{A} = T \sqrt[m]{\Lambda} T^{-1} = T \begin{pmatrix} \sqrt[m]{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt[m]{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$$

\square все $\lambda_i \geq 0$

(m нечет $\Rightarrow \lambda$ любого знака)

$$(\sqrt[m]{\Lambda})^m = \Lambda$$

$$(\sqrt[m]{A})^m = T \underbrace{\sqrt[m]{\Lambda} T^{-1} T}_E \underbrace{\sqrt[m]{\Lambda} T^{-1} \dots T}_E \sqrt[m]{\Lambda} T^{-1} = T \Lambda T^{-1} = A$$

$$\boxed{\sqrt[m]{A} = \sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \sqrt[m]{\lambda} \mathcal{P}_\lambda}$$

(упр.: $(\sqrt[m]{A})^m = A$)

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix} \quad A^{-1} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \mathcal{P}_1 + \frac{1}{(-1)} \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 = A$$

$$A^2 = E$$

7.6 Комплексификация линейного вещ. пространства. Продолжение вещ. линейного оператора.

$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ V над полем K

$$\chi(\lambda) \underset{\lambda \text{ корень}}{=} 0$$

↙

$$K = \mathbb{R}/\mathbb{C}$$

Все корни $\lambda \in K$

Т.е. каждый корень с.ч.

$$\sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \alpha(\lambda) = n = \dim V$$

↘ III

$$K = \mathbb{R}$$

Не все корни вещ.

т.е. $\exists \lambda \notin K = \mathbb{R}$

$$\sum_{\text{вещ. лс. ч.}} \alpha(\lambda) < n = \dim V$$

$\mathcal{A} \rightarrow A?$

I ↙

↘ II

$$\forall \lambda : \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$$

$$\exists \lambda : \gamma(\lambda) < \alpha(\lambda)$$

\mathcal{A} – о.п.с. $\rightarrow A$ диагонализир.

\mathcal{A} не о.п.с.

$\rightarrow A$ приводится к Жордановой форме

Определение 1. V – линейное пространство над \mathbb{R}

$$\forall x, y \in V \quad v := x + iy \in V_{\mathbb{C}}$$

$$\forall v, v' \in V_{\mathbb{C}} : \begin{aligned} x &= \text{Re } v \\ y &= \text{Im } v \end{aligned}$$

Определим

$$1. v = v' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \in V \\ y = y' \end{cases}$$

$$2. v + v' = \omega = a + bi \in V_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x + x' \in V \\ b = y + y' \end{cases}$$

$$3. \forall \lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$a + bi = \omega = \lambda \cdot v \Leftrightarrow (\alpha + i\beta)(x + iy) = \underbrace{\overbrace{\alpha x - \beta y}^{a \in V} + i \overbrace{\beta x + \alpha y}^{b \in V}}_{\in V_{\mathbb{C}}}$$

$$4. \forall x \in V \Leftrightarrow x + i0 \in V_{\mathbb{C}}$$

$$V \subset V_{\mathbb{C}}$$

$$0 \Leftrightarrow 0 + i0$$

Упр.: $V_{\mathbb{C}}$ – линейное пространство над \mathbb{C}

$V_{\mathbb{C}}$ – комплексификация линейного вещественного пространства V

Утверждение. $e_1 \dots e_n$ базис $V \Rightarrow e_1 \dots e_n$ базис $V_{\mathbb{C}}$

Т.е. $\dim V = \dim V_{\mathbb{C}} = n$

$V \subset V_{\mathbb{C}}$ структуры над разными полями.

Доказательство. $e_1 \dots e_n$ базис $V_{\mathbb{C}}$?

– порождающая?

– линейно независимая?

$$1. \forall v \in V_{\mathbb{C}} \quad v = x \in V + iy \in V = \sum_{j=1}^n x_j e_j + i \sum_{j=1}^n y_j e_j =$$

$$\sum_{j=1}^n \boxed{x_j + iy_j}_{\alpha_j \in \mathbb{C}} e_j \Rightarrow e_1 \dots e_n \text{ порождающая.}$$

$$2. \sum_{j=1}^n \gamma_j e_j = 0 \quad \gamma_j \in \mathbb{C} \\ \gamma_j = \alpha_j + i\beta_j$$

$$\parallel \\ \underbrace{\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j}_x + i \underbrace{\sum_{j=1}^n \beta_j e_j}_y = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \\ y = 0 = \sum_{j=1}^n \beta_j e_j \end{cases} \Leftrightarrow e_1 \dots e_n \text{ линейно независ.} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall j \alpha_j = 0 \\ \forall j \beta_j = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall j \gamma_j = 0$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} e_1 \dots e_n \\ \text{лин. незав.} \end{matrix} \text{ в } V_{\mathbb{C}}$$

□

Определение 2. $z = x + iy \quad x, y \in V$

вектор сопряженный к z :

$$\bar{z} = x - iy$$

$$(\bar{\bar{z}} = z, (\bar{z_1 + z_2}) = \bar{z_1} + \bar{z_2}, \overline{(\lambda z)} = \bar{\lambda} \bar{z})$$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \\ \bar{z} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix}$$

Утверждение. $v_1 \dots v_m$ линейно незав. в $V_{\mathbb{C}} \Rightarrow \bar{v}_1 \dots \bar{v}_m$ линейно независимы в $V_{\mathbb{C}}$

Очевидно, $v_1 \dots v_m$ линейно зависимы $\Rightarrow \bar{v}_1 \dots \bar{v}_m$ линейно зависимы.

Доказательство.

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{j=1}^m \gamma_j \bar{v}_j = \bar{0} = 0 \\ \parallel \\ \sum_{j=1}^m \bar{\gamma}_j \bar{v}_j = \sum_{j=1}^m \gamma'_j v_j \end{array} \right| \Leftrightarrow \forall j \gamma'_j = 0 = \bar{\gamma}_j \Leftrightarrow \gamma_j = 0$$

\Rightarrow линейно независим.

□

$$\boxed{rg(v_1 \dots v_m) = rg(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_m)}$$

Определение 3. $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

$$V_{\mathbb{C}}$$

$$\forall v = x \in V + i y \in V_{\mathbb{C}} \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} v = \mathcal{A} x \in V + i \mathcal{A} y \in V_{\mathbb{C}}$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in \text{End}(V_{\mathbb{C}})$$

Линейность?

1. Аддитивность. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(v_1 + v_2) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}v_1 + \mathcal{A}_{\mathbb{C}}v_2$

Очевидно, из аддитивности \mathcal{A}

$$v_1 + v_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

2. Однородность

$$\forall \lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\lambda v) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}((\alpha + i\beta)(x + iy)) =$$

$$= \mathcal{A}_{\mathbb{C}}((\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)) =$$

$$= \mathcal{A}(\alpha x - \beta y) + i\mathcal{A}(\alpha y + \beta x) =$$

$$= \alpha \mathcal{A}x - \beta \mathcal{A}y + i\alpha \mathcal{A}y + i\beta \mathcal{A}x =$$

$$= (\alpha + i\beta)\mathcal{A}x + i(\alpha + i\beta)\mathcal{A}y = \lambda \mathcal{A}x + i\lambda \mathcal{A}y =$$

$$= \lambda(\mathcal{A}x + i\mathcal{A}y) = \lambda \mathcal{A}_{\mathbb{C}}v$$

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ – продолжение линейного вещ. оператора \mathcal{A}

с пространства V на его комплексификацию $V_{\mathbb{C}}$

Свойства $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$:

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad e_1 \dots e_n \text{ базис } V(V_{\mathbb{C}}) \\ \text{веществ.} \\ \mathcal{A} \leftrightarrow A \\ \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A_{\mathbb{C}} \end{array} \right\} \Rightarrow A_{\mathbb{C}} = A$$

Т.е. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ в вещ. базисе имеет вещ. матрицу, совпадающую с матр. \mathcal{A}

2. $\forall z \in V_{\mathbb{C}} \quad \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}z} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\bar{z}$

$$z = x + iy \quad \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}z} = \overline{\underbrace{\mathcal{A}x}_{\text{вещ.}} + i \underbrace{\mathcal{A}y}_{\text{вещ.}}} = \mathcal{A}x - i\mathcal{A}y =$$

$$= \mathcal{A}x + i\mathcal{A}(-y) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(x - iy) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\bar{z}$$

3. $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t) \quad \square \quad e_1 \dots e_n \text{ базис } V$

$$\parallel \parallel \quad \mathcal{A} \leftrightarrow A$$

$$\det(A - tE) \quad \det(A_{\mathbb{C}} - tE) \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A_{\mathbb{C}} = A$$

Все корни характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}$ являются собственными числами $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$

4. $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(\lambda) = 0$

Т.к. многочлен с вещ. коэф. $\Rightarrow \bar{\lambda}$ тоже корень.

$$\lambda = \alpha + i\beta \text{ корень } \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} \quad \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(\bar{\lambda}) = 0$$

v соотв. с.в.

$$\Rightarrow \bar{v} \text{ с.в. для } \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$$

<p>для $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$: $\dim V_{\lambda} = \dim V_{\bar{\lambda}}$ (из утв. 2)</p> <p>$\gamma(\lambda) = \gamma(\bar{\lambda})$</p>

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\bar{v} = \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}v} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v} \Rightarrow \bar{v} \text{ с.в. для } \bar{\lambda}$$

\uparrow
с.в. для λ

"III": $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

V над \mathbb{R}

$$\sum_{\lambda \text{ с.ч.}} \alpha(\lambda) < n = \dim V$$

Т.е. не все корни $\chi_{\mathcal{A}}$ вещ.

\rightarrow строим $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in \text{End}(V_{\mathbb{C}}) \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} = A$

Все корни с.ч. \Rightarrow матрица для $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ будет сведена либо к I, либо к II

Примеры.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(t) = \det(A - tE) = -(t-1)(t^2 - 4t + 13)$$

$$D = -36 < 0$$

$$\lambda_1 = 1 \text{ с.ч. } \alpha(\lambda_1) = 1 \quad \lambda_{2,3} = 2 + \pm i3 \quad \alpha(2, 3) = 1$$

$$A_{\mathbb{C}} = A : \lambda_{2,3} = 2 \pm i$$

$$\lambda_1 = 1 \quad V_{\lambda_1} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 + 3i \quad 1 \leq \gamma(\lambda_2) \leq \alpha(\lambda_2) = 1 \Rightarrow \gamma(\lambda_2) = 1$$

Решаем СЛОУ методом Гаусса точно так же, как мы решали для вещ. чисел.

Только теперь арифметические операции с комплексными.

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 3 - 3i \\ 5 - 3i \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 2 - 3i \quad V_{\lambda_3} = \text{span} \begin{pmatrix} 3 + 3i \\ 5 + 3i \\ 4 \end{pmatrix} = v_3$$

$$\forall \lambda : \gamma(\lambda) = \alpha(\lambda) \Rightarrow A_{\mathbb{C}} = A \text{ диагонализир.}$$

$$T_{e \rightarrow v} = \begin{pmatrix} 1 & 3 - 3i & 3 + 3i \\ 2 & 5 - 3i & 5 + 3i \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 + 3i & 0 \\ 0 & 0 & 2 - 3i \end{pmatrix} T^{-1} = \dots$$

7.7 Минимальный многочлен. Теорема Кэли-Гамильтона

Определение 1. Нормализованный (старший коэф. = 1) многочлен $\psi(t)$ называется **аннулятором элемента** $v \in V$, если $\psi(\mathcal{A})v = 0$

$$\psi(t) = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \dots + a_1t + a_0$$

$$\psi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^t + a_{m-1}\mathcal{A}^{m-1} + \dots + a_1\mathcal{A} + a_0\mathcal{E} \in \text{End}(V)$$

$$\mathcal{A}^0 = \mathcal{E}$$

$$\psi(t) = \prod_{\lambda \text{ корень}} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$$

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)} \cdot (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{m(\mu)} = (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{m(\mu)} \cdot (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$$

$$\mathcal{A}^k \mathcal{E}^r = \mathcal{E}^r \mathcal{A}^k$$

Т.е. перестановочны.

Определение 2. $\psi(t)$ аннулятор элемента $v \in V$ наименьшей степени называется **минимальным аннулятором элемента** v

Теорема 1 (О минимальном аннуляторе элемента).

$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

1. $\forall v \in V \exists!$ минимальный аннулятор v
2. \forall аннулятор элемента делится на его минимальный.

Доказательство.

1. (a) $\square v = 0 \quad \psi(t) = 1$ Очевидно, минимальный аннулятор.

$$\psi(\mathcal{A})v = \mathcal{E}v = 0$$

- (b) $\square v \neq 0$

$$\underbrace{(\mathcal{E})v, \mathcal{A}v, \mathcal{A}^2v, \dots, \mathcal{A}^{m-1}v, \quad \mathcal{A}^m v}_{\text{линейно независимая система}}$$

линейно зависимая система

$$\dim V = n$$

$$m \leq n + 1$$

$$\mathcal{A}^m v = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k v$$

$$0 = \mathcal{A}^m v - \sum_{k=0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k v = (\mathcal{A}^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k \mathcal{A}^k)v \leftarrow \text{Алгоритм}$$

$$\psi(t) = t^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k t^k$$

Очевидно, по построению это минимальный аннулятор элемента v

2. ψ_1 – аннулятор v

$$\psi_1(t) = a(t)\psi(t) + r(t)$$

$$\deg r(t) < \deg \psi(t)$$

$$0 = \psi_1(\mathcal{A})v = (a(\mathcal{A})\psi(\mathcal{A}) + r(\mathcal{A}))v = a(\mathcal{A}) \underbrace{\psi(\mathcal{A})v}_{=0} + r(\mathcal{A})v = r(\mathcal{A})v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} r(t) \text{ аннулятор } v \\ \deg r < \deg \psi \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Противоречие с минимальностью } \psi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r(t) \equiv 0 \Rightarrow \psi_1 : \psi$$

□

Определение 3. Нормализованный многочлен $\phi(t)$ называется аннулятором \mathcal{A} , если $\phi(\mathcal{A}) = 0$

$$(\Leftrightarrow \forall v \in V \quad \phi(\mathcal{A})v = 0)$$

Аннулятор \mathcal{A} минимальной степени называется **минимальный многочленом**

Теорема 2 (о минимальном многочлене). $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

1. $\forall \mathcal{A} \exists!$ минимальный многочлен
2. \forall аннулятор \mathcal{A} делится на минимальный многочлен

Доказательство.

$e_1 \dots e_n$ базис V

\Rightarrow по Теореме 1 для $\forall e_j \exists!$ ψ_j минимальный аннулятор e_j

$$\psi_j(\mathcal{A})e_j = 0$$

$$\psi(t) = \text{H.O.K. } (\psi_1 \dots \psi_n)$$

$$\begin{aligned} \forall v \in V \quad \phi(\mathcal{A})v &= \phi(\mathcal{A}) \sum_{i=1}^n v_i e_i = \sum_{i=1}^n v_i \phi(\mathcal{A})e_i = \\ &= \sum_{i=1}^n v_i \xi_i(\mathcal{A}) \underbrace{\psi_i(\mathcal{A})e_i}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

$$\phi: \psi_j \Leftrightarrow \phi(t) = \xi_j(t) \psi_j(t)$$

$$\Rightarrow \phi(\mathcal{A}) = 0 \Rightarrow \phi \text{ аннулятор } \mathcal{A}$$

Давайте покажем, что у ϕ степень минимальная.

От противного.

$$\exists \phi_1 \text{ аннулятор } \mathcal{A} \quad \sqsubset \deg \phi_1 < \deg \phi$$

$$\forall e_j : \phi_1(\mathcal{A})e_j = 0 \Rightarrow \phi_1 \text{ аннулятор элемента } e_j \xRightarrow{\text{по Теореме 1}}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} \phi_1 & \vdots & \psi_j \\ \text{аннулятор } e_j & \text{минимальный аннулятор } e_j & \end{array} \Rightarrow \phi_1: \phi \Rightarrow \deg \phi_1 \geq \deg \phi. \text{ Противоречие } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \deg \phi \text{ минимальный } \Rightarrow \text{п.2 доказан, т.к. } \forall \text{ аннулятор } \mathcal{A}: \phi$$

Единственность?

$$\sqsubset \begin{array}{ccc} \phi_1, \phi & & \text{минимальные аннуляторы одной степени.} \\ \nwarrow \nearrow & & \end{array}$$

нормализов. \Rightarrow ст. коэф. 1

$$\deg(\phi_1 - \phi) < \deg(\phi) = \deg(\phi_1)$$

$$\forall v \in V \quad (\phi_1 - \phi)(\mathcal{A})v = \underbrace{\phi_1(\mathcal{A})v}_{=0} - \underbrace{\phi(\mathcal{A})v}_{=0} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi_1 - \phi \text{ аннулятор } \mathcal{A} \text{ меньшей степени } \Rightarrow \text{противоречие } \underline{\text{минимальн.}}$$

□

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \phi = ? \text{ минимальный многочлен}$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi_1?$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}^2e_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ -8 \end{pmatrix}$$

линейно независ.

линейно завис.

$$\mathcal{A}^2e_1 = -4e_1 + 4\mathcal{A}e_1$$

$$\psi_1(t) = t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}^2e_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$$

линейно независ.

линейно завис.

$$\mathcal{A}^2e_2 = 4\mathcal{A}e_2 - 4e_2$$

$$\psi_2(t) = t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

лин. нез.

линейно завис.

$$\mathcal{A}e_3 = 2e_3$$

$$\psi_3(t) = t - 2$$

$$\phi(t) = \text{Н.О.К.}((t - 2)^2, (t - 2)) = (t - 2)^2$$

Теорема 3 (Кэли-Гамильтона). $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

$$\chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) - \text{аннулятор } \mathcal{A}$$

характерист. многочлен

$$\text{Доказательство. } \chi(\mathcal{A}) = \det(\mathcal{A} - \mathcal{A}) = 0$$

□

Я так и не понял это норм доказательство или нет. В любом случае далее идет длинное док-во.

Доказательство. μ — не корень $\chi(t)$

$$\det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E}) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \exists(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{-1}$$

$$e_1 \dots e_n \text{ базис } v. \mathcal{A} \leftrightarrow A$$

$$(A - \mu E)^{-1} = \frac{1}{\det(A - \mu E)} B \leftarrow \text{союзная матрица (прис-ная)}$$

$$B = (b_{ij}) \quad b_{ij} = (-1)^{ij} M_{ij} \leftarrow \text{определиитель } (n - 1)\text{-го порядкка } A - \mu E$$

Т.е. мн-н степени $n - 1$ относительно μ

$$B = B_{n-1}\mu^{n-1} + B_{n-2}\mu^{n-2} + \dots + B_1\mu + B_0$$

$$\det(A - \mu E) \cdot E = (A - \mu E)(B_{n-1}\mu^{n-1} + \dots + B_1\mu + B_0)$$

||

$$\chi(\mu) \cdot E$$

||

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \mu^k \cdot E$$

$$\begin{array}{l|l} \mu^0 : & \alpha_0 E = AB_0 & A^0 \\ \mu^1 : & \alpha_1 E = AB_1 - B_0 & A^1 \\ \mu^2 : & \alpha_2 E = AB_2 - B_1 & A^2 \\ \dots & & \\ \mu^{n-1} : & \alpha_{n-1} E = AB_{n-1} - B_{n-2} & A^{n-1} \\ \mu^n : & \alpha_n E = -B_{n-1} & A^n \end{array}$$

$$\chi(\mathcal{A}) = \chi(A) = \sum_{k=0}^n \alpha_k A^k = AB_0 + A^2 B_1 - AB_0 + A^3 B_2 - A^2 B_1 + \dots + A^n B_{n-1}$$

$$- A^{n-1} B_{n-2} - A^n B_{n-1} = 0$$

χ — аннулятор \mathcal{A}

□

Теорема 4. $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

Множество корней характеристического многочлена \mathcal{A} совпадает с множеством корней минимального многочлена \mathcal{A} (без учета кратности)

Доказательство. $\chi(t)$ – характерист., $\phi(t)$ – минимальный многочлен.

” \Leftarrow ” $\square \phi(\lambda) = 0 \Rightarrow$ т.к. χ аннулятор \mathcal{A} , то по Т-ме 2 $\chi: \phi \Rightarrow \chi(\lambda) = 0$

” \Rightarrow ” $\square \chi(\lambda) = 0$

1. $\square \lambda \in K \Rightarrow \lambda$ с.ч. $\mathcal{A} \quad \exists v \neq 0 : \mathcal{A}v = \lambda v \Rightarrow$

$\Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})v = 0 \Rightarrow \psi(t) = (t - \lambda)$ минимальный аннулятор v

Т.к. $\phi: \psi \Rightarrow \lambda$ корень ϕ

$\phi(\lambda) = 0$

2. $\lambda \notin K$ т.е. III случай: $K = \mathbb{R}$

\exists комплексные корни характерист. многочлена.

$V \rightarrow V_{\mathbb{C}} \quad e_1 \dots e_n$ базис $V \rightarrow$ базис $V_{\mathbb{C}}$

$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} e_j = \mathcal{A} e_j + i \mathcal{A} 0 = \mathcal{A} e_j$

$e_j = e_j + i 0$

$\Rightarrow \forall k \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^k e_j = \mathcal{A}^k e_j$

\Rightarrow Применим алгоритм построения минимального многочлена (Теоремы 1, 2).

Получим, что минимальные многочлены $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ и \mathcal{A} совпадают.

Т.е. ϕ мин. мн-н для $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \quad \left. \begin{array}{l} \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} = \chi_{\mathcal{A}} \\ \Rightarrow \lambda \text{ с.ч. } \lambda \text{ корень } \phi \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Применим случай а) для } \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$

□

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 & 0 \\ -4 & 4-t & 0 \\ -2 & 1 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)(t^2 - 4t + 4) = -(t-2)^3$$

Корни $\chi : 2$

Корни $\phi : 2$

\leadsto еще один способ найти с.ч. – **найти корни многочлена.**

Следствие 1.

1. $\begin{matrix} \psi & \vdots & \phi \\ \text{характер.} & & \text{минимальный} \\ \text{(аннулятор)} & & \text{(аннулятор мин.)} \end{matrix}$
2. $\deg \phi = n = \dim V \Rightarrow (-1)^n \chi = \phi$

$\begin{aligned} \chi(t) &= \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)} \\ \phi(t) &= \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)} \quad 1 \leq m(\lambda) \leq \alpha(\lambda) \end{aligned}$
--

7.8 Операторное разложение единицы. Корневые подпространства.

$$\phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$$

$$\sum_{\lambda} m(\lambda) = m$$

$$\deg \phi = m$$

P_{m-1} – линейное пространство многочленов степени не выше $m - 1$

$$\dim P_{m-1} = m$$

$$\phi_{\lambda}(t) = \prod_{\mu \neq \lambda} (t - \mu)^{m(\mu)}$$

$$\phi(t) = (t - \lambda)^{m(\lambda)} \phi_{\lambda}(t)$$

$$\phi_{\lambda}(\lambda) \neq 0$$

$$\phi_{\lambda}(\mu) = 0$$

$$\mu \neq \lambda$$

вз. просто

Определение 1. $I_{\lambda} = \{p \in P_{m-1} | p : \phi_{\lambda}\}$

Главный идеал, порожденный многочленом $\phi_{\lambda} =$

$$= \{f \in P_{m(\lambda)-1} | p = f_{\lambda} \phi_{\lambda}\}$$

I_{λ} – линейное подпространство P_{m-1}

$$p_{1,2} : \phi_{\lambda} \Rightarrow (p_1 + \alpha p_2) : \phi_{\lambda}$$

Теорема 1. $P_{m-1} = \bigoplus_{\lambda} I_{\lambda}$

Доказательство.

1. Дизъюнктность.

$$0 = \sum_{\lambda} \underbrace{f_{\lambda} \phi_{\lambda}}_{\in I_{\lambda}} = f_{\lambda} \cdot \phi_{\lambda} + \sum_{\mu \neq \lambda} f_{\mu} \underbrace{\phi_{\mu}}_{\substack{\vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)} \\ \vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)}}}$$

$$\Rightarrow f_{\lambda} \cdot \underbrace{\phi_{\lambda} \vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)}}_{\text{вз. просто}} \Rightarrow \underbrace{f_{\lambda}}_{\substack{\uparrow \\ \deg f_{\lambda} = m(\lambda)-1}} \vdots (t-\lambda)^{m(\lambda)} \Rightarrow f_{\lambda} \equiv 0$$

$$\Rightarrow \forall \lambda \quad f_{\lambda} \equiv 0 \Rightarrow f_{\lambda} \phi_{\lambda} \equiv 0 \Rightarrow \text{Дизъюнкты}$$

2. $\dim P_{m-1} = m$

||

$$\sum_{\lambda} \dim I_{\lambda} = \sum_{\lambda} m(\lambda) = m$$

$$I_{\lambda} \subset P_{m-1}$$

$$\Rightarrow P_{m-1} = \bigoplus_{\lambda} I_{\lambda}$$

□

Следствие 1. $\forall p \in P_{m-1} \exists! p = \sum_{\lambda} p_{\lambda}$

$$p_{\lambda} \in I_{\lambda}$$

$$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda} - \text{полиномиальное разложение единицы}$$

Замечание.

1. $\lambda \neq \mu$

$$\begin{array}{ccc} p_\lambda & \cdot & p_\mu & \vdots & \phi \\ \parallel & & \parallel & & \\ f_\lambda \phi_\lambda & & f_\mu \phi_\lambda & = & \eta \cdot \phi \\ & & \uparrow & & \\ & & (t - \lambda)^{m(\lambda)} & & \end{array}$$

2. $\forall \lambda \ m(\lambda) = 1$

Если. Т. е. все корни ϕ взаимно простые.

$$f_\lambda = \text{const} \quad (\text{def } f_\lambda = m(\lambda) - 1 = 0)$$

Теорема 2 (Лагранжа).

$$\forall \lambda : m(\lambda) = 1 \Rightarrow$$

$$\forall p \in P_{m-1} \quad p(t) = \sum_{\lambda} \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \cdot \phi_\lambda(t)$$

Доказательство.

$$\begin{array}{l} \text{корень } \phi \rightarrow \mu \neq \lambda \\ \phi_\lambda(\mu) = 0 \\ \phi_\lambda(\lambda) \neq 0 \end{array}$$

$$p(t) = \sum_{\lambda} p_\lambda(t) = \sum_{\mu} \boxed{f_\mu} \cdot \phi_\mu(t)$$

\uparrow
 const, т.к.

корни взаимно

просты

$$p(\lambda) = f_\lambda \cdot \phi_\lambda(\lambda) \Rightarrow \forall \lambda : f_\lambda = \frac{p(\lambda)}{\phi_\lambda(\lambda)}$$

$$\phi(t) = \prod_{\mu} (t - \mu)$$

$$\phi'(t) = \sum_{\mu} \underbrace{\prod_{\lambda \neq \mu} (t - \lambda)}_{\phi_\mu(t)} = \sum_{\mu} \phi_\mu(t)$$

$$\phi'(\lambda) = \sum_{\mu} \underbrace{\phi_\mu(\lambda)}_{\parallel} = \phi_\lambda(\lambda) \Rightarrow f_\lambda = \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \Rightarrow p = \sum_{\lambda} \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \phi_\lambda(t)$$

0 $\mu \neq \lambda$

Следствие 1. $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$

$$1 = \sum_{\lambda} p_\lambda \Rightarrow \boxed{t = \sum_{\lambda} \lambda p_\lambda}$$

$$\text{Доказательство. По теореме: } 1 = \sum_{\lambda} p_\lambda = \sum_{\lambda} f_\lambda \cdot \phi_\lambda = \sum_{\lambda} \frac{1}{\phi'(\lambda)} \cdot \phi_\lambda(t)$$

$$\text{По теореме: } t = \sum_{\lambda} \frac{\lambda}{\phi'(\lambda)} \phi_\lambda(t) = \sum_{\lambda} \lambda p_\lambda$$

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

ϕ минимальный многочлен, все корни $\in K (\Rightarrow$ все корни $\chi \in K$

\Rightarrow т.е. все с.ч. $\in K - \mathbb{I}$, II случаи)

$$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda}(t)$$

$$\mathcal{P}_{\lambda} := p_{\lambda}(\mathcal{A})$$

$$\mathcal{P}_{\lambda} \in \text{End}(V)$$

$$\mathcal{P}_{\lambda} - \text{проекторы ?} \quad \uparrow \text{ это уже есть}$$

$$\boxed{\mathcal{E} = \sum_{\lambda} \mathcal{P}_{\lambda}} \text{ операторное разложение единицы}$$

$$\text{Достаточно проверить } \mathcal{P}_{\lambda} \cdot \mathcal{P}_{\mu} = \mathbb{O}$$

$$\mathcal{P}_{\lambda} = p_{\lambda}(\mathcal{A}) = f_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot \phi_{\lambda}(\mathcal{A})$$

$$\lambda \neq \mu$$

$$\mathcal{P}_{\mu} = p_{\mu}(\mathcal{A}) = f_{\mu}(\mathcal{A}) \cdot \phi_{\mu}(\mathcal{A})$$

перестановочны, т.к. многочлены от \mathcal{A}

$$\mathcal{P}_{\lambda} \mathcal{P}_{\mu} = f_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot f_{\mu}(\mathcal{A}) \phi_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot \phi_{\mu}(\mathcal{A}) = \mathbb{O}$$

$$\uparrow \text{ содержит}$$

$$(p_{\lambda} \cdot p_{\mu} : \phi \text{ см. замеч. 1}) \quad \eta(\mathcal{A})(t - \mu)^{m(\mu)} \quad \phi(\mathcal{A}) = \mathbb{O}$$

$\Rightarrow \mathcal{P}_{\lambda}$ проекторы – **спектральные проекторы** \mathcal{A}

$\text{Im } \mathcal{P}_{\lambda}$ **спектральное подпространство**

$$\Rightarrow_{7.5} \boxed{V = \bigoplus_{\lambda} \text{Im } \mathcal{P}_{\lambda}}$$

Примеры. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = -1 & \alpha(\lambda_1) = 2 \\ \lambda_2 = 3 & \alpha(\lambda_2) = 1 \end{matrix}$

$$V_{\lambda_1} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \gamma(\lambda_1) = 1 < \alpha(\lambda_1) \Rightarrow \text{не о.п.с.}$$

$$V_{\lambda_2} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \gamma(\lambda_2) = 1$$

$$\chi(t) = -(t+1)^2(t-3) \quad \phi_{\lambda_1} = (t-3)$$

$$\phi(t) = (t+1)^2(t-3) \quad \phi_{\lambda_2} = (t+1)^2$$

$$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda} = p_{\lambda_1} + p_{\lambda_2} = f_{\lambda_1} \phi_{\lambda_1} + f_{\lambda_2} \cdot \phi_{\lambda_2} =$$

$$= f_{\lambda_1}(t-3) + f_{\lambda_2}(t+1)^2$$

$$\text{Прав. дробь } \frac{1}{\phi} = \sum_{\lambda} \frac{f_{\lambda} \cdot \phi_{\lambda}}{\phi} = \sum_{\lambda} \frac{f_{\lambda}}{(t-\lambda)^{m(\lambda)}}$$

Правильн. Правильн. дробь

$$\deg f_{\lambda} < m(\lambda)$$

$$\frac{1}{(t+1)^2(t-3)} = \frac{A_1}{t+1} + \frac{A_2}{(t+1)^2} + \frac{A_3}{t-3} = \frac{-\frac{1}{16}t - \frac{5}{16}}{(t+1)^2} + \frac{\frac{1}{15}}{t-3}$$

простейшие

$$1 = \underbrace{\left(-\frac{1}{16}t - \frac{5}{16}\right) \overbrace{(t-3)}^{\phi_{\lambda_1}}}_{p_{\lambda_1}} + \underbrace{\frac{1}{15} \overbrace{(t+1)^2}^{\phi_{\lambda_2}}}_{p_{\lambda_2}}$$

$$\mathcal{P}_1 = p_{\lambda_1}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad p_1 + p_2 = E$$

$$\mathcal{P}_2 = p_{\lambda_2}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Замечание. $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$

Из следствия теоремы Лагранжа $t = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}$

$$\boxed{\mathcal{A} = \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_{\lambda}} \nearrow \quad 1 = \sum p_{\lambda} \quad \text{спектральное разложение о.п.с.}$$

$$\boxed{\mathcal{A} \text{ о.п.с.} \Leftrightarrow \forall \lambda : m(\lambda) = 1} \quad \text{Доказательство позже}$$

Определение 2. $K_{\lambda} = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}$

называется **корневым подпространством** \mathcal{A}

Теорема 3.

1. K_{λ} инвариантно относительно \mathcal{A}
 2. $\text{Im} \mathcal{P}_{\lambda} = K_{\lambda}$
 3. $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный многочлен $\mathcal{A}|_{K_{\lambda} = \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}}$
- $$\Rightarrow \boxed{V = \bigoplus_{\lambda} K_{\lambda}}$$

Доказательство.

1. $x \in K_{\lambda} \xrightarrow{?} \mathcal{A}x \in K_{\lambda}$
 $(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \mathcal{A}x = \mathcal{A} \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} x}_{=0} \in K_{\lambda} = 0$
 $\xrightarrow[\text{перестановочны}]{\nearrow} \Rightarrow \mathcal{A}x \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}$
2. $(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \mathcal{P}_{\lambda} = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} f_{\lambda}(\mathcal{A}) \phi_{\lambda}(\mathcal{A}) =$
 $= f_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \phi_{\lambda}(\mathcal{A})}_{\phi(\mathcal{A})} = 0$

$\forall x \in V$

$$(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \underbrace{\mathcal{P}_{\lambda} x}_{\in \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}} = 0 \Rightarrow \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda} \subseteq \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} = K_{\lambda}$$

Обратно: $K_{\lambda} \xrightarrow{?} \subseteq \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}$

$x \in K_{\lambda}$

$$\mu \neq \lambda \quad \mathcal{P}_{\mu} x = f_{\mu}(\mathcal{A}) \phi_{\mu}(\mathcal{A}) x = \eta(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} x}_{=0} = 0$$

$$\xrightarrow[\text{содержит } (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}]{\nearrow} \underbrace{\eta(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}}_{\in \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}}$$

$$x = \mathcal{E}x = \sum_{\substack{\mu \\ \mu \neq \lambda}} \mathcal{P}_{\mu} x = \mathcal{P}_{\lambda} x \in \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda} \Rightarrow K_{\lambda} \subseteq \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{K_{\lambda} = \text{Im} \mathcal{P}_{\lambda}}$$

3. $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный многочлен для $\mathcal{A}|_{K_\lambda = \text{Im } \mathcal{P}_\lambda}$?

$(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}$ аннулятор $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$

Минимальный?

\square не минимальный

$\psi_1 = (t - \lambda)^{m(\lambda)-1}$ \square это минимальный многочлен

$\phi_1 := (t - \lambda)^{m(\lambda)-1} \phi_\lambda(t) =$ аннулятор \mathcal{A} ?

$$\phi_1(\mathcal{A}) \mathcal{P}_\mu = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)-1} \phi_\lambda(\mathcal{A}) f_\mu(\mathcal{A}) \phi_\mu(\mathcal{A}) =$$

$$= \dots \phi_\lambda(\mathcal{A}) \phi_\mu(\mathcal{A}) = \eta(\mathcal{A}) \cdot \phi(\mathcal{A}) = 0$$

$$\forall x \phi_1(\mathcal{A}) \mathcal{P}_\lambda x = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)-1} \phi_\lambda(\mathcal{A}) \mathcal{P}_\lambda x =$$

$$= \phi_\lambda(\mathcal{A}) \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)-1}}_{\psi_1(\mathcal{A})} \underbrace{\mathcal{P}_\lambda x}_{\in \text{Im } \mathcal{P}_\lambda = K_\lambda} = 0$$

$\underbrace{\psi_1(\mathcal{A}) \mathcal{P}_\lambda x}_{\psi_1(\mathcal{A}|_{K_\lambda})x}$
мин. многочлен по предположению

$$\phi_1(\mathcal{A}) \mathcal{P}_\lambda = 0$$

$$\phi_1(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{E} = \phi_1(\mathcal{A}) \sum_{\mu} \mathcal{P}_\mu = 0$$

$\underbrace{\phi_1(\mathcal{A}) \mathcal{P}_\lambda + \sum_{\mu \neq \lambda} \phi_1(\mathcal{A}) \mathcal{P}_\mu}_{\phi_1(\mathcal{A}) \mathcal{P}_\lambda + \sum_{\mu \neq \lambda} \phi_1(\mathcal{A}) \mathcal{P}_\mu}$

$\Rightarrow \phi_1$ аннулятор \mathcal{A} , но степени $< \phi$

$\deg \phi_1 = m - 1 \Rightarrow$ противоречие мин. $\phi \Rightarrow (t - \lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный мн-н $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$

\square

Следствие 1. \mathcal{A} о.п.с. $\Leftrightarrow \forall \lambda : m(\lambda) = 1$

Доказательство. (\Rightarrow) \mathcal{A} о.п.с.

$\phi(t) \prod_{\lambda} (t - \lambda)$ покажем что это минимальный многочлен \mathcal{A}

$V = \bigoplus_{\lambda} V_\lambda$ – собственные подпространства \mathcal{A}

$$\forall v \in V \exists! v = \sum_{\lambda} v_\lambda, v_\lambda \in V_\lambda$$

$$\phi(\mathcal{A})v = \prod_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \sum_{\mu} v_\mu =$$

$$= \sum_{\mu} \prod_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) v_\mu = \sum_{\mu} \phi_\mu(\mathcal{A}) \underbrace{(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E}) v_\mu}_{\parallel 0} = 0$$

$\underbrace{\phi_\mu(\mathcal{A}) \cdot (\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})}_{\phi_\mu(\mathcal{A}) \cdot (\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})}$

$$v_\mu \in V_\mu = \text{Ker}(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E}) \nearrow$$

$\Rightarrow \phi$ аннулятор $\mathcal{A} \Rightarrow$ очевидно минимальная степень \Rightarrow минимальный многочлен.

$(\Leftarrow) \forall \lambda : m(\lambda) = 1$

$$K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^1 = V_\lambda$$

$$\parallel$$

$$V = \bigoplus_{\lambda} K_\lambda = \bigoplus_{\lambda} V_\lambda \Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ о.п.с.}$$

\square

Примеры.

$$\text{Im } \mathcal{P}_1 = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})^2 = K_{\lambda_1}$$

$$\text{Im } \mathcal{P}_2 = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{E})^2 = K_{\lambda_2} \quad \text{— упр.}$$

7.9 Нильпотентный оператор. Разложение Жордана

Определение 1. $\mathcal{B} \in \text{End}(V)$ называется **нильпотентным**, если $\phi(t) = t^\nu$

Минимальный многочлен \mathcal{B} , т.е. $\mathcal{B}^\nu = 0$

ν – индекс нильпотентности (мин. степень $\mathcal{B}^\nu = 0$)

$$\mathcal{P}_\lambda^2 = \mathcal{P}_\lambda$$

Идемпотентность

Степень минимального многочлена $\rightarrow \nu \leq \dim V = n$
 \uparrow
степень χ

Утверждение. $\forall \lambda : m(\lambda) \leq \dim V_\lambda$

Доказательство. $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный мн-н $\mathcal{A}|_{K_\lambda}$

$$\mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})|_{K_\lambda} \Rightarrow \mathcal{B}_\lambda^{m(\lambda)} = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)}|_{K_\lambda} = 0$$

$\Rightarrow m(\lambda)$ индекс нильпотентности $\mathcal{B}_\lambda \in \text{End}(K_\lambda)$

$$m(\lambda) \leq \dim K_\lambda$$

□

Замечание. $\underbrace{\sum_\lambda m(\lambda)}_{\deg \phi} \leq \sum_{\deg \chi} \dim K_\lambda = n$

$$\bigoplus_\lambda K_\lambda = V$$

Теорема 1 (Разложение Жордана).

$\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$ можно представить в виде:

$\mathcal{A} : \mathcal{D} + \mathcal{B}$, где \mathcal{D} о.п.с.

\mathcal{B} нильпотентный, причем $\mathcal{B}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{B}$ перестановочны

Доказательство. ϕ – минимальный многочлен \mathcal{A}

$\mathcal{E} = \sum \mathcal{P}_\lambda$ операторн. разложение единицы

$$\mathcal{D} := \sum_\lambda \lambda \mathcal{P}_\lambda \quad \mathcal{D} \text{ о.п.с.}?$$

$$V = \bigoplus_\lambda \text{Im } \mathcal{P}_\lambda$$

$$\square v_\lambda \neq 0 \in \text{Im } \mathcal{P}_\lambda$$

$$0 \mu \neq \lambda$$

$$\parallel$$

$$\underline{\underline{Dv_\lambda}} = \left(\sum_\mu \mu \mathcal{P}_\mu \right) v_\lambda = \sum_\mu \mu (\mathcal{P}_\mu v_\lambda) = \lambda \mathcal{P}_\lambda v_\lambda = \underline{\underline{\lambda \cdot v_\lambda}}$$

$$\mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_\lambda = 0$$

$$\lambda \neq \mu$$

$\Rightarrow \lambda$ с.ч. \mathcal{D} , v_λ соотв. с.в. \mathcal{D}

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Im } \mathcal{P}_\lambda \subseteq V_\lambda^{\mathcal{D}} \text{ собств. подпр-во } \mathcal{D}, \text{ отвечающ. с.ч. } \lambda \\ V = \bigoplus_\lambda \text{Im } \mathcal{P}_\lambda \text{ дизъюнкты} \end{array} \right] \Rightarrow \text{Im } \mathcal{P}_\lambda = V_\lambda^{\mathcal{D}}$$

Объединение базисов $\text{Im } \mathcal{P}_\lambda =$ базис V

Каждый вектор из $\text{Im } \mathcal{P}_\lambda$ – это с.в. \mathcal{D}

\Rightarrow у V есть базис из с.в. $\Leftrightarrow \mathcal{D}$ о.п.с.

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} - \mathcal{D} = \mathcal{A}\mathcal{E} - \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_{\lambda} = \mathcal{A} \sum_{\lambda} \mathcal{P}_{\lambda} - \sum_{\lambda} \lambda \mathcal{P}_{\lambda} = \sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \mathcal{P}_{\lambda}$$

$$\nu = \max_{\lambda} m(\lambda) \quad \phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$$

$$\mathcal{B}^{\nu} = (\sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \mathcal{P}_{\lambda})^{\nu} = \sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{\nu} \mathcal{P}_{\lambda} =$$

$$\mathcal{P}_{\lambda} \mathcal{P}_{\mu} = \mathbb{O}$$

$$\lambda \neq \mu$$

$$\mathcal{P}_{\lambda}^2 = \mathcal{P}_{\lambda}$$

$$= \sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{\nu} \underbrace{f_{\lambda}(\mathcal{A}) \phi_{\lambda}(\mathcal{A})}_{\mathcal{P}_{\lambda}} =$$

все операторы перестановочны

$$\sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{\nu-m(\lambda)} f_{\lambda}(\mathcal{A}) \cdot \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} \phi_{\lambda}(\mathcal{A})}_{\phi(\mathcal{A})=0} = 0$$

\mathcal{B} НИЛЬПОТЕНТ

$$\mathcal{B} = \sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \mathcal{P}_{\lambda}$$

перестановочны

$$\mathcal{D} = \sum_{\mu} \mu \mathcal{P}_{\mu}$$

$$\mathcal{D}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{D}$$

□

Замечание.

$$1. \mathcal{B} = \sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \mathcal{P}_{\lambda} = \sum_{\lambda} \mathcal{B}_{\lambda}$$

$$\mathcal{B}_{\lambda} = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})|_{Im \mathcal{P}_{\lambda} = K_{\lambda}}$$

2. $\mathcal{A}, \mathcal{D}, \mathcal{B}$ все три оператора взаимно-перестановочны

$$\mathcal{A}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{A}$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$$

Примеры.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 5 & -7 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 3 \end{matrix} \quad \mathcal{D} = -1\mathcal{P}_1 + 3\mathcal{P}_2$$

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 8 & -9 & 8 \\ 8 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = A - D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nu = \max_{\lambda_{1,2}} m(\lambda) = 2$$

$$B^2 \stackrel{?}{=} 0 \quad B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \underset{\text{Разложение Жордана}}{=} \underset{\text{Диагонализ.}}{\begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 8 & -9 & 8 \\ 8 & -8 & 7 \end{pmatrix}} + \underset{\text{Нильпотент.}}{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Теорема 2 (Единственность разложения Жордана).

Разложение Жордана определяется единственным образом. (Рис. 1)



Рис. 1

Доказательство. $\square \mathcal{A} = \underset{\text{о.п.с.}}{\mathcal{D}'} + \underset{\text{Нильпотент}}{\mathcal{C}} \quad \mathcal{D}'\mathcal{C} = \mathcal{C}\mathcal{D}'$

Т.к. \mathcal{D}' о.п.с., то $\mathcal{D}' = \sum_{\mu \in M} \mu Q_\mu$

M – множество с.ч. \mathcal{D}'

Q_μ спектральные проекторы

$$Q_\mu : V \rightarrow V_\mu^\nu$$

$$\sum_\mu Q_\mu = \mathcal{E}$$

Достаточно доказать: $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$

1. Множество M совпадает с множеством корней ϕ – минимальн. мн-н \mathcal{A}

$$\{\mu\} = \{\lambda\}$$

2. $Im Q_\mu = K_\mu \leftarrow$ корневое подпространство \mathcal{A} , отвеч. с.ч. μ ($Im \mathcal{P}_\lambda = K_\lambda$)

1. $(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})Q_\mu = (\sum_\nu \nu Q_\nu + \mathcal{C} - \mu \sum_\nu Q_\nu)Q_\mu = \mathcal{C}Q_\mu$

$$Q_\nu Q_\mu = 0 \quad Q_\mu^2 = Q_\mu$$

$\nu \neq \mu$

$$(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^k Q_\mu = \mathcal{C}^k Q_\mu$$

\uparrow

Верно, если $\mathcal{C}Q_\mu = Q_\mu \mathcal{C}$

$$\Rightarrow \text{докажем: } \mathcal{C}Q_\mu = Q_\mu \mathcal{C}$$

$$\square \lambda \neq \mu \quad (\lambda - \mu)Q_\lambda \mathcal{C}Q_\mu = \underbrace{(\lambda Q_\lambda) \mathcal{C}Q_\mu}_{Q_\lambda \mathcal{D}'} - Q_\lambda \mathcal{C} \underbrace{(\mu Q_\mu)}_{\mathcal{D}'Q_\mu} =$$

$$\mathcal{D}'Q_\mu = \sum_\lambda Q_\lambda Q_\mu = \mu Q_\mu = Q_\mu \mathcal{D}'$$

$$Q_\lambda (\mathcal{D}'\mathcal{C} - \mathcal{C}\mathcal{D}')Q_\mu = 0$$

\parallel
 0

$$\lambda \neq \mu \quad Q_\lambda \mathcal{C} Q_\mu = \mathbb{0} = Q_\mu \mathcal{C} Q_\lambda$$

$$\underbrace{\sum_{\lambda} Q_\lambda \mathcal{C} Q_\mu}_{\mathcal{E}} = Q_\lambda \mathcal{C} Q_\lambda = \underbrace{\sum_{\lambda} Q_\mu \mathcal{C} Q_\lambda}_{\mathcal{E}}$$

$$\boxed{\mathcal{C} Q_\mu = Q_\mu \mathcal{C}}$$

$$\Rightarrow (\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^k Q_\mu = \mathcal{C}^k Q_\mu$$

$$k(\mu) = \min K, \text{ такой что } \mathcal{C}^k Q_\mu = \mathbb{0}$$

Такое $K(\mu)$ обязательно найдется, т.к. \mathcal{C} – нильпотент.

$$(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu = \mathbb{0}$$

$(t - \mu)^{k(\mu)}$ – минимальный аннулятор элементов $Im Q_\mu$

$$Im Q_\mu \subseteq Ker(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{k(\mu)}$$

ϕ минимальный многочлен $\mathcal{A} \Rightarrow \phi(\mathcal{A})$ аннулирует любые элементы V ,

в частности элементы $Im Q_\mu$

Т.е. $\phi(t)$ аннулятор элементов $Im Q_\mu \Rightarrow \phi(t) : (t - \mu)^{k(\mu)} \leftarrow$ минимальный аннулятор для $Im Q_\mu$

\Rightarrow верно $\forall \mu \in M$

$$\psi(t) = \prod_{\mu \in M} (t - \mu)^{k(\mu)}$$

$$\Rightarrow \phi : \psi$$

Покажем, что ψ аннулятор \mathcal{A}

$$\psi(\mathcal{A}) = \psi(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{E} = \psi(\mathcal{A}) \sum_{\mu \in M} Q_\mu = \sum_{\mu \in M} \prod_{\substack{\nu \in M \\ \text{перестановочны}}} (\mathcal{A} - \nu \mathcal{E})^{k(\nu)} Q_\mu =$$

$$\sum_{\mu \in M} \prod_{\nu \neq \mu} (\mathcal{A} - \nu \mathcal{E})^{k(\nu)} \underbrace{(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu}_{\mathbb{0}} = \mathbb{0}$$

$\Rightarrow \psi$ аннулятор $\mathcal{A} \Rightarrow \psi : \phi$ минимальный аннулятор

$\Rightarrow \psi \equiv \phi \Rightarrow \{\mu \in M\} = \{\lambda - \text{корни } \phi\}$

$$K(\mu) = m(\lambda)$$

$$\mu = \lambda$$

$$2. \quad (\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{k(\mu)} Q_\mu = \mathbb{0}$$

$$\parallel$$

$$(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{m(\mu)} Q_\mu = \mathbb{0}$$

μ корень ϕ

$$Im Q_\mu \subseteq Ker(\mathcal{A} - \mu \mathcal{E})^{m(\mu)} = \underbrace{K_\mu}_{\text{Корневое подпр-во}} = Im \mathcal{P}_\mu$$

$$\left. \begin{aligned} \bigoplus_{\mu} K_\mu &= V \\ \bigoplus_{\mu} Im Q_\mu &= V \end{aligned} \right\} \Rightarrow Im Q_\mu = K_\mu \Rightarrow \mathcal{D}' = \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{B}$$

□

Теорема 3. $\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$ разложение Жордана

$$\Rightarrow \chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{D}}(t)$$

Доказательство. $(\chi_{\mathcal{A}}(t))^k = (\det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}))^k = \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E})^k$

$$\mathcal{B}^\nu = \mathbb{O}$$

$$\mu - \text{не корень} \quad (\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^\nu = \det((\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^\nu - \underbrace{(t\mathcal{B})^\nu}_{\parallel \mathbb{O}}) =$$

не зависит от t

$$= \det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E} - t\mathcal{B}) \cdot \det((\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-2}t\mathcal{B} + \dots + (\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})(t\mathcal{B})^{\nu-2} + (t\mathcal{B})^{\nu-1})$$

$t=1$ $t=0$

μ — не корень

$$(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^\nu = \det(\underbrace{\underbrace{[\mathcal{A}] - \mu\mathcal{E}[-\mathcal{B}]}_{\parallel \mathbb{O}}}_{\mathcal{D}}) \cdot \det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})^{\nu-1} =$$

$$= \underbrace{\det(\mathcal{D} - \mu\mathcal{E})}_{\chi_{\mathcal{D}}(\mu)} \underbrace{(\det(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E}))^{\nu-1}}_{(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^{\nu-1}}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(\mu) = \chi_{\mathcal{D}}(\mu)$$

□

Следствие 1. Если $\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$ разложение Жордана

$$\text{То } \det \mathcal{A} = \det \mathcal{D}$$

Доказательство. Очевидно, $\chi_{\mathcal{A}}(0) = \chi_{\mathcal{D}}(0)$

□

Следствие 2. $\boxed{\dim K_\lambda = \alpha(\lambda)}$

Доказательство. $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{D}}(t) \Rightarrow \alpha(\lambda) = \alpha^{\mathcal{D}}(\lambda) \underset{\text{о.п.с.}}{=} \gamma^{\mathcal{D}}(\lambda) = \dim \mathcal{P}_\lambda = \dim K_\lambda$

$$\forall \lambda \text{ корня } \chi \text{ с.ч. (I, II)}$$

□

7.10 Жорданова форма матрицы, Жорданов базис

$$V = \bigoplus_{\lambda \text{ с.ч.}} K_\lambda \text{ корневые} \quad \dim K_\lambda = \alpha(\lambda)$$

$$\chi(t) = \prod_{\lambda \text{ с.ч.}} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)} \quad \lambda \in K \text{ все корни с.ч.}$$

$$\phi(t) = \prod_{\lambda \text{ с.ч.}} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$$

$$V_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \quad \gamma(\lambda) = \dim V_\lambda$$

$$\bigcap$$

$$K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m(\lambda)}$$

$$\forall \lambda \ K_\lambda \rightsquigarrow \begin{array}{l} \text{строим базис} \\ \bigcup_{\lambda} \text{Жорданов базис} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{l} \text{матрица оператора будет иметь} \\ \text{блочно-диагональную структуру} \\ \text{— Жорданова форма матрицы} \end{array}$$

$$\sqsubset K_\lambda = K \quad \gamma(\lambda) = \gamma$$

$$\alpha(\lambda) = \alpha \quad m(\lambda) = m$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})|_{K_\lambda} \quad \dim = \gamma$$

$$K_1 = V_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})$$

$$\bigcap$$

$$K_2 = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^2$$

$$\vdots$$

$$\bigcap$$

$$K_m = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^m = K_\lambda = K \quad \dim = \alpha$$

Пример.

$$\alpha = \dim K_\lambda = \dim K_5 = 24$$

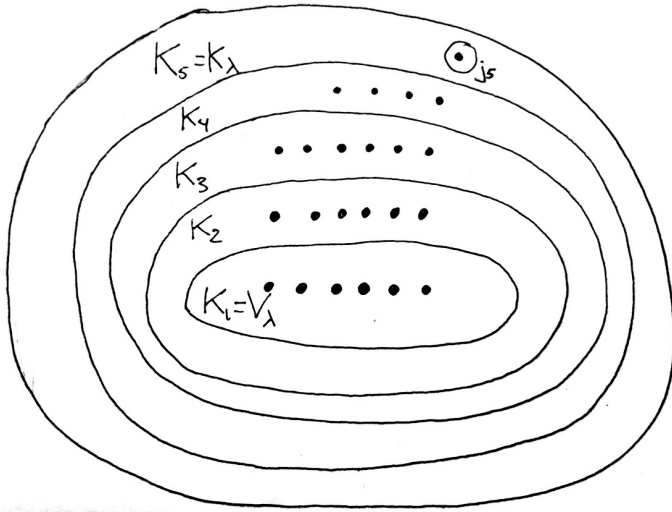
$$m = 5$$

$$\gamma = 7$$

Циклический базис

$$\begin{aligned} j_5 &\in K_5 \setminus K_4 \\ j_4 &= \mathcal{B}j_5 = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})j_5 \in K_4 \\ j_3 &= \mathcal{B}j_4 = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})j_4 \in K_3 \\ j_2 &= \mathcal{B}j_3 = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})j_3 \in K_2 \\ j_1 &= \mathcal{B}j_2 = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})j_2 \in K_1 = V_\lambda \end{aligned}$$

j_1, j_2, j_3, j_4 – присоединенные вектора.



$$j_r = \mathcal{B}j_{r+1}$$

$$j_{r+1} \in K_{r+1} = \text{Ker} \mathcal{B}^{r+1} = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{r+1}$$

$$\mathcal{B}^r j_r = \mathcal{B}^r \mathcal{B}j_{r+1} = \mathcal{B}^{r+1} j_{r+1} = 0$$

$$\Rightarrow j_r \in K_r = \text{Ker} \mathcal{B}^r$$

$$L = \text{span}(j_1 \ j_2 \ j_3 \ j_4 \ j_5)$$

$$\mathcal{A}|_L$$

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\updownarrow$$

$$\mathcal{A}j_1 = \lambda j_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\updownarrow$$

$$\mathcal{A}j_2 = j_1 + \lambda j_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\updownarrow$$

$$\mathcal{A}j_3 = j_2 + \lambda j_3$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\updownarrow$$

$$\mathcal{A}j_4 = j_3 + \lambda j_4$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$\updownarrow$$

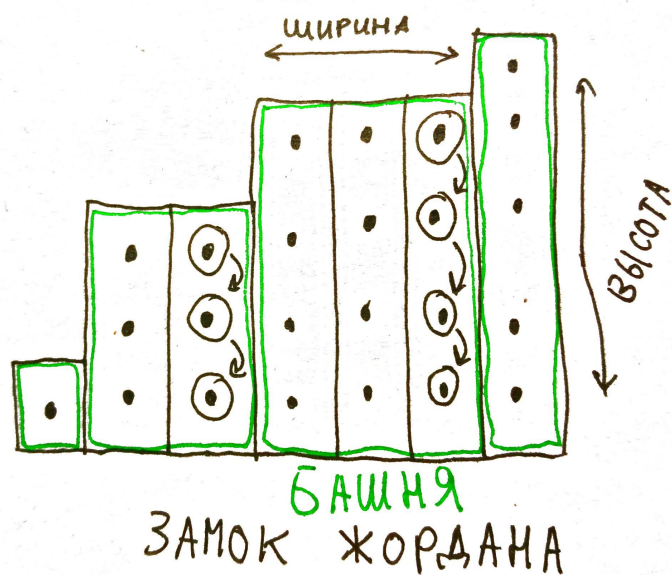
$$\mathcal{A}j_5 = j_4 + \lambda j_5$$

Матрица $\mathcal{A}|_L$ в базисе $j = A_j =$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Клетка Жордана 5×5
(блок нижнего уровня)

$$(j_5 \ j_4 \ j_3 \ j_2 \ j_1) \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$



Башня – циклическое объединение базисов одной длины.

Высота башни – количество векторов в базисе.

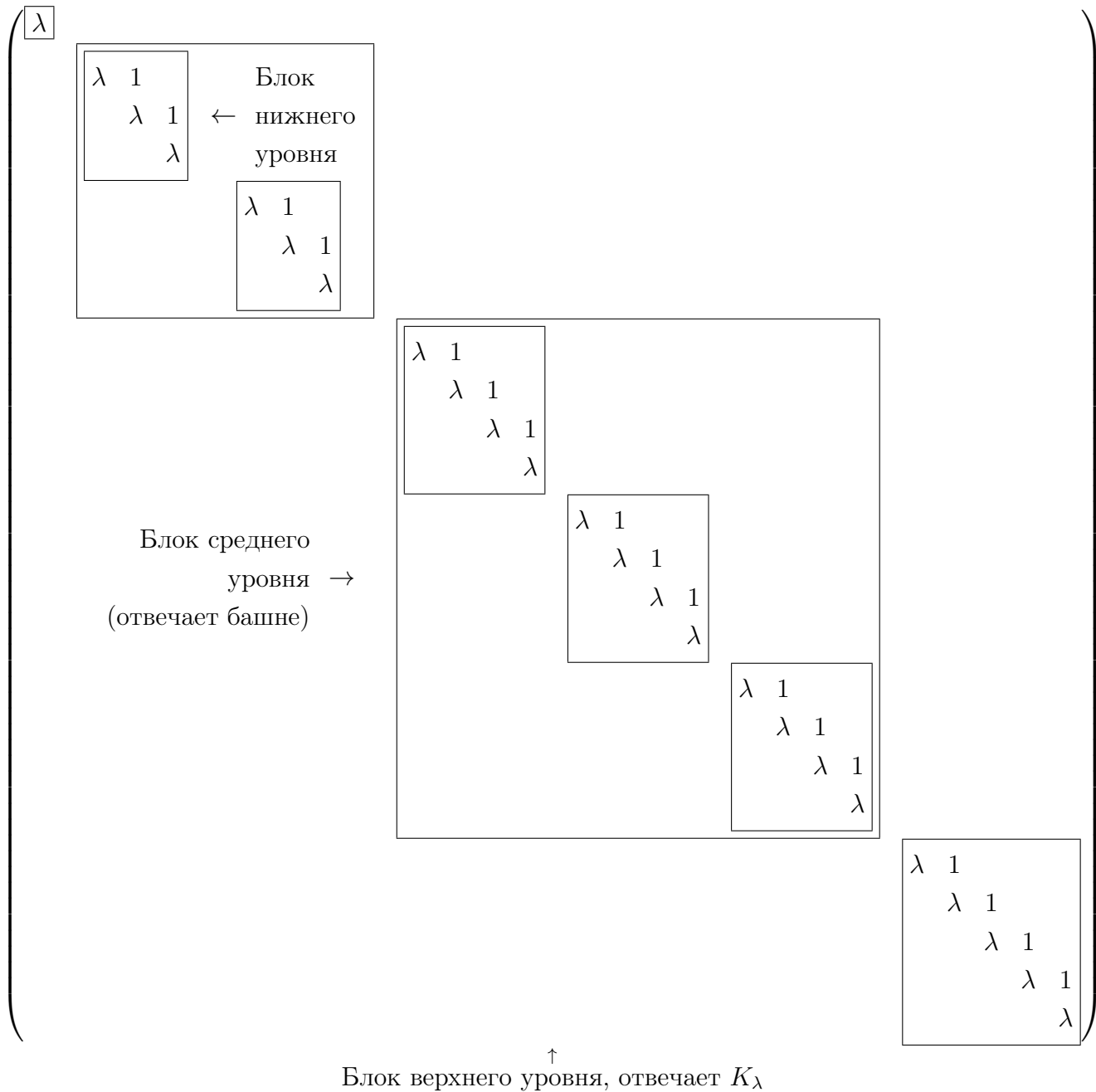
Ширина башни – число циклических базисов одной размерности

Основания каждой башни в собственном подпространстве

Число циклических базисов = γ

||

Число Жордановых клеток



γ = Число блоков нижнего уровня

α = Число λ на диагонали

\mathcal{A} о.п.с. $\forall \alpha = \gamma$

V_λ · · · · ·

"Деревня Жордана"

Примеры. $\lambda \ \alpha(\lambda) = 4$

$$1. \ \gamma(\lambda) = 3 \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\lambda} \end{array} \right)$$

$$2. \gamma(\lambda) = 2 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix}} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix}} & & \\ 0 & & & \boxed{\lambda} \end{array} \right) \quad \text{или} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix}} & & & 0 \\ & 0 & & \boxed{\lambda} \end{array} \right)$$

$$3. \gamma(\lambda) = 1 \quad \left(\begin{array}{cccc} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\mathcal{J} \quad T = (\dots j_1 \dots j_5 \dots)$$

Объединение цикл. базисов для всех λ

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \leftrightarrow & \mathcal{J} \\ & & \text{В Жорд. базисе} \\ \updownarrow & & \\ \mathcal{A} & & \\ \text{В исходном} & & \end{array}$$

$$\boxed{\mathcal{J} = T^{-1}AT}$$

$$\boxed{\text{Если известна } \mathcal{J}} \rightarrow T\mathcal{J} = AT$$

1, 3

Решить матричную систему относительно неизвестной матрицы $T \rightsquigarrow T$
 \rightsquigarrow построить Жорданов базис.

2 Алгоритма построения Жордановой формы и Жорданового базиса

- | I | II |
|---|---|
| 1. Найдем $\chi(t) \rightsquigarrow \alpha(\lambda)$ | 1. Найдем $\phi(t) \rightsquigarrow m(\lambda)$ |
| 2. $V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset \underset{\dim K = \alpha}{K}$ | 2. $V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_m = \text{Ker}(A - \lambda E)^{m(\lambda)}$
$\Rightarrow \dim K_m = \alpha(\lambda)$ |
| $K_r = \text{Ker}(A - \lambda E)^2$
$\Rightarrow K = \underset{\text{Корневое}}{K_m} \quad m = m(\lambda)$ | 3. Строим Жорданов базис по алгоритму |
| 3. Строим Жорданов базис по алгоритму | |

Теперь обоснуем

$$\forall \lambda \quad K = K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m(\lambda)} = K_m$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})|_{K_\lambda}$$

$$m(\lambda) = m$$

$$\alpha(\lambda) = \alpha$$

$$K_r = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^r \quad r = 1 \dots m$$

$$V_\lambda = K_1$$

$$V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots \subset K_m = K_\lambda = K$$

Все включения будут строгие:

$$\supset K_{r+1} = K_r \quad \text{Ker} \mathcal{B}^{r+1} = \text{Ker} \mathcal{B}^3$$

$$\text{По Теореме о } rg \text{ и } def: \dim K = rg \mathcal{B}^{r+1} + \underline{def} \mathcal{B}^{r+1} = rg \mathcal{B}^r + \underline{def} \mathcal{B}^r \quad (def \mathcal{B}^{r+1} = def \mathcal{B}^r)$$

$$rg\mathcal{B}^{r+1} = rg\mathcal{B}$$

$$Im\mathcal{B}^{r+1} \subseteq Im\mathcal{B}^r$$

$$Im\mathcal{B}^{r+1} = Im\mathcal{B}^r \rightarrow 0 = def\mathcal{B} = dimV_\lambda \neq 0 \text{ Противоречие}$$

$$\parallel \nearrow \\ Im(\mathcal{B}(\mathcal{B}^r)) = Im\mathcal{B}^r \xrightarrow{\text{либо}} \mathcal{B}^r = \mathbb{O} - \text{противоречие мин. } m$$

$$Im\mathcal{B} =: BK$$

$$Z_0 = BK$$

$$Z_r = BK + K_r$$

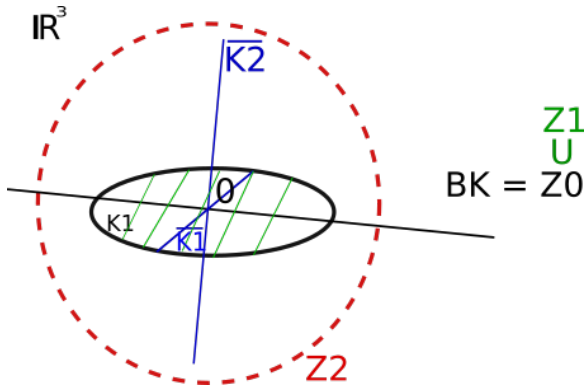
$$r = 1, \dots, m \quad (K_m = K) \quad B: K \rightarrow K$$

$$BK = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \dots \subseteq Z_m = K$$

$$Z_r = Z_{r-1} \oplus \overline{K_r}$$

$$\overline{K_r} \subset K_r$$

$$K = \underbrace{BK \oplus \overline{K_1}}_{Z_1} \oplus \underbrace{\overline{K_2}}_{Z_2} \oplus \dots \oplus \overline{K_m}$$



$$\begin{array}{cc} K_1 \subset K_3 \\ \dim 2 & \dim 3 \\ \dim K_1 + \dim BK = 3 \\ \parallel_{def \mathcal{B}} & \parallel_{\dim Im \mathcal{B}} \end{array}$$

$$Z_1 = BK + K_1 \supset Z_0$$

$$\cap$$

$$Z_2 = BK + K_2$$

$$K = \overline{K_1} \oplus \overline{K_2} \oplus BK$$

Теорема 1. $0 \leq r \leq m - 1$

$$B^r K = B^r \overline{K}_{r+1} \oplus B^r \overline{K}_{r+2} \oplus \dots \oplus B^r \overline{K}_m \oplus B^{r+1} K$$

Доказательство.

$$K = \overline{K_1} \oplus \overline{K_2} \oplus \dots \oplus \overline{K_m} \oplus BK$$

$$\forall x \in K \quad x = \underbrace{x_1}_{\in \overline{K_1}} + \underbrace{x_2}_{\in \overline{K_2}} + \dots + \underbrace{x_m}_{\in \overline{K_m}} + \underbrace{Bx^*}_{\in BK}$$

$$1 \leq r \leq m - 1$$

$$B^r x = B^r x_1 + B^r x_2 + \dots + B^r x_r + B^r x_{r+1} + \dots + B^r x_m + B^{r+1} x^* \boxed{=}$$

$$B^r x_j = B^{r-j} B^j x_j = \mathbb{O}$$

$$1 \leq j \leq r \quad x_j \in \overline{K}_j \subseteq K_j = \text{Ker} B^j = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^j|_{K_\lambda}$$

$$\boxed{\equiv} B^r x_{r+1} + \dots + B^r x_m + B^{r+1} x^*$$

Дизъюнктность?

$$* B^r x_{r+1} + B^r x_{r+2} + \dots + B^r x_m + B^{r+1} x^* = 0$$

$$B^r (\underbrace{x_{r+1} + x_{r+2} + \dots + x_m + Bx^*}_y) = 0$$

$$y \in \text{Ker} B^r = K_r \subseteq Z_r = \overline{K}_1 \oplus \dots \oplus \overline{K}_r \oplus BK$$

$$\Rightarrow \quad y = x_1 + x_2 + \dots + x_r + \quad B \quad x^{**}$$

Однозначно

$$x_i \in \overline{K}_i$$

представим

||

$$x_{r+1} + x_{r+2} + \dots + x_m + Bx^* \Rightarrow \boxed{x_i = 0} * \\ x_{r+i} \in \overline{K}_{r+i} \quad \forall i = 1 \dots m$$

⇓ подставим

$$0 + 0 + \dots + 0 + B^{r+1} x^* = 0 \Rightarrow B^{r+1} x^* = 0 \Rightarrow \text{дизъюнктн.}$$

□

Следствие 1.

$$K = \underbrace{\overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m}_{\text{---}} \oplus \underline{\underline{B\overline{K}_2 \oplus B\overline{K}_3 \oplus \dots \oplus B\overline{K}_m}} \oplus$$

$$\oplus \underline{\underline{B^2\overline{K}_3 \oplus B^2\overline{K}_4 \oplus \dots \oplus B^{m-2}\overline{K}_{m-1} \oplus B^{m-2}\overline{K}_m \oplus B^{m-1}\overline{K}_m}}$$

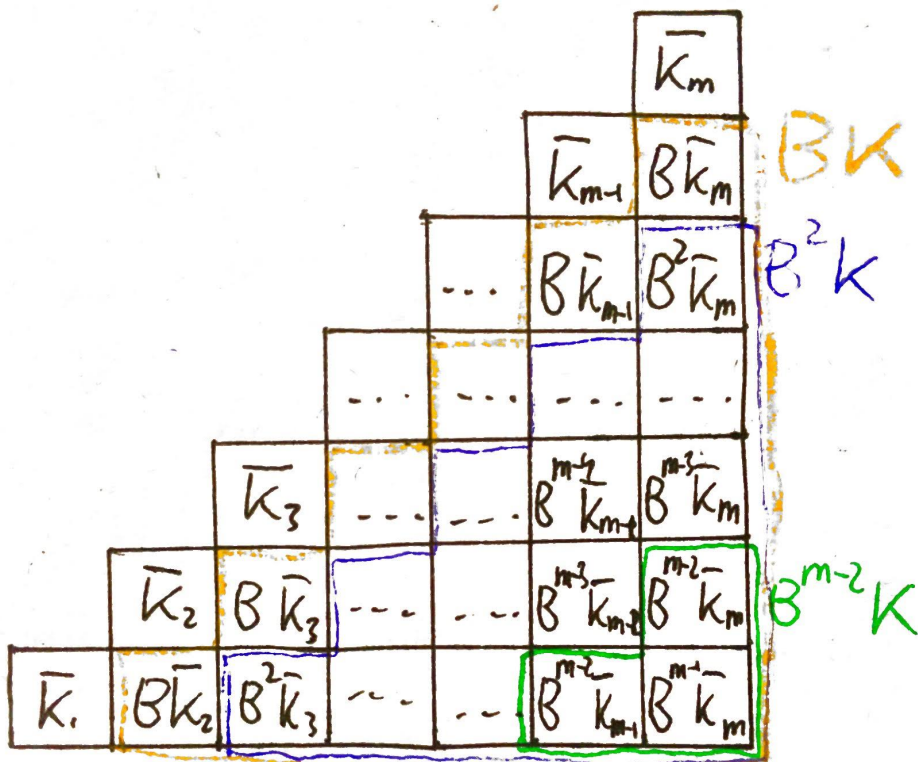
Доказательство.

$$K = \underbrace{\overline{K}_1 \oplus \overline{K}_2 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m}_{\text{---}} \oplus BK$$

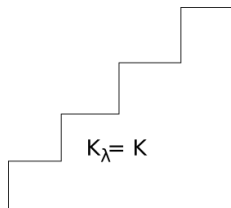
$$BK = \underline{\underline{B\overline{K}_2 \oplus \dots \oplus B\overline{K}_m}} \oplus B^2K$$

$$B^2K = \underline{\underline{B^2\overline{K}_3 \oplus B^2\overline{K}_4 \oplus \dots \oplus B^2\overline{K}_m}} \oplus B^3K$$

□



\bar{K}_j – Опорные подпространства



$$1 \leq r \leq m$$

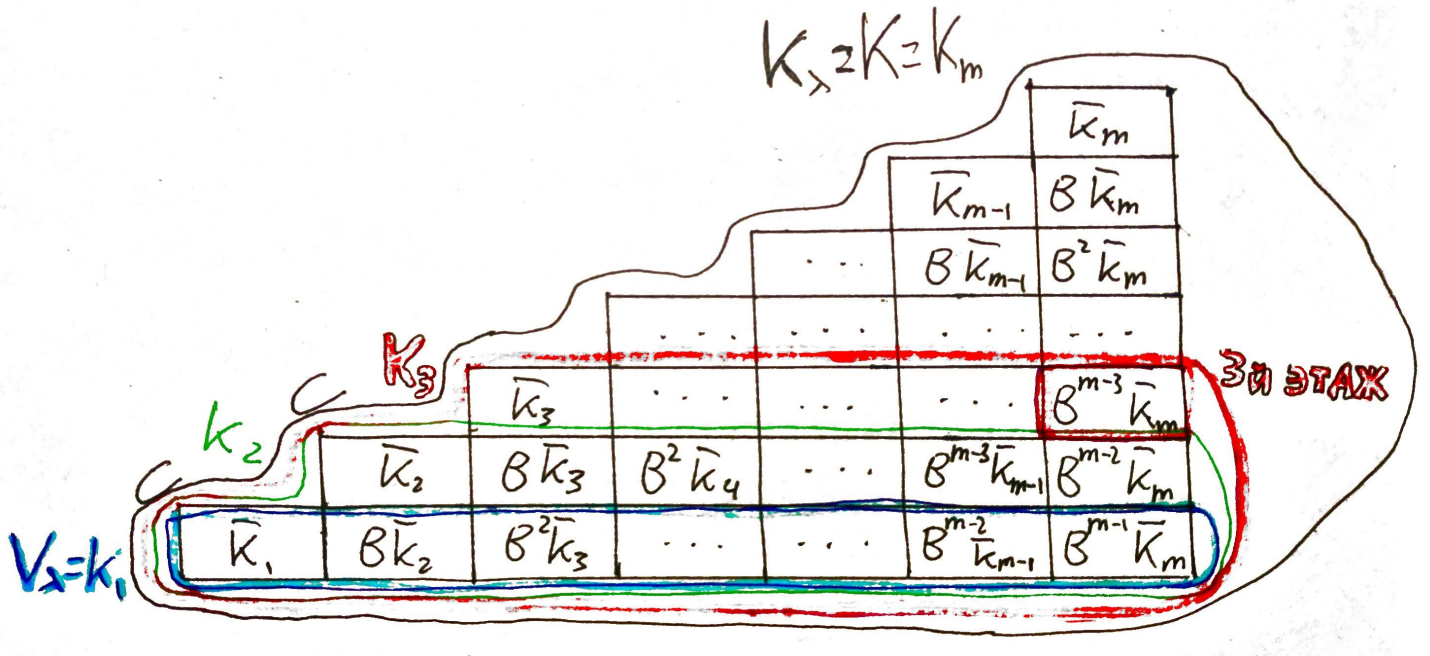
$$\text{Если } \bar{K}_r \neq \emptyset \longrightarrow \tau_r = \bar{K}_r \oplus B\bar{K}_r \oplus B^2\bar{K}_r \oplus \dots \oplus B^{r-1}\bar{K}_r$$

Башня высоты r . "Башня растет вниз"

"Основание" башни \equiv опорное подпространство \bar{K}_r

"Крыша" башни $\equiv B^{r-1}\bar{K}_r \subset V_\lambda$

$$x \in B^{r-1}\bar{K}_r \quad \begin{array}{l} x = B^{r-1}y \\ y \in \bar{K}_r \subseteq K_r \end{array} \quad \underline{Bx = B^r y = 0} \quad x \in \text{Ker } B = V_\lambda$$



Если $K_r = \{0\}$, то башня высоты r отсутствует. (См. пример, нет башни высоты 2)

$$1 \leq l \leq m$$

$$\bar{K}_l, B\bar{K}_{l+1}, B^2\bar{K}_{l+2}, \dots, B^{m-1}\bar{K}_m \subset K_l = \text{Ker } B^l$$

– l -ые этажи соотв. башен

Покажем: $B^j\bar{K}_{l+j} \subset K_l$

$$B^l(B^j\bar{K}_{l+j}) = (B^{l+j}) \bar{K}_{l+j} \underset{\subset K_{l+j} = \text{Ker } B^{l+j}}{=} 0 \Rightarrow B^j\bar{K}_{l+j} \subset K_l$$

$$K = \bigoplus_{r=1}^m \tau_r$$

Теорема 2 (О размерности башни).

$\forall \tau_r$ любой этаж башни имеет одну и ту же размерность $d_r = \dim \bar{K}_r =$ ширина башни.

$$r \text{ высота} \updownarrow \begin{array}{|c|} \hline \bar{K}_r \\ \hline B\bar{K}_r \\ \hline B^2\bar{K}_r \\ \hline \dots \\ \hline B^{r-1}\bar{K}_r \\ \hline \end{array} \quad \boxed{d_r = \dim \bar{K}_r} = \text{ширина башни}$$

τ_r

Доказательство.

$$B^j|_{\bar{K}_r} : \bar{K}_r \rightarrow B^j\bar{K}_r$$

$B^j|_{\bar{K}_r}$ изоморфизм "?"

$\text{Ker } B^j|_{\bar{K}_r} = \{0\}$ тривиально "?"

$$\begin{array}{ccc}
x \in \overline{K}_r \subset K_r \subset Z_r & \xRightarrow{\quad} & Z_{r-1} \oplus \overline{K}_r \Rightarrow \boxed{x = 0} \\
x \in \text{Ker} B^j = K_j \rightarrow & \nearrow & \downarrow \exists x \\
& & \bigcup \\
& & K_{r-1} \\
& & \bigcup \\
& & \vdots \\
& & \bigcup \\
& & K_1
\end{array}
\quad \boxed{Z_{r-1} = BK + K_{r-1}}$$

$$\Rightarrow \text{Изоморфизм} \Rightarrow \dim(\overline{K}_r) = \dim(B^j \overline{K}_r) = d_r \quad \square$$

Следствие 1. $\sum_{r=1}^m d_r = \dim V_\lambda = \gamma(\lambda)$

$$\sum_{r=1}^m \underbrace{r \cdot d_r}_{\dim \tau_r} = \dim K_\lambda = \dim K = \alpha(\lambda)$$

Следствие 2 (Теорема Фробениуса).

$$d_r = rg B^{r-1} - 2rg B^r + rg B^{r+1}$$

$$(d_m = rg B^{r-1})$$

Доказательство.

$$B^r K = B^r \overline{K}_{r+1} \oplus B^r \overline{K}_{r+2} \oplus \dots \oplus B^r \overline{K}_m \oplus B^{r+1} K$$

$$\rho := rg B^r = d_{r+1} + d_{r+2} + \dots + d_m + \underbrace{rg B^{r+1}}_{\rho_{r+1}}$$

$$d_1 + d_2 + \dots + d_m = \rho_0 - \rho_1$$

$$d_2 + \dots + d_m = \rho_1 - \rho_2$$

$$d_3 + \dots + d_m = \rho_2 - \rho_3$$

$$d_{m-2} + d_{m-1} + d_m = \rho_{m-3} - \rho_{m-2}$$

$$d_{m-1} + d_m = \rho_{m-2} - \rho_{m-1}$$

$$d_m = \rho_{m-1}$$

$$\rho_m = 0$$

↓ −

↓ −

↓ −

↓ −

↓ −

$$\boxed{d_r = \rho_{r-1} - 2\rho_r + \rho_{r+1}} \quad \square$$