전곡고등학교 수학 멘토링 학습자료

III. 다항함수의 적분법

주하늘(고려대학교 수학과)

자료출처 : 미래엔 수학II 교과서 3장
(전곡고 김민정 선생님께 제공받았습니다.)

목 차

1 부정적분과 정적분

1.1 개요

미적분학에서는 극한을 먼저 배우고, 극한을 통해 함수와 그래프를 체계적으로 분석하고 활용하는 방법들을 공부합니다. 특히 미분과 적분은 수식으로 표현된 함수에 적용하는 분석 도구들인 것입니다.

우리는 미분을 배웠으므로, 미분이 무슨 도구였는지 되짚어 봅시다. 미분을 통해 한 점에서의 **미분계수**를 구할 수 있습니다. 그 미분계수는 함수의 해당 점에서의 '순간적인 변화율' 내지는 함수의 그래프의 '기울기'를 나타내는 지표였습니다. 또 미분계수들을 전부 모으면, 점마다 해당 점에서의 미분계수가 대응하는 함수인 **도함수**를 얻게 됩니다. 도함수를 분석함으로써 원래 함수의 증감을 관찰하여 정보를 얻을 수 있었습니다.

따라서 미분은 각 점마다 하나의 값(미분계수)을 계산하는 연산이라 할 수 있습니다. 이제 적분을 보면, 다소 상이합니다. 적분, 특히 **정적분**은, 함수가 정의되어 있는 한 구간을 받아, 하나의 값을 계산하는 연산입니다. 즉, **함수의 적분은 구간 위에서 이루어집니다**. 미분할 때는 그냥 미분한다고 하지만 적분할 때는 "$f(x)$를 a부터 b까지 적분"한다고 말하는 이유는 여기에 있습니다. 함수를 구간 위에서 적분하여 얻는 **적분값**의 의미는 다양하게 해석할 수 있습니다. 구간 위의 '함숫값의 총량' 또는 '함숫값의 평균'이 되기도 하고, 구간 내의 '함수의 그래프 아래 면적'을 나타내기도 하는 중요한 값입니다.

정적분은 앞으로 살펴볼 부정적분, 그리고 미분과 긴밀한 관계에 있으며, 그 관계를 통해 적분값을 계산해낼 수 있는 점이 이 적분 개념의 가치입니다. 다항함수의 적분을 연습하며 이 관계를 파헤쳐 보도록 합시다.

1.2 부정적분과 그 성질

함수의 부정적분을 구하는 것은 미분해서 그 함수가 되는 함수를 찾는 것, 즉 미분하기 전으로 돌아가는 것에 해당하며 다른 특별한 의미는 없습니다.

정의 1.1 원시함수

주어진 함수 $f(x)$에 대해, 다른 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$가 된다면, 즉 $F'(x) = f(x)$가 성립한다면, 함수 $F(x)$를 $f(x)$의 **원시함수** 또는 역도함수라고 합니다.

함수의 도함수를 구하는 방법은 명확히 정의되어 있습니다. 이른바 $f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$라는 규칙이 있어 도함수는 여러 개일 수 없습니다. 하지만 원시함수의 경우, 서로 다른 함수들이 동일한 도함수 $f(x)$를 가진다면 그 함수들이 전부 $f(x)$의 원시함수라고 말할 수 있습니다.

예시 1.2 원시함수의 예

두 함수 $F(x) = x^2 + 2x - 4$와 $G(x) = x^2 + 2x + 3$을 생각해 봅시다. 모두 다항함수이므로 항별로 미분하여 도함수를 구할 수 있습니다. 구해 보면 $F'(x) = G'(x) = 2x + 2$임을 확인할 수 있습니다. 따라서 $F(x)$, $G(x)$ 모두 함수 $f(x) = 2x + 2$의 원시함수가 됩니다.

함수 $f(x)$의 부정적분을 구하라는 것은 $f(x)$의 **모든** 원시함수를 찾으라는 의미입니다. 앞서 보았듯 $f(x) = 2x+2$의 원시함수에는 x^2+2x-4, x^2+2x+3이 있으며, 이외에도 상수항을 바꾸어 $x^2 + 2x$, $x^2 + 2x + 100$ 등등 많은 원

시함수를 찾을 수 있습니다. 무수히 많은 원시함수들을 어떻게 한꺼번에 모아 쓰라는 소리일까요? 다행히 방법이 있습니다. 아래 관찰을 따라가 봅시다.

두 함수 $F(x)$, $G(x)$가 모두 $f(x)$의 원시함수라고 합시다. 함수 $F(x)-G(x)$를 미분하면 $[F(x)-G(x)]' = F'(x)-G'(x) = f(x)-f(x) = 0$을 얻게 됩니다. 따라서 $F(x)-G(x)$는 도함수가 상수함수 0인 함수입니다. 그러면 $F(x)-G(x)$의 그래프를 그렸을 때 기울기가 0으로 일정해야 하고, 그래프는 가로선으로 그려집니다. 결국 $F(x)-G(x)$는 상수함수가 되어야만 합니다. $F(x)-G(x)=c$로 표현하고 식을 변형하면 $F(x)=G(x)+c$가 됩니다.

결과를 해석해 보면 다음과 같습니다. $f(x)$의 한 원시함수 $F(x)$가 구해졌을 때, 다른 원시함수 $G(x)$가 있다면 이는 반드시 $F(x)$에 상수 c를 더한 함수여야만 합니다. 역으로, $F(x)$에 임의의 상수 c를 더하더라도 그 도함수는 그대로 $f(x)$입니다. $[F(x)+c]' = F'(x)+0 = f(x)$로 확인해볼 수 있습니다. 따라서 **모든 실수 c에 대해 함수 $\mathbf{F(x)+c}$가 $\mathbf{f(x)}$의 원시함수가 되고, 이 함수들이 사실 $\mathbf{f(x)}$의 원시함수 전부입니다**.

이런 점을 포착하여 $f(x)$의 부정적분을 구할 때 우리는 모든 원시함수를 하나하나 쓰는 대신, 한 원시함수 $F(x)$를 찾은 뒤 $F(x)+C$라는 표현을 통해 모든 원시함수를 동시에 나타내기로 약속합니다.

정의 1.3 부정적분의 표현

$f(x)$의 한 원시함수가 $F(x)$일 때, $f(x)$의 부정적분을 구하면 $F(x)+C$입니다. 이를 식으로 $\displaystyle\int f(x)dx = F(x)+C$라고 표현합니다. $\displaystyle\int \sim dx$는 변수 x에 대하여 부정적분한다는 의미이고, 변수 x를 **적분변수**라 합니다. $f(x)$는 적분되는 함수이므로 **피적분함수**라 합니다. 식 끝에 붙은 C는 상수를 표현하는

문자이지만, 이는 고정된 변수라기보다, 모든 상수가 들어갈 수 있음을 의미하는 기호입니다. 이 C를 **적분상수**라 합니다. 부정적분의 결과의 말단에는 항상 $+C$를 붙여 모든 원시함수를 한꺼번에 나타내고 있음을 명시해야 합니다.

일부 교재에서는 원시함수, 역도함수라는 표현을 사용하는 대신 '부정적분'을 혼용하기도 합니다. $F(x)$는 $f(x)$의 "부정적분이다" 또는 "한 부정적분이다"라고 쓰는 것은 원시함수라는 의미이나, 여기서는 두 개념을 구분하여 씁시다.

예시 1.4 부정적분의 예

예시 1.2에서 $F(x) = x^2 + 2x - 4$가 $f(x) = 2x + 2$의 한 원시함수임을 살펴보았습니다. 따라서 $f(x)$의 부정적분은 $\displaystyle\int f(x)dx = x^2 + 2x - 4 + C$로 구할 수 있습니다. 여기서 C는 적분상수이므로, $x^2 + 2x - 4 + c$꼴의 함수 모두가 $f(x)$의 원시함수일 것입니다. 식 $x^2 + 2x - 4 + C$의 상수항에 해당하는 $-4 + C$는 C가 변화함에 따라 모든 상수를 나타낼 수 있으므로, $-4 + C$를 간략히 C로 줄여 써도($x^2 + 2x + C$) 표현하는 바가 바뀌지 않습니다. 같은 이유로, 부정적분의 표현 시 **상수항은 적분상수 C 하나로 축약**하여 씁니다.

개념 확인 문제 1.5 부정적분 표현하기

$f(x)$의 한 원시함수가 다음과 같을 때, 부정적분 $\displaystyle\int f(x)dx$를 구하여라.

(1) $8x^2 - 4x + 5$ (2) $3x^4 - 1$

이제 부정적분의 몇 가지 성질을 알아봅시다.

정리 1.6 부정적분의 성질

① $\displaystyle\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (단, k는 0이 아닌 실수)

② $\displaystyle\int f(x)+g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

③ $\displaystyle\int f(x)-g(x)dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

증명. ①. $F(x)$, $G(x)$를 각각 $f(x)$, $g(x)$의 원시함수라고 하자. 미분법에 의하여 $[kF(x)]' = kF'(x) = kf(x)$이므로 $kF(x)$는 $kf(x)$의 원시함수이다. 따라서 $\displaystyle\int kf(x)dx = kF(x)+C = k(F(x)+C) = k\int f(x)dx$를 얻는다(적분상수의 활용에 주목하자). ■

②, ③항에 대한 증명은 연습으로 남기겠습니다. 미분법에서 배웠던 다른 공식들을 활용하여 유사하게 식을 전개해 가면 될 것입니다.

생각해볼 문제 1.7 부정적분의 성질

(1) 다항함수의 부정적분을 구하는 방법을 아직 배우지 않았습니다. 하지만 정리 1.6의 ②, ③항으로 미루어 보아 단항식을 부정적분할 수 있으면 다항식의 부정적분도 얻을 수 있습니다. 나아가 ①항까지 적용하면, x^n꼴의 함수의 부정적분만 알아도 모든 다항식의 부정적분을 얻을 수 있습니다. 이를 설명해 봅시다. 특히 x^2, x^3의 부정적분으로부터 $h(x) = 3x^2 - 2x^3$의 부정적분을 유도할 방법을 생각해 봅시다.

(2) $f(x)$, $g(x)$의 부정적분으로부터 함수 $f(x)^2$ 혹은 함수 $f(x)g(x)$의 부정적분을 유도할 수 없을까요? 곱셈으로 이루어진 함수에 대한 미분법을 써 보고, 1.6에서와 같은 공식을 얻을 수 없을지 고민해 봅시다.

1.3 다항함수의 부정적분

드디어 부정적분을 계산할 차례입니다. 단항식에 대한 부정적분은 다음과 같습니다.

정리 1.8 단항식의 부정적분

$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$에 대하여 $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$이다.

증명. 다음 항등식 $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$의 양변을 $(n+1)$로 나누어 주면 $x^n = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]'$을 얻는다. 원시함수 $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$에 적분상수 C를 더하여 부정적분을 얻는다. ■

이에 따르면 $\int 1dx = x + C$, $\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$, $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$입니다. 앞서 배운 부정적분의 성질을 활용하면 일반적인 다항식의 부정적분을 구할 수 있게 됩니다.

예시 1.9 다항식의 부정적분의 계산

$\int (3x^2 - 4x + 2)dx$를 계산해 봅시다.

$\int 2dx = 2 \times x + C = 2x + C$, $\int 4xdx = 4 \times \frac{1}{2}x^2 + C = 2x^2 + C$,

$\int 3x^2 dx = 3 \times \frac{1}{3}x^3 + C = x^3 + C$. (정리 1.6 ①, 정리 1.8)

$\to \int (3x^2 - 4x + 2)dx = (x^3 + C) - (2x^2 + C) + (2x + C)$

(정리 1.6 ②, ③) $= x^3 - 2x^2 + 2x + C$.

개념 확인 문제 1.10 다항식의 부정적분의 계산

다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int (-x^2 + 5x - 3)dx$　　(2) $\int (y+1)(y^2 - y + 1)dy$

(3) $\int (t-5)^2 dt$　　(4) $\int (x+1)^3 dx - \int (x-1)^3 dx$

예제 1.11 다항식의 부정적분

① 다음 조건을 모두 만족하는 함수 $f(x)$를 구하시오.

(1) $f'(x) = 3x^2 - 8x + 2, \quad f(0) = 3$

(2) $f'(x) = 6x^2 - 3, \quad f(-1) = 5$

(Hint. $f(x)$는 $f'(x)$의 한 원시함수입니다. $f'(x)$의 모든 원시함수를 표현하고, 그 원시함수들 중 두 번째 조건을 만족하는 것을 골라 보세요.)

② 함수 $f(x)$의 그래프 위의 점 (x, y)에서의 접선의 기울기는 $2x + 1$이다. 이 그래프가 점 $(2, 3)$을 지날 때, 함수 $f(x)$를 구하시오.

(Hint. 조금 다르게 적혀 있을 뿐, ①번 문제와 거의 똑같은 문제입니다. 조건을 해석하여 조건식으로 만들 수 있을지 고민해 보세요.)

③ $f''(x) = 4$를 만족하는 다항함수 $f(x)$를 모두 구하시오.

(Hint. 부정적분을 두 번 해야 할 것입니다. 답을 표현할 때는 적분상수처럼 임의의 상수가 될 수 있는 기호를 사용하면 좋습니다.)

1.4 정적분과 그 성질

정적분을 계산하는 도구인 부정적분에 대한 논의를 마쳤습니다. 이제 드디어 본론으로 들어갈 수 있습니다.

정의 1.12 정적분의 표현

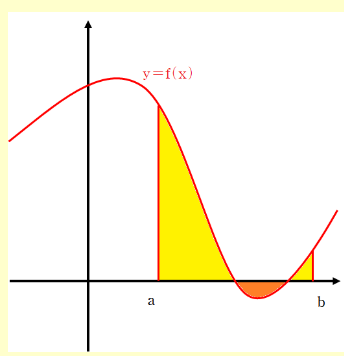
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$ 위에서 연속일 때, "$f(x)$를 a부터 b까지 적분"할 수 있습니다. 그 결과는 한 실수로, 이를 **정적분** $\int_a^b f(x)dx$로 표기합니다. $[a, b]$는 **적분 구간**이라 합니다.

우리는 정적분의 피적분함수가 연속임을 가정하고 있습니다. 그러므로 앞으로 다른 말 없이 어떤 함수를 적분하더라도 연속함수로 받아들이면 됩니다.

정적분의 계산법으로 넘어가기 전에, 정적분의 의미를 이해하고 여러 가지 성질을 확인해 봅시다. 순서상 뒤에 나올 내용이지만, 이를 통해 많은 성질을 이해할 수 있기에 미리 짚어가겠습니다.

정의 1.13 정적분의 기하적 의미

$[a, b]$에서 $f(x)$를 정적분한 값은, 두 직선 $x = a$, $x = b$ 사이에서, x축보다 위쪽, 곡선 $y = f(x)$보다 아래쪽에 위치하는 영역의 넓이에서 x축보다 아래쪽, 곡선 $y = f(x)$보다 위쪽에 위치하는 영역의 넓이를 뺀 값과 같습니다. (오른쪽 그림에서는, 노란색 영역의 넓이에서 주황색 영역의



넓이를 뺀 값에 해당합니다.)

위 정의 1.13의 서술은 너무 길므로, 설령 그래프가 x축 밑으로 내려갈 수 있더라도, 구간 $[a, b]$에서의 곡선 $y = f(x)$ **아래** 면적이라는 짧은 표현을 쓰겠습니다. 이 기하적인 해석은 정적분의 '정말' 많은 성질을 일깨워 줍니다.

① 구간 $[a, b]$ 위에 주어진 상수함수 $f(x) = c > 0$에 대하여, $[a, b]$에서의 $y = f(x)$ 아래 영역은 밑변이 $b - a$, 높이가 c인 직사각형을 이룹니다. 따라서 정적분 $\int_a^b c dx$의 값은 $(b - a)c$가 됩니다. 놀랍지 않게, 이는 $c \le 0$일 때도 잘 성립하는 사실입니다. (직사각형이 뒤집혀 있다고 생각해 보세요!)

② $f(x)$가 항상 0보다 크거나 같다면, $y = f(x)$의 그래프가 x축 아래로 내려가지 않게 되므로 정적분 $\int_a^b f(x)dx$의 값은 0보다 크거나 같습니다. 반대로 $f(x)$가 항상 0보다 작거나 같다면 $\int_a^b f(x)dx$의 값도 0보다 작거나 같습니다. 아울러, 유사한 관점에서 $f(x) \ge g(x)$일 때 $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$라는 것까지 관찰할 수 있습니다.

③ $f(x)$가 구간 $[a, c]$ 위에서 정의되고 $a < b < c$인 b가 주어져 있을 때, $[a, b]$에서의 $y = f(x)$ 아래 영역과 $[b, c]$에서의 $y = f(x)$ 아래 영역을 합치면 (합집합하면) $[a, c]$에서의 $y = f(x)$ 아래 영역이 됨을 관찰할 수 있습니다. 따라서 $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$가 성립합니다.

③번 성질로부터 얻어지는 다음의 자연스러운 정의를 보고 갑시다.

정의 1.14 적분 구간의 위끝이 아래끝보다 크지 않은 정적분

위끝과 아래끝이 동일한 정적분 $\int_a^a f(x)dx$의 값을 0으로 정의합니다.
$a < b$일 때, 정적분 $\int_b^a f(x)dx$의 값을 $-\int_a^b f(x)dx$로 정의합니다.

$x = a$와 $x = a$ 사이에는 어떤 영역도 놓이지 않으므로, 함수를 a부터 a까지 적분하면 0이 나와야 합니다. 한편 $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$의 정의를 따라야만 ③번 성질이 $\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$와 같이 잘 성립하므로, 정의 1.14의 정의가 자연스러움을 확인할 수 있습니다.

생각해볼 문제 1.15 정적분의 의미 활용하기

아래 절의 정리 1.18에서 피적분함수의 상수배와 합에 대한 정적분의 성질을 3가지 배우게 됩니다. 정적분이 그래프 아래 면적을 의미함을 통해 이 세 성질이 성립함을 그림을 그려 설명해 봅시다.

1.5 정적분의 계산

이제 정적분을 계산하는 공식으로 넘어갑시다.

정리 1.16 정적분의 계산

함수 $F(x)$가 구간 $[a, b]$ 위에 주어진 $f(x)$의 한 원시함수일 때, 정적분

$\int_a^b f(x)dx$의 값은 **F(b)–F(a)**입니다. 이를 $[F(x)]_a^b$로 쓰기도 합니다.

이로써 정적분의 값을 계산할 수 있게 되었습니다. $f(x)$의 원시함수가 상당히 많지만, 그 중 어떤 원시함수를 $F(x)$로 택하더라도 사실 $F(b) - F(a)$의 값은 일정합니다. $G(x)$가 다른 원시함수라면 어떤 c가 있어 $G(x) = F(x) + c$여야 하고, 따라서 $G(b) - G(a) = [F(b) + c] - [F(a) + c] = F(b) - F(a)$이기 때문입니다. 즉, $F(x)$로서 **어떤 원시함수를 골라도 정적분이 잘 구해집니다**.

개념 확인 문제 1.17 정적분의 계산

다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\displaystyle\int_1^4 3dx$ (2) $\displaystyle\int_{-2}^1 5t^4dt$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^2 (4s - s^2)ds$ (4) $\displaystyle\int_0^1 (x-1)^2dx$

(5) $\displaystyle\int_1^0 (a^2 + 2a - 3)da$ (6) $\displaystyle\int_6^6 2023x^{864}dx$

(7) $\displaystyle\int_{-1}^2 6x^2dx - \int_{-1}^1 6x^2dx + \int_2^3 6x^2dx$ (8) $\displaystyle\int_{-1}^1 |r|dr$

(Hint. (5), (6)번에서는 공식을 바로 적용할 수 없고, 정의 1.14를 참조하여 계산해야 합니다. 하지만 그 결과를 보면, 위끝과 아래끝의 대소를 무시하고 $F(b) - F(a)$에 대입한 결괏값과 동일한 값이 나올 것입니다. (7), (8)번을 풀 때에는 1.4절에서 본 정적분의 성질 ③을 활용하시기 바랍니다.)

이 공식을 활용하여 정적분의 성질 몇 가지를 더 이끌어낼 수 있습니다.

정리 1.18 피적분함수의 상수배와 합에 대한 정적분의 성질

① $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 0이 아닌 실수)

② $\int_a^b f(x)+g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

③ $\int_a^b f(x)-g(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

증명. ①. 부정적분의 성질로부터 $F(x)$가 $f(x)$의 한 원시함수라면 $kF(x)$는 $kf(x)$의 한 원시함수가 된다($k \neq 0$). 따라서 $\int_a^b kf(x)dx = kF(b) - kF(a)$ $= k\left[F(b) - F(a)\right] = k\int_a^b f(x)dx$가 성립함을 확인할 수 있다. ■

이번에도 나머지 두 성질의 증명은 연습으로 남기겠습니다.

예제 1.19 다항식의 정적분

① 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int_0^2 (x+1)(x+2)(x+3)dx - \int_0^2 x(x+1)(x+5)dx$

(2) $\int_{-2}^2 (x+1)^4dx - \int_{-2}^2 (a^2+1)(a^2+4a+1)da$

(Hint. “부디” 두 정적분을 각각 계산하지 마십시오.)

② $\int_1^a 3x^2dx = -9$를 만족하는 실수 a를 구하시오.

(Hint. 적분 구간에 문자가 있어도, 머뭇댈 것 없이 공식을 적용하세요.)

읽을거리 1.20 다항식의 정적분

(1) $\int_{-1}^{0}(x+1)^{100}dx$의 계산을 시도해 보면, 전개가 끝도 없이 막막해집니다. 그런데 약간 다르게 접근해 봅시다. 닫힌 구간 $[-1, 0]$에서 함수 $(x+1)^{100}$은 $x=-1$에서 0의 함숫값을 가지고 점차 증가하다가 $x=0$에서 1의 함숫값을 가지는 함수입니다. 이 그래프 아래 영역을 x축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동시키면, 정확히 구간 $[0, 1]$에서의 함수 x^{100} 아래 영역과 일치하게 됩니다. 따라서 $\int_{-1}^{0}(x+1)^{100}dx = \int_{0}^{1} x^{100}dx = \frac{1^{101}}{101} - 0 = \frac{1}{101}$입니다.

(2) 함수 $F(x) = |x|$를 고려해 봅시다. $f(x)$는 0을 제외한 모든 점에서 미분계수를 가지며, 0을 제외한 점에서의 도함수는 $F'(x) = \begin{cases} 1 & (x>0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$ 입니다. 이 도함수를 $f(x)$라 합시다. 그러면 $x \neq 0$에서 $F(x)$는 $f(x)$의 원시함수입니다. 그런데 다른 함수 $G(x) = \begin{cases} x+1 & (x>0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$ 를 미분해 보면, $x \neq 0$에서 마찬가지로 $f(x)$가 나오는 것을 확인할 수 있습니다. $f(0)$이 정의되지 않은 탓에, $G(x) - F(x)$가 상수함수가 아닌 $f(x)$의 원시함수 $G(x)$가 발생한 것입니다. 그런데 이런 경우까지도 부정적분은 보통 단순히 $F(x)+C$로 표기됩니다. 이는 함수가 적분 구간에서 연속일 때에만 정적분이 이루어지기 때문입니다. 0을 포함하지 않는 닫힌 구간 $[a, b]$ 위에서라면 여전히 항상 $G(x) = F(x) + c$인 c를 찾을 수 있으므로, 정적분만 한다면 어딘가 잘못될 여지가 없습니다.

1.6 미분과 적분의 관계

이전 절에서 정적분을 구하는 공식으로 제시된 정리 1.16은 다소 뜬금없이 등장한 면이 있어, 그것이 성립한다는 증명이나 설명이 없었습니다. 미분과 적분의 관계를 규명하는 이 공식은 사실 높은 수준의 미적분학에서도 중요하게 여겨지는 결과로서, 미적분학의 기본정리라는 이름이 붙어 있습니다. 미적분학의 기본정리의 짧은 서술을 살펴보며 1장을 마무리하도록 합시다.

정리 1.21 미적분학의 기본정리

(미적분학의 첫째 기본정리) 연속함수 $f(x)$의 정적분으로 주어지는 함수 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$는 미분가능하며, 그 도함수는 $F'(x) = f(x)$이다.

(미적분학의 둘째 기본정리) $F(x)$가 함수 $f(x)$의 원시함수일 때, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ $= F(b) - F(a)$이다.

미적분학의 첫째 기본정리의 의미는 원시함수를 정적분으로 표현할 수 있다는 것입니다. 특히 정적분의 위끝을 변수 x로 두어 x에 대한 함수로 만든 함수 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$가 $f(x)$의 원시함수로 작용합니다. 이 함수는 특히 $x = a$에서의 함숫값이 0인 것도 확인할 수 있습니다. 따라서 함수 $f(x)$의 원시함수 중 $f(a) = b$를 만족하는 함수는 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt + b$라고 구할 수 있습니다.

미적분학의 둘째 기본정리는 정리 1.16에 해당합니다. 그 의미는 첫째 기본정리에서와 반대로, 정적분의 값을 원시함수로부터 얻을 수 있다는 것입니다.

1.7 연습문제 1

01 개념 적용 90% / 식, 논리 전개 10% / 사고 및 응용 0%

다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int (2x-5)dx$

(2) $\int (8x^3-2x+1)dx$

02 개념 적용 90% / 식, 논리 전개 10% / 사고 및 응용 0%

다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_0^4 (2-3x)dx$

(2) $\int_1^3 (x^2-2x)dx$

(3) $\int_0^2 (t^3-4t)dt$

(4) $\int_{-1}^5 (t+1)(t-1)dt$

03 개념 적용 80% / 식, 논리 전개 20% / 사고 및 응용 0%

다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_{-2}^1 (x-1)^2dx + \int_{-2}^1 (2x-1)dx$

(2) $\int_0^2 (3x^2-1)dx + \int_2^3 (3x^2-1)dx$

04 개념 적용 75% / 식, 논리 전개 25% / 사고 및 응용 0%

다음 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하시오.

(1) $f'(x)=3x^2-4x,\quad f(1)=2$

(2) $f'(x)=(3x+4)(1-2x),\quad f(-1)=0$

05 개념 적용 65% / 식, 논리 전개 35% / 사고 및 응용 0%

미생물 배양기에 있는 어떤 미생물의 처음 개체 수가 10이고 t시간 후의 개체 수를 $F(t)$라 하면

$$F'(t)=10\left(2t+\frac{1}{2}\right)$$

이 성립한다고 한다. 6시간 후의 개체 수를 구하시오.

06 개념 적용 65% / 식, 논리 전개 20% / 사고 및 응용 15%

자연수 n에 대하여

$$\int_0^1 (1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})dx=2018$$

일 때, n의 값을 구하시오.

(Hint. 좌변을 n에 대해 표현하세요.)

07

개념 적용 60%
식, 논리 전개 20%
사고 및 응용 20%

다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_{-2}^{1} |x^2-4|dx$

(2) $\int_{0}^{3} |(x-1)(x-3)|dx$

(Hint. 적분 구간을 작은 구간들로 잘 쪼개서, 각 구간에서 피적분함수의 절댓값이 풀려 다항함수가 되도록 하세요.)

08

개념 적용 60%
식, 논리 전개 30%
사고 및 응용 10%

$\int_{1}^{a}(3x^2-6x-4)dx=0$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. (단, $a>1$)

09

개념 적용 60%
식, 논리 전개 10%
사고 및 응용 30%

다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)=x^2+\int_{0}^{2} f(t)dt$가 성립할 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

(Hint. 정적분의 결과는 '수'입니다.)

10

개념 적용 60%
식, 논리 전개 10%
사고 및 응용 30%

함수 $f(x)=x^3+2x-4$에 대하여:

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_{2}^{x} f(t)dt$$

의 값을 구하시오.

(Hint. 미분계수의 정의를 떠올리세요.)

11

개념 적용 40%
식, 논리 전개 20%
사고 및 응용 40%

함수 $f(x)=\int(3x^2+ax+9)dx$가 $x=-1$에서 극솟값 1을 가질 때, 상수 a의 값과 $f(x)$의 극댓값을 구하시오.

(Hint. 함수의 극대와 극소를 조사할 때는 도함수를 조사합니다.)

12

개념 적용 40%
식, 논리 전개 40%
사고 및 응용 20%

모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$의 도함수가

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-1 & (x<1) \\ (3x^2-2) & (x\geq 1) \end{cases}$$

이고 $f(2)=3$일 때, $f(-1)$의 값을 구하시오.

(Hint. $f(1)$을 먼저 구해 보세요.)

13

개념 적용 60%
식, 논리 전개 25%
사고 및 응용 15%

모든 실수 x에 대하여 $\int_a^x f(t)dt$

$= 3x^2 + ax - 4$를 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하시오. (단, $a > 0$)

(Hint. x에 대한 항등식이 주어졌으므로, x에 적절한 값을 대입하면 a에 대한 정보를 알아낼 수 있을지도 모릅니다.)

14

개념 적용 25%
식, 논리 전개 50%
사고 및 응용 25%

$$\int_2^x (x-t)f(t)dt = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하시오.

(Hint. 좌변을 조심히 미분하면 더 간단한 형태를 만들 수 있습니다.)

15

개념 적용 50%
식, 논리 전개 10%
사고 및 응용 40%

다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_{-10}^{10} 5x^9 dx$

(2) $\int_0^{2\pi} (\sin x + \cos x)dx$

(3) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$

(Hint. 정적분의 기하적 의미를 떠올려 보면 도움이 될 것입니다.)

16

개념 적용 20%
식, 논리 전개 35%
사고 및 응용 45%

다음 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 그리시오.

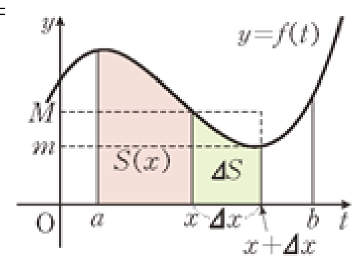
$$f(x) = \int_{-x^2+2x+3}^{2x^2-4x-6} 3t^2 dt$$

(도전. 그래프와 x축의 교점(들)에서 그래프의 기울기를 구해 보세요.)

2 정적분의 활용

2.1 정적분과 넓이

1장의 정의 1.13에서 정적분이 그래프 아래 영역의 넓이를 나타낸다고 하였습니다. 이제 미적분학의 기본정리를 활용하여 이를 설명해 보도록 합시다.



정적분 $\int_a^b f(x)dx$가 구간 $[a, b]$에서의 곡선 $y = f(x)$ 아래 면적과 같음을 주장하려고 합니다. $x \geq a$에 대하여 함수 $S(x)$를 오른쪽 그림과 같이 정의합시다: $S(a) = 0$이고, $x > a$에 대해 $S(x)$는 $[a, x]$에서의 곡선 $y = f(x)$ 아래 면적입니다. 이 $S(x)$는 x가 a에서 b까지 증가함에 따라 부드럽게 증가하는 함수입니다.

이제 점 x에서 함수 $S(x)$를 미분하겠습니다. x의 증분 Δx를 잡아 $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$를 고려하면, ΔS는 구간 $[x, x + \Delta x]$에서의 곡선 $y = f(x)$ 아래 면적이 됩니다. 그림과 같이 닫힌 구간 $[x, x + \Delta x]$ 위에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 두면, 넓이의 부등식 $m\Delta x \leq \Delta S \leq M\Delta x$가 성립함을 확인할 수 있습니다. 이제 이 부등식의 모든 변을 양수 Δx로 나누고 $\Delta x \to 0+$ 의 극한을 취하면 $\lim_{\Delta x \to 0+} m \leq \lim_{\Delta x \to 0+} \dfrac{\Delta S}{\Delta x} = S'(x) \leq \lim_{\Delta x \to 0+} M$이 됩니다. 특히 Δx가 줄어들수록 $[x, x + \Delta x]$에서의 $f(x)$의 최댓값과 최솟값인 M과 m이 $f(x)$에 끝없이 가까워지므로, $S'(x) = f(x)$로 결론지을 수 있습니다.

$S(x)$는 그럼 $S(a) = 0$인 $f(x)$의 원시함수이므로, 미적분학의 첫째 기본정리에 따라 $S(x) = \int_a^x f(t)dt$로 표현할 수 있습니다. 결국 $S(b) = \int_a^b f(t)dt$입니다.

예시 2.1 정적분과 넓이

$y = x^3$과 x축 및 두 직선 $x = 0$, $x = 2$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는, 그래프가 x축 위에 놓이므로 $S = \int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 4$로 구할 수 있습니다.

그러나 주의할 점이 있습니다. 정의 1.13에서 곡선 $y = f(x)$ '아래' 면적을 이야기할 때, x축 위쪽, 곡선 아래쪽에 놓이는 영역의 넓이에서 x축 아래쪽, 곡선 위쪽에 놓이는 영역의 넓이를 빼 주었었습니다. 즉 $f(x)$가 x축 아래로 내려갈 경우, 정적분은 여전히 곡선과 x축 사이 영역의 넓이를 나타내지만, '음의 넓이'를 나타내면서 부호가 음수가 될 것입니다.

따라서 $[a, b]$ 위에서 $f(x) \leq 0$인 경우, 곡선 $y = f(x)$와 x축 및 두 직선 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 영역의 넓이는 $-\int_a^b f(x)dx$가 됩니다.

이러한 부호 문제를 해결하기 위해, 절댓값으로 모양의 변화 없이 그래프를 x축 위로 밀어올리는 방법이 있습니다. 이러면 곡선 '아래' 영역이라는 모호한 표현 대신 곡선과 x축으로 '둘러싸인' 영역이라는 표현으로 양의 넓이를 나타낼 수 있습니다.

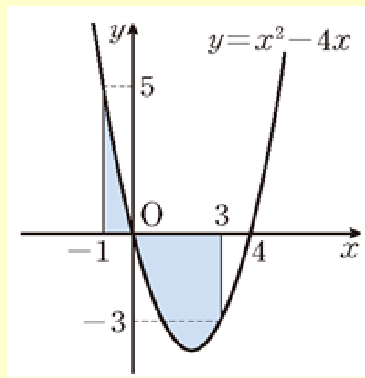
정리 2.2 정적분과 넓이

곡선 $y = f(x)$와 x축 및 두 직선 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 영역의 넓이 S는 $S = \int_a^b |f(x)|dx$입니다.

이제부터는 몇 개의 함수를 주고, 그 함수들로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하라는 주문이 있을 것입니다. 넓이를 정적분으로 정확히 표현하기 위하여,

함수들의 그래프를 그리거나 함수들 간의 교점을 찾아 영역을 그려 내야 합니다. 그 이후 피적분함수와 적분 구간을 적합하게 설정하여 정적분 식을 쓰고, 이를 계산하여 넓이를 구하면 됩니다.

예시 2.3 정적분과 넓이



곡선 $y = x^2 - 4x$와 x축 및 두 직선 $x = -1$, $x = 3$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구해 봅시다. 그림을 그려 보면 오른쪽과 같습니다. (x좌표가 $[3, 4]$인 곳에서도 곡선 $y = x^2 - 4x$와 x축, 그리고 $x = 3$으로 둘러싸인 영역이 있기는 합니다. 하지만 이 문제에서처럼 $x = -1$, $x = 3$이라는 두 세로선이 주어지는 경우 대개 정적분의 아래끝과 위끝을 $-1, 3$으로 결정하라는 의미입니다.) 그래프를 그리며 $[-1, 0]$에서는 $x^2 - 4x$가 양수 값을, $[0, 3]$에서는 $x^2 - 4x$가 음수 값을 가진다는 점을 확인하고, 공식에 대입하여 넓이를 구해 주면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} |x^2 - 4x| dx &= \int_{-1}^{0} (x^2 - 4x) dx + \int_{0}^{3} (-x^2 + 4x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_{0}^{3} = \frac{7}{3} + 9 = \frac{34}{3}.\end{aligned}$$

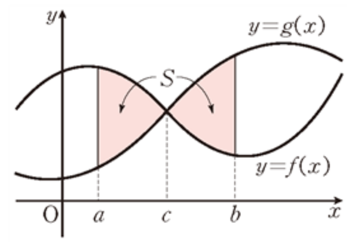
예제 2.4 정적분과 넓이

다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.

(1) $y = x^2 - 5x + 4$, x축, y축, $x = 2$

(2) $y = x^3 - x^2 - 6x$, x축, $x = -1$, $x = 1$

영역의 둘레에 꼭 하나의 곡선만 있을 필요는 없습니다. 이번에는 $y = f(x)$ 꼴의 함수의 그래프 2개와 세로선 두 개로 둘러싸인 영역의 넓이를 구해 봅시다. 그림에서, 구간 $[a, c]$에서는 $y = f(x)$의 그래프가 $y = g(x)$ 그래프보다 위에 있습니다. 이 경우 두 그래프 사이의 영역의 넓이는 곡선 $y = f(x)$ 아래 면적에서 곡선 $y = g(x)$ 아래 면적을 빼서 구할 수 있게 됩니다(음의 영역의 경우도 생각해 보세요). 따라서 $\int_a^c (f(x) - g(x))\,dx$로 넓이를 구할 수 있습니다. 반대로 구간 $[c, b]$에서는 곡선 $y = g(x)$가 더 위에 있으므로 $\int_c^b (g(x) - f(x))\,dx$로 넓이를 구할 수 있습니다. 이 두 경우를 앞서와 마찬가지로 절댓값을 사용해 한꺼번에 표현해 주면:

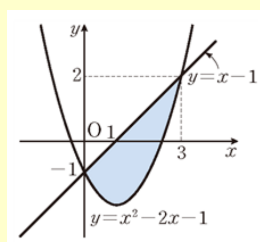


정리 2.5 정적분과 넓이

곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 및 두 직선 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 영역의 넓이 S는 $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$입니다.

예시 2.6 정적분과 넓이

곡선 $y = x^2 - 2x - 1$과 직선 $y = x - 1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구해 봅시다. 그림을 그려 보면 오른쪽과 같습니다. 지금까지 항상 영역의 왼쪽과 오른쪽을 닫았던 $x = k$꼴의 세로줄이 없음을 알 수 있습니다. 하지만 그래프를 그리며 두 함수가 $x = 0, 3$에서 서로를 교차



하며 지나간다는 사실을 확인하게 되면, 자연스럽게 적분 구간 $[0, 3]$을 얻을 수 있습니다. 한편 $[0, 3]$ 위에서 $y = x - 1$의 그래프가 $y = x^2 - 2x - 1$보다 위에 놓인다는 점도 관찰할 수 있습니다. 이를 종합하여 위 공식을 적용해 주면 다음과 같습니다:

$$\int_0^3 \left[(x-1) - (x^2 - 2x - 1)\right] dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^3 = \frac{9}{2}.$$

예제 2.7 정적분과 넓이

다음 곡선들로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.

(1) $y = x^2 - x - 3$, $y = -2x^2 + 8x - 3$

(2) $y = x^3 - x^2 + 3$, $y = 2x^2 + x$

(3) $y = -x^2 + 6x$, $y = x^2(x - 1)$

2.2 정적분과 거리, 속도

수직선 위를 움직이는 점의 위치는 시간에 대한 함수 $x(t)$로 표현할 수 있습니다. 시각 $T = t$에서 해당 점의 속도는 $T = t$에서 위치의 순간변화율, 즉 $x'(t)$입니다. 즉 시간에 대한 속도의 함수 $v(t)$는 $x(t)$의 도함수입니다.

여기서 적분을 활용할 수 있습니다. $x(t)$는 $v(t)$의 원시함수가 되므로, 점 또는 물체의 시간에 따른 속도 $v(t)$가 주어질 때 이를 부정적분하여 $x(t)$를 알아낼 수 있습니다. 나아가, 부정적분은 유일하지 않기 때문에 $v(t)$만으로 $x(t)$를 유일하게 결정할 수는 없습니다. 만일 **속도 함수와 함께 위치 정보 하나가 주어진다면 비로소 운동을 결정할 수 있게 될 것입니다**. 이를테면 x축의 양의 방향으로 $3m/s$의 속력으로 등속 직선 운동을 하는 방법은 시작 위치에 따라

무수히 많고, $t = 0$에서의 위치 $x(0)$이 4로 주어지면 $x(t) = 4 + 3t$를 구할 수 있습니다.

이를 정리하면, $x(a) = x_0$이 주어졌을 때 $x(t) = x_0 + \int_a^t v(s)ds$임을 얻습니다. 미적분학의 첫째 기본정리의 결과이지요. 위끝이 변수인 정적분으로 원시함수를 표현한 다음 적당한 상수를 더해 초기조건을 충족시킨 것입니다.

운동의 다른 중요한 값들도 적분의 형태로 표현할 수 있습니다. 물리에서 **변위**라 부르는 위치 변화는 어느 시간 구간 $[t_1, t_2]$ 동안 점 또는 물체가 x축의 양의 방향으로 순이동한 거리입니다. 즉, $x(t_2) - x(t_1)$입니다. 이번엔 미적분학의 둘째 기본정리를 적용하면, $[t_1, t_2]$ 사이의 위치 변화는 $\int_{t_1}^{t_2} v(s)ds$임을 얻습니다. 한편 $[t_1, t_2]$ 동안의 **이동 거리**도 다룰 수 있습니다. 이동 거리는 위치 변화와 비슷하게 정적분을 통해 계산하지만, 이동 거리가 감소하는 방향으로 운동할 수는 없으므로, 물체의 이동 방향에 무관하게 속도 함수 $v(t)$의 부호를 양수로 바꾸어 주어야 합니다. 즉 절댓값을 씌워 $\int_{t_1}^{t_2} |v(s)|ds$로 쓰면 그만입니다.

예시 2.8 정적분과 속도, 거리

수평인 지면에서 $30m/x$의 속도로 수직으로 위로 쏘아 올린 물 로켓의 t초 후의 속도가 $v(t) = 30 - 10t(m/s) \quad (0 \le t \le 6)$일 때,

(1) 물 로켓을 쏘아 올린 순간부터 3초 후 물 로켓의 지면으로부터의 높이를 구해 봅시다. $t = 0$에서 높이가 $x(0) = 0$이므로, $x(3)$을 구하면:

$\int x(3) = 0 + \int_0^3 (30 - 10t)dt = \left[30t - 5t^2\right]_0^3 = 45(m)$입니다.

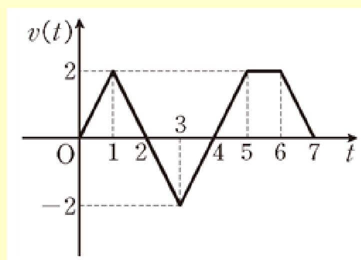
(2) 물 로켓이 6초 후에 지면에 떨어지기 전까지 움직인 거리를 구해 봅시다. $v(t)$가 $[0, 3]$에서 0 이상이다가 $[3, 6]$에서 0 이하가 됨을 활용하여 식을 세우면:

$$\int_0^6 |30-10t|dt = \int_0^3 (30-10t)dt + \int_3^6 (-30+10t)dt$$
$$= \left[30t-5t^2\right]_0^3 + \left[-30t+5t^2\right]_3^6 = 45+45 = 90(m)\text{입니다.}$$

예제 2.9 정적분과 속도, 거리

(1) 직선 철로를 $50m/s$의 속도로 달리는 기차가 제동을 건 지 t초 후의 속도가 $v(t) = 50 - t(m/s) \quad (0 \le t \le 50)$일 때, 이 열차가 제동을 건 후 정지할 때까지 움직인 거리를 구하시오.

(2) 오른쪽 그림은 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$의 그래프이다. 다음에 답하시오.



① 시각 $t=5$에서 점 P의 위치를 구하시오.

② 시각 $t=0$에서 $t=7$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

③ 점 P의 움직임에 대하여 설명하시오.

정적분을 그래프의 넓이나 속도와 거리와의 관계에 적용하는 것은 정적분을 활용하는 단 두 가지 예에 불과합니다. 다른 어떤 문제 상황이 주어지더라도, 만약 한 함수 $A(x)$가 다른 함수 $B(x)$의 순간변화량을 나타낸다면(도함수), $B(x)$는 $A(x)$의 원시함수이므로, $A(x)$가 주어질 때 정적분을 통하여 $B(x)$의 식을 도출하거나, 주어진 구간에서 $B(x)$의 변화량을 구하는 식으로 정적분이 활용됩니다.

2.3 연습문제 2

01

개념 적용 90%
식, 논리 전개 10%
사고 및 응용 0%

다음 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

(1) $y = 1 - x^2$

(2) $y = (x-1)(x-4)$

02

개념 적용 90%
식, 논리 전개 10%
사고 및 응용 0%

다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

(1) $y = -2x^2 + 5x + 4,\ y = 3x$

(2) $y = x^3 - 3x^2 + 1,\ y = 1$

03

개념 적용 90%
식, 논리 전개 10%
사고 및 응용 0%

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t) = 6-2t$일 때, 시각 $t = 3$에서의 점 P의 위치를 구하시오.

04

개념 적용 75%
식, 논리 전개 20%
사고 및 응용 5%

다음 조건을 만족시키는 양수 a의 값을 구하시오.

(1) 곡선 $y = ax - x^2$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 4/3이다.

(2) 곡선 $y = 3x|x|$와 x축 및 직선 $x = -1$, $x = a$로 둘러싸인 도형의 넓이가 28이다.

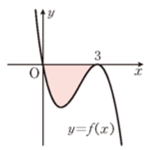
05

개념 적용 70%
식, 논리 전개 25%
사고 및 응용 5%

곡선 $y = x(x-3)(x-a)$와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같을 때, 상수 $a > 3$의 값을 구하시오.
(Hint. 두 넓이의 차는 0입니다. 이를 정적분으로 표현할 수 있을까요?)

06

개념 적용 70%
식, 논리 전개 15%
사고 및 응용 15%

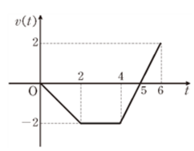


오른쪽 그림은 삼차함수 $y = f(x)$의 그래프이다. 곡선 $y = f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{27}{2}$일 때, $f(x)$를 구하시오.

(Hint. 그래프와 x축과의 교점으로부터 $f(x)$의 정보를 찾아 보세요.)

07

개념 적용 80%
식, 논리 전개 5%
사고 및 응용 15%



원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음을 구하시오. (단, $0 \le t \le 6$)

(1) 시각 $t = 5$에서의 점 P의 위치

(2) 시각 $t = 2$에서 $t = 6$까지 점 P가 움직인 거리

(Hint. 그래프를 정적분으로, 다시 거리에 대한 정보로 바꾸어 보세요.)

08

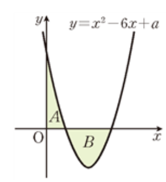
개념 적용 70%
식, 논리 전개 15%
사고 및 응용 15%

$f(x) = x^3 - 3x + \int_0^2 f(t)dt$를 만족시키는 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = 2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

(Hint. $f(x)$의 상수항을 먼저 구하세요.)

09

개념 적용 60%
식, 논리 전개 25%
사고 및 응용 15%



오른쪽 그림과 같이 곡선 $y = x^2 - 6x + a$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 A, 이 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 B라 하자. $A : B = 1 : 2$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

(Hint. 계산을 줄이는 한 가지 방법은 a 대신 곡선의 x절편의 좌표들을 변수로 써서 적분 구간의 위끝과 아래끝을 표현하는 것입니다. 특히 절편들의 x좌표를 $3 - k$, $3 + k$로 표현하면 좋습니다.)

10 개념 적용 55% / 식, 논리 전개 30% / 사고 및 응용 15%

두 자동차 A, B가 같은 직선 도로를 따라 같은 방향으로 달리고 있다. P 지점을 지나면서부터 A의 속도는 $16m/s$로 일정하다. A가 P 지점을 지난 지 2초 후에 B도 P 지점을 지났으며 P 지점을 지난 지 t초 후의 B의 속도는 $(2t+2)m/s$이었다. 두 자동차가 처음 만나게 되는 것은 B가 P 지점을 지난 지 몇 초 후인지 구하시오.

(Hint. P 지점의 좌표와 B가 P 지점을 지나는 시각을 정하고, 차근차근 그 세팅대로 조건을 옮겨 보세요.)

11 개념 적용 60% / 식, 논리 전개 10% / 사고 및 응용 30%

정적분의 기하적 의미를 좌표공간 위의 일반적인 도형 R에 대해 확장해 보면, 평면 $x=r$으로 R을 잘라 생긴 단면의 넓이를 함수 $A(r)$로 나타낼 때,

R의 부피는 $\displaystyle\int_a^b A(x)dx$로 주어진다.

이를 적용하여 밑면의 반지름이 r이고 높이가 h인 직원뿔의 부피를 r, h에 대한 식으로 나타내시오.

(Hint. 원뿔을 옆으로 눕혀 단면이 밑면과 평행하게 위치시킨 뒤 함수 $A(x)$를 구해 보세요.)

수고하셨습니다!!