Grafos – Definições e Representações

Regina Célia Coelho

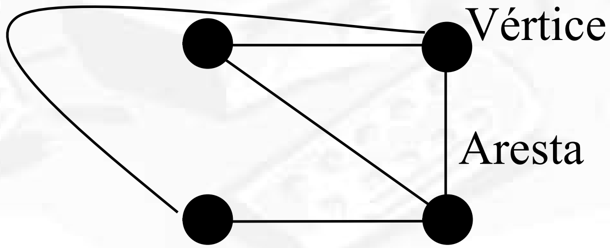
rccoelho@unifesp.br

Introdução

- Grafos podem ser utilizados para modelar uma variedade de estruturas e relações.

Grafos: Terminologia

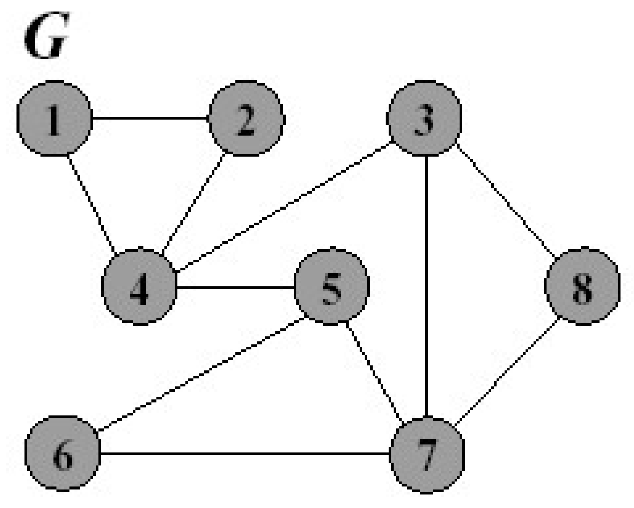
- Grafo: coleção de vértices e arestas.
- Vértice (nó): objeto simples que pode ter nomes e outros atributos. Representam as cidades, pessoas, máquinas, números, etc.
- Arestas (arco): conexão entre dois vértices. Indicam também o valor da ligação entre nós, distância entre nós, etc.



Introdução

- Conjunto de arcos:

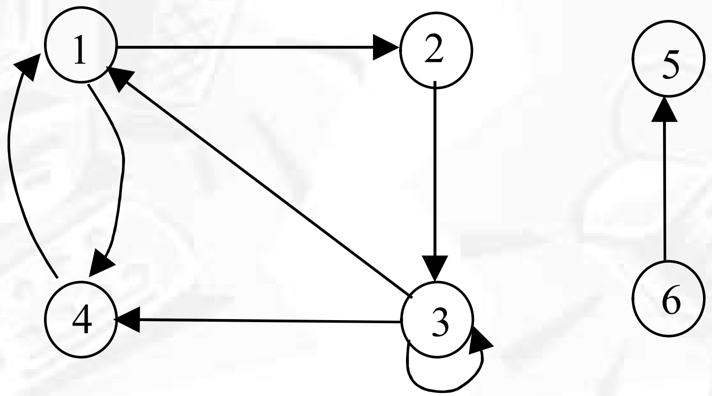
{(1,2),(1,4),(2,4),(3,4),(3,7),(3,8),(4,5),(5,6),(5,7),(6,7),(7,8)}



Regina Célia Coelho

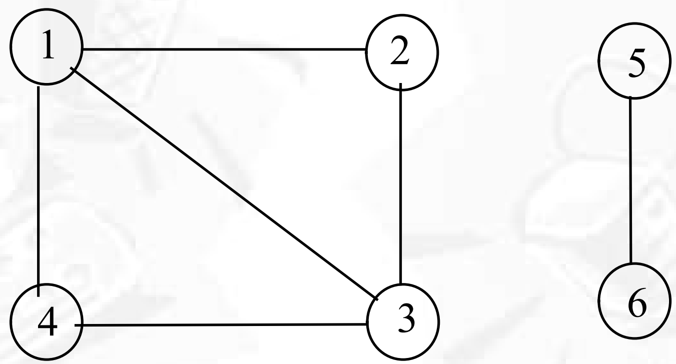
Definições

- Grafo Direcionado $G = (V, E)$ é dado pelo conjunto finito de vértices V e pelo conjunto de arestas E, que são pares ordenados de vértices de G (arestas (u,v) e (v,u) são consideradas arestas diferentes).



Definições

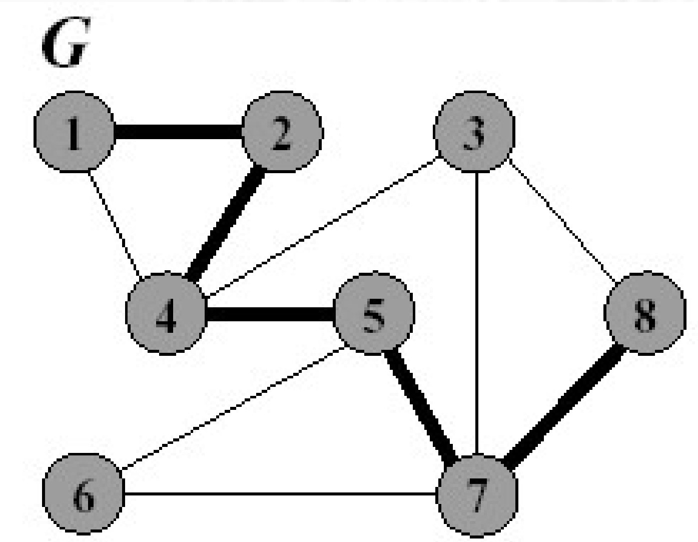
- <u>Grafo</u> <u>Não</u> <u>Direcionado</u> $G = (V, E)$ é dado pelo conjunto finito de vértices V e pelas suas arestas E, que representa um par não ordenado de vértices em V (arestas (u,v) e (v,u) são consideradas a mesma aresta)



Definições

- Passeio: sequência de vértices.
- Caminho: passeio que não repete vértices.
- Comprimento do passeio: nº de arestas no passeio.
- Grau de um vértice: número de arestas incidindo no vértice.
  - Grau de entrada de um vértice: número de arestas que chegam no vértice.
  - Grau de saída de um vértice: número de arestas que saem do vértice.

Definições - Exemplos



- Caminho: 1-2-4-5-7-8

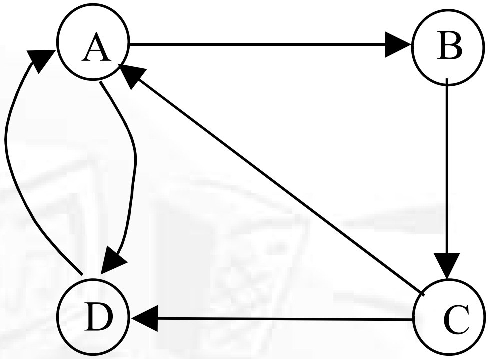
- Comprimento de caminho:

  de 1 até 5: 2 (1-4-5), 3 (1-2-4-5), 4 (1-4-3-7-5), 5 (1-2-4-3-7-5), 6 (1-2-4-3-8-7-5), 7 (1-2-4-3-8-7-6-5)

  de 3 até 4: 1 (3-4), 3 (3-7-5-4), 4 (3-8-7-5-4) ou (3-7-6-5-4), 5 (3-8-7-6-5-4)

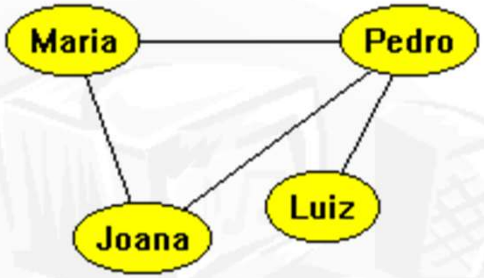
Definições

- Exemplo: o vértice A tem grau 4, grau de entrada 2 e grau de saída 2.

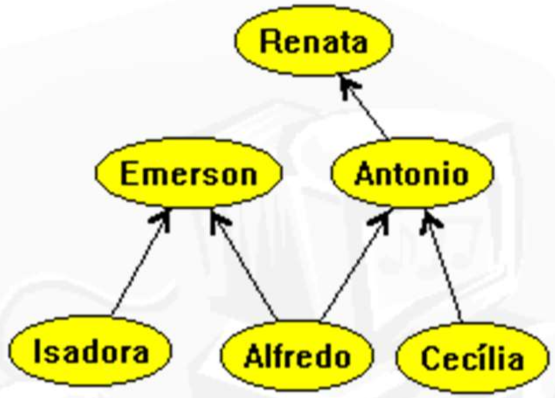


Definições

- Ordem: a ordem de um grafo *G* é dada pela cardinalidade do conjunto de vértices, ou seja, pelo número de vértices de *G*.



ordem = 4



ordem = 6

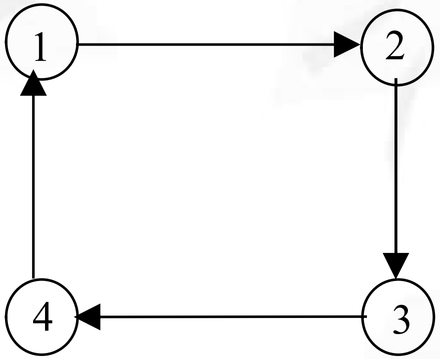
Definições

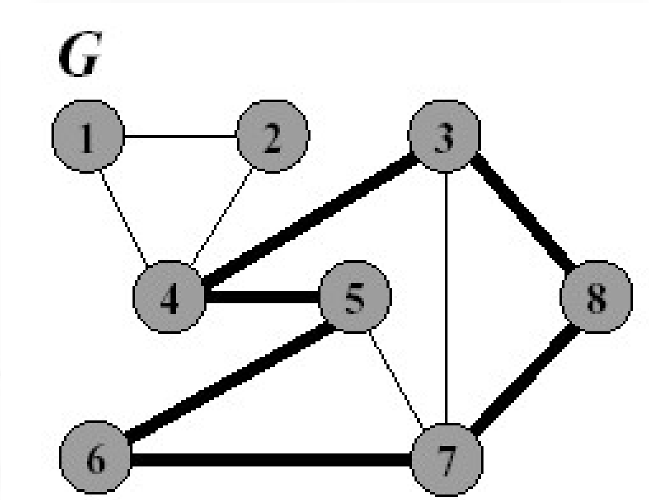
- Vértices adjacentes: um vértice *a* é adjacente a *b* se existir uma aresta de *a* até *b*.

- Vértice sucessor e vértice predecessor: se *a* é adjacente a *b*, *a* será o predecessor de *b* e *b* será o sucessor de *a*.

Definições

- Ciclo: caminho simples sendo o primeiro vértice igual ao último.

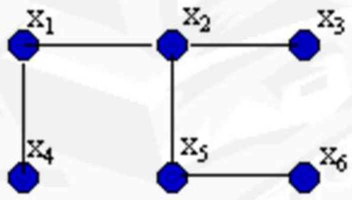




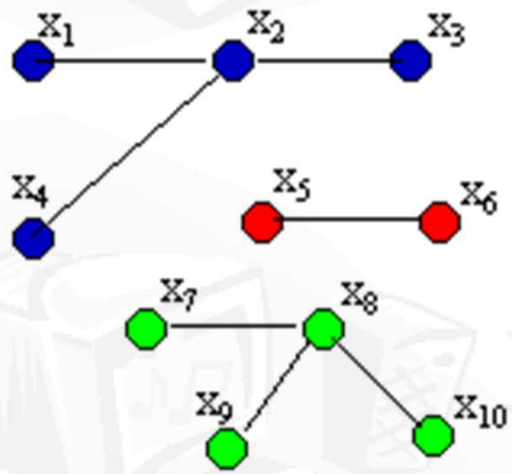
- Ciclo: 3-4-5-6-7-8-3

Definições

- Árvore: grafo sem ciclos.

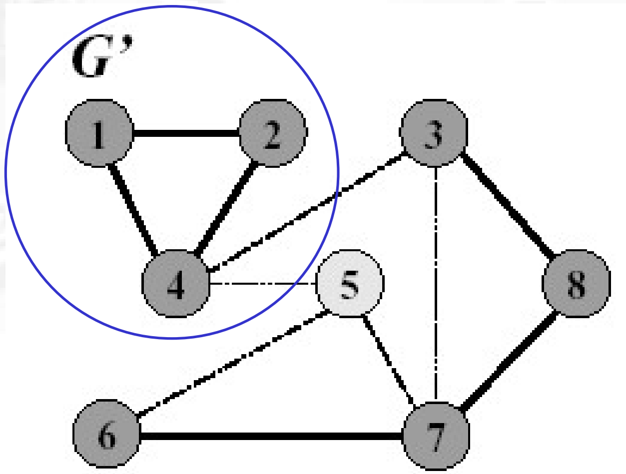


- Floresta: grupo de árvores desconexas.



- Folha em uma floresta: vértice com 1 grau.

Definições - Exemplo

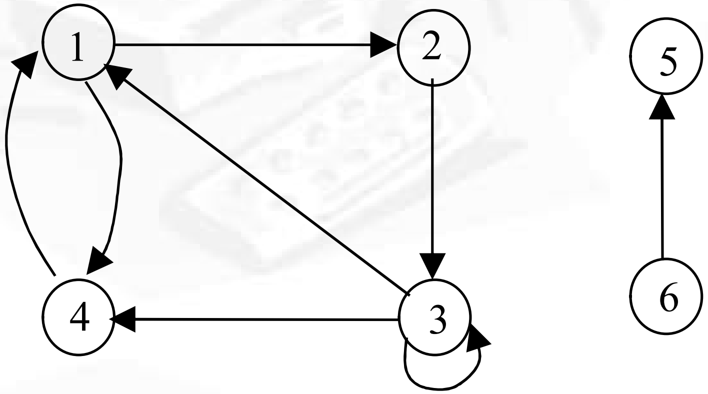


- G' é um sub-grafo de G, gerado a partir de algumas arestas cheias.
- O vértice 5 não pertence a G'.
- O sub-grafo G' é constituído por um grafo completo com três vértices.

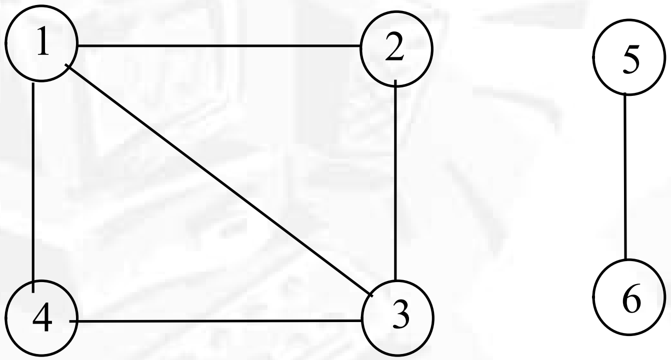
Representação

- Matriz de Adjacência - vantagens:
  - Apropriada para grafos mais densos (quando $|E|$ é próximo de $|V|^2$) ou quando é preciso saber de forma rápida se existe uma aresta conectando dois vértices.
  - Arranjo bidimensional booleano.
  - Adição e remoção de arestas é feita de forma eficiente;
  - É fácil evitar a existência de arestas paralelas;
  - É fácil determinar se dois vértices estão ou não ligados.

Representação



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	1	0	0	0
3	1	0	1	1	0	0
4	1	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	1	0



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	0	0
2	1	0	1	0	0	0
3	1	1	0	1	0	0
4	1	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	1	0

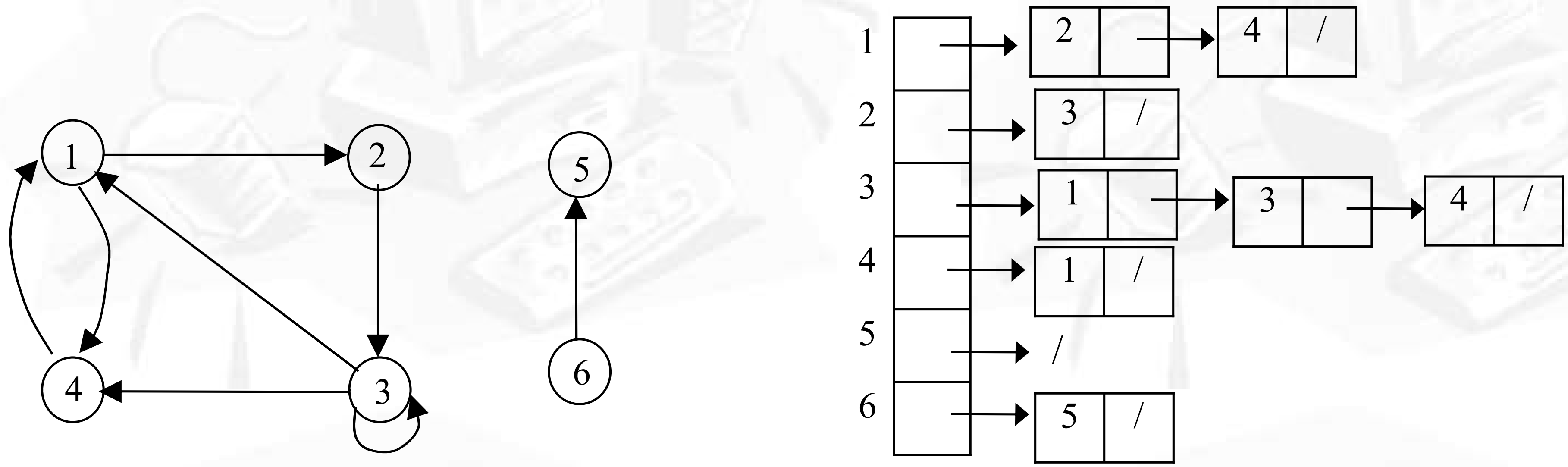
Representação

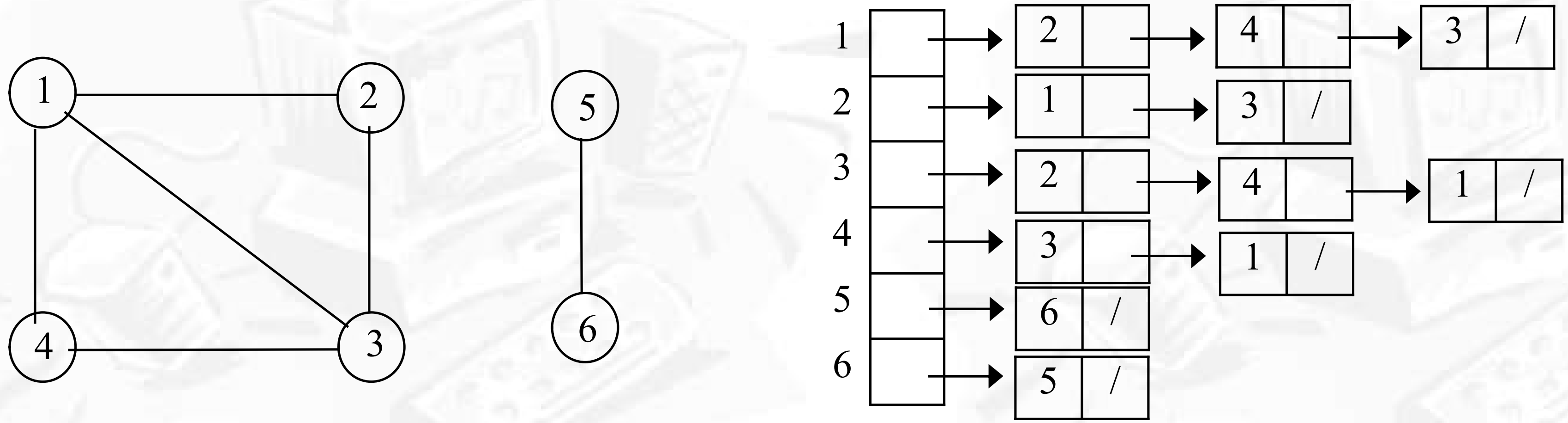
- Matriz de Adjacência - desvantagens:
  - Grafos esparsos de grande dimensão requerem espaço de memória proporcional a V^2;
  - Nestes casos, a simples inicialização do grafo (proporcional a V^2) pode ser dominante na execução global do algoritmo;
  - Pode nem sequer existir memória suficiente para armazenar a matriz.

Representação

- Lista de Adjacência:
  - Maneira compacta de representar grafos esparsos (quando |E| é muito menor que |V|2)
  - Cada vértice contém uma lista ligada dos vértices adjacentes a ele.
  - Os vértices da lista podem ser guardados de forma arbitrária.
  - Requer O(V+E) espaço de memória para grafos direcionados e O(V+2E) para os não direcionados.

Representação





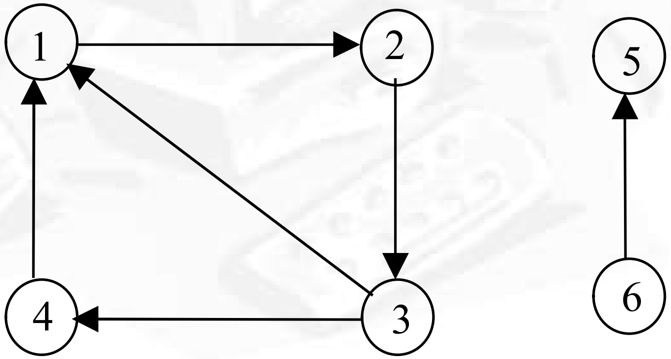
Representação

- Matriz de Incidência:

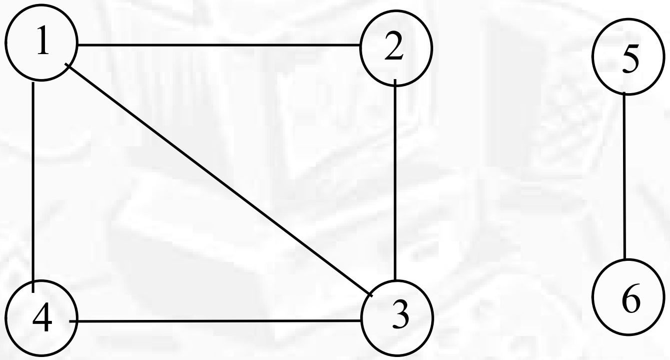
  - Matriz A de ordem n x m em que as linhas representam os vértices e as colunas as arestas.

- $$a = \begin{cases} 1 & \text{se a aresta sai do vértice,} \\ -1 & \text{se a aresta entra no vértice,} \\ 0 & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

Representação



	12	23	31	34	41	65
1	1	0	-1	0	-1	0
2	-1	1	0	0	0	0
3	0	-1	1	1	0	0
4	0	0	0	-1	1	0
5	0	0	0	0	0	-1
6	0	0	0	0	0	1

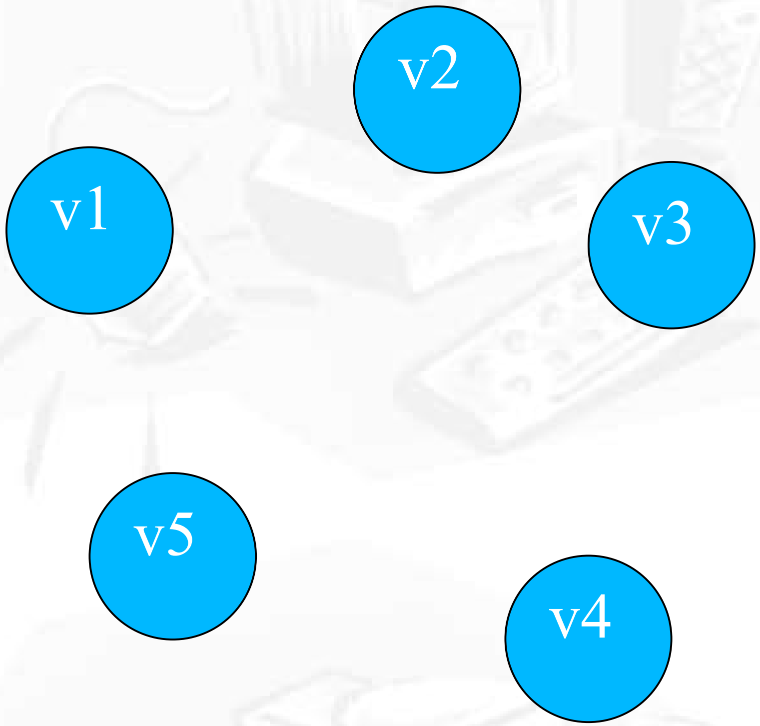


	12	23	31	34	41	65
1	1	0	1	0	1	0
2	1	1	0	0	0	0
3	0	1	1	1	0	0
4	0	0	0	1	1	0
5	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	1

Exercícios

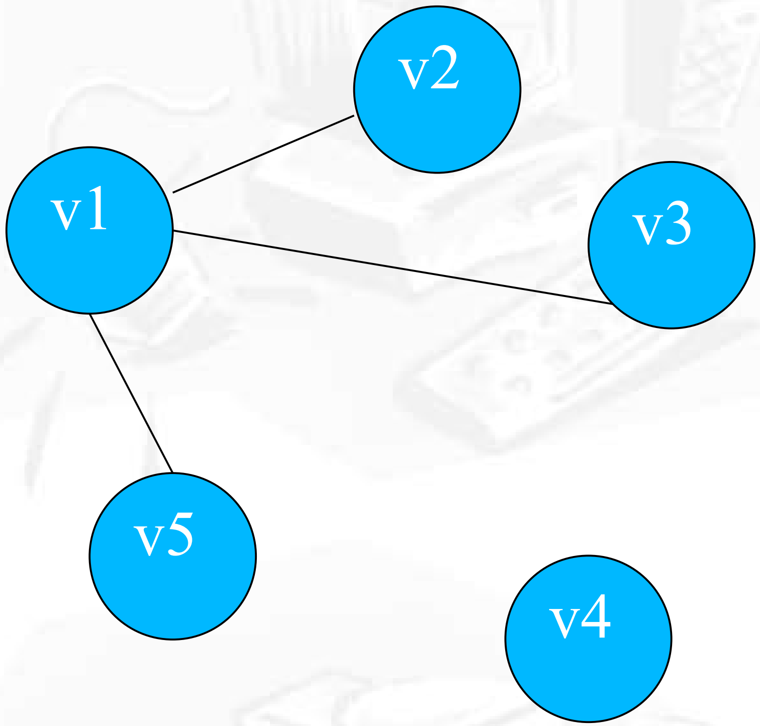
- Desenhe um grafo com 5 vértices (v1, v2, v3, v4, v5), em que grau(v1) = 3, v2 é um vértice de grau ímpar, grau(v3) = 2, e v4 e v5 são adjacentes.

Exercícios



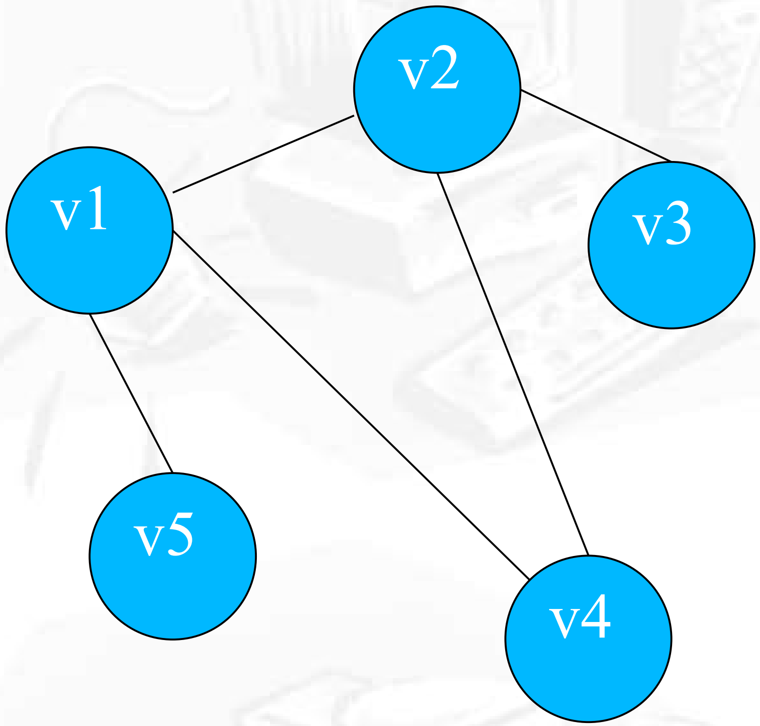
grau(v1) = 3

Exercícios



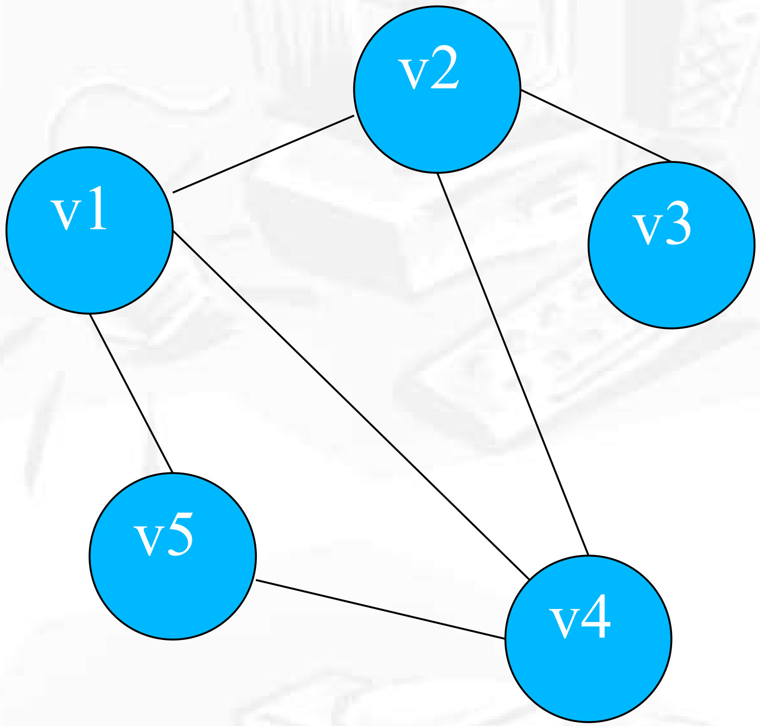
grau(v1) = 3

Exercícios



grau(v2) = 2

Exercícios



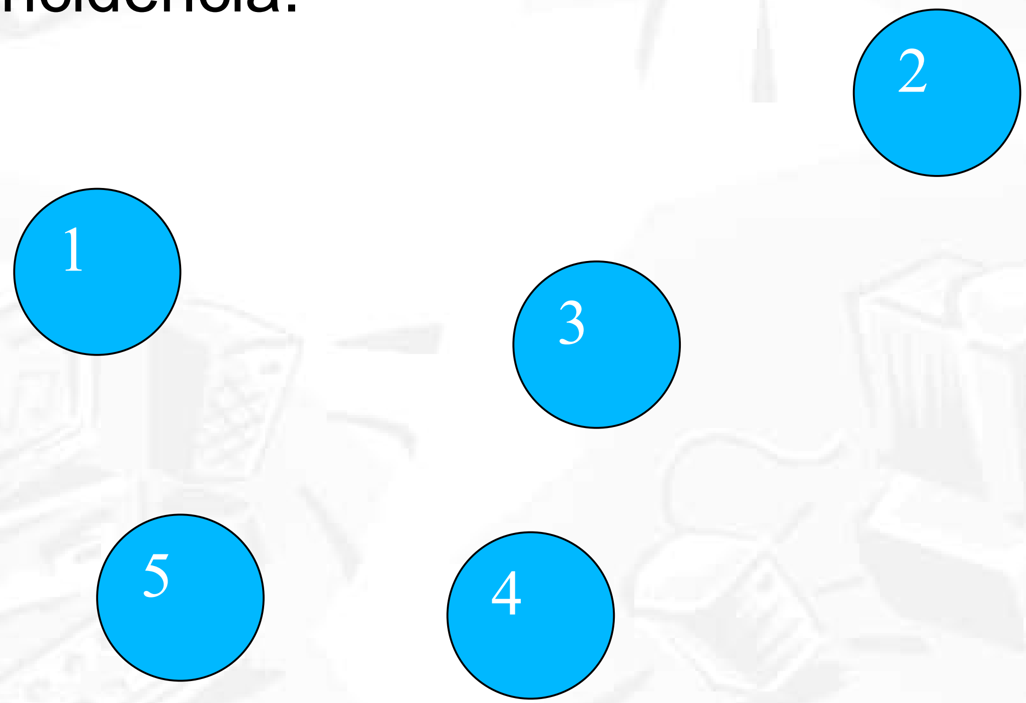
V4 e v5 adjacentes

Exercícios

- Construir uma representação geométrica do grafo G = (V,E), sendo $V = \{1,2,3,4,5,6\}$ e $E = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3),(2,4),(2,5),(3,5),(4,5)\}$. Represente-o por suas matrizes de adjacência e de incidência.

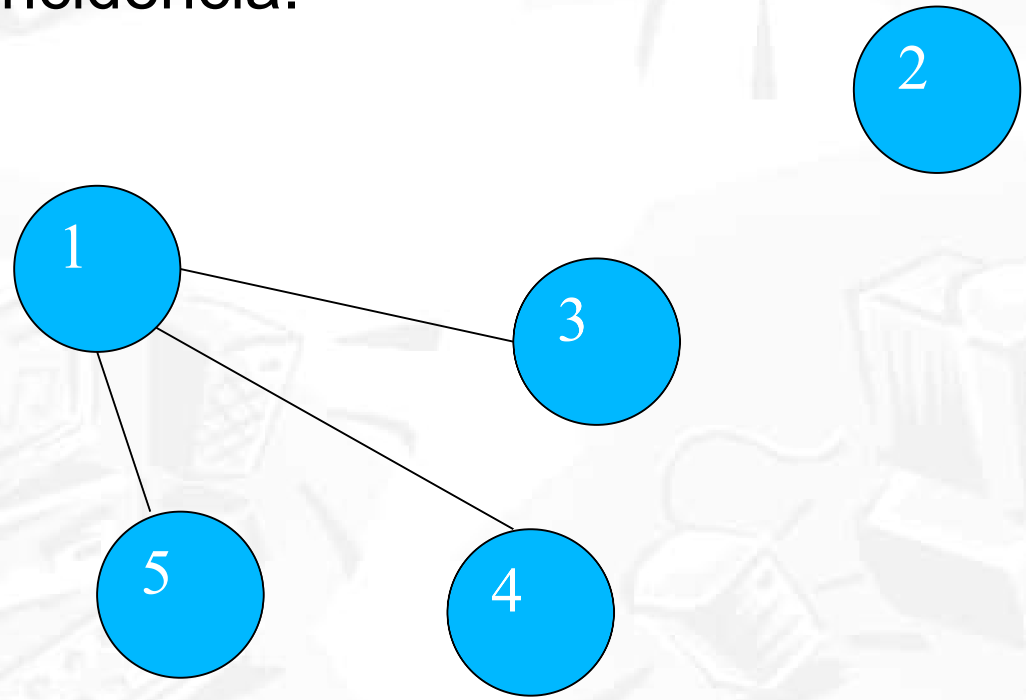
Exercícios

- Construir uma representação geométrica do grafo G = (V,E), sendo *V = {1,2,3,4,5,6}* e *E = {(1,3), (1,4), (1,5), (2,3),(2,4),(2,5),(3,5),(4,5)}*. Represente-o por suas matrizes de adjacência e de incidência.



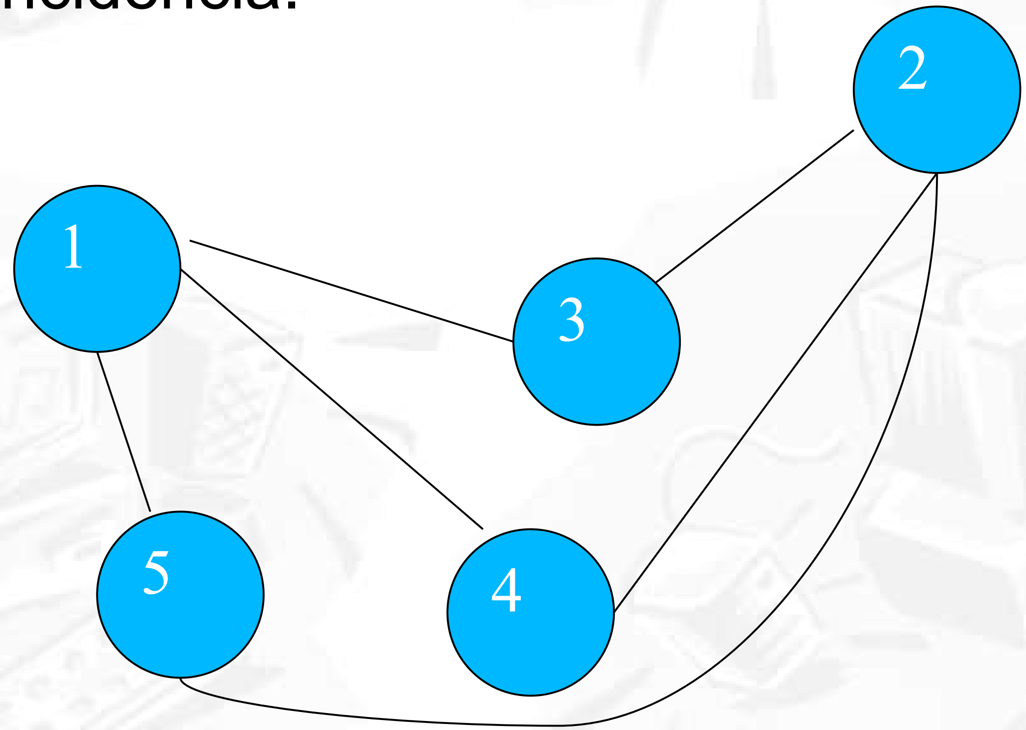
Exercícios

- Construir uma representação geométrica do grafo G = (V,E), sendo *V = {1,2,3,4,5,6}* e *E = {(1,3), (1,4), (1,5), (2,3),(2,4),(2,5),(3,5),(4,5)}*. Represente-o por suas matrizes de adjacência e de incidência.



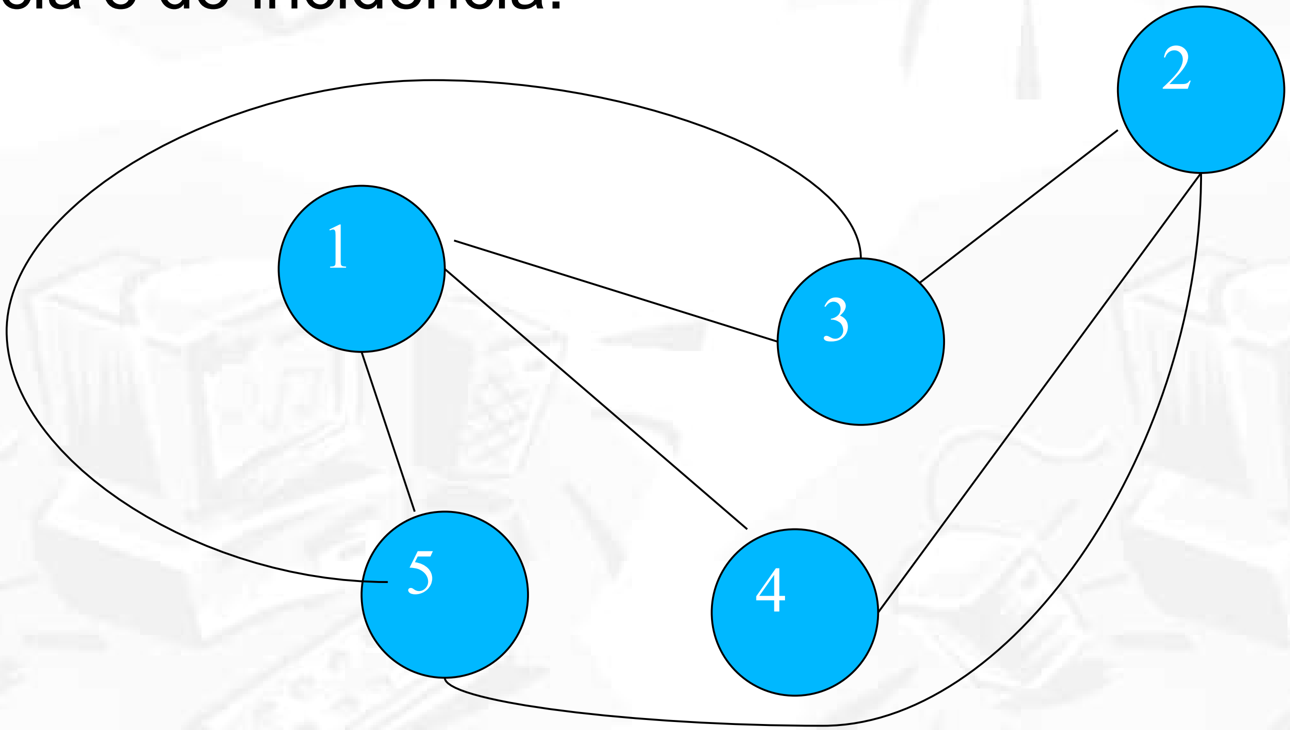
Exercícios

- Construir uma representação geométrica do grafo G = (V,E), sendo *V = {1,2,3,4,5,6}* e *E = {(1,3), (1,4), (1,5), (2,3),(2,4),(2,5),(3,5),(4,5)}*. Represente-o por suas matrizes de adjacência e de incidência.



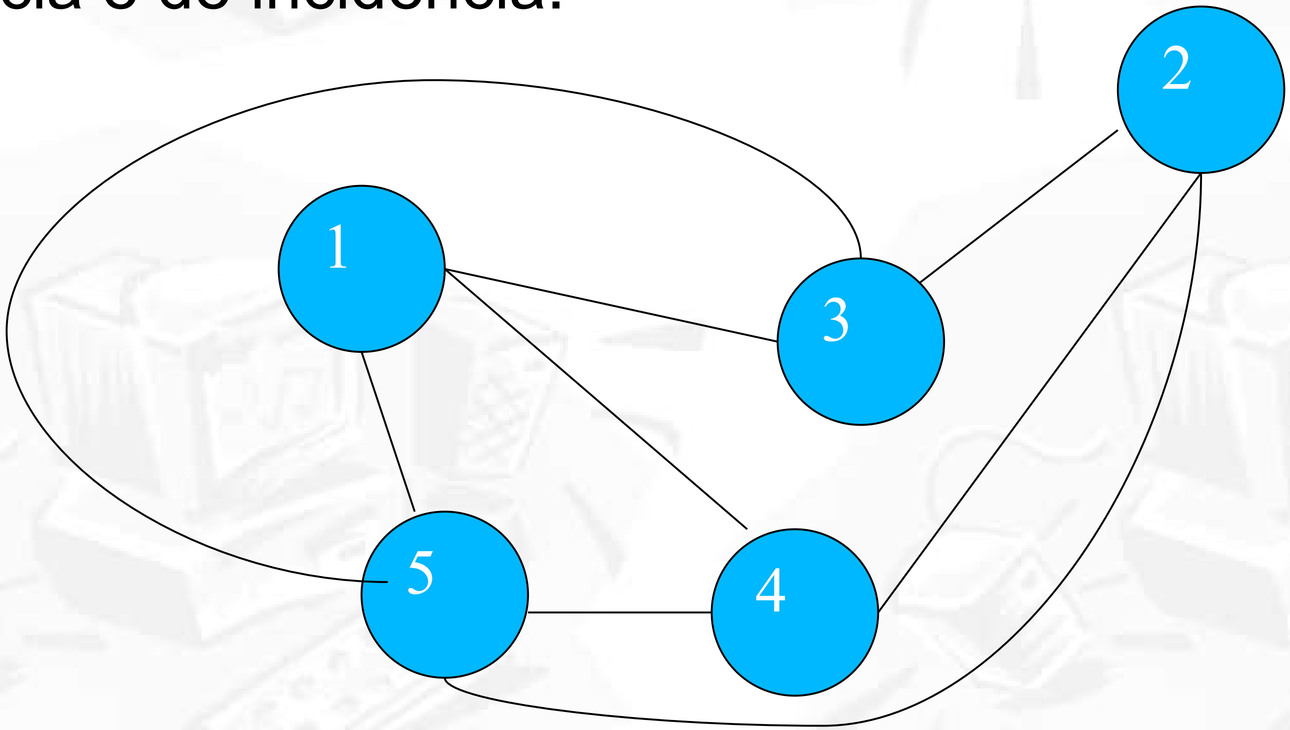
Exercícios

- Construir uma representação geométrica do grafo G = (V,E), sendo *V = {1,2,3,4,5,6}* e *E = {(1,3), (1,4), (1,5), (2,3),(2,4),(2,5),(3,5),(4,5)}*. Represente-o por suas matrizes de adjacência e de incidência.



Exercícios

- Construir uma representação geométrica do grafo G = (V,E), sendo *V = {1,2,3,4,5,6}* e *E = {(1,3), (1,4), (1,5), (2,3),(2,4),(2,5),(3,5),(4,5)}*. Represente-o por suas matrizes de adjacência e de incidência.



$E = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,5), (4,5)\}.$

matriz de adjacência

	1	2	3	4	5
1			1	1	1
2					
3	1				
4	1				
5	1				

$E = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,5), (4,5)\}$.

matriz de adjacência

	1	2	3	4	5
1			1	1	1
2			1	1	1
3	1	1			
4	1	1			
5	1	1			

$E = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,5), (4,5)\}$.

matriz de adjacência

	1	2	3	4	5
1			1	1	1
2			1	1	1
3	1	1			1
4	1	1			
5	1	1	1		

$E = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3),(2,4),(2,5),(3,5),(4,5)\}.$

matriz de adjacência

	1	2	3	4	5
1			1	1	1
2			1	1	1
3	1	1			1
4	1	1			1
5	1	1	1	1	

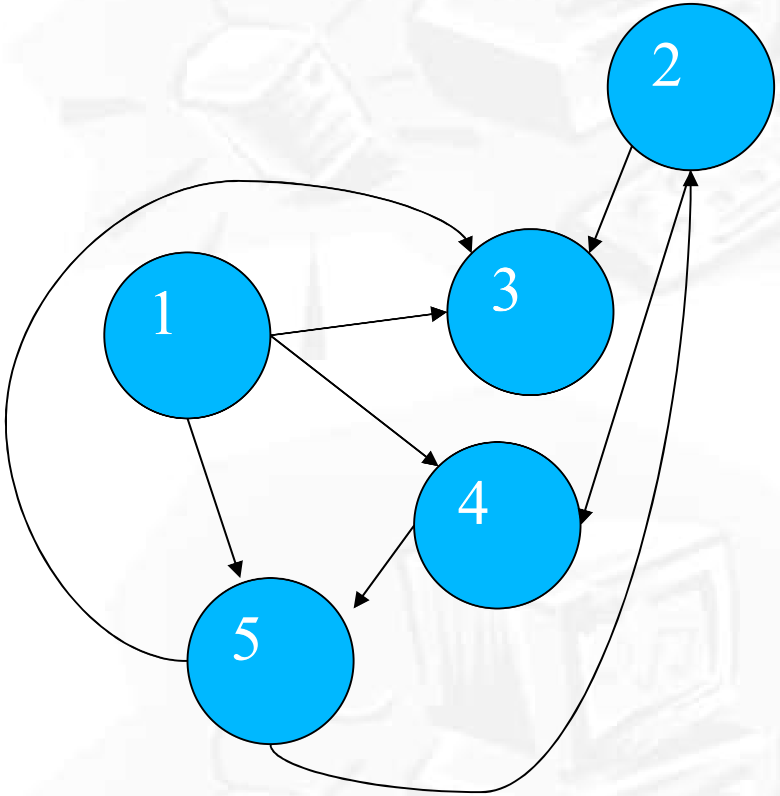
$E = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,5), (4,5)\}.$

matriz de adjacência

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0	0	1	1	1
2	0	0	1	1	1
3	1	1	0	0	1
4	1	1	0	0	1
5	1	1	1	1	0

$E = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3),(2,4),(2,5),(3,5),(4,5)\}.$

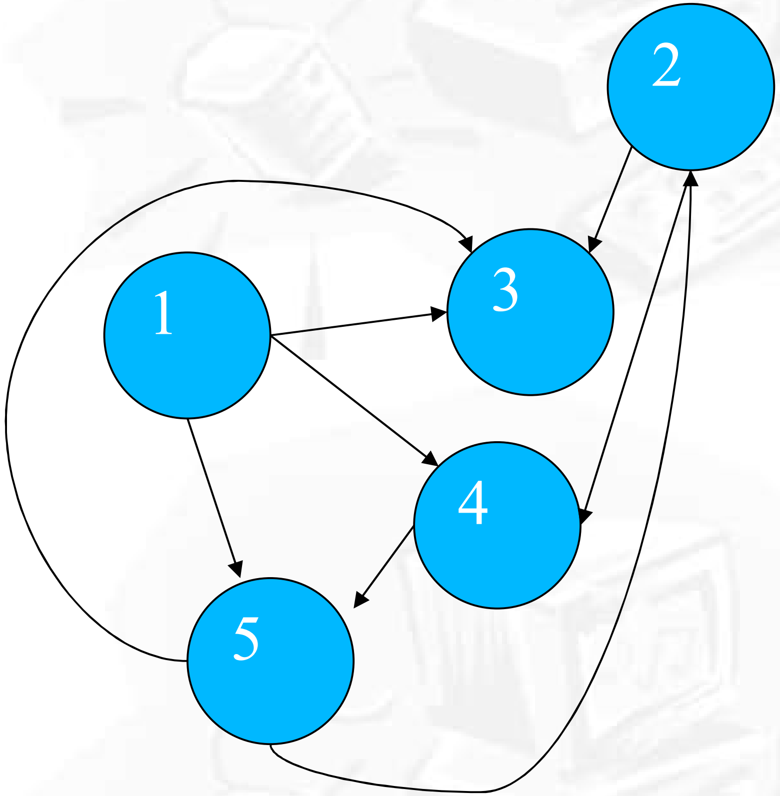
Matriz de incidência



	1	2	3	4	5
1			1	1	1
2					
3	-1				
4	-1				
5	-1				

$E = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3),(2,4),(2,5),(3,5),(4,5)\}$.

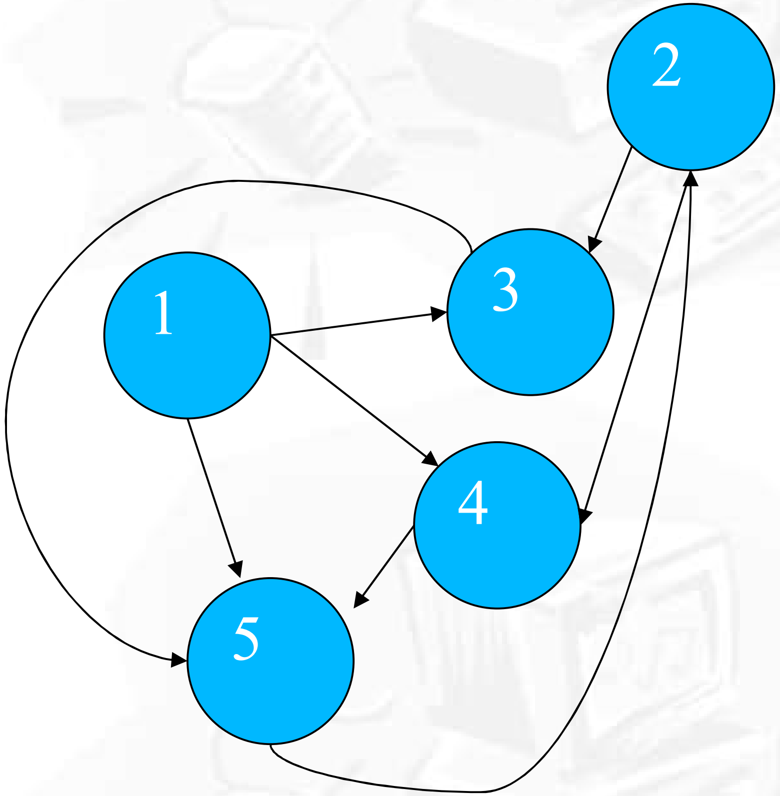
Matriz de incidência



	1	2	3	4	5
1			1	1	1
2			1	1	1
3	-1	-1			
4	-1	-1			
5	-1	-1			

E = {(1,3), (1,4), (1,5), (2,3),(2,4),(2,5),(3,5),(4,5)}.

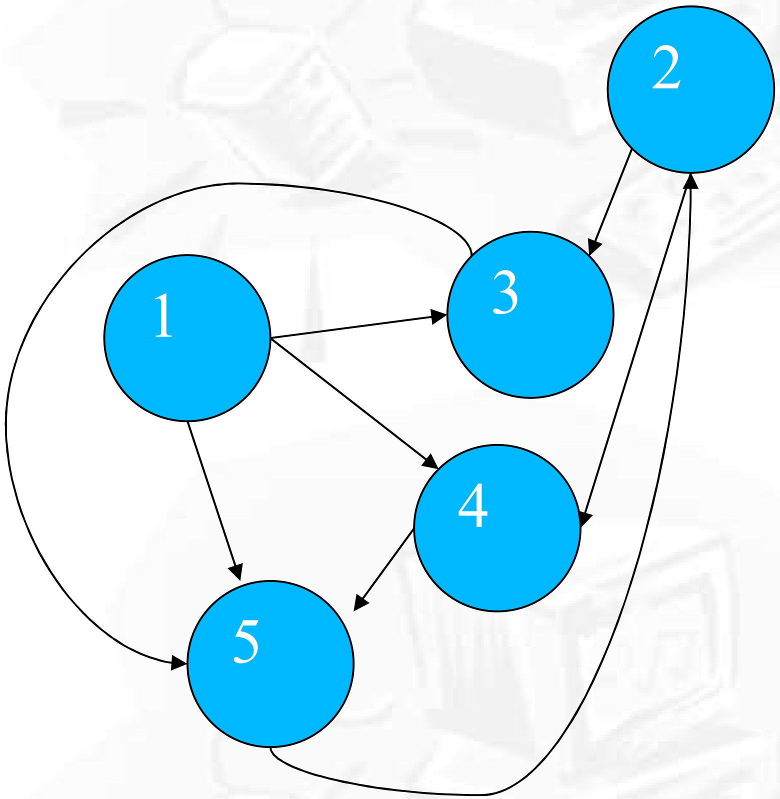
Matriz de incidência



	1	2	3	4	5
1			1	1	1
2			1	1	1
3	-1	-1			1
4	-1	-1			
5	-1	-1	-1		

$E = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3),(2,4),(2,5),(3,5),(4,5)\}.$

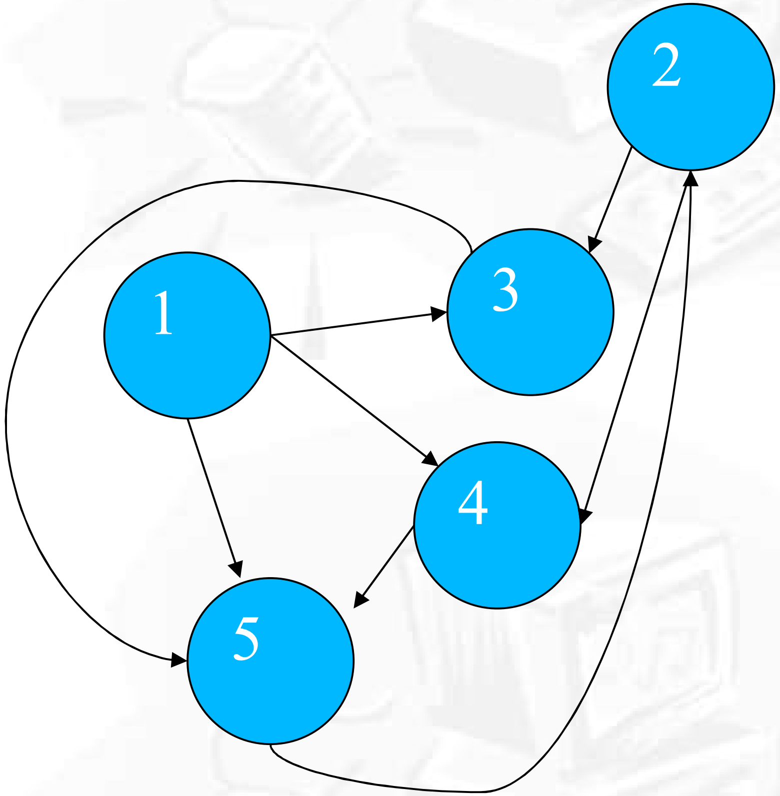
Matriz de incidência



	1	2	3	4	5
1			1	1	1
2			1	1	1
3	-1	-1			1
4	-1	-1			1
5	-1	-1	-1	-1	

$E = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3),(2,4),(2,5),(3,5),(4,5)\}.$

Matriz de incidência

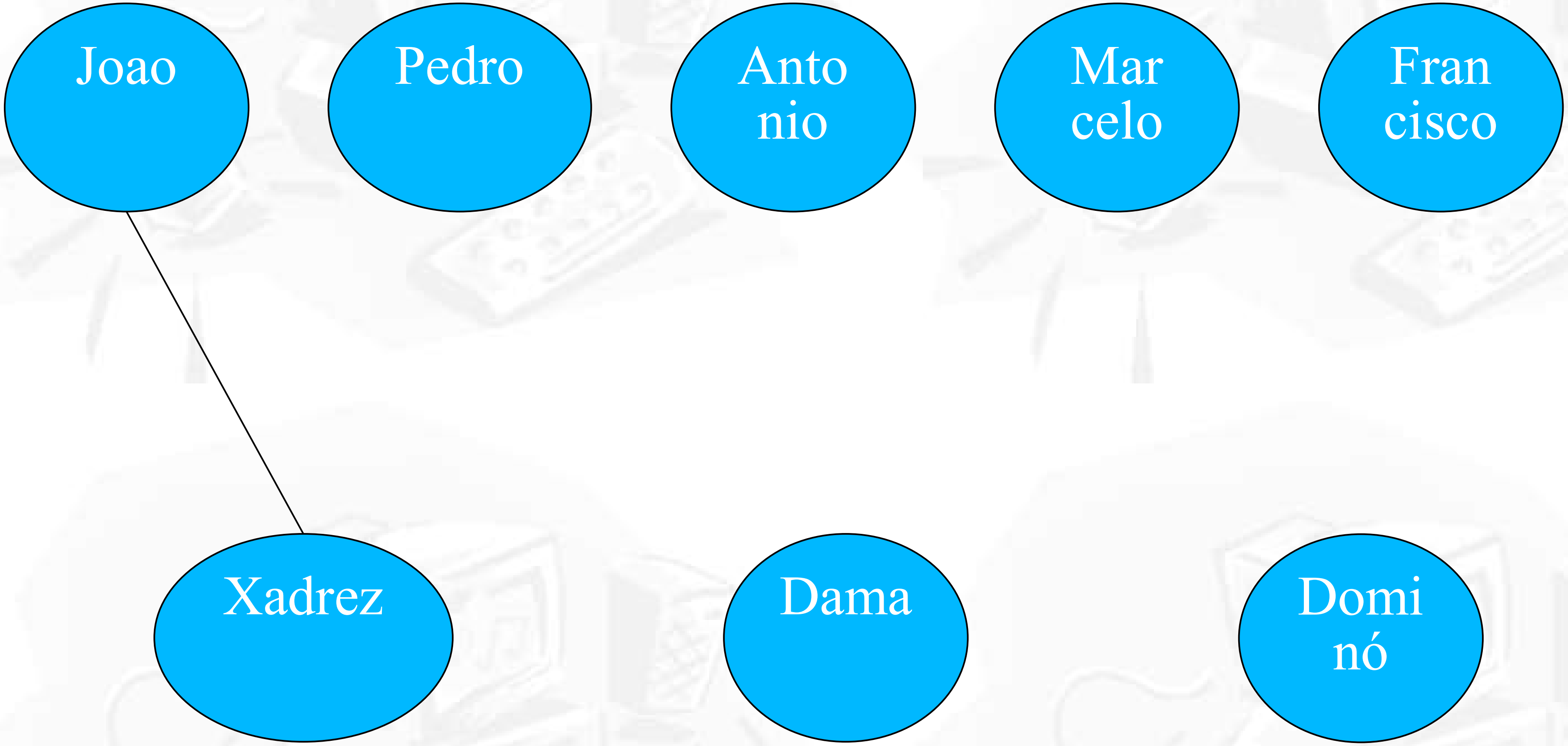


	1	2	3	4	5
1	0	0	1	1	1
2	0	0	1	1	1
3	-1	-1	0	0	1
4	-1	-1	0	0	1
5	-1	-1	-1	-1	0

Exercícios

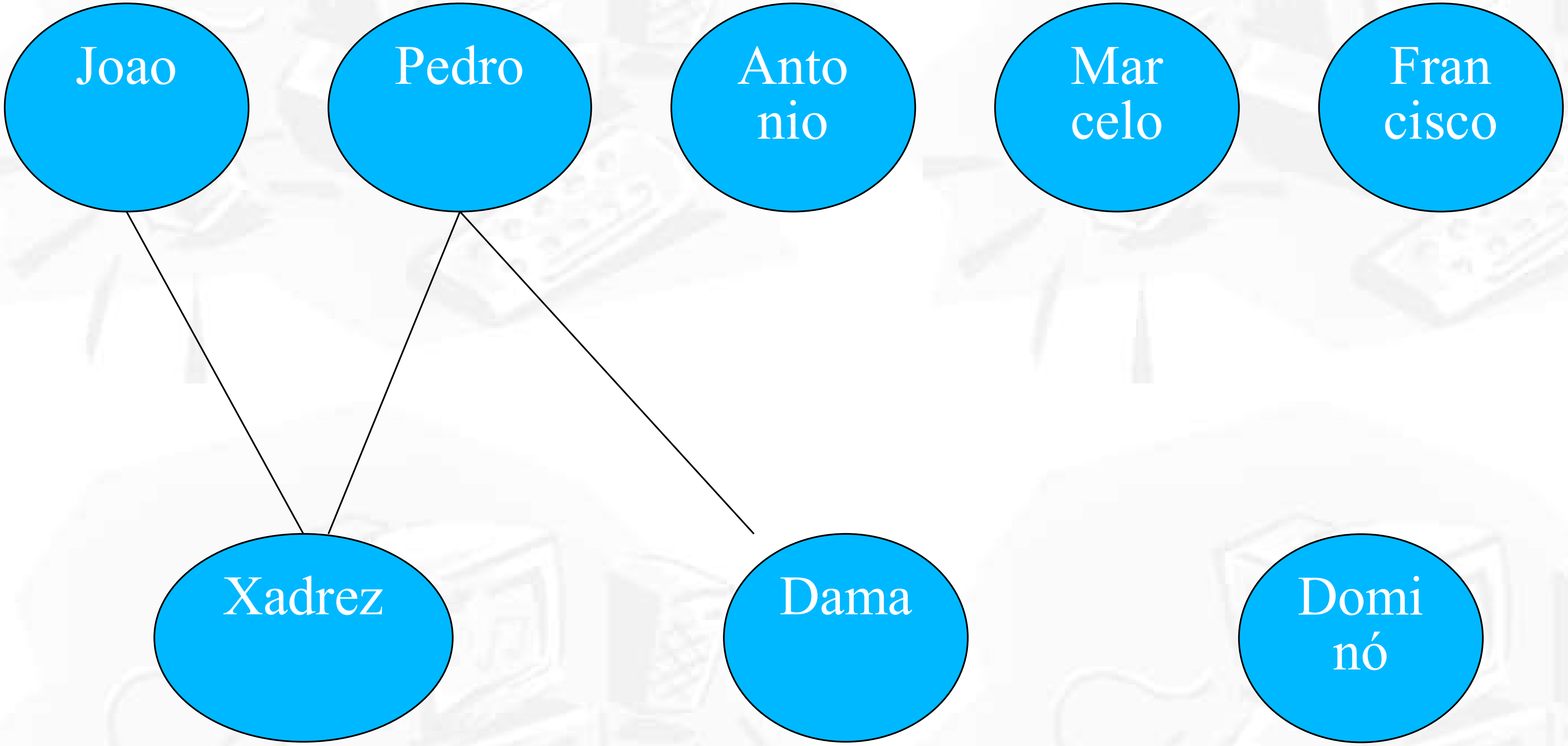
- Os amigos João, Pedro, Antônio, Marcelo e Francisco sempre se encontram para jogar conversa fora e às vezes jogar dama, xadrez e dominó. As preferências de cada um são as seguintes: João só joga xadrez; Pedro não joga dominó; Antônio joga tudo; Marcelo não joga xadrez e dominó e Francisco não joga nada.
  - Represente as conexões possíveis dos jogadores com os jogos.
  - Represente todas as possibilidades de um amigo jogar com os demais. Defina V e E.
  - Defina um subgrafo em que todos, menos Francisco, joguem ao mesmo tempo.

➢Represente as conexões possíveis dos jogadores com os jogos.



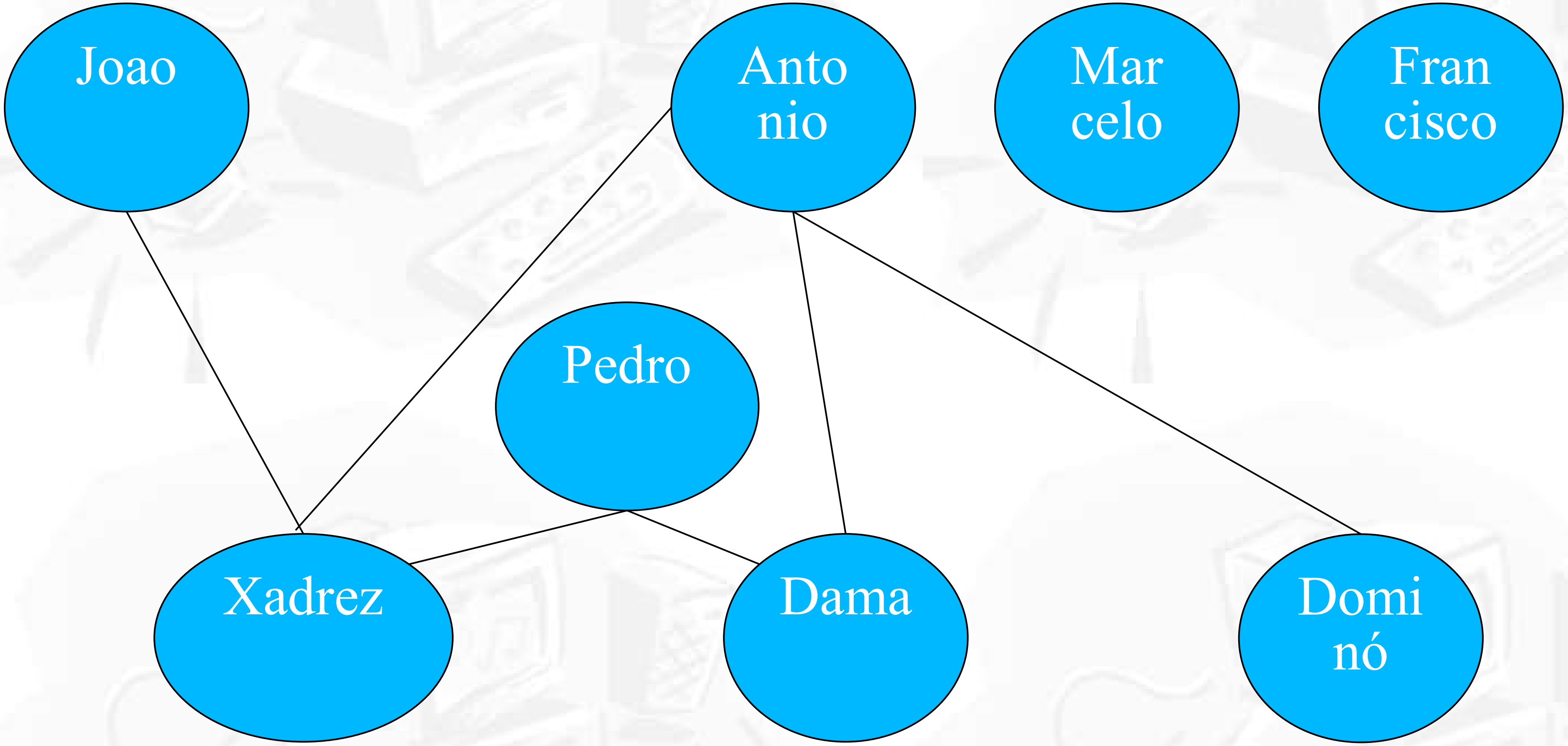
João só joga xadrez

➢Represente as conexões possíveis dos jogadores com os jogos.



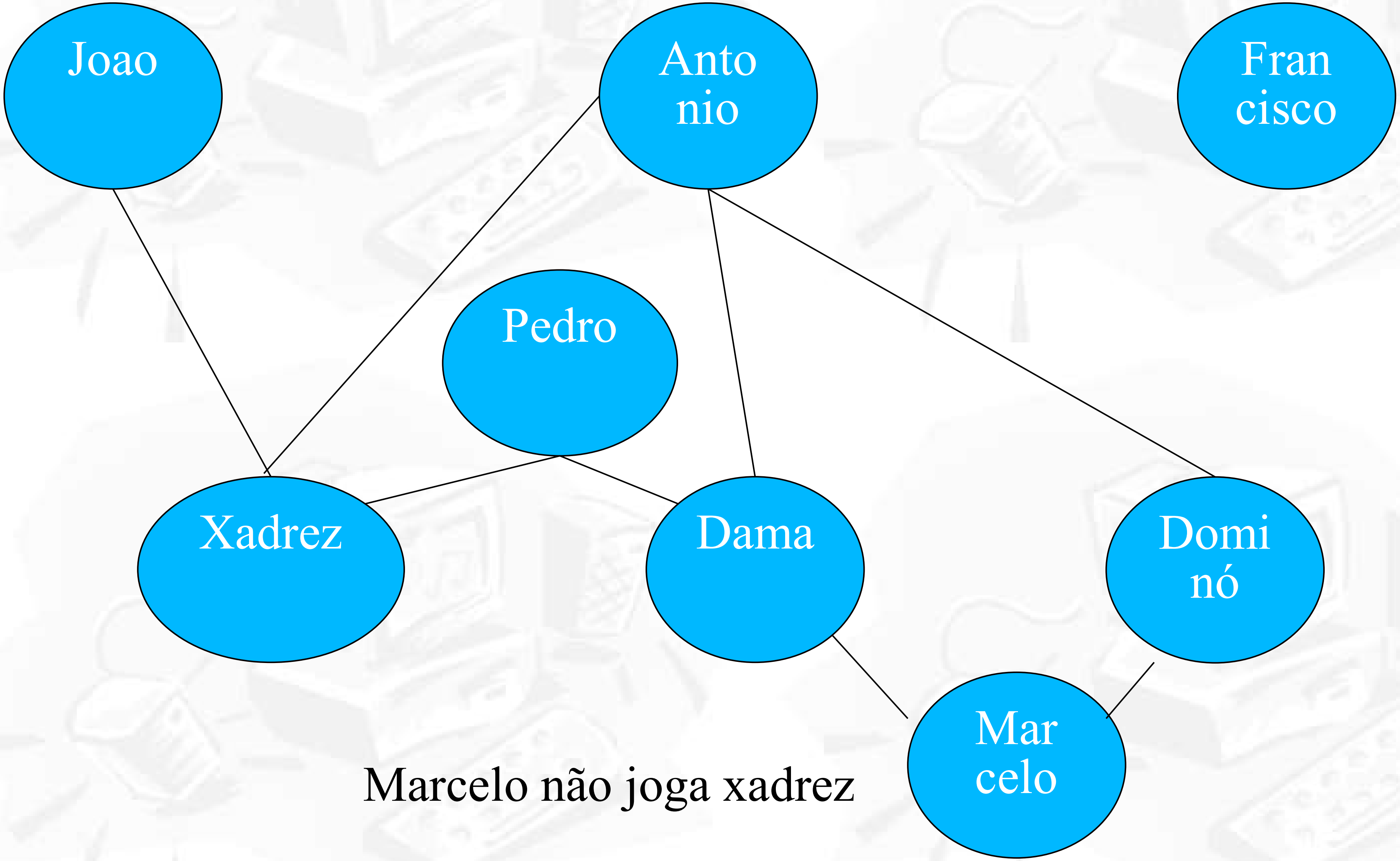
Pedro não joga dominó

- Represente as conexões possíveis dos jogadores com os jogos.



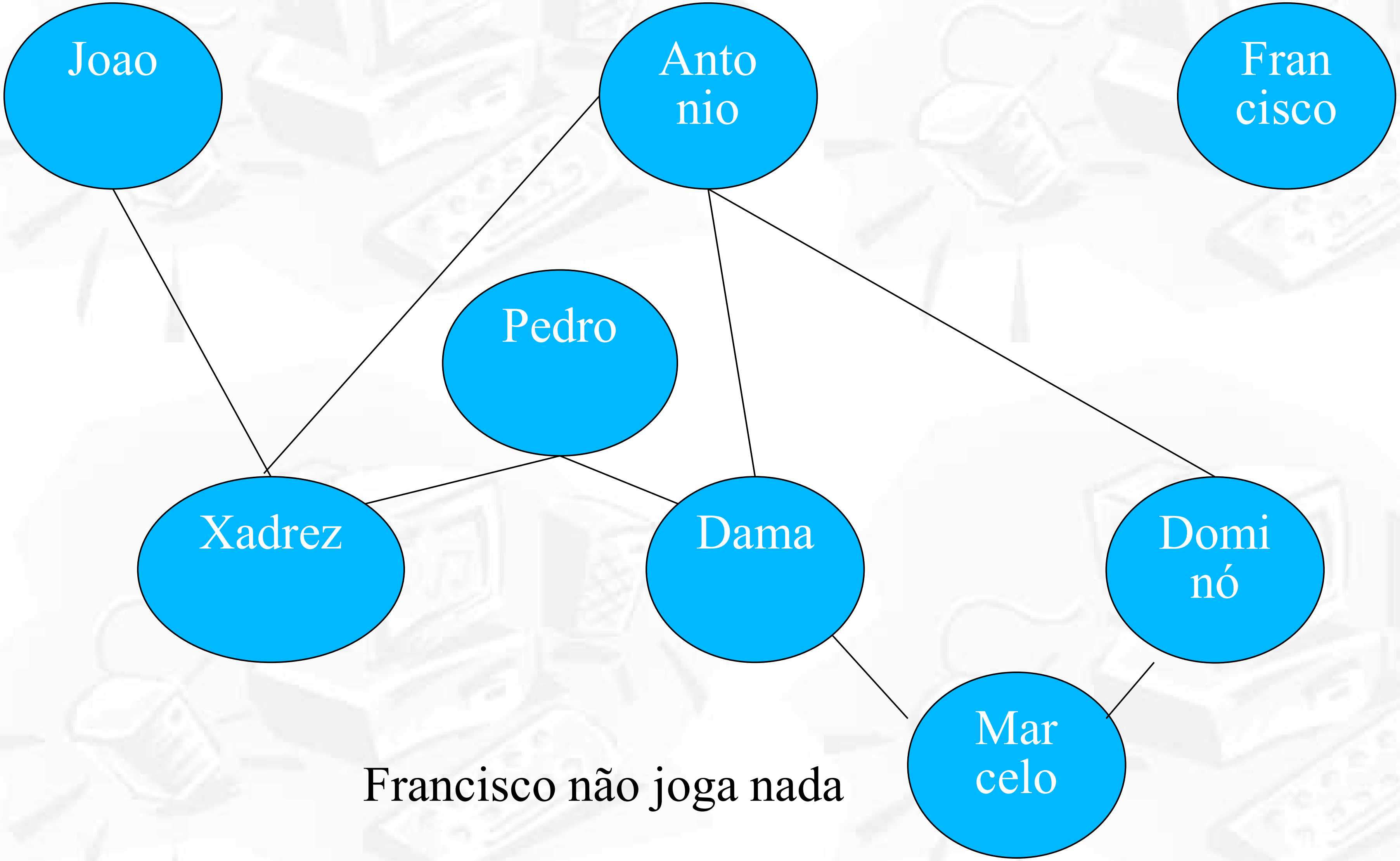
Antônio joga tudo

➢Represente as conexões possíveis dos jogadores com os jogos.



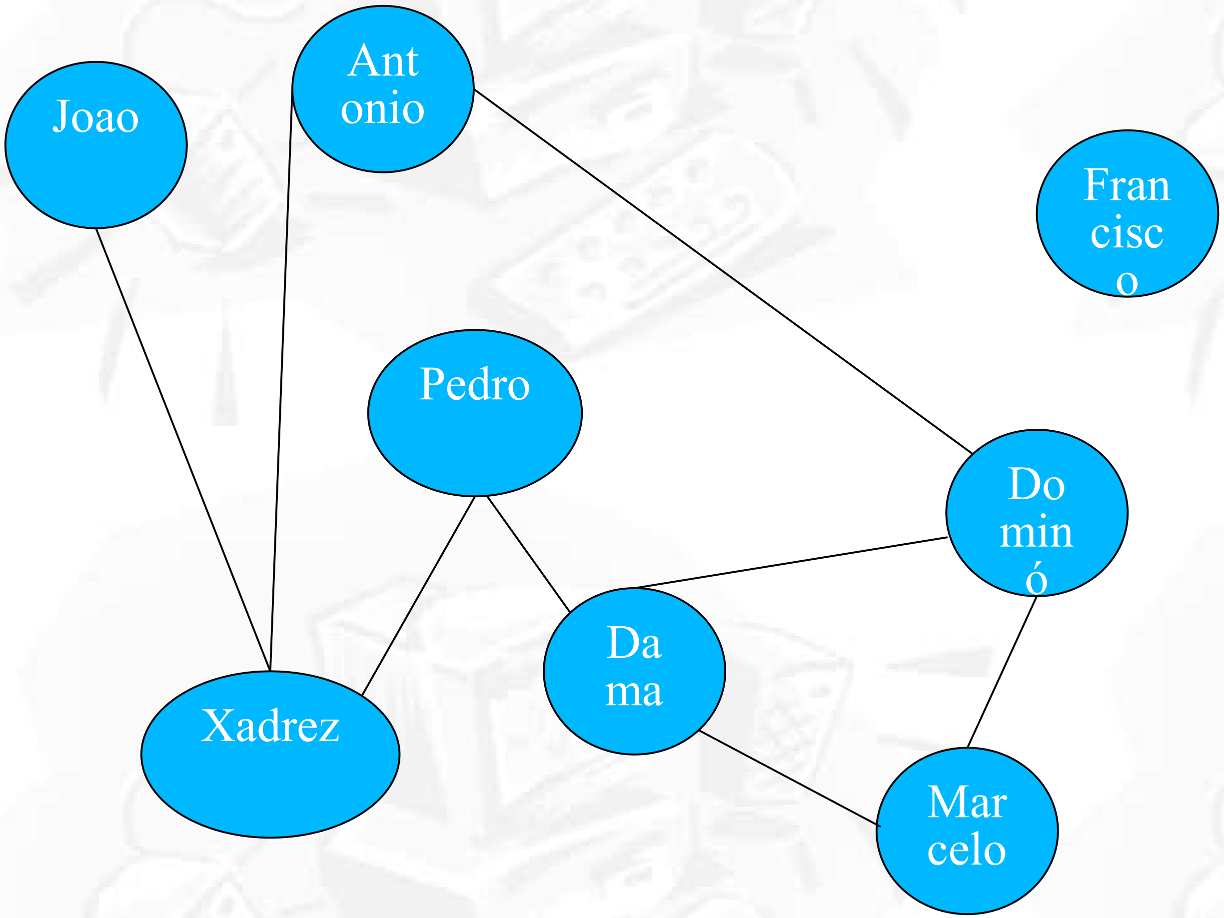
Marcelo não joga xadrez

➢Represente as conexões possíveis dos jogadores com os jogos.



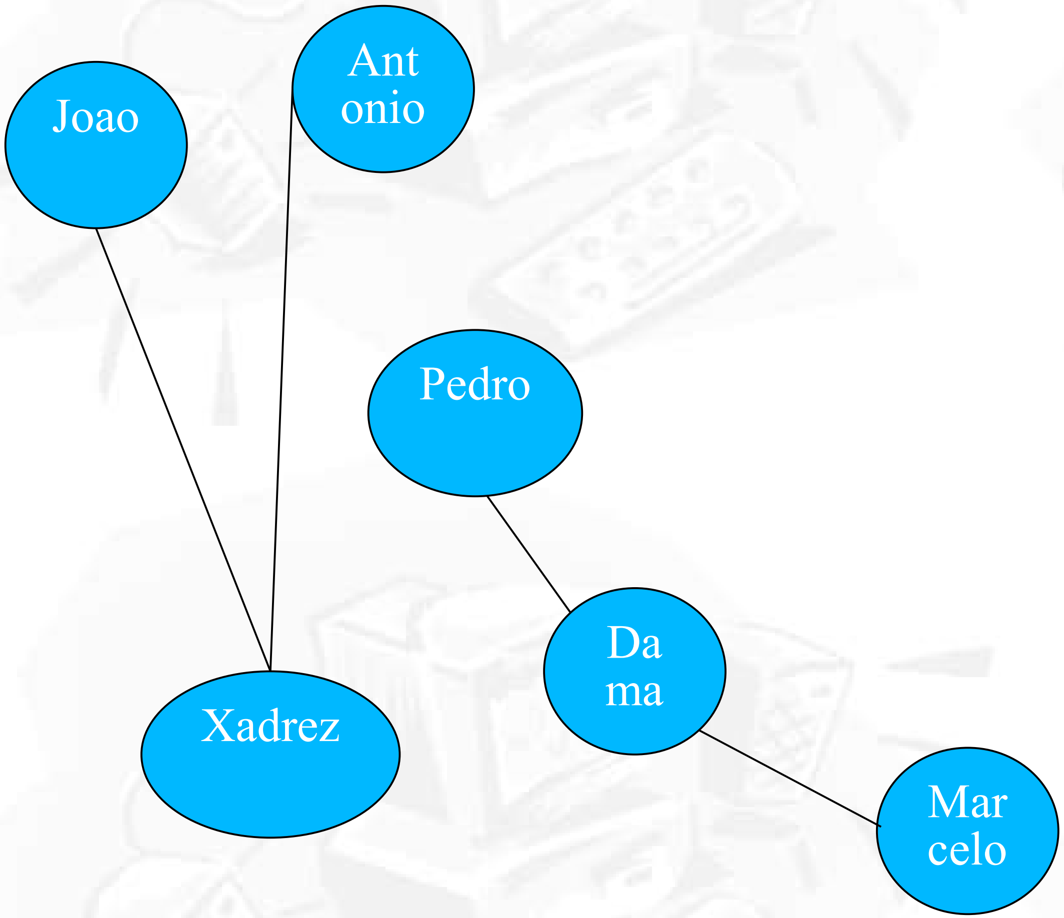
Francisco não joga nada

- Represente todas as possibilidades de um amigo jogar com os demais. Defina V e E.



Xadrez
Joao – Antonio
Pedro - Joao
Joao Antonio Pedro
....

- Defina um subgrafo em que todos, menos Francisco, joguem ao mesmo tempo.



FIM