Chapter 3
Uncertainty and Decision (不確定性與決策)

在正式談到賽局論之前，我們先插入一個預備的章節，談談 preference order 及 utility function．

3.1 Preferences (偏好關係)

這一節我們想簡單地介紹一下何謂二元關係．二元關係的直覺想法很簡單，就是檢驗兩個元素是否滿足某些關聯．

Definition 3.1: A binary relation (二元關係) R on A assigns to every ordered pair $(a_1, a_2) \in A \times A$ precisely one of the statements $a_1 R a_2$ or $a_1 \not R a_2$.

二元關係和你們大多數人以前所學的的東西有相當大的不同，一個重點是：順序很重要．哪一個在前面，哪一個在後面會有不同的意義．但說穿了，就是個 $A \times A$ 中的子集合，只是要注意符號 $a_1 R a_2$．一般我們習慣用 $a_1 R a_2$ 來代表二元關係，有時會簡單地用 $(a_1, a_2) \in R$ 來表示．一如底下所示．

Notation 3.2: We can view R as a subset of $A \times A$. The relation $a_1 R a_2$ holds if and only if $(a_1, a_2) \in R \subset A \times A$.

將 R 視為 $A \times A$ 的子集是比較簡單的看法，對於初學者我會建議用 $A \times A$ 的子集來看會比較容易理解．底下看些例子．

Example 3.3: (1) 假設 $A = \mathrm{R}$，對 $(a_1, a_2) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R}$，定義

$$a_1 R a_2 \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 \leq a_2.$$

也就是說，binary relation $R = \{(a_1, a_2) : a_1 \leq a_2\}$.

(2) 考慮 A 為所有人類所形成的集合，令

$$a_1Ra_2 \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 \text{ 是 } a_2 \text{ 的兒子.}$$

則 $R = \{(a_1, a_2) : a_1 \text{ 是 } a_2 \text{ 的兒子}\}$ 是個二元關係・

(3) 假設 A 在股票市場中所有的投資策略所形成的集合，定義 a_1Ra_2 這個關係為利用 a_1 這個投資策略在一年後比用 a_2 這個投資策略賺較多的錢・這個很明顯是個二元關係・

由這些例子我們可以看出 binary relation 不是只可以討論數字，任何東西都可在討論範圍內，如 (2) 中的人類，(3) 中的投資策略皆在討論範圍中・再次重申一次，在 binary relation 中，順序很重要，例如在上例 (2) 中，a_1Ra_2 表示 a_1 是 a_2 的兒子，而 a_2Ra_1 則表示 a_2 是 a_1 的兒子，兩個完全是不同意義・在上例 (3) 中，a_1Ra_2 及 a_2Ra_1 的意思更是恰好相反・

底下介紹在 binary relation 中常用的一些基本名詞與定義・

<u>Definition 3.4</u>: A binary relation R on A is said to be

(1) <u>reflexive</u> (<u>反身性</u>) if aRa for all $a \in A$.

(2) <u>irreflexive</u> (<u>無反身性</u>) if for every $a \in A$, $(a, a) \notin R$.

(3) <u>symmetric</u> (<u>對稱性</u>) if for all $a_1, a_2 \in A$ with a_1Ra_2, then a_2Ra_1.

(4) <u>asymmetric</u> (<u>不對稱性</u>) if there is no $a_1, a_2 \in A$ such that a_1Ra_2 and a_2Ra_1.

(5) <u>transitive</u> (<u>遞移性</u>) if a_1Ra_2 and a_2Ra_3, then a_1Ra_3 for all $a_1, a_2, a_3 \in A$.

(6) <u>negative transitive</u> (<u>負遞移性</u>) if a_1Ra_2 and $a_3 \in A$, then either a_1Ra_3, or a_3Ra_2, or both must hold.

(7) <u>complete</u> (<u>完備性</u>) if for all $a_1, a_2 \in A$, either a_1Ra_2 or a_2Ra_1 or both.

這幾個定義是在討論二元關係時常用的基本性質，組合地利用這幾個基本性質，我們可以定義幾個比較常用，比較複雜的集合・

Definition 3.5: (1) A binary relation is called a (strict) partial ordering (偏序) if it is irreflexive and transitive.

(2) A relation is called an equivalence relation (等價關係) if it is reflexive, symmetric, and transitive.

這兩個定義是在二元關係中比較常用且有名的．Partial ordering (偏序) 所強調的是有部分的 order 存在，而非 total order． 差別在於可排序的元素的多寡，是否所有元素均可排序．而在數學上，equivalence relation 是非常有用的，利用等價關係我們可以將集合做適當的分類，分成數個 equivalence classes (等價類)．但在 game theory 中，我們比較常用的二元關係相關的性質是 preference order/preference relation (偏好關係)．如何定義偏好關係？想想應該需要哪些條件才能叫偏好關係？

一個偏好關係的直覺想法：比較兩方案到底哪個比較好？直覺的想法是：A 方案比 B 好而且 B 方案比 A 好這種情況不會發生；也就是說，必須有 asymmetry 的性質．第二是自己不會比自己好，所以必須有 irreflexive (所以不可能會是個等價關係)．第三個很顯然是有遞移性，觀察這幾個性質，我們至少知道偏好關係必須是個 partial ordering．但除了 partial ordering 之外，還必須再加上些別的性質．

真正偏好關係的定義如下：

Definition 3.6: A preference order (or preference relation, 偏好關係) on A is a binary relation $\succ$ with asymmetry and negative transitivity.

不對稱性講的是如果認為 x 比 y 好的話，那麼 y 就不會比 x 好，這是個很直覺的假設，因為 x 比 y 好，y 就不可能會比 x 好．負遞移性是說如果 x 比 y 好， z 是另外一個比較的東西，那麼 z 跟 x、y 的關係一定會是下面三種狀況之一，一個是 x 比 z 好，一個是 z 比 y 好，或者是兩個都成立。這個假設的原因是要避免 x 比 y 好，y 比 z 好，可是 z 又比 x 好這種現象發生．

如之前所提，我們有底下的結果．

Lemma 3.7: If $\succ$ is a preference order, then $\succ$ is a partial ordering.

Proof: (1) Asymmetric $\Longrightarrow$ irreflexive: 如果 $\succ$ 不是 irreflexive，那麼會存在個 $a \in A$ 使得 $a_1 = a \succ a = a_2$．這表示 $a_2 = a \succ a = a_1$，這會和 asymmetric 的定義相矛盾．

(2) 檢驗 transitivity: 若 $a_1 \succ a_2$， $a_2 \succ a_3$．對 $a_1 \succ a_2$，$a_3 \in A$，利用負遞移性 (negative transitivity)，我們知道 $a_1 \succ a_3$ 或 $a_3 \succ a_2$．因為 $a_2 \succ a_3$ 及 asymmetric， 產生的唯一一個結果是 $a_1 \succ a_3$，這代表遞移性 (transitivity) 成立．

由 (1) 跟 (2) 可得 $\succ$ 是個 partial ordering．

看些 preference order 的例子．

Example 3.8: (1) A 為所有的人類所形成的集合．定義

$$a_1 \succ a_2 \qquad :\Longleftrightarrow \qquad a_1 \text{ 比 } a_2 \text{ 矮}.$$

那麼 $\succ$ 是個偏好關係．

(2) 令 $A = \mathrm{R}^n$．若 $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \in \mathrm{R}^n$，定義

$$a_1 \succ a_2 \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \text{對所有的 } j = 1,2,\ldots,n, \quad a_{1j} > a_{2j}.$$

那麼 $\succ$ 是個 partial ordering，但不是個 preference order，也就是說，這個例子是 Lemma 3.7 反方向的反例．可以檢驗一下：

(a) irreflexive: 很顯然對所有的 $a \in \mathrm{R}^n$，$a \not\succ a$．

(b) transitive: 若 $a_1 \succ a_2$, $a_2 \succ a_3$，則對所有的 $j = 1,2,\ldots,n$, $a_{1j} > a_{2j}$ 且 $a_{2j} > a_{3j}$．所以對所有的 $j = 1,2,\ldots,n$, $a_{1j} > a_{3j}$．因此，$a_1 \succ a_3$．

(c) 若 $a_1 = (1,1)$, $a_2 = (3,2)$, 那麼 $a_2 \succ a_1$，但對 $a_3 = (-1,4) \in \mathrm{R}^2$，$a_2 \not\succ a_3$ 且 $a_3 \not\succ a_1$．所以 negative transitivity 並不滿足．

(3) $A = [0,1] \times [0,1]$．關係 $\succ$ 定義成

$$(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2) :\Longleftrightarrow x_1 > y_1, \text{ 或 } x_1 = y_1 \text{ 且同時 } x_2 > y_2,$$

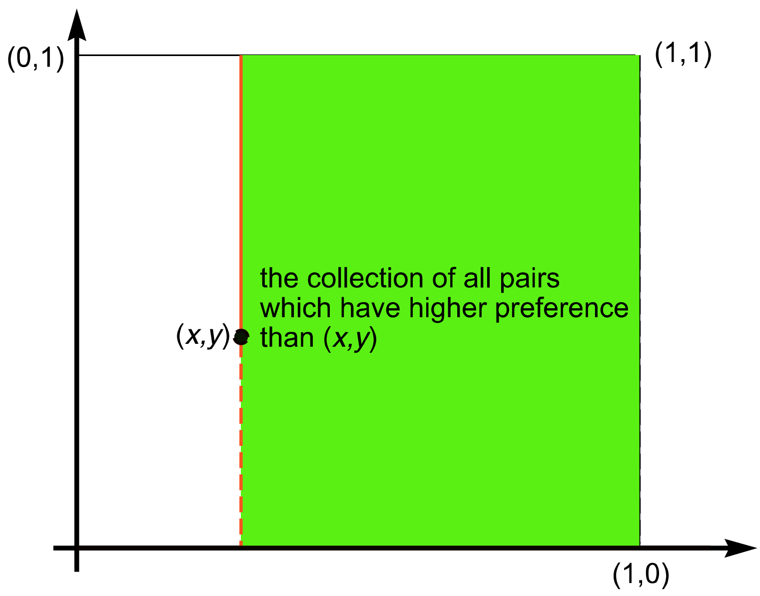
對所有的 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in A$．在圖庫 3.1 中我們標出了在 $\succ$ 下所有比給定的 (x, y) 點 preference 高的點．這個 $\succ$ 是個 preference order． 我們將這個 preference order 稱之為辭典偏好關係 (lexicographic preference relation)．

(4) 若 A 代表所有的國家，國家的排序方法就有很多種，可以根據國家的人口來排序，例如 $x \succ y$ 就代表 x 的人口比 y 多，或者是根據國家的面積、男女比例來排序，這些都是可以評比兩個國家的方法。

(5) 一個最簡單的 preference order：考慮 $A = \mathbb{R}$，$\succ = >$，那麼 $\succ$ 就是個 preference order．

Preference order $\succ$ 的想法同 $\mathbb{R}$ 上的 $>$ 一般，而如同 $\mathbb{R}$ 上的 $>$，應該也會有個類似$\mathbb{R}$ 上的 $\geq$ 的符號．

圖庫 **3.1** Example 3.8 (3)



Definition 3.9: A preference order $\succ$ on A induces a corresponding weak preference order (弱偏好關係) $\succeq$ defined by

$$x \succeq y \quad :\Longleftrightarrow \quad y \nsucc x\,.$$

and an indifference relation (無差別關係) $\sim$ given by

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad x \succeq y \text{ and } y \succeq x\,.$$

Weak preference order $x \succeq y$ 的意思是 y 不比 x 好，也就是說 x 不比 y 差．而 indifference relation 則表示 x 和 y 對我們來說沒有什麼差別．

Remark 3.10: (1) $a_1 \succeq a_2$ 代表的是 $a_1 \succ a_2$ 或 $a_1 \sim a_2$．

(2) $\succ$ 是個 preference order 若且唯若 $\succeq$ 滿足 completeness (完備性) 及 transitivity (遞移性)．

(3) $\sim$ 是個等價關係 (equivalence relation)．

3.2 Utility representation (效用函數表現法，數值表現法)

上一節介紹了偏好關係、弱偏好關係及無差別關係，但這個關係存在一些問題．若單純利用這些關係，想再進一步討論會有些麻煩．因此比較簡單的想法是將這些關係用數字化表示，因此有底下數值表現法的定義．

Definition 3.11: A utility representation (numerical representation， 效用函數表現法，數值表現法) of a preference order $\succ$ is a function $U : A \longrightarrow \mathrm{R}$ such that

$$x \succ y \qquad \Longleftrightarrow \qquad U(x) > U(y)\,.$$

This function $U : A \longrightarrow \mathrm{R}$ is called a utility function (效用函數) of $\succ$．

Utility function 這個名詞在經濟及財務上經常會出現，但在不同學門中，定義也不盡相同．在這裡的想法是將 preference 中每個要比的元素用個數字來表示，畢竟數字比大小是比較簡單的，而且在將來要求最佳投資策略時非常有用．

Example 3.12: (1) 如 Example 3.8 (1) 中所提，A 為所有的人類所形成的集合，

$$a_1 \succ a_2 \qquad :\Longleftrightarrow \qquad a_1 \text{ 比 } a_2 \text{ 矮}.$$

我們可以定義 $U(a) = 300 - a$ 的身高．很容易可以檢驗出 U 是個效用函數．

(2) 令 $A = \{1,2,3,4,5\}$ 及

$$i \succ j \qquad :\Longleftrightarrow \qquad i < j\,.$$

定義 $U(i) = 5 - i$．那麼 U 是個效用函數．

$\mathscr{Z}$ 是實驗所有齣戲的結果所形成的集合，尚未數字化．例如丟擲一顆銅板，$\mathscr{Z} = \{H, T\}$，並非數字．利用 numerical representation 可將單純的偏好關係 $\succ$ 改成數字．

Preference order $\succ$ 的 numerical representation U 並非唯一的．若 U 是 $\succ$ 的一個數值表現法且 f 是個嚴格遞增函數，則 $\tilde{U}(x) := f(U(x))$ 同樣也是 $\succ$ 的 numerical representation．例如， $aU(x) + b$ ($a > 0$) 也是個 $\succ$ 的 numerical representation．

底下的這個 proposition 提供了 preference order 與 numerical representation 之間的關係．

Proposition 3.13: (1) If $\succ$ has a utility representation, then $\succ$ is a preference order.

(2) If A has only finite elements and $\succ$ is a preference order, then $\succ$ has a utility representation.

簡單地講，

$$\text{numerical representation} \quad \Longrightarrow \quad \text{preference order}$$

但反方向並不一定會成立，反方向必須加條件，例如 A 中只有有限多個元素．

一個很自然的問題：反方向有沒有反例；也就是說，每個 preference order 都有 numerical representation 嗎？答案是 No！反例將於下個例子中說明．

Example 3.14: 如 Example 3.8 (3)，令 $A := [0,1] \times [0,1]$，$\succ$ 為定義在 A 上的一個 preference order，定法為

$$(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad x_1 > y_1, \ \text{亦或} \ x_1 = y_1 \ \text{且同時} \ x_2 > y_2 .$$

底下我們要證明 $\succ$ 並沒有 numerical representation．

假設 $\succ$ 有個 numerical representation U．對 $\alpha \in [0,1]$ ，令

$$d(\alpha) := U(\alpha,1) - U(\alpha,0) .$$

那麼對於所有 $\alpha \in [0,1]$，$d(\alpha) > 0$．很顯然，

$$[0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \alpha \in [0,1] : d(\alpha) > \frac{1}{n} \right\} . \tag{2}$$

定義 $A_n = \left\{ \alpha \in [0,1] : d(\alpha) > \dfrac{1}{n} \right\}$，由 (2) 式我們知道至少要有一個 n_0 會使得 A_{n_0} 中會有無窮多個元素．對任何的 $N \in \mathrm{N}$，找出 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N \in A_{n_0}$ 使得 $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_N$．因為對所有的 α_i 來講，$(\alpha_{i+1},0) \succ (\alpha_i,1)$．所以，

$$U(\alpha_{i+1},0) - U(\alpha_i,0) > U(\alpha_i,1) - U(\alpha_i,0) = d(\alpha_i) > \frac{1}{n_0}.$$

這表示

$$\begin{aligned} U(1,1) - U(0,0) &= \underbrace{U(1,1) - U(\alpha_N,0)}_{>0} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N-1} \underbrace{\big(U(\alpha_{i+1},0) - U(\alpha_i,0)\big)}_{>1/n_0} + \underbrace{U(\alpha_1,0) - U(0,0)}_{>0} \\ &> \frac{N-1}{n_0}. \end{aligned}$$

因為 N 可以是任意自然數，所以 $U(1,1) - U(0,0)$ 一定等於 ∞．這很顯然和 $U : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathrm{R}$ 是個函數矛盾．所以假設錯誤．因此我們可證得 $\succ$ 並沒有 numerical representation．

3.3 Expected utility (期望效用理論)

這一節要談的是一個特殊的偏好關係數值表現法：expected utility (期望效用)．

3.3.1 Preferences over lotteries

考慮個集合 $\mathscr{Z}$ ($\mathscr{Z}$ 不一定只擁有 finite 多個元素)．假設在 $\mathscr{Z}$ 上可以定義機率．

Definition 3.15: The smallest subset $V \subset \mathscr{Z}$ with $\mathrm{P}(V) = 1$ is called the support (台集) of P, i.e., $V = \mathrm{supp}(\mathrm{P})$.

Support 這個名詞在數學中經常在不同的學科出現，如 support of function 等等．說穿了，support 就是將所有值等於 0 的點排除在外．底下舉個例子．

Example 3.16: 假設 $\mathscr{Z} = \{1,2,3,...,11\}$．定義個在 $\mathscr{Z}$ 上的機率 P 滿足

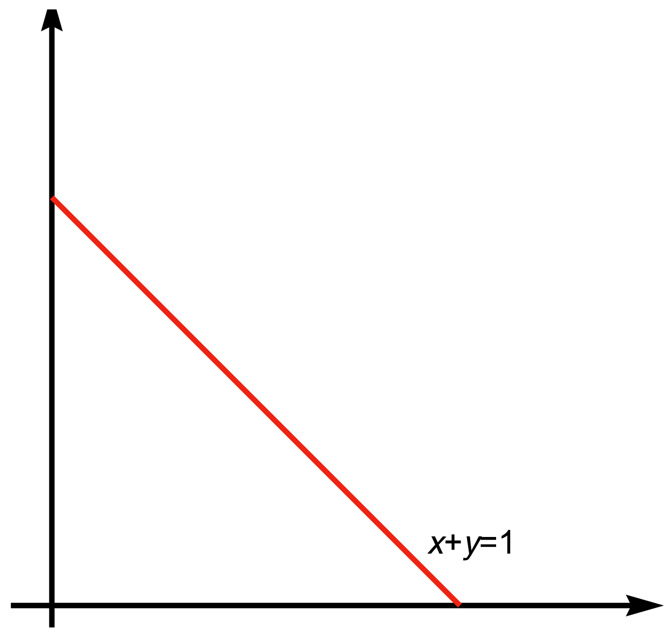
$$\mathrm{P}(\{1\}) = \mathrm{P}(\{2\}) = \cdots = \mathrm{P}(\{10\}) = \frac{1}{10}, \qquad \mathrm{P}(\{11\}) = 0.$$

則 $\mathrm{supp}(\mathrm{P}) = \{1,2,3,...,10\}$.

Definition 3.17: (1) We call a probability a simple probability (簡單機率) if it has a finite support.

(2) A simple probability on $\mathscr{Z}$ is referred to as a simple lottery (簡易抽籤，簡單樂透). Denote by $\mathscr{P}$ the set of all simple lotteries.

圖庫 3.2 Simple lottery 的集合 Δ^{L-1}



$L = 2$： $\Delta^1 = \{(x,y) : x + y = 1,\ x, y \geq 0\}$

Simple probability 及 simple lottery 是很簡單的概念，單指機率集中在有限多個點．所以若 $\mathscr{Z}$ 中只有有限個元素，那麼定義在 $\mathscr{Z}$ 上的任何機率都是 simple probability．

Remark 3.18: 假設 $\mathscr{Z}$ 中恰好有 L 個元素，也就是說，$\mathscr{Z} = \{z_1, z_2, \ldots, z_L\}$．那麼定義在 $\mathscr{Z}$ 上所有的 (simple) lotteries 為

$$\mathscr{P} = \Delta^{L-1} = \left\{ (p_1, p_2, \ldots, p_L) \in \mathrm{R}^L : \sum_{j=1}^{L} p_j = 1,\ \text{其中}\ p_j = \mathrm{P}(\{z_j\}) \geq 0\ \text{對所有的}\ j \right\}.$$

$L = 2,3$ 的狀況可見圖庫 3.2．

Definition 3.19: Let $P, P^* \in \mathscr{P}$, $\alpha \in [0,1]$, we call probability $\alpha P + (1-\alpha)P^*$ the compound lottery (組合彩券，組合樂透).

Example 3.20: 假設 $\mathscr{X} = \{1,2,3,4\}$, 在 $\mathscr{X}$ 上可定義機率，例如

$$P(1) = \frac{1}{2}, \qquad P(2) = \frac{1}{4}, \qquad P(3) = \frac{1}{4}, \qquad P(4) = 0,$$

$$P^*(1) = \frac{1}{3}, \qquad P^*(2) = 0, \qquad P^*(3) = \frac{1}{3}, \qquad P^*(4) = \frac{1}{3}.$$

那麼 $Q = \frac{2}{3}P + \frac{1}{3}P^*$ 是個 compound lottery, 明確地來看，

$$Q(1) = \frac{4}{9}, \qquad Q(2) = \frac{1}{6}, \qquad Q(3) = \frac{5}{18}, \qquad Q(4) = \frac{1}{9}.$$

Definition 3.21: The preference order $\succ$ on $\mathscr{P}$ is said to satisfy the von Neumann-Morgenstern axioms if it satisfies the following three properties:

(1) (rational preference) $\succ$ is a partial ordering satisfying

$$P_2 \succ P_1, P_2 \not\succ P_3 \qquad \Longrightarrow \qquad P_3 \succ P_1 \qquad \text{for all } P_1, P_2, P_3 \in \mathscr{P}.$$

(2) (independent, 獨立公設) If $P, P^*, Q \in \mathscr{P}$, $P \succ P^*$, then for all $\alpha \in [0,1]$,

$$\alpha P + (1-\alpha)Q \succ \alpha P^* + (1-\alpha)Q.$$

(3) (continuity, 連續公設) If $P \succ P^* \succ P^{**}$, then there exist $\alpha, \beta \in (0,1)$ such that

$$\alpha P + (1-\alpha)P^{**} \succ P^* \succ \beta P + (1-\beta)P^{**}.$$

Example 3.22: Rational preference 這個假設是為了避免 $P_1 \succ P_2$， $P_2 \succ P_3$，但卻有 $P_3 \succ P_1$ 的情況發生，因為在這種狀況下不可能找出最佳解．至於獨立公設與連續公設並不一定永遠是對的，例如

(1) 獨立公設會出問題的例子：塗油漆的例子．某人最喜歡的顏色是綠色，再來是黃色及藍色．現在有兩種油漆給他選：黃色及藍色．很顯然， 黃色 $\succ$ 藍色．現在同時加入一半的黃色，若獨立公設正確的話，應該是

$$\text{黃色} = \frac{1}{2}\text{黃色} + \frac{1}{2}\text{黃色} \succ \frac{1}{2}\text{藍色} + \frac{1}{2}\text{黃色} = \text{綠色}．$$

但前面我們也講了，他最喜歡的是綠色；這很顯然是矛盾的！所以獨立公設並不是永遠是對的．另外再舉一個例子：在玩梭哈 (Show Hand, Five-Card Stud) 時，發一張牌的狀況，顯然 $A \succ Q$，但若第二張牌也是 Q 的話，很明顯

$$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}Q \prec \frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}Q．$$

所以獨立公設並不成立．

(2) 連續公設會出問題的例子：其中某種情形特別好或特別差的時候會出狀況！例如， P 是撿到兩塊錢，P* 為沒事發生，P** 則為死掉．很顯然，我們可以得到 $\mathrm{P} \succ \mathrm{P}^* \succ \mathrm{P}^{**}$，但我想無論 α 的值是多少，應該不可能有 $\alpha\mathrm{P} + (1-\alpha)\mathrm{P}^{**} \succ \mathrm{P}^*$ 的情形發生．所以連續公設並不是永遠是對的．

3.3.2 Expected utility theorem

Theorem 3.23: (Expected utility theorem) Let $\succ$ be a preference order on $\mathscr{P}$. Then $\succ$ satisfies the von Neumann-Morgenstern axioms if and only if $\succ$ has a utility representation

$$U(\mathrm{P}) = \sum_{z \in \mathscr{Z}} u(z)\mathrm{P}(z), \tag{1}$$

where u is a real-valued function defined on $\mathscr{Z}$.

這代表每一個在 $\mathscr{P}$ 上的 preference order 都會對應到一個函數 u．這個定理的證明有些複雜，我們在底下僅大約地介紹一下．

Sketch proof: 稍後再補．

這裏需要注意的是 U 及 u 這兩個函數·很多人會將這兩個函數的角色混淆，最簡單的分辨方法是：U 的定義域在 $\mathscr{P}$ 上，而 u 的定義域則在在 $\mathscr{Z}$ 上·這兩個函數也分別有其特殊的名稱·

Definition 3.24: The function U in (1) is called a von Neumann-Morgenstern expected utility function and u is sometimes called the Bernoulli utility function (伯努利效用函數) associated with U.

幾個簡單的性質·

Remark 3.25: (1) The function u in (1) is not unique, e.g., u and $u+1$ can represent the same preference order. However, u is unique up to a positive transformation, i.e., if v is the Bernoulli utility function for the same preference order $\succ$, then there exists $a>0$ and $b \in \mathrm{R}$ such that

$$v(z) = au(z) + b, \qquad \text{for all } z \in \mathscr{Z}.$$

(2) U is linear in $\mathscr{P}$, i.e., for every $a, b \in \mathrm{R}$ with $a\mathrm{P} + b\mathrm{Q} \in \mathscr{P}$, then we have

$$U\left(a\mathrm{P} + b\mathrm{Q}\right) = aU(\mathrm{P}) + bU\left(\mathrm{Q}\right).$$

但在這裡我們需要注意的是這畢竟只是理論上的結果，但在實際的情況會有問題·在這章的最後我們舉個例子來看·

Example 3.26: (Allais paradox) 考慮 $\mathscr{Z} = \{z_1, z_2, z_3\} = \{250000, 50000, 0\}$ 以及底下的四個機率

$$\mathrm{P}(250000) = 0, \qquad \mathrm{P}(50000) = 1, \qquad \mathrm{P}(0) = 0;$$

$$\mathrm{Q}(250000) = \frac{1}{10}, \qquad \mathrm{Q}(50000) = \frac{89}{100}, \qquad \mathrm{Q}(0) = \frac{1}{100};$$

$$\mathrm{P}'(250000) = 0, \qquad \mathrm{P}'(50000) = \frac{11}{100}, \qquad \mathrm{P}'(0) = \frac{89}{100};$$

$$Q'(250000) = \frac{1}{10}, \qquad Q'(50000) = 0, \qquad Q'(0) = \frac{9}{10}.$$

對大多數的人來說，$P \succ Q$ 且 $Q' \succ P'$ (這是根據問卷得到的結果)．因為 $P \succ Q$，利用 Theorem 3.23，我們可得

$$U(P) = u(z_2) > \frac{1}{10}u(z_1) + \frac{89}{100}u(z_2) + \frac{1}{100}u(z_3) = U(Q),$$

將不等式左右兩邊都加上 $\frac{89}{100}(u(z_3) - u(z_2))$，所以

$$\frac{89}{100}u(z_3) + \frac{11}{100}u(z_2) > \frac{1}{10}u(z_1) + \frac{9}{10}u(z_3).$$

這表示 $U(P') > U(Q')$，因此 $P' \succ Q'$．很顯然和之前問卷的結果 $Q' \succ P'$ 矛盾．這個現象稱之為 Allais paradox．