Ciclo 3				COMPETENCIAS
1	**Lógica y teoría de conjuntos**	**1° sábado**	Proposiciones, negacion, conjunción, disyunción, condicional y bicondicional. Tablas de verdad	DESARROLLAR HABILIDADES Y CAPACIDAD DE ANÁLISIS, RAZONAMIENTO Y EL PENSAMIENTO LÓGICO EN LOS ESTUDIANTES PARA AFRONTAR Y SOLUCIONAR SITUACIONES DE SU ENTORNO
		2° sábado	Conjuntos. Notación, representaciones.	
		3° sábado	Operaciones entre conjuntos	
		4° sábado	Operaciones entre conjuntos	
		5° sábado	Problemas de aplicación	
2	**Sistemas numéricos**	**1° sábado**	Historia de los números. Sistemas numéricos en civilizaciones antiguas	IDENTIFICAR LOS NÚMEROS NATURALES Y USARLOS EN DIFERENTES CONTEXTOS Y REPRESENTARLOS DE DIFERENTES FORMAS.
		2° sábado	Sistema posicional	
		3° sábado	Operaciones	
		4° sábado	Suma y Resta. Propiedades	
		5° sábado	Multiplicación y división. Propiedades	
3	**Operaciones números enteros**	**1° sábado**	Potenciación, radicación. Concepto	IDENTIFICAR LOS NÚMEROS RACIONALES Y USARLOS EN DIFERENTES CONTEXTOS Y REPRESENTARLOS DE DIFERENTES FORMAS.
		2° sábado	Números enteros. Concepto y orden	
		3° sábado	Suma y resta de enteros	
		4° sábado	Multiplicación y división de enteros	
		5° sábado	Ecuaciones.	
4	**Números racionales**	**1° sábado**	Concepto. Representación.	IDENTIFICAR LOS NÚMEROS RACIONALES Y USARLOS EN DIFERENTES CONTEXTOS Y REPRESENTARLOS DE DIFERENTES FORMAS.
		2° sábado	Operaciones con números racionales. Suma y resta	
		3° sábado	Operaciones con números racionales. Multiplicación y división	
		4° sábado	Decimales. Concepto. Representación y operaciones	
		5° sábado	Aplicación de operaciones de números racionales.	

CENTRO EDUCATIVO CIENCIA

Módulo de Matemáticas Ciclo 3

CENTRO EDUCATIVO CIENCIA

Primer Periodo

Lógica y teoría de Conjuntos

¿Qué es la lógica?

• La definición del Diccionario General de la Lengua Española dice:
Disciplina que estudia los principios formales del conocimiento humano, es decir, las formas y las leyes más generales del pensamiento humano considerado puramente en sí mismo, sin referencia a los objetos. Los problemas principales de la lógica son las doctrinas del concepto, del juicio, del silogismo y del método.

Proposiciones

Una proposición es una afirmación con sentido completo de la cual se puede determinar que es cierta o que es falsa.

Ejemplo:
1. “La sal es un compuesto químico”
2. $10<14$
3. “11 es un número impar”
4. “El sol sale de noche”
5. $45+5=30$
6. “¿De que color es la pared?”

Las afirmaciones 1, 2, 3, 4 y 5. son proposiciones aunque no todas son verdaderas siguen siendo proposiciones.
A esta propiedad de las proposiciones de ser verdadera o falsa se le llama valor de verdad.
Las proposiciones se representan con letras minúsculas, usualmente p, q, r, s, t,...

Existen casos donde el sujeto del que se habla en la proposición no está definido o no se conoce, por lo que tiene una incógnita.

Podemos entonces retomar las proposiciones 3 y 4 utilizadas anteriormente,

“11 es un número impar”

“El sol sale de noche”

Que de acuerdo a lo explicado anteriormente, puede nombrarse así:

p: 11 es un número impar

q: el sol sale de noche

Ambas son proposiciones y por lo tanto tienen su respectivo valor de verdad, para este caso:

La proposición p es verdadera
La proposición q es falsa

La negación

Cada proposición puede ser negada, es decir, se puede cambiar la afirmación a un sentido contrario, a esto le llamamos la **negación** de la proposición.

Tomando los ejemplos anteriores

p: 11 es un número impar

q: el sol sale de noche

Sus respectivas negaciones son:

~p: 11 **no** es un número impar

~q: el sol **no** sale de noche

Para indicar que hacemos referencia a la negación de una proposición debemos utilizar el símbolo **"~"** y después el nombre de la proposición. En la estructura de la proposición agregamos la palabra "no", para indicar que esta cambia de sentido.

La negación de una proposición tendrá entonces un valor de verdad contrario al de la proposición inicial, así:

~p: 11 **no** es un número impar (F)

~q: el sol **no** sale de noche (V)

La conjunción y la disyunción

Las proposición se puede unir para conformar otra llamada proposición compuesta, esto se hace mediante conectores lógicos (y, o, entonces, sí y sólo si)

Cuando unimos proposiciones mediante el conector lógico "y" se dice que es una conjunción

Cuando unimos proposiciones mediante el conector lógico "o" se dice que es una disyunción

El conector lógico "y" se representa simbólicamente con ^

El conector lógico "o" se representa simbólicamente con v

Ejemplos:

Teniendo las proposiciones

p: 11 es un número impar

q: el sol sale de noche

Conjunción entre p y q

11 es un número impar y el sol sale de noche

De manera simbólica se puede expresar así

$$p \wedge q$$

Disyunción entre p y q

11 es un número impar o el sol sale de noche

De manera simbólica se puede expresar así

$$p \vee q$$

Al unir varias proposiciones formamos una nueva, cuyo valor de verdad depende del conector y de las siguientes tablas:

p	q	p^q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Esto significa que, si tenemos dos proposiciones unidas en una conjunción, la nueva proposición es verdadera si la primera y la segunda proposición son verdaderas. De lo contrario será Falsa

p	q	pvq
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Esto significa que, si tenemos dos proposiciones unidas en una disyunción, la nueva proposición es verdadera en todos los casos a menos que la primera y la segunda proposición sean falsas. Al utilizar la disyunción, al menos una de las dos proposiciones debe ser verdadera.

Las tablas utilizadas se conocen con el nombre de tablas de verdad y nos permiten establecer el valor de verdad de proposiciones compuestas.

Con lo cual las proposiciones compuestas

p^q es falsa. Teniendo presente que:

p: 11 es un número impar (V)

q: el sol sale de noche (F)

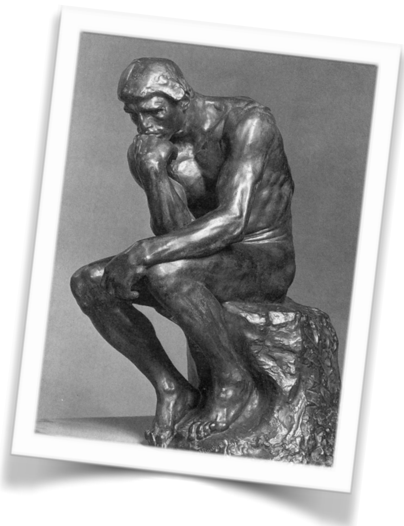
p	q	p^q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

pvq es verdadera. Teniendo presente que:

p: 11 es un número impar (V)

q: el sol sale de noche (F)

p	q	pvq
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F



El pensador (francés: Le Penseur) es una de las más famosas esculturas en bronce de Auguste Rodin

Condicional

Conector que funciona sobre dos valores de verdad, devuelve el valor de verdad falso, sólo cuando la primera proposición es verdadera y la segunda falsa; verdadero en cualquier otro caso.

Se representa con el símbolo $\rightarrow$

Teniendo las proposiciones

p: 11 es un número impar (V)

q: el sol sale de noche (F)

El condicional se representaría $p \rightarrow q$

Se leería: Si p entonces q

Tabla de verdad condicional

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional

Conector que funciona sobre dos valores de verdad, devuelve el valor de verdad falso cuando ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad y falso cuando tienen diferente valor.

Se representa con el símbolo $\leftrightarrow$

Teniendo las proposiciones

p: 11 es un número impar (V)

q: el sol sale de noche (F)

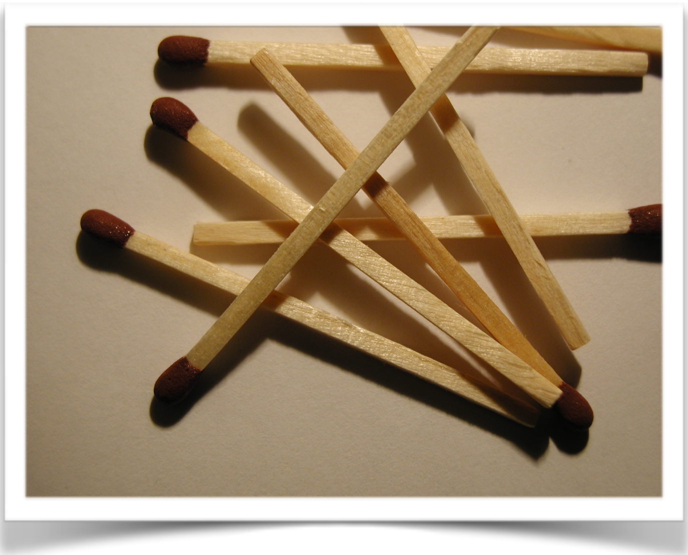
El bicondicional se representaría $p \leftrightarrow q$

Se leería: p sí y sólo si q

Tabla de verdad bicondicional

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

¿Qué es un Conjunto?



Un conjunto es un grupo de elementos u objetos especificados en tal forma que se puede afirmar con certeza si cualquier objeto dado pertenece o no a la agrupación. Para denotar a los conjuntos, se usan letras mayúsculas.

Cuando un elemento x_1 pertenece a un conjunto A se expresa de forma simbólica como:

$$x_1 \in A$$

En caso de que un elemento y_1 no pertenezca a este mismo conjunto se utiliza la notación:

$$y_1 \notin A$$

Existen cuatro formas de enunciar a los conjuntos:
1) Por extensión o enumeración: los elementos son encerrados entre llaves y separados por comas. Es decir, el conjunto se describe listando todos sus elementos entre llaves.
2) Por comprensión: los elementos se determinan a través de una condición que se establece entre llaves. En este caso se emplea el símbolo I que significa “tal que". En forma simbólica es:

$$A=\{x|x,P(x)=x_1,x_2,x_3,x_4\}$$

que significa que el conjunto A es el conjunto de todos los elementos x tales que la condición P(x) es verdadera, como x_1,x_2,x_3,x_4

3) Diagramas de Venn: son regiones cerradas que sirven para visualizar el contenido de un conjunto o las relaciones entre conjuntos.
4) Por descripción verbal: Es un enunciado que describe la característica que es común para los elementos.

Ejemplo:

Por comprensión

$$A=\{x|x,1<x<10,x\in\mathbb{N}\}$$

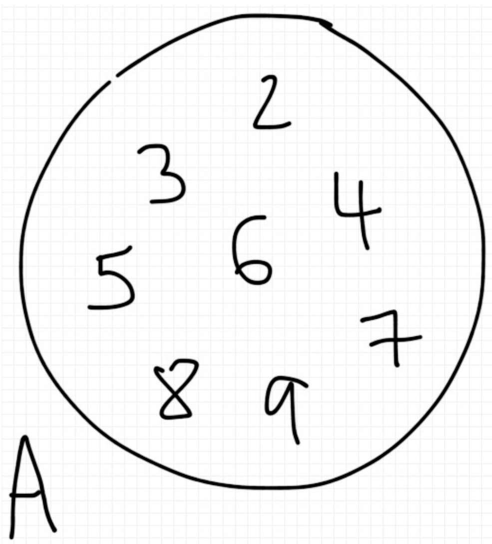
Por extensión

$$A=\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

Por descripción verbal

A es el conjunto con los números naturales mayores que 1 y menores que 10

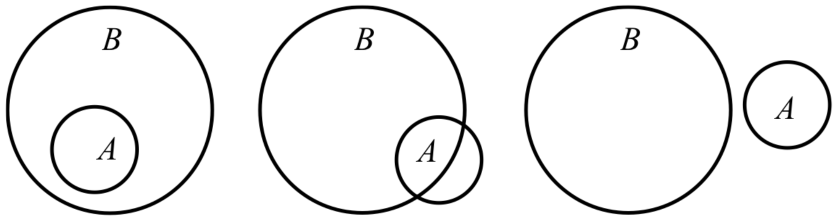
Por diagrama de Venn



Si cada elemento de un conjunto A es también un elemento del conjunto B, se dice que A es un *subconjunto* de B. La notación $A \subset B$ significa que A está incluido en B y se lee: "A es subconjunto de B" o "A está contenido en B".

Si no todos los elementos de un conjunto A son elementos del conjunto B, se dice que A no es subconjunto de B. En este caso la notación $A \not\subset B$ significa que A no es un subconjunto de B.

Gráficamente, esto es:



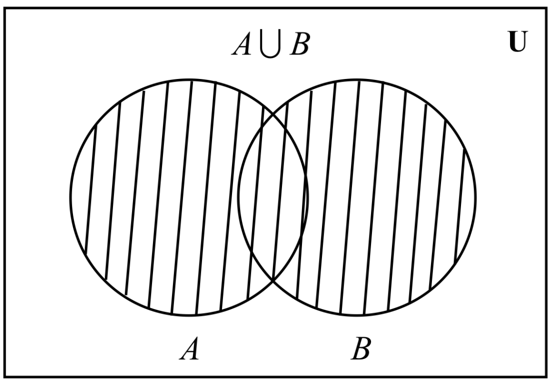
$A \subset B$	$A \not\subset B$	$A \not\subset B$
$B \not\subset A$	$B \not\subset A$	$B \not\subset A$

Operaciones entre conjuntos

- La *unión* de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos de A con todos los elementos de B sin repetir ninguno y se denota como $A \cup B$. Esto es:

$$A \cup B = \left\{ x \mid x \in A \quad o \quad x \in B \right\}$$

Gráficamente:



Ejemplo.

$A = \{mango, ciruela, uva, naranja, manzana, sandía\}$

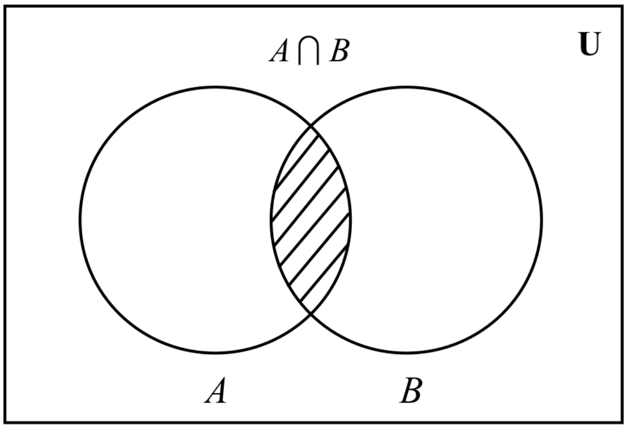
$B = \{durazno, melón, uva, naranja, sandía, plátano\}$

$A \cup B = \{mango, ciruela, uva, naranja, manzana, sandía, durazno, melón, plátano\}$

- La *intersección* de los conjuntos A y B es el conjunto de los elementos de A que también pertenecen a B y se denota como $A \cap B$. Esto es:

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \quad y \quad x \in B \}$$

Gráficamente:



Ejemplo.

$A = \{mango, ciruela, uva, naranja, manzana, sandía\}$

$B = \{durazno, melón, uva, naranja, sandía, plátano\}$

$A \cap B = \{uva, naranja, sandía\}$

Dos conjuntos son *ajenos* o *disjuntos* cuando su intersección es el conjunto vacío, es decir, que no tienen nada en común. Por ejemplo:

$A = \{mango, ciruela, uva, naranja, manzana, sandía\}$

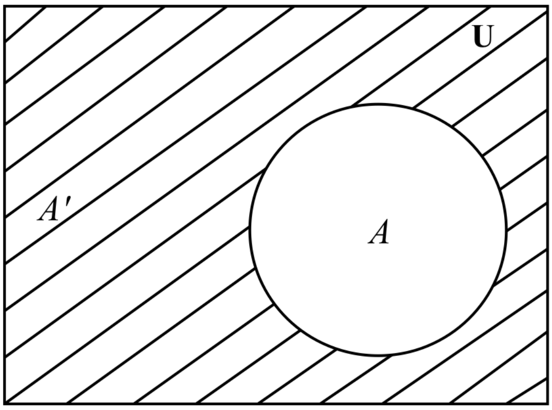
$E = \{limón, fresa, pera, mandarina, cereza\}$

$A \cap E = \phi$

- El *complemento* del conjunto A con respecto al conjunto universal U es el conjunto de todos los elementos de U que no están en A y se denota como A'. Esto es:

$$A' = \{ x \in U \mid x \notin A \}$$

Gráficamente:



Ejemplo.

$U = \{mango, kiwi, ciruela, uva, pera, naranja, cereza, manzana, sandía, durazno, limón, melón, plátano\}$

$A = \{mango, ciruela, uva, naranja, manzana, sandía\}$

$A' = \{kiwi, pera, cereza, durazno, limón, melón, plátano\}$

En este ejemplo se puede notar como $\eta(A) + \eta(A') = \eta(U)$

De esta definición, se puede advertir que se cumplen las siguientes expresiones:

$(A')' = A$

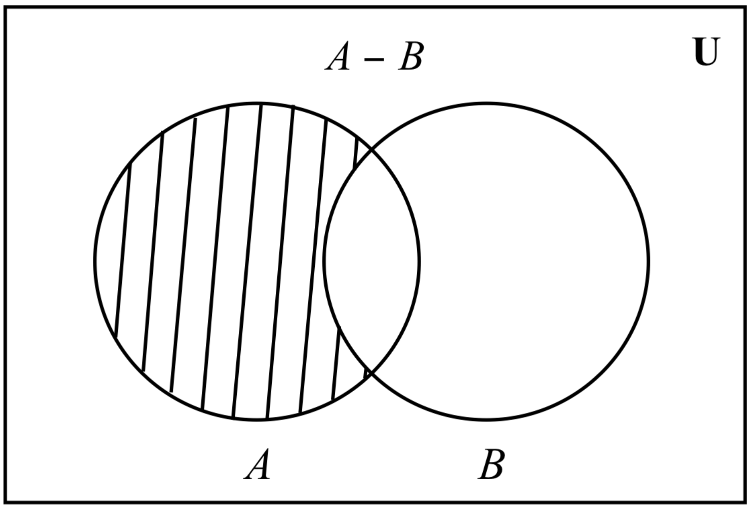
$\phi' = U$

$U' = \phi$

- La *diferencia* de los conjuntos A y B (en ese orden) es el conjunto de los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B y se denota como $A - B$. Esto es:

$$A - B = \{\, x \mid x \in A \quad y \quad x \notin B \,\}$$

Gráficamente:



Ejemplo.

$A = \{mango, ciruela, uva, naranja, manzana, sandía\}$

$B = \{durazno, melón, uva, naranja, sandía, plátano\}$

$A - B = \{mango, ciruela, manzana\}$

$B - A = \{durazno, melón, plátano\}$

Se puede advertir como $A - B \neq B - A$.

Ejemplo.

Sean los conjuntos:

$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n\}$

$A = \{a, d, e, g, h, k, l, n\}$

$B = \{a, c, f, g, k, l, m\}$

Obtener:

a) $A \bigcup B$ b) $A \bigcap B$ c) A'

d) B' e) $A - B$ f) $B - A$

g) $A' \bigcup B$ h) $A \bigcap B'$ i) $A' \bigcap B'$

j) $A' - B'$ k) $(A \bigcup B)'$ l) $(A \bigcap B)'$

Solución.

a) $A \bigcup B = \{a, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n\}$

b) $A \bigcap B = \{a, g, k, l\}$

c) $A' = \{b, c, f, i, j, m\}$

d) $B' = \{b, d, e, h, i, j, n\}$

e) $A - B = \{d, e, h, n\}$

f) $B - A = \{c, f, m\}$

g) $A' \bigcup B = \{a, b, c, f, g, i, j, k, l, m\}$

h) $A \bigcap B' = \{d, e, h, n\}$

i) $A' \bigcap B' = \{b, i, j\}$

j) $A' - B' = \{c, f, m\}$

k) $(A \bigcup B)' = \{b, i, j\}$

l) $(A \bigcap B)' = \{b, c, d, e, f, h, i, j, m, n\}$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1. El equipo de microfútbol del ciclo 3 del Centro Educativo Ciencia está formado por Pedro, Diego, Hugo, Carlos, Roberto, Rolando y Edgar. El equipo de Olimpiadas de Matemáticas de dicha clase está formado por Andrea, Diego, Cristina, José Rolando y Edgar. ¿Quiénes están en ambos equipos? ¿Quiénes están en al menos uno de los dos equipos? ¿Quiénes están en el equipo de fútbol-sala pero no en el de las olimpiadas? ¿Quiénes están únicamente en el equipo de las olimpiadas? ¿Quiénes están sólo en uno de esos dos equipos? Una vez respondidas las preguntas, expresa la situación y respuestas en términos de conjuntos.

2. Laura tiene discos de diferentes géneros musicales: pop, rock, punk, gothic, clásica y jazz. Su amiga Diana tiene discos de salsa, gothic, hip-hop, pop, metal e industrial. a)Luis, un amigo común, quería escuchar la música que le gusta a cada una de ellas, así que le prestaron un disco de cada uno de los géneros. ¿De qué géneros le han prestado los discos? b) Si Luis se decide a oir primero los discos que le gustan a ambas, ¿qué discos ha de oir?. Expresa la situación en términos de conjuntos.

3. Se preguntó a 50 padres de alumnos sobre los deportes que practicaban, obteniéndose los siguientes resultados: 20 practican sólo fútbol, 12 practican fútbol y natación y 10 no practican ninguno de estos deportes. Con estos datos averigua el número de padres que practican natación, el número de ellos que sólo practican natación y el de los que practican alguno de dichos deportes.

4. Se preguntó a 11 profesores del instituto acerca de sus preferencia por dos marcas de café instantáneo A y B y se obtuvieron los siguientes resultados: 7 prefirieron solo una de dichas marcas; el número de personas que prefirieron ambas marcas fue igual al número de personas que no prefirió ninguno de las dos; 3 personas manifestaron que no prefieren la A pero sí la B. Se desea saber: a) ¿Cuántas personas prefirieron la marca A? b) ¿Cuántas personas prefirieron sólo la B? c) ¿Cuántas personas manifestaron que les eran indistintas ambas marcas?

5. Se le preguntó a un grupo de 10 estudiantes sobre sus preferencias por dos marcas de refrescos, Vinea y Kofola y se obtuvieron los siguientes resultados: todos admitieron que les gusta alguno de los dos refrescos, 3 estudiantes manifestaron que les gusta Vinea pero no Kofola, 6 dijeron que no les gusta Kofola. Se desea saber: a) ¿cuántos de los encuestados les prefirieron Kofola? b) ¿ cuántos de los encuestados prefirieron Vinea? c) ¿Cuántos de los encuestados prefirieron Vinea o Kofola?

6. En una encuesta aplicada a 1.000 empleados de un centro comercial sobre el tipo de transporte que utilizan para ir de sus casas al trabajo se obtuvo la siguiente información:
   431 empleados utilizan metro.
   396 empleados utilizan autobús.

101 empleados utilizan metro y colectivo pero no autobús. 341 utilizan colectivos.
27 utilizan colectivo y autobús.
201 utilizan sólo metro.
37 utilizan los tres medios de transporte
Responda:
a) ¿Cuántos empleados utilizan metro o colectivo pero no autobús?
b) ¿Cuántos empleados utilizan sólo uno de los tres medios de transporte mencionados?
c) ¿Cuántos empleados utilizan sólo colectivo?
d) ¿Cuántosempleadosutilizancolectivoyautobús?
e) ¿Cuantos empleados no utilizan ningún medio de transporte?

8. Una población consume tres tipos de jabón: A, B y C. según una investigación de mercado, cuyos resultados se resumen en la tabla siguiente:

Marca	A	B	C	A y B	B y C	C y A	A, B y C	Ninguna de la tres
Nº de consumidores	109	203	162	25	41	28	5	115

Responda:
a) El número de personas consultadas.
b) El número de personas que sólo consumen la marca A
c) El número de personas que no consumen las marcas A o C.
d) El número de personas que consumen al menos dos marcas.

9. En una cierta empresa hay trabajadores pertenecientes a tres Instituciones financieras: Banco de Colombia, Santander y Estado. Sabiendo que 70 son del Banco de Colombia, 350 del Santander y el otro 50% de trabajadores al Banco Estado, además de que 30 trabajadores tienen cuenta en los tres Bancos 50 trabajadores tienen cuenta en el Banco de Colombia y Estado 160 trabajadores tienen cuenta en el Banco Santander y Estado 40 trabajadores tienen cuenta en el Banco de Colombia y Santander

Responda:
a) Número de clientes con cuenta solo en el Banco Estado
b) Número de clientes con cuenta solo en el Banco de Colombia
c) Número de clientes con cuenta solo en el Banco Santander
d) Número de clientes con cuenta en el Banco de Colombia y Santander
e) Número de clientes con cuenta en el Banco de Colombia o Estado y no en el Santander

10. Un grupo de jóvenes fue entrevistado acerca de sus preferencias por ciertos medios de transporte (bicicleta, motocicleta y automóvil). Los datos de la encuesta fueron los siguientes:

-Motocicleta solamente: 5
-Motocicleta: 38
-No gustan del automóvil: 9
-Motocicleta y bicicleta, pero no automóvil:3

-Motocicleta y automóvil pero no bicicleta: 20
-No gustan de la bicicleta: 72
-Ninguna de las tres cosas: 1
-No gustan de la motocicleta: 61

Responda:

1. ¿Cuál fue el número de personas entrevistadas?
2. ¿A cuántos le gustaba la bicicleta solamente?
3. ¿A cuántos le gustaba el automóvil solamente?
4. ¿A cuántos le gustaban las tres cosas?
5. ¿A cuántos le gustaba la bicicleta y el automóvil pero no la motocicleta?

Sistema de numeración

Los números naturales son los que usamos para contar y forman un conjunto infinito, un conjunto que no se acaba. Esto lo simbolizamos con puntos suspensivos que indican que esta colección sigue de la manera indicada, es decir sumando uno cada vez:

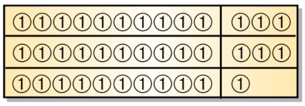
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …, 86, 87, 88, ..., 399, 400, 401,...,
1273, 1274, 1275, ...

Para escribir los números naturales usamos el sistema denumeración decimal. Recordemos cómo funciona. Necesitamos diez símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Estos números se llaman dígitos y se combinan para escribir otros números.

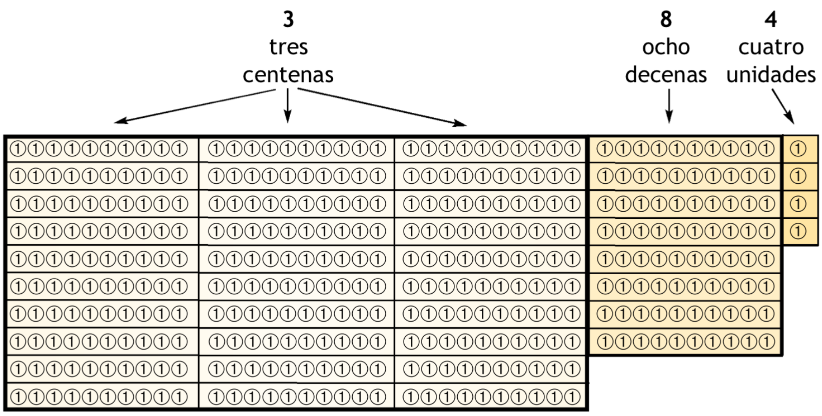
Si los objetos que contamos son nueve o menos usamos los dígitos para expresar esa cantidad.

Si los objetos que contamos son más de nueve, formamos grupos de diez en diez, llamados decenas. Anotamos cuántas decenas armamos y cuántas unidades sobraron, en ese orden.

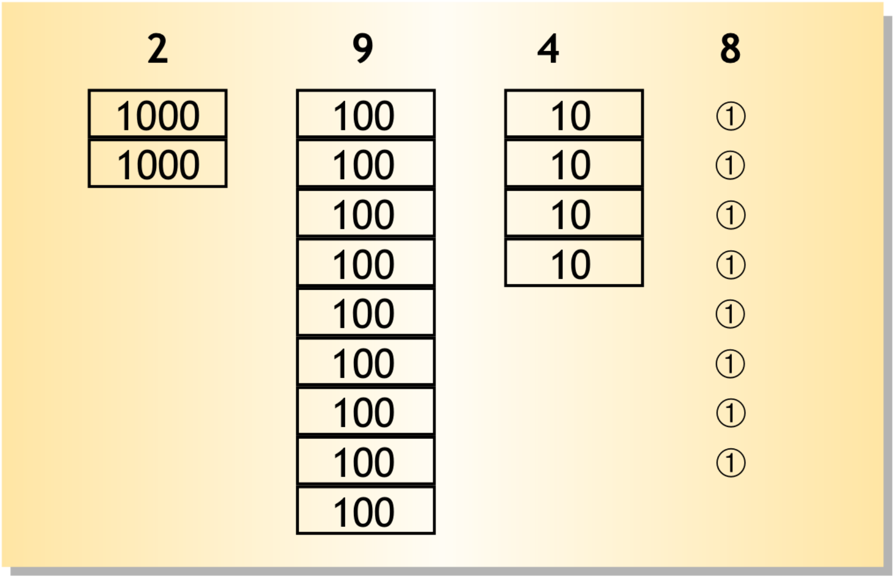
Por ejemplo, si tenemos treinta y siete pesos escribimos $37, es decir: tres grupos de diez, y siete unidades. Esto se muestra en el siguiente esquema:



Si tenemos más de 9 decenas volvemos a agrupar, ahora en grupos de diez decenas, o sea grupos de cien,llamados centenas o cientos. Escribimos la cantidad en centenas, decenas y unidades.
Por ejemplo, si tenemos trescientos ochenta y cuatro pesos escribimos $384, es decir: tres grupos de cien, ocho grupos de diez, y cuatro unidades, como se muestra en el siguiente esquema:



Si tenemos más de 9 grupos de cien volvemos a agrupar en grupos de diez centenas, o sea grupos de mil, y escribimos la cantidad en miles, centenas, decenas y unidades; por ejemplo, si tenemos dos mil novecientos cuarenta y ocho pesos escribimos $2948, es decir dos grupos de mil, nueve grupos de cien, cuatro grupos de diez, y ocho unidades.



Si se continúa este proceso en la misma forma, se pueden escribir números tan grandes como se quiera. Decimos que nuestro sistema de numeración es decimal porque agrupamos de diez en diez, y que es posicional porque la posición en que escribimos un dígito indica de qué tamaño es cada grupo, y el dígito indica cuántos de estos grupos tenemos.

Para leer y escribir un número agrupamos sus cifras en bloques de tres en tres, de derecha a izquierda, el bloque de las unidades, el de los millares o miles, el de los millones, el de los miles de millones, etc. Leemos cada bloque como un número de tres cifras y decimos en cuál bloque está. Por ejemplo, el número 987 123 654 se lee novecientos ochenta y siete millones, ciento veintitrés mil seiscientas cincuenta y cuatro unidades. El número 789 430 682, se lee setecientos ochenta y nueve millones, cuatrocientos treinta mil seiscientas ochenta y dos unidades.

Valores de las posiciones de los números en el sistema decimal y sus nombres

centenas de millón 100 000 000	decenas de millón 10 000 000	unidades de millón 1 000 000	centenas de millar 100 000	decenas de millar 10 000	unidades de millar 1 000	centenas 100	decenas 10	unidades 1
Bloque de los millones			Bloque de los miles			Bloque de las unidades		

Ejemplo de lectura del número 987 123 654

9	8	7	1	2	3	6	5	4
novecientos ochenta y siete *millones*			ciento veintitres *mil*			seiscientas cincuenta y cuatro *unidades*		

Ejemplo de lectura del número $ 345 500 200

3	4	5	5	0	0	2	0	0
trescientos cuarenta y cinco *millones*			quinientos *mil*			doscientos *(unidades) pesos*		

Ejemplo de lectura del número 2 257 000 Has.

		2	2	5	7	0	0	0
dos *millones*			doscientos cincuenta y siete *mil*			(cero) *(unidades) hectáreas*		

Ejemplo de lectura del número 789 430 682

7	8	9	4	3	0	6	8	2
setecientos ochenta y nueve *millones*			cuatrocientos treinta *mil*			seiscientas ochenta y dos *unidades*		

Con frecuencia se omite la palabra "unidades" o se sustituye por la unidad de medida que se está usando, por ejemplo decimos trescientos cuarenta y cinco millones quinientos mil doscientos pesos para expresar $345 500 200, decimos dos millones doscientas cincuenta y siete mil hectáreas para expresar 2 257 000 Has., y decimos ochenta y tres millones, seiscientos cincuenta y cuatro kilogramos para expresar 83 000 654 Kg. Cuando los tres números de un bloque son ceros, no se lee el nombre de ese bloque, como en el último ejemplo.
Entender bien cómo se leen y escriben los números es muy importante para poder hacer operaciones con ellos.

Vea la tabla anterior; en ella se presentan estas agrupaciones y algunos de los ejemplos anteriores.

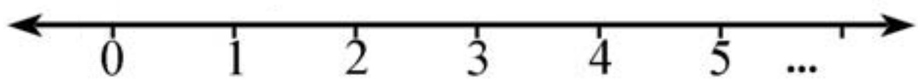
Orden en los números naturales

Un número natural es más grande que otro si usa más posiciones, es decir si tiene grupos más grandes.

Por ejemplo:
12 es más grande que 9, porque 12 usa dos posiciones y 9 sólo una
325 es más grande que 88, porque 325 usa tres posiciones y 88 sólo dos
1001 es más grande que 999, porque 1001 usa cuatro posiciones y 999 sólo tres

Si tenemos dos números naturales que usan la misma cantidad de posiciones tenemos que comparar los grupos más grandes primero, las cifras de la izquierda. Por ejemplo: ¿entre 35 y 47 cuál es el número más grande? Nos fijamos en el dígito de la izquierda y vemos que 35 tiene 3 decenas y que 47 tiene 4 decenas, entonces 47 es más grande que 35. Si las cifras de la izquierda son iguales nos fijamos en la siguiente hacia la derecha; por ejemplo 643 y 678 tienen la misma cantidad de centenas pero 643 tiene 4 decenas y 678 tiene 7 decenas, entonces 678 es mayor. Si también en esa posición son iguales, comparamos las cifras de la siguiente posición.

Se acostumbra representar los números naturales en una línea, la recta numérica. Se hace de la siguiente manera: se dibuja una línea recta, se elige el lugar donde se marca el cero, se decide a qué distancia del cero se dibujará el uno y luego, con esa misma distancia (la unidad) se marcan los siguientes números en orden 1, 2, 3, ...



En la recta numérica los números son más grandes mientras más se alejan del cero en la dirección del uno.

Suma de números naturales

Para empezar recordaremos la suma y haremos algunas reflexiones sobre ella. Recuerde que la suma también se llama adición y que los números que se suman se llaman sumandos. Hemos puesto aquí la tabla básica de suma con los dígitos y hemos llenado una parte. Cópiela en su cuaderno y complétela. Observe que cada cuadro es el cruce de una columna y un renglón y en el cuadro está la suma del dígito que está al pie de esa columna y el dígito que está a la izquierda de ese renglón.
Como un ejemplo en la tabla se marcó con flechas cómo se obtiene 6 + 3 = 9.

9										18
8									16	17
7								14	15	16
6							12	13	14	15
5						10	11	12	13	14
4					8	9	10	11	12	13
3				6	7	8	9	10	11	12
2			4	5	6	7	8	9	10	11
1		2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Observe con cuidado la tabla que hizo y conteste las siguientes preguntas. Recuerde que se llaman suma la operación y el resultado.

a) ¿Qué relación hay entre cada par de sumas en la lista siguiente?

• 3 + 8 y 8 + 3 • 5 + 6 y 6 + 5
• 4 + 7 y 7 + 4 • 9 + 8 y 8 + 9

¿Sucede lo mismo con todas las sumas en que se cambia el orden de los sumandos?

b) Encuentre todas las formas posibles de repartir once lápices en dos cajas iguales, de tal manera que en una caja queden al menos dos lápices. ¿Cuántas son?

c) Encuentre todas las formas posibles de poner doce canastas en dos anaqueles iguales, de tal manera que en cada anaquel queden al menos tres canastas. ¿Cuántas son?

d) ¿Qué diferencia encontró en las dos respuestas anteriores?

Recordemos ahora una manera de sumar números con más de una cifra, por ejemplo 47 y 25:
Sumamos las unidades: 7 + 5 = 12.
Obtenemos una decena y dos unidades.
En el resultado anotamos las unidades y agregamos la decena a las decenas de nuestros sumandos: 1 + 4 + 2 = 7.
Esto es lo que estamos haciendo cuando decimos "llevo uno". Con esto obtenemos 7 decenas que anotamos en el lugar de las decenas en nuestro resultado.
Para sumar números con más cifras hacemos lo mismo.

Por ejemplo, para sumar 365 y 4789, sumamos las unidades, obtenemos 5 + 9 = 14, anotamos en el resultado las 4 unidades y agregamos la decena a las decenas de los sumandos; sumamos las decenas y obtenemos 1 + 6 + 8 = 15 decenas, es decir 5 decenas y 1 centena, anotamos las 5 decenas en el lugar de las decenas en el resultado y sumamos la centena con las centenas de los sumandos y tenemos 1 + 3 + 7 = 11 centenas, es decir 1 centena y 1 millar; anotamos la centena en el lugar de las centenas del resultado y sumamos el millar a los millares de nuestros sumandos y tenemos 1 + 0 + 4 = 5 millares. Así al final tenemos cinco millares, una centena cinco decenas y cuatro unidades, es decir cinco mil ciento cincuenta y cuatro. El procedimiento anterior es el más usual, pero no es la única manera de llegar al resultado de una suma.

Resta de números naturales

Usaremos un ejemplo para aclarar qué tipo de restas vamos a hacer por el momento: Si tenemos $20 podemos ir a la tienda y gastarnos una parte o todo ese dinero, pero si queremos comprar unos chocolates que cuestan $27 no lo podemos hacer o tenemos que quedar a deber dinero en la tienda.
Por ahora trabajaremos con restas en las que se quita una cantidad menor o igual a la que tenemos. Más adelante veremos cómo se expresa la situación del ejemplo en que "quedamos a deber".

Recordemos cómo se restan dos números naturales.

Empecemos con los dígitos, del mayor al menor. Nueve es el dígito más grande y le podemos restar cualquier dígito, aún el 9 mismo y quedarnos sin nada. Pero, ¿qué estamos haciendo al restar?

Por ejemplo, si a 9 le restamos 5 lo que hacemos es descomponer el 9 en dos partes: una con 5 y lo que sobra.

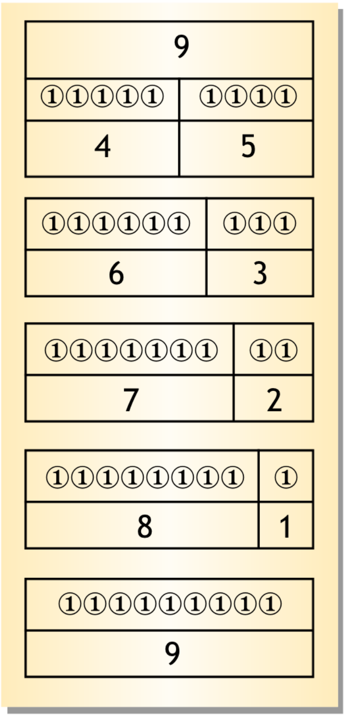
Aquí lo que sobra después de apartar 5 son 4; saber cuánto hay en esta parte es lo que se llama restar y esa cantidad es el resultado de la resta: 9 - 5 = 4.

Cuando hacemos una resta (también llamada sustracción), al número del que restamos lo llamamos minuendo, al que se le resta lo llamamos sustraendo y al resultado lo llamamos resta. Así, en nuestro ejemplo, 9 es el minuendo, 5 es el sustraendo y 4 es la resta.

Observe que con lo que acabamos de hacer averiguamos varias cosas al mismo tiempo:

- 9 - 5 = 4
- 9 - 4 = 5
- 5 + 4 = 9
- 4 + 5 = 9

Si conocemos todas las formas de descomponer 9 en dos partes podemos restarle cualquier dígito. Hagámoslo y anotemos la información que obtenemos:



9 - 5 = 4 y 9 - 4 = 5 5 + 4 = 9 y 4 + 5 = 9

9 - 6 = 3 y 9 - 3 = 6 6 + 3 = 9 y 3 + 6 = 9

9 - 7 = 2 y 9 - 2 = 7 7 + 2 = 9 y 2 + 7 = 9

9 - 8 = 1 y 9 - 1 = 8 8 + 1 = 9 y 1 + 8 = 9

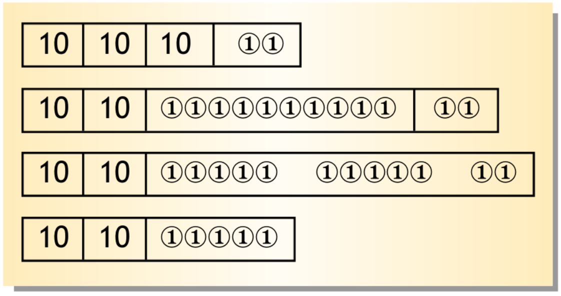
9 - 9 = 0 y 9 - 0 = 9 9 + 0 = 9 y 0 + 9 = 9

También podemos obtener esta información de la tabla de suma de dígitos. Observe que en ella aparecen todas las formas de descomponer los dígitos en dos sumandos. Nosotros hemos marcado en la tabla la descomposición de 9 como 2 + 7 y como 5 + 4. Encuentre usted las otras formas de descomponer 9 como la suma de dos dígitos.

9	9									
8	8	9								
7	7	8	9							
6	6	7	8	9						
5	5	6	7	8	9					
4	4	5	6	7	8	9				
3	3	4	5	6	7	8	9			
2	2	3	4	5	6	7	8	9		
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ahora que hemos revisado todas las restas que se pueden hacer de un dígito menos uno menor o igual que él, recordemos cómo se restan números mayores.

Si tenemos un minuendo de dos cifras y un sustraendo de un dígito, el de dos cifras es el mayor, por ejemplo, entre 19 y 8 el mayor es 19, entre 32 y 7 el mayor es 32. Si queremos restar 19 - 8, primero observamos que 19 es una decena y nueve unidades, tiene más unidades sin agrupar que el dígito que queremos restar, entonces simplemente restamos 9 - 8 = 1, lo acomodamos en el lugar de las unidades y dejamos la decena intacta como parte del resultado.



Veamos ahora cómo restar 32 - 7, y para ello observemos que 32 es tres decenas y dos unidades. Como 2 es menor que 7, no podemos usar el procedimiento anterior.

En este caso tenemos que desagrupar en unidades una de las tres decenas de 32, juntar esas unidades con las 2 que teníamos y quitar de ahí las 7 unidades que queremos restar. Vemos cuántas unidades nos sobraron, las anotamos en el resultado y como no hay más que restar, anotamos en el resultado las decenas que quedaron. Podemos escribir esta operación de la siguiente manera:

$$\begin{array}{crr} & 2 & 12 \\ & \cancel{3} & \cancel{2} \\ - & & 7 \\ \hline & 2 & 5 \end{array}$$

Para restar números más grandes el procedimiento es similar.

$$\begin{array}{crr} & 5 & 13 \\ & \cancel{6} & \cancel{3} \\ - & 2 & 8 \\ \hline & 3 & 5 \end{array}$$

Si queremos restar por ejemplo 63 - 28 tenemos que desagrupar una de las decenas de 63, restar 13 - 8 = 5 unidades y restar las 2 decenas de 28 de las 5 decenas que quedaron de 63, es decir 5 - 2 = 3 decenas.

Con números mayores el procedimiento sigue siendo el mismo, por ejemplo si queremos restar 128 - 79, tenemos que desagrupar una de las decenas de 128 y restamos 18 - 9 = 9 unidades.
Como nos quedó una decena y queremos restar 7 decenas tenemos que desagrupar una centena, y restar 11 - 7 = 4 decenas.

$$\begin{array}{crrr} & & 11 & 18 \\ & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{8} \\ - & & 7 & 9 \\ \hline & & 4 & 9 \end{array}$$

	3	*17*	*14*	*11*	*17*
	4	8	5	2	7
-	2	9	6	8	8
	1	8	8	3	9
	dm	um	c	d	u

Si queremos restar 48527 - 29688 el procedimiento será el mismo: desagrupamos una decena de 48527 y restamos 17 - 8 = 9 unidades; desagrupamos una centena en decenas, las agregamos a la decena que quedó y restamos 11 - 8 = 3 decenas; desagrupamos un millar en centenas, las agregamos a las 4 que quedan y restamos 14 - 6 = 8 centenas; desagrupamos una decena de millar en millares, los agregamos a los 7 millares que quedan y restamos 17 - 9 = 8 millares; de las 3 decenas de millar que quedan restamos las 2 que faltan, 3 - 2 = 1 decena de millar.

Podríamos hacer todas estas restas de otra forma muy parecida. Con este procedimiento, para restar por ejemplo 32 - 7, en vez de desagrupar una de las decenas de 32, le agregamos 10 a las dos unidades de 32 para poder restar 12 - 7, y luego restamos a las decenas esa decena adicional que usamos. Esto es lo que hacemos cuando decimos "siete para doce son cinco, y llevo uno". Esa operación se puede escribir como se muestra a la derecha.

		12
	3	~~2~~
-	***1***	7
	2	5

Para restar números más grandes el procedimiento es parecido, pero ahora hay que sumar la decena adicional a las decenas del sustraendo, y a veces hay que utilizar centenas o millares etc. adicionales.
Si queremos restar por ejemplo 63 - 28 le agregamos 10 a las tres unidades de 43, restamos 13 - 8 = 5 unidades, le agregamos la decena adicional que usamos a las 2 decenas de 28 y restamos 6 - 3 = 3 decenas. Algunas personas dicen así este procedimiento: "cinco para trece son cinco y llevo una; una y dos son tres, para seis son tres".
Veamos cómo restar 128 - 79 con este procedimiento. Usamos una decena para restar 18- 9 = 9 unidades. La decena adicional se la agregamos a las 7 decenasdel minuendo, y ahora usamos una centena adicional para restar 12 - 8 = 4 decenas.
Esa centena adicional se la restamos a la centena del minuendo y nos queda 1 - 1 = 0 ninguna centena.
Por último repitamos la resta 48527 - 29688 con este procedimiento. Utilizamos una decena para restar 17 - 8 = 9 unidades, y se la agregamos a las 8 decenas de 29688, con lo que ahora tenemos 9; utilizamos una centena para restar 12 - 9 = 3 decenas y se la agregamos a las 6 centenas de 29688, con lo que ahora tenemos 7; utilizamos un millar para restar 15 - 7 = 8 centenas y se lo agregamos a los 9 millares de 29688, con lo que ahora tenemos 10; utilizamos una decena de millar para restar 18 - 10 = 8 millares y se la agregamos

		18	***15***	***12***	***17***
	4	8	5	2	7
-	2	9	6	8	8
	1	8	8	3	9
	dm	um	c	d	u

a las 2 decenas de millar de 29688; con lo que ahora tenemos 3; restamos 4 - 3 = 1 decena de millar.

Como usted puede ver, los números que se manejan en cada uno de estos dos procedimientos son distintos, pero los resultados son los mismos.

Es importante darse cuenta de que sea cual sea el procedimiento de la resta que se utilice, la operación se reduce a saber restar los dígitos de los números menores que veinte, y si manejamos con agilidad estas pequeñas restas podremos hacer cualquier otra, por grande que sea.

Multiplicación y división de números naturales

Multiplicación

Como usted ya sabe, la multiplicación es una manera abreviada de sumar. Recordemos esto brevemente con un ejemplo:
si queremos saber cuántos cuadritos como el que está marcado hay en la siguiente figura, podemos contarlos de varias maneras:

Podemos contarlos de uno en uno

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24

Podemos observar que en cada columna hay tres cuadros y, como tenemos 8 columnas, sumar ocho veces tres:

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 24$$

Esta suma la podemos abreviar como 8 x 3 = 24. Ocho por tres significa sumar ocho

1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3

veces tres.
Podemos también observar que en cada renglón hay 8 cuadros y, como tenemos 3 renglones, sumar tres veces ocho:

1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8

$$8 + 8 + 8 = 24$$

Esta suma la podemos abreviar como 3 x 8 = 24. Tres por ocho significa sumar tres veces ocho.

Hemos visto cómo la multiplicación es una forma corta de escribir una suma que se repite.

Además, todas las multiplicaciones se basan en la multiplicación de dígitos, es entonces conveniente conocer los productos de los dígitos.

Recuerde que la multiplicación también se llama producto y que los números que se multiplican se llaman factores.

En la parte inferior hemos puesto la tabla básica de multiplicación con los dígitos y hemos llenado una parte.

9										81
8									64	72
7								49	56	63
6							36	42	48	54
5						25	30	35	40	45
4					16	20	24	28	32	36
3				9	12	15	18	21	24	27
2			4	6	8	10	12	14	16	18
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Observe que cada cuadro es el cruce de una columna y un renglón y que en el cuadro está el producto del dígito que está al pie de esa columna y el dígito que está a la izquierda de ese renglón. Como un ejemplo en la tabla se marcó con flechas cómo se obtiene 6 X 3 = 18.

Complete la tabla. Observe que en el ejemplo se vio además lo que la sabiduría popular repite frecuentemente: el orden de los factores no altera el producto. Esta observación le permitirá llenar su tabla más fácilmente, por ejemplo para llenar el cuadro correspondiente a 3 X 6 basta con copiar lo que está en el cuadro que corresponde a 6 X 3.

Si usted tiene dificultad para memorizar las sumas o los productos de los dígitos, le sugerimos que cuando esté realizando una actividad mecánica que no requiera su atención, o cuando tenga un rato libre, cuente hasta cien y luego de regreso primero de dos en dos, luego de tres en tres, etc. hasta que lo haga de nueve en nueve. Y cuando se siente a hacer los ejercicios de este libro consulte las tablas de suma y de producto de dígitos cada vez que las necesite.

Algunas propiedades de la multiplicación

Si queremos multiplicar más de dos números se multiplican dos de ellos y el resultado se multiplica por el otro número.
Por ejemplo si queremos multiplicar 5 X 7 X 9, podemos multiplicar primero 5 X 7 = 35 y después 35 X 9 = 315, o bien podemos empezar con 7 X 9 = 63 y luego 5 X 63 = 315. Esto se expresa de la siguiente manera:

$$5 \times 7 \times 9 = (5 \times 7) \times 9 = 5 \times (7 \times 9)$$

Los paréntesis de la expresión anterior indican el orden en el que se opera. Es decir, sirven para agrupar o asociar los números que están dentro. Si no se quiere hacer explícito el orden en el que se opera se escribe sólo 5 X 7 X 9.

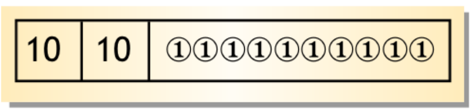
Es conveniente elegir cómo agrupamos los números pues esto puede facilitar las operaciones. Por ejemplo si queremos multiplicar 5 x 2 x 3 x 9 podemos agrupar de distintas maneras pero en unas es más fácil hacer las operaciones que en otras:

$$(5 \times 2) \times (3 \times 9) = 10 \times 27 = 270$$
$$5 \times [2 \times (3 \times 9)] = 5 \times (2 \times 27) = 5 \times 54 = 270$$
$$[((5 \times 2) \times 3) \times 9)] = (10 \times 3) \times 9 = 30 \times 9 = 270$$

Observe que unos paréntesis envuelven a otros y que las operaciones que se hacen primero son las que están hasta adentro.

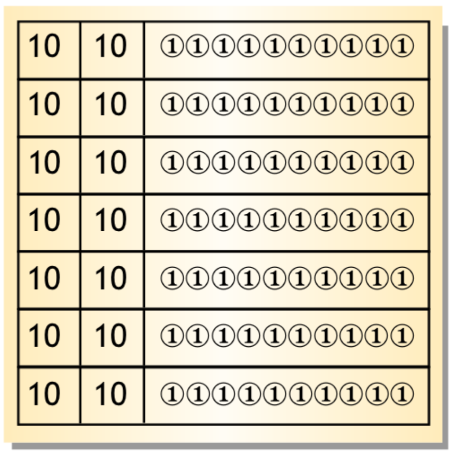
Cuando empezamos a trabajar con la multiplicación dijimos que 7 x 29 es 7 veces 29 y que eso es lo mismo que tomar 7 veces 20 y sumarle 7 veces 9. Esto es importante y es nece sario comentarlo.

Veamos con un ejemplo lo que estamos haciendo.



Supongamos que tenemos $29 en dos billetes de $10 y nueve monedas de $1. Supongamos también que durante los siete días de una semana acumulamos una cantidad similar de dinero.

¿Cuánto tendremos al finalizar la semana?



Tendremos siete veces $29. Para contar el dinero es más fácil contar los billetes de 10, que son 14 y aparte las monedas, que son 63.

Podemos entonces cambiar $60 en monedas por 6 billetes de 10, con lo que tenemos 14 + 6 = 20 billetes y quedan 3 monedas de $1.

En total, entonces, tenemos $203.

Si queremos expresar en matemáticas la separación que hicimos y la manera en que contamos, se escribe:

$$7 \times 29 = 7 \times (20 + 9) = (7 \times 20) + (7 \times 9) = 140 + 63 = 203$$

y decimos que la multiplicación se distribuye con respecto a la suma porque se está repartiendo en cada sumando:

$$7 \times 29 = 7 \times (20 + 9) = (7 \times 20) + (7 \times 9) = 140 + 63 = 203$$

Esta manera de operar se puede usar con otros números y es importante saber hacerlo, tanto para entender temas posteriores en matemáticas como para el cálculo mental.
Veamos algunos ejemplos de cómo puede ayudar esta manera de repartir la multiplicación para el cálculo mental.

Esto lo hacemos cuando tenemos una multiplicación en la que uno de los factores se puede descomponer en la suma de dos números que sean fáciles de multiplicar por el otro factor.

Por ejemplo se puede multiplicar fácilmente 12 x 44 descomponiendo el factor 44:

$$12 \times 44 = 12 \times (40 + 4) = (12 \times 40) + (12 \times 4) = 480 + 48 = 528$$

Otra manera de hacer la misma multiplicación es descomponiendo el otro factor:

$$12 \times 44 = (10 + 2) \times 44 = (10 \times 44) + (2 \times 44) = 440 + 88 = 528$$

También se puede multiplicar fácilmente 8 x 7235:

$$\begin{aligned} 8 \times 7235 &= 8 \times (7000 + 200 + 30 + 5) = (8 \times 7000) + (8 \times 200) + (8 \times 30) + (8 \times 5) \\ &= 56000 + 1600 + 240 + 40 \\ &= 57880 \end{aligned}$$

Con este procedimiento se pueden multiplicar también dos sumas. Se toma una como factor y se distribuye en la otra suma; luego se distribuye la suma utilizada al principio como factor. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} (7 + 9) \times (5 + 8) &= ((7 + 9) \times 5) + ((7 + 9) \times 8) = \\ &= (7 \times 5) + (9 \times 5) + (7 \times 8) + (9 \times 8) = \\ &= 35 + 45 + 56 + 72 = 208 \end{aligned}$$

Así como la multiplicación se distribuye con respecto a la suma, también la multiplicación se distribuye con respecto a la resta. Veamos un ejemplo:

$$8 \times 17 = 8 \times (20 - 3) = (8 \times 20) - (8 \times 3) = 160 - 24 = 136$$

Una de las aplicaciones más frecuentes de este último resultado es en la multiplicación mental por 9, 99, 999, etc.

Veamos algunos ejemplos:

$$13 \times 9 = 13 \times (10 - 1) = (13 \times 10) - (13 \times 1) = 130 - 13 = 117$$

$$99 \times 415 = (100 - 1) \times 415 = (100 \times 415) - (1 \times 415) = 41500 - 415 = 41085$$

$$\begin{aligned} 9999 \times 1053 = (10000 - 1) \times 1053 &= (10000 \times 1053) - (1 \times 1053) \\ &= 10530000 - 1053 \\ &= 10528947 \end{aligned}$$

Prioridad de las operaciones

Una convención muy importante porque nos evita muchos paréntesis en la escritura, aunque otros sean necesarios, es que si no hay paréntesis se realizan primero las multiplicaciones y después las sumas o restas. Esto es, la multiplicación tiene prioridad.

Este acuerdo general nos permite, por ejemplo, quitar los paréntesis en la expresión.

$$(7 \times 5) + (9 \times 5) - (7 \times 8) + (9 \times 8) = 7 \times 5 + 9 \times 5 - 7 \times 8 + 9 \times 8$$

pues en ambos casos primero hay que hacer las multiplicaciones y luego las sumas.

Sin embargo no podemos quitar los paréntesis en la expresión $(7 + 9) \times (5 + 8)$, porque lo que estos indican es que aquí primero hay que sumar y luego multiplicar, o bien distribuir el producto en la suma. Si quitáramos los paréntesis estaríamos cambiando las operaciones pues en $7 + 9 \times 5 + 8$ primero hay que multiplicar y después sumar.

Observe que:

$$(7 + 9) \times (5 + 8) = 16 \times 13 = 208$$

Mientras que:

$$7 + 9 \times 5 + 8 = 7 + 45 + 8 = 60$$

División con números naturales

Usaremos un ejemplo para aclarar qué tipo de divisiones vamos a hacer por ahora: si tenemos 20 lápices y los queremos repartir entre los 8 compañeros del grupo de estudio, le damos 2 lápices a cada uno y nos sobran 4 para otra ocasión.

Si lo que tuviéramos fueran $20 para repartir tendríamos que ver cuántos pesos y cuántos centavos le tocan a cada compañero.

Las situaciones en que se tiene que partir la unidad, incluyendo cómo dividir un número entre uno mayor, las veremos después.

La manera en que se dividen números naturales es muy similar a la que empleamos al repartir dinero en partes iguales.

Veamos un ejemplo: al señor Santiago le tienen que alcanzar $964 que le quedan para vivir 7 semanas.

Los reparte por igual en 7 sobres de la siguiente manera:

• Pone un billete de $100 en cada sobre y cambia los 2 que le quedan por 20 monedas de $10 que junta con las otras 6 que ya tenía.

• Reparte las 26 monedas de $10 poniendo 3 en cada sobre. Las 5 monedas de $10 que le quedan las cambia por monedas de $1 y las junta con las 4 que ya tenía.

• Para repartir las 54 monedas de $1 que juntó pone 7 en cada sobre y le sobran 5 que guarda en una bolsa.

Una forma de escribir cómo repartió su dinero el señor Santiago es:

$$964 = 7 \times 100 + 7 \times 3 \times 10 + 7 \times 7 \times 1 + 5$$

Otra manera de escribir esta repartición es la que se muestra a la derecha:

$$\begin{array}{r|l} 9\,6\,4 & 7 \\ \cline{2-2} 2\,6\;\; & 1\,3\,7 \\ 5\,4 & \\ 5 & \end{array}$$

Recuerde que el número que se divide se llama dividendo, el número por el que se divide se llama divisor, lo que se obtiene en la repartición se llama cociente y lo que sobra se llama residuo.

Dividendo → 9 6 4 | 7 ← Divisor
2 6 | 1 3 7 ← Cociente
5 4
5
Residuo

Observe que el dividendo es igual al cociente por el divisor más el residuo:

964 = 137 x 7 + 5.

Si queremos dividir entre un número con más cifras, por ejemplo 2435 entre 17, nos fijamos cuántas cifras tiene el divisor y tomamos esa misma cantidad de cifras de las de mayor orden del dividendo. Aquí como 17 tiene dos cifras, tomamos 24 centenas del dividendo y lo dividimos entre 17. Obtenemos una centena y nos sobran 7; las agregamos a las 3 decenas que tenemos y dividimos las 73 decenas entre 17. Obtenemos 4 decenas y sobran 5; las agregamos a las 5 unidades que tenemos y dividimos las 55 unidades entre 17. Obtenemos 3 unidades y sobran 4. Recuerde que el dividendo es igual al cociente por el divisor más el residuo:

2 4 3 5 | 1 7
7 3 | 1 4 3
5 5
4

2435 = 143 x 17 + 4.

Cuadrados y raíces cuadradas

Usted aprendió en la primaria a calcular el área de un cuadrado siguiendo la regla "el área de un cuadrado es lado por lado".

Esto equivale a la fórmula A = ℓ x ℓ, en donde ℓ es la medida del lado del cuadrado.

En la siguiente tabla los números del primer renglón son medidas de lados de cuadrados y los números del segundo renglón son áreas de cuadrados. Llénela usando la fórmula.

ℓ	1	2	3			6	7	8	9	10			13	14	15	16
$A = \ell \quad \ell$				16	25						121	144				

Para llenar la tabla anterior usted siguió dos procesos distintos:

- multiplicar un número por sí mismo para encontrar el área del cuadrado; por ejemplo
  - A = 3 x 3 = 9;
- buscar un número que al multiplicarse por sí mismo diera el área que conocíamos; por ejemplo buscar el número que multiplicado por sí mismo dé
- 16 = ℓ x ℓ, entonces ℓ = 4.

Cuando multiplicamos un número por sí mismo, como al calcular el área de un cuadrado, se dice que encontramos el cuadrado del número, que el número se eleva al cuadrado, o que el número se eleva a la segunda potencia.
Se acostumbra abreviar esta operación escribiendo un 2 pequeño en la parte superior derecha del número.

Por ejemplo

$$9 \times 9 = 9^2$$

En la fórmula lo podemos escribir como

$$A = l \times l$$
$$A = l^2$$

Si hacemos el proceso inverso, encontrar el número que elevado al cuadrado sea el número que teníamos, como al calcular el lado de un cuadrado cuando conocemos su área, decimos que encontramos la raíz cuadrada del número.

Se acostumbra escribir esta operación como $\sqrt{16}=4$, por ejemplo. En la fórmula lo podemos escribir como $\sqrt{A}=l$

Observe que la tabla que usted completó anteriormente es una tabla de cuadrados y de raíces cuadradas. Los números del segundo renglón son cuadrados de los del primer renglón y los números del primer renglón son raíces cuadradas de los del segundo renglón.
Con la tabla que construimos no podemos encontrar las raíces cuadradas de todos los números naturales menores que $256=16^2$,pero podemos saber entre qué números se encuentran.

Por ejemplo, con la tabla no podemos sacar la raíz cuadrada de 26 pero sabemos que es mayor que 5 y menor que 6 porque 26 es mayor que y $25=5^2$ menor que $36=6^2$

Números enteros y orden

Recordemos un ejemplo:
Si vamos a la tienda con $20, podemos gastar por ejemplo $5 y nos quedan $15, si gastamos $12 nos quedan $8, etc.: mientras más gastamos menos nos queda.

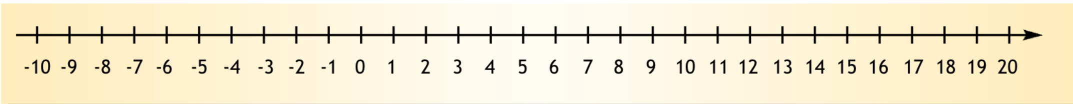
Si gastamos $20 no nos queda nada, si gastamos $25 quedamos a deber $5, si gastamos $27 quedamos a deber $7 y cada vez nos queda menos.

Si seguimos gastando nos tendremos que conseguir otro trabajo.

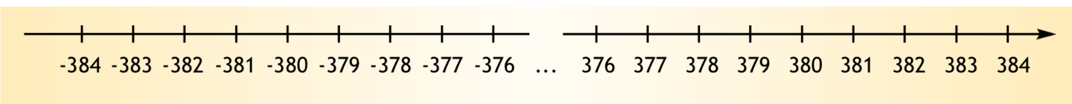
En matemáticas se inventaron los números negativos para poder escribir este tipo de situaciones en las que “quedamos a deber” y lo que describimos es lo que nos queda: una deuda.

Escribimos las deudas del ejemplo como –5 y –7; estos números se leen “menos cinco” y “menos siete” o bien “cinco negativo” y “siete negativo”. Para que esta representación sirva, debe reflejar toda la situación de nuestro ejemplo, entonces debe reflejar que “mientras más gastamos, menos tenemos”: cada peso más que gastemos debemos quedar más lejos de los $20 que teníamos.

Por cada número natural vamos a tener su correspondiente número negativo y los vamos a representar en la recta numérica “a espejo” de los naturales, del otro lado del cero, como si pusiéramos un espejo en el cero, empezamos con –1, –2, –3, ... y nos vamos alejando del cero.



Los números naturales y sus correspondientes negativos se llaman números enteros. En la recta numérica los números son más grandes mientras más a la derecha están, por ejemplo 11 es mayor que 7, 4 es mayor que 0, cero y todos los positivos son mayores que los negativos, –1 es mayor que –8, –4 es mayor que –5, etc. Observe que también el orden nos queda “a espejo”: tenemos que 7 es mayor que 3 y que –3 es mayor que –7.
Para saber cuál es mayor entre dos números negativos, por ejemplo –376 y –384, nos fijamos en sus correspondientes positivos, 376 y 384. Como 384 es mayor que 374, en los negativos nos va a quedar al revés, a espejo: es decir, –376 es mayor que –384. Observe que en la recta numérica –376 queda a la derecha de –384:



Veamos ahora como representar con símbolos la expresión "–376 es mayor que –384". Como usted sabe, que el signo = significa "igual que", por eso escribimos 6 = 2 x 3.

De un modo similar podemos reemplazar por signos las expresiones "mayor que" y "menor que".

Por ejemplo en lugar de la expresión "26 es mayor que 15", podemos escribir 26 > 15 y en lugar de "26 es menor que 36", podemos escribir 26 < 36.

Veamos en algunos ejemplos como se leen estos símbolos:

Se escribe	Se lee
5 < 23	5 es menor que 23
0 < 17	0 es menor que 17
–6 < 2	–6 es menor que 2
–32 < 0	–32 es menor que 0
–9 < –5	–9 es menor que –5
13 > 7	13 es mayor que 7
1 > 0	1 es mayor que 0
8 > –21	8 es mayor que –21
0 > –1	0 es mayor que –1
–376 > –384	–376 es mayor que –384

Los números negativos se usan en muchas situaciones cotidianas. Usted seguramente habrá oído expresiones como 3 grados centígrados bajo cero cuando se habla de temperatura, 200 metros bajo el nivel del mar cuando se habla de la profundidad de una mina, o números rojos cuando se habla de contabilidad. Todas esas expresiones hacen referencia a números negativos.

Un número natural y su correspondiente negativo son simétricos con respecto al cero: están a la misma distancia del cero.
A esa distancia le llamamos valor absoluto del número y la representamos poniendo el número entre barras. Por ejemplo:

$$|-384| = 384 \qquad |384| = 384$$

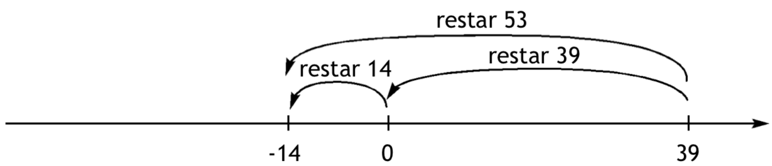
Estas expresiones se leen: "el valor absoluto de menos 384 es 384" y "el valor absoluto de 384 es 384". Observe que el valor absoluto siempre es positivo porque es una distancia.

Suma y resta de enteros
Con los números enteros también se hacen operaciones. En este curso veremos sólo la suma y la resta con enteros, y en el próximo curso se verán las otras operaciones. Aquí ya vimos la suma de números positivos y la resta de números positivos cuando el sustraendo es menor que el minuendo.
Ahora vamos a ver suma y resta de negativos y de negativos con positivos; y también la resta de números positivos cuando el sustraendo es mayor que el minuendo. Trabajaremos en primer lugar con esta última.

Resta de enteros positivos con el sustraendo mayor que el minuendo

Recuerde que nos interesaron los números negativos porque permiten expresar situaciones como “si tengo \$20 y me gasto \$27, quedo a deber \$7”. Si queremos expresar esta situación con una operación, tendremos una resta en la que el sustraendo es mayor que el minuendo: 20 – 27 = –7.

En general, si queremos restar un número mayor de uno menor el proceso es muy similar a lo que hacemos al gastar más de lo que tenemos: gastamos lo que tenemos y luego empezamos a deber.
Por ejemplo, si restamos 39 – 53, primero descomponemos el sustraendo en dos partes: una igual al minuendo y otra igual a lo que sobre: 53 = 39 + 14.



Entonces al minuendo, 39, le restamos la primera parte del sustraendo, hasta quedar en cero, y luego restamos la otra parte, lo que nos va a dar un resultado negativo:
39 – 53 = 39 – 39 – 14 = 0 – 14 = –14.
Observe que para descomponer 53 tuvimos que restar 53 – 39 = 14. Este resultado nos da la cantidad que “quedamos a deber”, y sólo le falta el signo menos. Siempre podemos hacer la resta de esa manera, restamos el número chico del grande y al resultado le ponemos signo negativo:

$$39 - 53 = -(53 - 39) = -14$$

Tenemos entonces dos maneras de restar enteros positivos cuando el sustraendo es mayor. Observe que dan el mismo resultado:

- restamos el número chico del grande y al resultado le ponemos signo negativo; por ejemplo

$$192 - 652 = -(652 - 192) = -460.$$

- descomponemos el sustraendo en dos partes: una igual al minuendo y otra igual a lo que sobre, restamos hasta quedar en cero y luego la otra parte; por ejemplo

$$192 - 652 = 192 - 192 - 460 = 0 - 460 = -460$$

Suma de números enteros

Vamos ahora a sumar números negativos y números positivos con negativos. Analicemos en primer lugar la suma de números negativos.

Si sumamos dos negativos sólo estamos haciendo crecer la “deuda”. Se suman los números sin considerar el signo y al resultado se le pone signo negativo. Vea los ejemplos:

$$\begin{array}{lr} & -12 \\ + & -5 \\ \hline & -17 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} & -644 \\ & -360 \\ + & -95 \\ \hline & -1099 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} & -42 \\ & -782 \\ & -89925 \\ + & -662 \\ \hline & -91411 \end{array}$$

Si queremos escribir las operaciones anteriores en un renglón tenemos que poner paréntesis para que no se nos junten los signos:

$$-12 + (-5) = -17$$

$$-644 + (-360) + (-95) = -1099$$

$$-42 + (-782) + (-89925) + (-662) = -91411$$

Veamos ahora la suma de un número positivo y un negativo.
Si sumamos un positivo y un negativo estamos haciendo “corte de caja”. Es decir, “pagamos deudas” con lo que tenemos y seguimos debiendo o no según lo que tengamos.
Si debemos más de lo que tenemos, seguimos endeudados.
Si debemos menos de lo que tenemos nos queda dinero.
Por ejemplo:
Si debemos \$12, tenemos \$5 y pagamos, seguimos debiendo \$7.
Si debemos \$4, tenemos \$36 y pagamos, nos quedan \$32.

$$\begin{array}{lr} & -12 \\ + & 5 \\ \hline & -7 \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} & -4 \\ + & 36 \\ \hline & +32 \end{array}$$

Observe que se puede restar el número de mayor valor absoluto menos el de menor valor absoluto y ponerle al resultado el signo del número de mayor valor absoluto. Esto es, primero vemos los números “como si no tuvieran signo”, y de esta manera restamos el menor del mayor, y luego le ponemos al resultado el signo del mayor.

En los dos ejemplos anteriores observe que hemos denotado los números positivos 5 y 36 como +5 y +36: esto es sólo para remarcar los signos de todos los sumandos.

Por último, veamos cómo efectuar una suma con más de dos sumandos enteros. Por ejemplo, consideremos la operación –11 + (+88) + (–91). Podemos efectuar la operación de dos maneras:

• Podemos sumar los dos primeros, al resultado sumarle el siguiente número, y seguir en esa forma hasta acabar:

$$-11 + (+88) + (-91) = 77 + (-91) = -14.$$

• Podemos también cambiar de orden los sumandos siempre y cuando no olvidemos ponerle a cada número su signo. En nuestro ejemplo podemos sumar primero los negativos:

$$-11 + (+88) + (-91) = -11 + (-91) + (+88) = -102 + (+88) = -14$$

Resta de números enteros

Ya vimos cómo se restan los números positivos. Veamos ahora cómo se restan dos números negativos y un número positivo con uno negativo.

Si tenemos $20 y gastamos $37, quedamos a deber $17. Si ahora pagamos $12, debemos $5. Podemos interpretar y escribir estas operaciones de las siguientes maneras:

Se quitan 37: 20 – 37 = –17 o bien, se agrega una deuda de 37: 20 + (–37) = –17.
Se agregan 12: –17 + 12 = –5 o bien, se quita una deuda de 12: –17 – (–12) = –5.

Observe que siempre interpretamos “quitar” como una resta, “agregar” como una suma, y “una deuda” como un número negativo.

Si quitamos una cantidad positiva obtenemos lo mismo que si sumamos un negativo:

$$20 - 37 = 20 + (-37) = -17$$

Si quitamos una deuda estamos restando un número negativo y obtenemos lo mismo que si agregamos un número positivo:

$$-17 - (-12) = -17 + 12 = -5$$

Lo que acabamos de observar nos permite convertir las restas que tienen números negativos en sumas, que ya sabemos resolver.

En lo sucesivo hablaremos únicamente de sumas de números enteros pues, como acabamos de ver, todas las restas se pueden convertir en sumas:

• Restar un número positivo es lo mismo que sumar un número negativo.

• Restar un número negativo es lo mismo que sumar un número positivo.

Multiplicación y división de números enteros

Multiplicación de enteros

Como los números naturales, los números enteros también se pueden multiplicar. Esta operación se realiza como si se tratara de una multiplicación de naturales y el signo del resultado o producto se pone de acuerdo a la siguiente regla:

• el producto de dos números de igual signo siempre es positivo;

• el producto de dos números de distinto signo siempre es negativo.

Esta regla nos dice que:
• Si se multiplican dos enteros positivos, el resultado es positivo.
• Si se multiplican dos enteros negativos, el resultado también es positivo.
• Si se multiplican un entero positivo y uno negativo, el resultado es negativo.

Veamos unos ejemplos:

$18 \times 20 = +360$ $\qquad$ $12 \times (-8) = -96$

$(-11) \times (-15) = +165$ $\qquad$ $(-5) \times 14 = -70$

***Nota**: En los ejemplos anteriores hemos utilizado el signo + para denotar a los enteros positivos pero en general no se escribe el signo +. Cuando un número no tiene escrito ningún signo, se entiende que se trata de un número positivo. Así, por ejemplo, podemos escribir también (-11) x (-15) = 165.*

División de enteros

A partir de los ejemplos anteriores encontramos las siguientes relaciones:

Como $18 \times 20 = 360$, sabemos que $360 \div 20 = 18$

Como $(-11) \times (-15) = 165$, sabemos que $165 \div (-15) = -11$

Como $12 \times (-8) = -96$, sabemos que $-96 \div (-8) = 12$

Como $(-5) \times 14 = -70$, sabemos que $-70 \div 14 = -5$

Observe en estos ejemplos de divisiones, cómo son los signos del dividendo, el divisor y el cociente (o resultado de la división). La relación entre estos signos se puede expresar como sigue:

• si el dividendo tiene el mismo signo que el divisor, el cociente es positivo;

• si el dividendo y el divisor tienen distinto signo, el cociente es negativo.

Ahora veamos otros ejemplos de división de enteros:

$$-105 \div 7 = -15 \qquad 144 \div (-12) = -12$$

$$-256 \div -8 = +32 \qquad (+320) \div (+32) = +10$$

Prioridad de las operaciones

En algunas ocasiones se incluyen en una misma expresión varias operaciones entre números enteros. Cuando esto ocurre, se señalan entre paréntesis las operaciones que se deben efectuar primero.

Por ejemplo, la expresión $(4 - 8) \div (-2)$ indica que se debe efectuar en primer lugar la resta $4 - 8$ y posteriormente dividir el resultado entre -2:

$$(4 - 8) \div (-2) = -4 \div (-2) = 2$$

mientras que la expresión $4 - [8 \div (-2)]$ indica que se debe efectuar en primer lugar la división $8 \div (-2)$, puesta entre paréntesis cuadrados, y después restar el resultado a 4:

$$4 - [8 \div (-2)] = 4 - (-4) = 4 + 4 = 8.$$

Así, aunque las dos expresiones involucran los mismos números y las mismas operaciones, el resultado de las dos es diferente, porque las operaciones se realizan en distinto orden.
Una convención muy importante porque nos evita muchos paréntesis en la escritura, aunque otros sean necesarios, es que si no hay paréntesis se realizan primero las multiplicaciones o divisiones y después las sumas o restas.

Esto es, la multiplicación y la división tienen prioridad sobre la suma y la resta.

Por ejemplo, si quitamos los paréntesis entre operaciones en las expresiones anteriores, hay una sola manera de leer la expresión $4 - 8 \div (-2)$, y ésta es efectuando primero la división $8 \div (-2)$ y luego restando el resultado a 4:

$$4 - 8 \div (-2) = 4 - (-4) = 4 + 4 = 8.$$

Números racionales . Fracciones comunes y decimales

En las anteriores páginas se estudiaron los números enteros y sus operaciones. Pero en la vida diaria aparecen muchas situaciones en las que se usan otros números.

Veamos un ejemplo. Juan fue al hospital y la enfermera, después de medirlo y pesarlo, dijo: “estatura: un metro setenta y cinco; peso: sesenta y ocho kilos y medio”.

¿Qué significa lo que dijo la enfermera?

Las expresiones anteriores se escriben así:

Estatura: 1,75 m Peso: 68 1/2 Kg

Pero también es correcto escribirlas así:

Estatura: 1 3/4 m Peso: 68,5 Kg

Lo que podemos observar es que las cantidades anteriores se pueden escribir usando números decimales, pero también usando fracciones. En general, las fracciones se pueden escribir como números decimales, y los números decimales se pueden escribir como fracciones.

Los números que se pueden representar con una fracción se llaman números racionales. Entonces todas las fracciones representan números racionales. También los números enteros son racionales, ya que cualquier entero se puede expresar en forma de fracción, usando como denominador al 1.

Por ejemplo:

$$5=\frac{5}{1} \qquad -113=\frac{-113}{1}$$

También los números decimales son racionales, porque también pueden escribirse como fracciones. Esto lo veremos enseguida.

Expresión de números decimales como fracciones

Una manera fácil de representar números decimales en forma de fracciones es utilizando las fracciones decimales, que debieron haber visto en grado anteriores.

Recordemos que se trata de fracciones cuyos denominadores son las distintas potencias de 10, esto es:

$$\frac{1}{10}, \quad \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{1000}, \quad \text{etc.}$$

que se leen: un décimo, un centésimo, un milésimo, etc.

Veamos cómo utilizar las fracciones decimales para representar decimales como fracciones, a través de un ejemplo.

El número decimal 0,108 se lee “ciento ocho milésimos”.

Un milésimo es la fracción decimal $\frac{1}{1000}$, así que 0,108 (ciento ocho milésimos) es la fracción $\frac{108}{1000}$.

En general, lo que decimos es que para expresar un decimal como fracción podemos poner atención en cómo se lee.
Consideremos otro ejemplo: 0,94 se lee “94 centésimos” entonces su expresión como fracción es $\frac{94}{100}$

Si el número que queremos expresar como fracción tiene una parte entera y una parte decimal, por ejemplo 3.75, también recurrimos a la forma de lectura y decimos 3 enteros 75 centésimos. La parte entera es 3 y se puede expresar en centésimos como $\frac{300}{100}$

Ahora debemos agregar los 75 centésimos:

$$3{,}75=\frac{300}{100}+\frac{70}{100}=\frac{375}{100}$$

Podemos decir entonces que 3,75 es igual a $\frac{375}{100}$, y del mismo modo podemos afirmar por ejemplo que 8,254 es

$$\frac{8000}{1000}+\frac{254}{1000}=\frac{8254}{1000}$$

El procedimiento general puede plantearse así:

Para convertir números decimales a fracción se observa de qué orden son los decimales. Si son décimos (una sola cifra después del punto decimal) se debe multiplicar el número por 10, y ese resultado es el numerador mientras que el denominador es 10. Si son centésimos (dos cifras después del punto decimal) el númerador es el número multiplicado por 100 y el denominador es 100. Si son milésimos hacemos lo mismo pero con 1000 y así sucesivamente.

Veamos un par de ejemplos para ilustrar el procedimiento general:

$$124{,}56=\frac{(124{,}56\times 100)}{100}=\frac{12456}{100}$$

$$32{,}4763=\frac{(32{,}4763\times 10000)}{10000}=\frac{324763}{10000}$$

Observe que la manera de representar un número decimal como fracción no es única, ya que hay fracciones distintas que representan lo mismo. Usted recordará que a esas fracciones se les llama fracciones equivalentes.
Por ejemplo,
$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ son fracciones equivalentes, y $\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}$ también son fracciones equivalentes.

En general, se pueden obtener fracciones equivalentes a otra multiplicando el numerador y el denominador por el mismo número. Por ejemplo:

$$\frac{2}{5}=\frac{2\times 3}{5\times 3}=\frac{6}{15} \qquad \frac{6}{7}=\frac{6\times 4}{7\times 4}=\frac{24}{28} \qquad -\frac{3}{8}=\frac{-3\times 6}{8\times 6}=\frac{-18}{48}$$

También se pueden obtener fracciones equivalentes dividiendo el numerador y el denominador de la fracción original entre el mismo número.

$$\frac{15}{12}=\frac{15\div 3}{12\div 3}=\frac{5}{4} \qquad \frac{21}{42}=\frac{21\div 7}{42\div 7}=\frac{3}{6}$$

$$-\frac{150}{110}=-\frac{150\div 10}{110\div 10}=-\frac{15}{11}$$

Entonces, si tenemos el número 0,6 , podemos escribirlo como $\frac{6}{10}$ o como $\frac{3}{5}$ o como cualquier otra fracción equivalente.

Expresión de fracciones como números decimales

Ya se ha visto cómo transformar números decimales a fracciones. Ahora se verá el procedimiento inverso, esto es, cómo representar una fracción cualquiera como un número decimal. Para esto sólo se necesita efectuar la división del numerador entre el denominador.

Por ejemplo, si se quiere convertir la fracción a número decimal, lo que se hace es dividir 2 entre 5. La división utilizando números decimales nos permite obtener la representación decimal de $\frac{2}{5}$

Al efectuar la división obtenemos el resultado 0,4 , de modo que la fracción se expresa en forma decimal como 0,4.

De la misma manera $\frac{3}{15}$ es 0.2, como se muestra al hacer la división de numerador entre denominador.

En algunos casos, el cociente puede tener una expresión decimal periódica, por ejemplo, si se desea encontrar la expresión decimal para la fracción , como se muestra en la división de la derecha.

$$\begin{array}{r|l} 1000 & 6 \\ \hline 400 & 0,166 \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

Así que $\frac{1}{6}=0{,}1\overline{6}$. Recordemos que la línea arriba del 6 significa que este número se repite indefinidamente.

Cuando tratamos con fracciones mixtas, esto es, números formados por un entero y una fracción, lo que se hace es escribir la parte entera original en la expresión decimal, y luego el decimal que corresponde a la fracción. Por ejemplo:

$$16\frac{3}{4}=16{,}75 \quad \text{porque} \quad \frac{3}{4}=0{,}75$$

Recuerde que si una fracción es negativa, también será negativa su expresión decimal; por ejemplo,

$$\frac{-1}{20}=-0{,}05$$

Orden de los números racionales

Una propiedad de todos los números es que cuando tenemos dos de ellos, siempre es posible compararlos y determinar cuál es el mayor de ambos. A esta propiedad se le llama orden.
En las anteriores páginas se explicó cómo comparar los números enteros. En esta ocasión explicaremos cómo se comparan dos números racionales. Ya se ha dicho que los enteros son racionales pero no los consideraremos aquí. Trataremos entonces dos casos: la comparación de decimales y la comparación de fracciones.

Veamos en primer término cómo comparar dos números decimales. Como hemos visto, los números decimales pueden ser positivos o negativos, por lo que hablaremos de la comparación entre dos positivos, la comparación entre dos negativos y la comparación entre un positivo y un negativo.

• La comparación entre dos números decimales positivos se hace así:

- Si los números tienen distinta parte entera, el mayor es el que tiene mayor parte entera.

- Si las partes enteras de los dos números son iguales, se comparan las primeras cifras decimales de ambos números. La mayor cifra decimal pertenece al mayor de los dos números. Si esta cifra coincide en ambos números, se compara la siguiente cifra decimal yendo de izquierda a derecha.

• Los números decimales negativos se comparan usando su valor absoluto, es decir, sus correspondientes positivos.

- El mayor decimal negativo es el que tiene menor correspondiente positivo.

• Por último, como en el caso de los enteros, también se cumple que todos los decimales positivos y el cero son mayores que cualquier decimal negativo.

Veamos unos ejemplos:

10,234 es mayor que 7,999 porque 10 es mayor que 7;

9,679 es menor que 9,817 porque 6 es menor que 8;

0,1 es mayor que 0,09 porque la primera cifra distinta, de izquierda a derecha, es el 1 en los décimos del primer número, que es mayor que el 0 del lugar de los décimos en el segundo;

0,056 es menor que 0,06 porque el 5 en el lugar de los centésimos del primer número es menor que el 6 de la misma posición en el segundo;

0,30000 es igual que 0,3 porque después de la última cifra decimal se pueden agregar tantos ceros a la derecha como se quiera sin alterar el número;

-9,63 es menor que -7,65 porque 9,63 es mayor que 7,65, y esto es porque 9 es mayor que 7;

-2,172 es mayor que -2,35 porque 2,172 es menor que 2,35, y esto es porque el 1 en los décimos es menor que el 3 en la misma posición;

-6,814 es menor que 4,37 porque -6,814 es negativo y 4,37 es positivo.

Ahora veremos cómo comparar números racionales en forma de fracciones. Como ya hemos visto que cualquier fracción se puede expresar en forma de número decimal, una manera para comparar dos fracciones es convertir las dos a números decimales y comparar esos números como se indicó anteriormente.

Otra manera es comparar las fracciones directamente.

Veamos entonces cómo comparar dos fracciones positivas, dos negativas y una positiva y una negativa:

- Para comparar dos fracciones positivas se procede como sigue:
    - Si las dos fracciones tienen denominadores iguales, la mayor es la que tiene mayor numerador.
    - Si los denominadores son diferentes, se transforman ambas fracciones a otras equivalentes de igual denominador y se procede como se indica en el punto anterior.

- Dos fracciones negativas se comparan usando su valor absoluto, es decir, sus correspondientes positivas. La mayor fracción negativa es la que tiene menor correspondiente positiva.

- Todas las fracciones positivas son mayores que cualquier fracción negativa.

$\frac{7}{15}$ es mayor que $\frac{2}{15}$ porque tienen el mismo denominador y 7 es mayor que 2

Por último, cuando se desea comparar una fracción con un número decimal, se procede de una de estas dos maneras:

• Se expresa la fracción como número decimal y se compara con el otro número decimal, con el procedimiento descrito anteriormente, o bien

• Se expresa el número decimal como fracción y se compara con la otra fracción, con el segundo de los procedimientos descritos.

Suma y resta de números racionales

En esta ocasión recordaremos cómo sumar y restar números racionales. Como los racionales pueden estar representados como fracción o decimal, podemos hacer las operaciones en cualquiera de las dos formas.

Suma y resta de números decimales

Para sumar decimales lo más importante es colocar los números de modo que las cifras del mismo orden queden alineadas. Esto se logra alineando la coma decimal de todos los números que se desee sumar. Después se realiza la suma como si se tratara de enteros y se coloca la coma decimal alineado con los restantes.

Por ejemplo, sumemos los números decimales 524,015 , 49,22 y 1926,8004:

$$\begin{array}{rr} & 524,015 \\ + & 49,22 \\ & 1926,8004 \\ \hline & 2500,0354 \end{array}$$

Como vemos, sumar decimales positivos es muy parecido que sumar números enteros.

Sólo hay que cuidar que la coma decimal de cada número quede bien alineado con las demás y en esa misma posición quedará la coma decimal del resultado. Recuerde que los lugares a la derecha de la coma decimal son ceros que no se escriben y significan que no hay cifras decimales de menor orden; pueden escribirse o no.

$$\begin{array}{rr} & 524,015 \\ - & 95,806 \\ \hline & 428,209 \end{array}$$

De modo similar se pueden restar dos decimales positivos. De nuevo se trata de escribir ambos números cuidando que las comas decimales queden alineadas,un .

Después se realiza la resta como si se tratara de enteros. Por ejemplo, se muestra la resta de 524,015 menos 95,806.

Si en el minuendo tenemos menos cifras decimales que en el sustraendo, conviene colocar ceros en los lugares vacíos.

De este modo puede resultarnos más fácil realizar la operación y los números son los mismos, ya que aumentarle ceros a la derecha de un número decimal no cambia su valor.

Por ejemplo, es lo mismo 75,2 que 75,20 o que 75,200, etc.

Si queremos restar 12,316 a 48,2, podemos escribir:

$$
\begin{array}{rr}
 & 48,200 \\
- & 12,316 \\
\hline
 & 35,884
\end{array}
$$

Como ya se ha mencionado, los números decimales pueden ser también negativos. Las reglas para sumar y restar en estos casos son las mismas que se usan con los números enteros:

- La suma de dos decimales negativos es la suma de sus valores absolutos, es decir, de sus respectivos positivos, pero el resultado tiene signo negativo.

- La suma de un positivo y un negativo se obtiene restando al de mayor valor absoluto aquel con menor valor absoluto. El resultado lleva el signo del número que tiene mayor valor absoluto.

En el caso de la resta de decimales negativos volvemos a tomar el modelo de los enteros:

- Restar un número positivo es sumar su correspondiente negativo

- Restar un número negativo es sumar su correspondiente positivo.

Suma y resta de fracciones

Cuando se suman o restan fracciones puede ocurrir que las fracciones que se van a sumar o restar tengan el mismo denominador o que tengan denominadores diferentes.

Veamos primero el caso en que las fracciones tienen el mismo denominador.

Consideremos las fracciones $\frac{6}{7}$ y $\frac{5}{7}$

Si se suman estas fracciones tenemos seis séptimos, más cinco séptimos, en total 6 más 5 séptimos, esto es 11 séptimos:

$$\frac{6}{7} + \frac{5}{7} = \frac{6+5}{7} = \frac{11}{7}$$

Entonces, cuando se desea sumar fracciones que tienen denominadores iguales, se trabaja con los numeradores:
simplemente, se suman los numeradores y el denominador es el mismo que tienen los sumandos.

Posiblemente, ya habrá pensado que lo mismo sucede con la resta y, efectivamente así es: si se quiere restar una fracción a otra, con el mismo denominador, el resultado es una fracción que tiene como numerador el resultado de restar al numerador de la primera, el numerador de la segunda. Y el denominador es el mismo de las fracciones que se restaron.

Por ejemplo:

$$\frac{12}{5} - \frac{8}{5} = \frac{12 - 8}{5} = \frac{4}{5}$$

Lo que se ha dicho es que si se suman séptimos con séptimos, se obtienen séptimos. Si se restan quintos a quintos se obtienen quintos y esto vale para cualquier tipo de fracciones con denominadores iguales.

En resumen:

- Para sumar fracciones con denominadores iguales, se suman los numeradores y el denominador es el mismo que el de las fracciones sumadas.

- Para restar fracciones con denominadores iguales, se restan los numeradores y el denominador es el mismo que el de las fracciones sumadas.

Veamos ahora cómo se suman y restan fracciones con denominadores diferentes. Aquí es útil recordar cómo se hizo para comparar dos fracciones con denominadores distintos.

En aquella ocasión se convirtieron ambas fracciones a otras, equivalentes con cada una de ellas, que tuvieran el mismo denominador. En el caso de la suma y la resta, se hace lo mismo.

Por ejemplo, supongamos que se quieren sumar $\frac{5}{6}$ y $\frac{4}{9}$.

Hallamos el mcm de los denominadores

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad m.c.m.(6,9)=18$$

$$6=2^1\times3^1 \qquad 9=3\times3=3^2$$

Cada fracción equivalente debe tener denominador 18

$$\frac{5}{6}\times\frac{?}{?}=\frac{?}{18} \qquad \frac{4}{9}\times\frac{?}{?}=\frac{?}{18}$$

$$\frac{5}{6}\times\frac{3}{3}=\frac{15}{18} \qquad \frac{4}{9}\times\frac{2}{2}=\frac{8}{18}$$

Se suman las fracciones equivalentes halladas

$$\frac{15}{18}+\frac{8}{18}=\frac{23}{18}$$

Para sumar o restar fracciones con distinto denominador, se calcula el mcm de los dos denominadores y luego se divide el mcm entre cada uno de los denominadores para encontrar el factor por el cual multiplicar el numerador de cada fracción; como denominador se utiliza el mcm; con esto se convierten las dos fracciones a otras equivalentes que tienen el mismo denominador y se efectúa la suma o la resta como en el caso anterior.

En los ejemplos de suma y resta de fracciones que hemos considerado hasta ahora, todas las fracciones han sido positivas. Si en las sumas o restas aparecen fracciones negativas, se aplican las mismas reglas que se mencionaron para los decimales negativos.

Multiplicación y división de números racionales

En esta lección se verá cómo multiplicar y dividir números racionales. Usted ya sabe realizar estas operaciones con números enteros y decimales. Veremos también cómo multiplicar y dividir fracciones.

Multiplicación de números decimales

Para multiplicar dos números decimales, se multiplican como si fueran enteros y se cuentan las cifras decimales en ambos factores; al resultado del producto se le ponen tantos decimales como la suma de los que tienen los factores.

$$
\begin{array}{rl}
7346,187 & \text{3 cifras} \\
\times \quad 15,64 & \text{2 cifras} \\
\hline
29384748 & \\
44077122 & \\
36730935 & \\
7346187 & \\
\hline
11489436468 & 3+2=5 \text{ cifras}
\end{array}
$$

División de números decimales

En la división de números decimales se van a ver distintas situaciones. Para empezar recordemos el significado de una división de enteros.

Por ejemplo, si pensamos que tenemos 5 panes y se han repartido entre dos personas, el cociente o resultado de la división nos dice que a cada persona le tocaron dos panes y el residuo nos dice que en esa repartición sobró uno.

$$
\begin{array}{r|l}
5 & 2 \\
\cline{2-2}
1 & 2
\end{array}
$$

Usando decimales podemos continuar la división para obtener un cociente más exacto. Para ello hay que considerar el 1, que es una unidad, como 10 décimos. Se dividen 10 décimos entre 2 y el resultado es 5 décimos. Esto se escribe como se muestra a la derecha:

$$
\begin{array}{r|l}
5 & 2 \\
\cline{2-2}
10 & 2,5 \\
0 &
\end{array}
$$

Lo que vemos en el cociente es 2 unidades con 5 décimos. Si pensamos nuevamente en los panes, se tiene que al repartir 5 panes entre dos personas, a cada una le tocan 2,5 panes, o bien, 2 panes y cinco décimos de panes o bien, $2\frac{5}{10}$ de pan. Pero como $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ el resultado indica que a cada persona le tocan dos bolillos y medio. Como el residuo es cero, ya no queda nada que dividir, es decir, ya no hay nada de bolillos que repartir.

Ahora veremos cuando dividendo y divisor tienen cifras decimales, en este caso de deben igualar la cantidad de cifras que hay después de la coma decimal, es posible que debamos agregar cero para conseguirlo, y se hace la división de manera tradicional.

Por ejemplo:

$$63{,}726 \div 7{,}23$$

Se deben igualar la cantidad de cifras que hay después de la coma decimal, por lo tanto, estos números quedan así:

$$63{,}726 \div 7{,}230$$

Y se resuelve de manera tradicional

$$\begin{array}{r|l} 63726 & 7230 \\ \cline{2-2} 58860 & 8{,}8 \\ 1020 & \end{array}$$

Multiplicación de fracciones

En esta ocasión se están estudiando los algoritmos para multiplicar y dividir racionales. Ya vimos que los racionales se pueden representar con fracciones o con decimales. En las páginas anteriores tratamos los casos en que los números se representan con decimales.

Ahora vamos a presentar la manera en que se multiplican dos fracciones.

Al multiplicar dos fracciones se obtiene una fracción. Entonces, para efectuar la multiplicación necesitamos saber cuál es el numerador y cuál el denominador del resultado. La regla es la siguiente:

- ***El numerador del producto de dos fracciones es el producto de los numeradores, y el denominador es el producto de los denominadores, de las fracciones que se están multiplicando.***

Veamos un ejemplo: multipliquemos las $\frac{2}{5}$ y $\frac{7}{4}$. fracciones

Obtenemos el resultado $\frac{14}{20}$

Pero como 14 y 20 tienen divisores comunes, podemos simplificar el resultado,encontrando una fracción equivalente que tenga un denominador más pequeño: dividiendo arriba y abajo entre 2 se obtiene $\frac{7}{10}$

Ya se ha dicho que los enteros son racionales que se pueden expresar como fracciones poniéndoles como denominador el 1. Así podemos realizar multiplicaciones como la que se muestra a la derecha

$$\frac{2}{5}\times 7=\frac{2}{5}\times\frac{7}{1}=\frac{2\times 7}{5\times 1}=\frac{14}{5}$$

División de fracciones

Para dividir dos fracciones es conveniente hablar de algunas propiedades de la multiplicación de números racionales, que son importantes para la división de fracciones.
La primera de ellas es la propiedad del neutro multiplicativo, propiedad que ya conocíamos para los naturales y para los enteros:

• Al multiplicar por 1 cualquier número racional, el resultado es ese mismo número.

La segunda propiedad es la del inverso multiplicativo:

• Para todo número racional distinto de cero, se puede encontrar otro número racional que multiplicado por el primero dé como resultado 1. El número encontrado es el inverso multiplicativo del primero.

Por ejemplo,

el inverso multiplicativo de	$\frac{3}{4}$	es	$\frac{4}{3}$	porque	$\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}=1$
el inverso multiplicativo de	2	es	$\frac{1}{2}$	porque	$2\times\frac{1}{2}=1$
el inverso multiplicativo de	$\frac{1}{7}$	es	7	porque	$\frac{1}{7}\times 7=1$
el inverso multiplicativo de	-5	es	$-\frac{1}{5}$	porque	$-5\times-\frac{1}{5}=1$

En general, para fracciones podemos decir que el inverso multiplicativo de una fracción es otra fracción que tiene por numerador el denominador de la primera, y por denominador el numerador de la primera. Si estos números son a y b, el inverso multiplicativo de la fracción $\frac{a}{b}$ es la fracción $\frac{b}{a}$, ya que al multiplicar las dos, siempre se obtiene una fracción que tiene como numerador y denominador el mismo número, por lo que es una fracción equivalente al entero 1.

Otra propiedad que debemos recordar es que la división y la multiplicación son operaciones inversas, esto es, que el efecto de una queda anulado por el de la otra.
Por ejemplo:

$$328 \times 271 \div 271 = 328$$

$$1672 \div 19 \times 19 = 1672$$

El efecto de multiplicar por 271 se “deshace” al dividir entre 271.

El efecto de dividir entre 19 se “deshace” al multiplicar por 19.

Usted puede convencerse de este hecho, usando una calculadora. Pruebe con varios ejemplos y varios números, sólo asegúrese de que multiplica y divide siempre por el mismo número.

Al relacionar estos hechos con el inverso multiplicativo podemos notar que:

$$1672 \div 19 \times 19 = 1672 \div 1 = 1672 \div \left(\frac{1}{19} \times 19\right)$$

Con esto lo que se quiere decir que es lo mismo dividir entre 19 que multiplicar por $\frac{1}{19}$

En general:
• Es lo mismo dividir un número entre una fracción que multiplicarlo por el inverso multiplicativo del divisor.

Estas ideas nos permiten efectuar una división de fracciones, una vez que se sabe cómo multiplicarlas. Porque se puede transformar una división en multiplicación, usando el inverso multiplicativo.

Por ejemplo, si queremos hacer la división $\frac{5}{3} \div \frac{7}{4}$, en lugar de dividir $\frac{5}{3}$ entre $\frac{7}{4}$ se multiplica por su inverso multiplicativo, o sea, por $\frac{4}{7}$

$$\frac{5}{3} \div \frac{7}{4} = \frac{5}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{21}$$

Podemos simplificar todo esto con el siguiente procedimiento para dividir fracciones:

1. Se multiplica el numerador de la primera, por el denominador de la segunda. El resultado es el numerador del cociente.

2. Se multiplica el denominador del primero por el numerador del segundo. El resultado es el denominador del cociente.

Con este mismo procedimiento podemos dividir una fracción entre un entero, o un entero entre una fracción, ya que podemos expresar el entero como una fracción con denominador igual a 1.

Multiplicación y división con números racionales negativos

Ya se vieron todos los casos para multiplicar y dividir racionales pero no se ha hablado de racionales negativos. Para estos números los algoritmos se realizan considerando los valores positivos de los racionales con los que se está operando, el único cuidado extra que hay que tener es colocar el signo al resultado de acuerdo a la regla de los signos que es la misma que para los números enteros:

- al multiplicar o dividir dos números con el mismo signo, el resultado es positivo;

- al multiplicar o dividir dos números con signos distintos, el resultado es negativo.