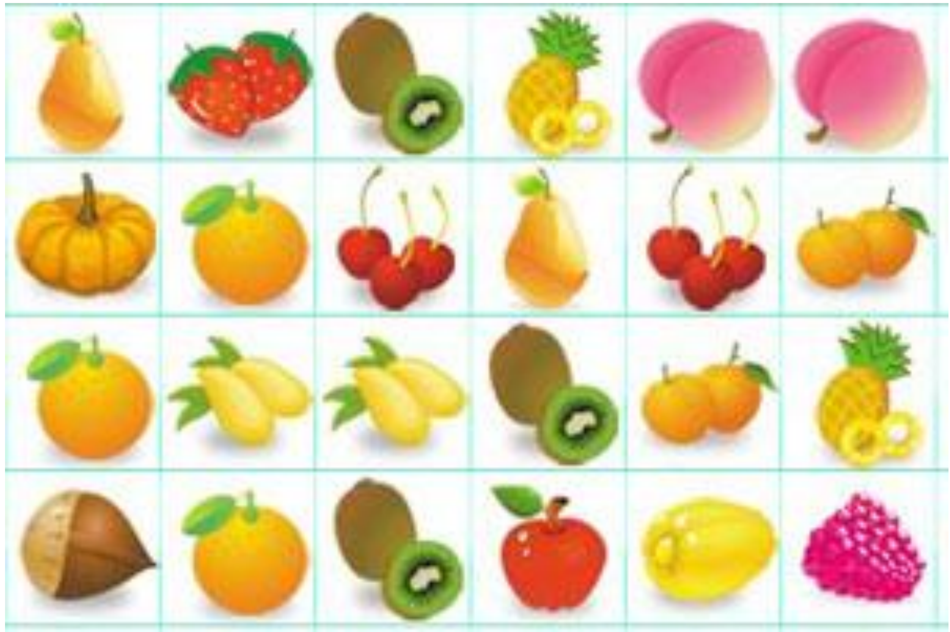
3. 卡诺图



xgsun@fudan.edu.cn

孙晓光

2024-9-13

1

卡 诺 图

卡诺图 Maurice Karnaugh (1924 -)

① **真值表**：优点：唯一。缺点：规模过大。

② **函数式**：不唯一。

各等价表达式之间有繁简之分，而无正错之分。

贝尔实验室

电信工程师

1953年

发明卡诺图

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$\bar{A}B = 1$

$AB = 1$

定理：$\boldsymbol{F = \bar{A}B + AB}$ $= (\bar{A} + A)B = B$

相邻的**最小项**消去取值不同的因子后可以合并

A \ B	0	1
0	0	1
1	0	1

$\bar{A}B = 1$

$AB = 1$

2变量卡诺图

排列方案

不是唯一的

$x \backslash y$	0	1
0	00	01
1	10	11

$x \backslash y$	0	1
0	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$
1	$x\bar{y}$	xy

$x \backslash y$	0	1
0	m_0	m_1
1	m_2	m_3

示例

$x \backslash y$	0	1
0	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$
1	$x\bar{y}$	xy

$$F = x\bar{y} + xy = x$$
$$= m_2 + m_3$$

$x \backslash y$	0	1
0		1
1	1	1

$$F = x + y$$

3变量卡诺图-1

$x \backslash yz$	00	01	10	11
0	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}yz$
1	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$	$xy\bar{z}$	xyz

$$F = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz$$
$$= \bar{y}\bar{z}(\bar{x} + x) + \bar{x}z(\bar{y} + y)$$
$$= \bar{y}\bar{z} + \bar{x}z$$

$x \backslash yz$	00	01	10	11
0	1	1	0	1
1	1	0	0	0

相邻：最小项相差一个变量。

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	1	0	0	0

格雷码

x	y	z	F	
0	0	0	1	$\bar{x}\bar{y}\bar{z} = 1$
0	0	1	1	$\bar{x}\bar{y}z = 1$
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\bar{x}yz = 1$
1	0	0	1	$x\bar{y}\bar{z} = 1$
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	0	

K图竖过来如何呢？

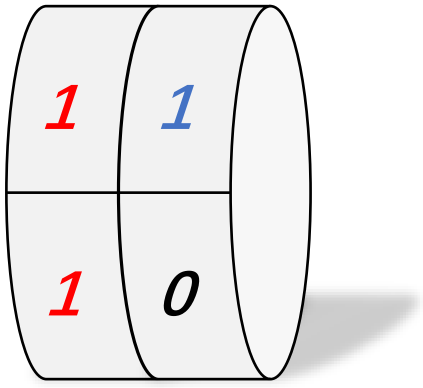
3变量卡诺图-2

$xy \backslash z$	0	1
00	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$
01	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}yz$
10	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$
11	$xy\bar{z}$	xyz

相邻：上下、左右也相邻

$xy \backslash z$	0	1
00	1	1
01	0	1
10	1	0
11	0	0

$xy \backslash z$	0	1
00	1	1
01	0	1
11	0	0
10	1	0



$$F = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz$$

$$= \bar{y}\bar{z}(\bar{x} + x) + \bar{x}z(\bar{y} + y)$$

$$= \bar{y}\bar{z} + \bar{x}z$$

x	y	z	F	
0	0	0	1	$\bar{x}\bar{y}\bar{z} = 1$
0	0	1	1	$\bar{x}\bar{y}z = 1$
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\bar{x}yz = 1$
1	0	0	1	$x\bar{y}\bar{z} = 1$
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	0	

3变量卡诺图-3

x \ yz	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	1	0	0	1

$$F = \bar{x}\bar{y} + \bar{y}\bar{z} + y\bar{z}$$

$$= \bar{x}\bar{y} + (\bar{y} + y)\bar{z}$$

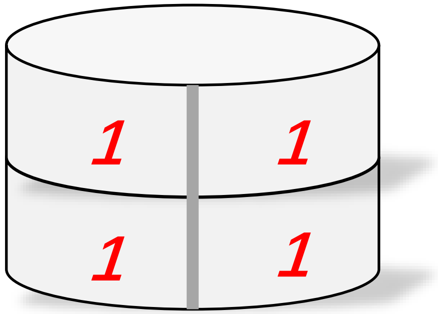
$$= \bar{x}\bar{y} + \bar{z}$$

单元格可以重复使用！$(A + A = A)$

x \ yz	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	1	0	0	1

合并相邻单元格，

需要找最大的合并！



【练习1】已知函数F的卡诺图，试化简

①

x \ yz	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	1	0	1	0

$$F = x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + xyz + \bar{x}y\bar{z}$$

②

x \ yz	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	1	0	1	1

$$F = \bar{x}\bar{y} + yz + x\bar{z}$$

③

x \ yz	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1

$$F = \bar{x} + y$$

④

x \ yz	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

$$F = 1$$

【练习2】用卡诺图化简

①　$F = x\bar{z} + \bar{x}z + y\bar{z} + \bar{y}z$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0		11	1	1
1	1	1		11

$F = \bar{x}z + x\bar{y} + y\bar{z}$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0		11	1	1
1	1	1		11

$F = \bar{x}y + x\bar{z} + \bar{y}z$

②　$F(x, y, z) = \Sigma m(1, 2, 3, 7)$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0		1	1	1
1			1	

$F = \bar{x}z + yz + \bar{x}y$

③　$F(x, y, z) = \Sigma m(0, 1, 2, 5, 6, 7)$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	1	1		1
1		1	1	1

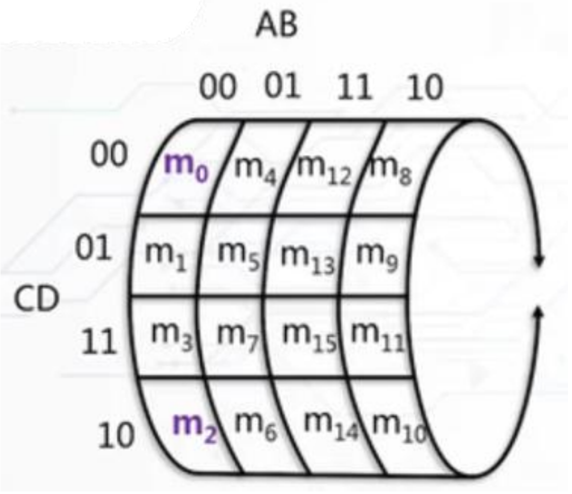
$F = \bar{x}\bar{y} + xz + y\bar{z}$

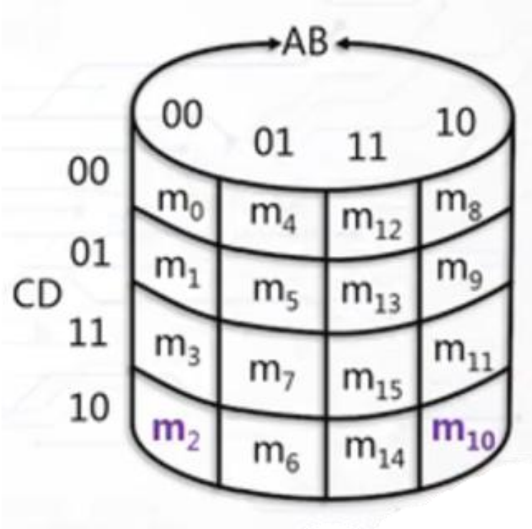
4变量卡诺图

CD \ AB	00	01	11	10
00	m_0	m_4	m_{12}	m_8
01	m_1	m_5	m_{13}	m_9
11	m_3	m_7	m_{15}	m_{11}
10	m_2	m_6	m_{14}	m_{10}

上下两边相邻

左右两边相邻



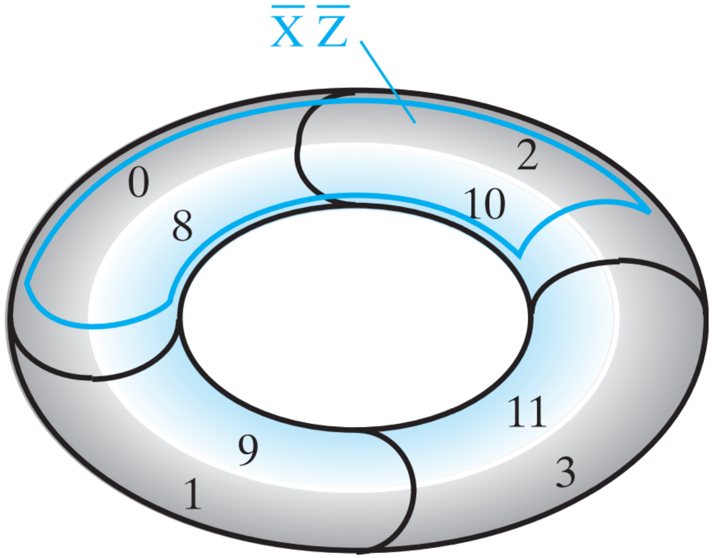


WX \ YZ	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

Y X W Z

$\overline{X}\,\overline{Z}$

4个角是相邻的



用卡诺图化简

AB \ CD	00	01	11	10
00	**1**		**1**	**1**
01		**1**	**1**	
11		**1**	**1**	
10	**1**	**1**	**1**	**1**

本题有4个化简结果:

$$F=\boldsymbol{BD}+\boldsymbol{\overline{B}\overline{D}}+AD+CD$$

$$F=\boldsymbol{BD}+\boldsymbol{\overline{B}\overline{D}}+A\bar{B}+CD$$

$$F=\boldsymbol{BD}+\boldsymbol{\overline{B}\overline{D}}+AD+\bar{B}C$$

$$F=\boldsymbol{BD}+\boldsymbol{\overline{B}\overline{D}}+A\bar{B}+\bar{B}C$$

①② - 寻找：必要质蕴含

AB \ CD	00	01	11	10
00	1		1	1
01		1	1	
11		1	1	
10	1	1	1	1

CD

$A\bar{B}$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1		1	1
01		1	1	
11		1	1	
10	1	1	1	1

$\bar{B}C$

AD

AB \ CD	00	01	11	10
00	1		1	1
01		1	1	
11		1	1	
10	1	1	1	1

$\bar{B}\bar{D}$

必要质蕴含

BD

AB \ CD	00	01	11	10
00	1		1	1
01		1	1	
11		1	1	
10	1	1	1	1

$$F = BD + \bar{B}\bar{D} + \cdots$$

③ 处理其余蕴含（白色底的1）

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
$\bar{B}\bar{D}$ 00	d		1	d
01	BD	d	d	
11		d	d	
10	d	1	1	d

CD

$A\bar{B}$

$F = \boldsymbol{BD} + \boldsymbol{\bar{B}\bar{D}}$

$+A\bar{B} + CD$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
$\bar{B}\bar{D}$ 00	d		1	d
01	BD	d	d	
11		d	d	
10	d	1	1	d

$\bar{B}C$

AD

$F = \boldsymbol{BD} + \boldsymbol{\bar{B}\bar{D}}$

$+AD + \bar{B}C$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
$\bar{B}\bar{D}$ 00	d		1	d
01	BD	d	d	
11		d	d	
10	d	1	1	d

$\bar{B}C$

$A\bar{B}$

$F = \boldsymbol{BD} + \boldsymbol{\bar{B}\bar{D}}$

$+A\bar{B} + \bar{B}C$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
$\bar{B}\bar{D}$ 00	d		1	d
01	BD	d	d	
11		d	d	
10	d	1	1	d

CD

AD

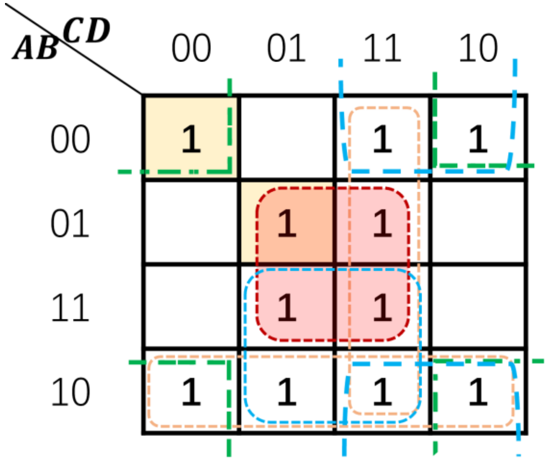
$F = \boldsymbol{BD} + \boldsymbol{\bar{B}\bar{D}}$

$+AD + CD$

质蕴含 Prime Implicant

- **蕴 含**：函数“**与或**”表达式中的每个”**与**”项。
- 质 蕴 含：卡诺图中**最多**数目的相邻”**与**”项。

  即，该蕴含项不是其他蕴含项的子集。
- **必要质蕴含**：如果**一个最小项**对应的方格只被一个质蕴含所包含，那么包含这个最小项的质蕴含，称为**必要质蕴含**。



卡诺图化简方法

① 画出所有的**质蕴含**

② 找出**必要质蕴含**：通过查找一个特殊的乘积项

处理**必要质蕴含**：这是必需要的项

③ 处理**剩余的非必要质蕴含**

【练习3】用卡诺图化简

$$Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}B\bar{D} + ACD + A\bar{B}$$

$$= \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}B(C+\bar{C})\bar{D} + A(B+\bar{B})CD + A\bar{B}(C+\bar{C})(D+\bar{D})$$

$$= m_1 + m_4 + m_6 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{15}$$

方法1：“**与-或**”表达式转化为**标准**“**与-或**”表达式

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00		1		
01	1			1
11			1	
10	1	1	1	1

方法2：直接写出所有的**1**

			$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$		
	$AB \backslash CD$	00	01	11	10
	00		1		
$\bar{A}B\bar{D}$	01	1			1
	11			1	
$A\bar{B}$	10	1	1	1	1

【练习4】用卡诺图化简

① $Y = A\bar{B}C + BC + \bar{A}B\bar{C}D$

化简后:

$Y = BC + AC + \bar{A}BD$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00				
01		1	1	1
11			1	1
10			1	1

② $Y = \Sigma m(0,1,2,5,8,9,10,12,14)$

化简后:

$Y = \bar{B}\bar{C} + \bar{B}\bar{D} + A\bar{D} + \bar{A}\bar{C}D$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	1		1
01		1		
11	1			1
10	1	1		1

【证明】 $AB+\bar{A}C+(\bar{B}+\bar{C})D=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{\bar{A}C}+\boldsymbol{D}$

如果公式推导有困难，可以借助卡诺图帮助。

有多种方案，这是其中一种：寻找$\boldsymbol{D}$。

证： $AB+\bar{A}C+(\bar{B}+\bar{C})\boldsymbol{D}$

$$= \underset{①}{\boldsymbol{AB}}+\underset{②}{\boldsymbol{\bar{A}C}}+\underset{③}{\boldsymbol{\bar{B}D}}+\underset{④}{\boldsymbol{\bar{C}D}}$$

$$= AB+\boldsymbol{ABCD}+\bar{A}C+\bar{B}D+\boldsymbol{A\bar{B}CD}+\bar{C}D$$

$$= AB+\bar{A}C+\boldsymbol{\bar{A}CD}+\bar{B}D+\bar{C}D+\boldsymbol{ACD}$$

$$= AB+\bar{A}C+\bar{B}D+\bar{C}D+\boldsymbol{CD}$$

$$= AB+\bar{A}C+\bar{B}D+\boldsymbol{D}$$

$$= AB+\bar{A}C+D$$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00		③ 1 ④	③ 1 ②	1 ②
01		1 ④	1 ②	1 ②
11	① 1	① 1 ④	① 1	① 1
10		③ 1 ④	③ 1	

【证明】 $\overline{AB+\bar{A}C} = A\bar{B}+\bar{A}\bar{C}$

$$\overline{AB+\bar{A}C} = \overline{AB}\cdot\overline{\bar{A}C}$$

$$= (\bar{A}+\bar{B})\cdot(A+\bar{C})$$

$$= \bar{A}A + \bar{A}\bar{C} + A\bar{B} + \bar{B}\bar{C}$$

$$= \bar{A}\bar{C} + A\bar{B} + \bar{B}\bar{C}(A+\bar{A})$$

$$= \bar{A}\bar{C} + A\bar{B} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

$$= \bar{A}\bar{C}(1+\bar{B}) + A\bar{B}(1+\bar{C})$$

$$= \bar{A}\bar{C} + A\bar{B}$$

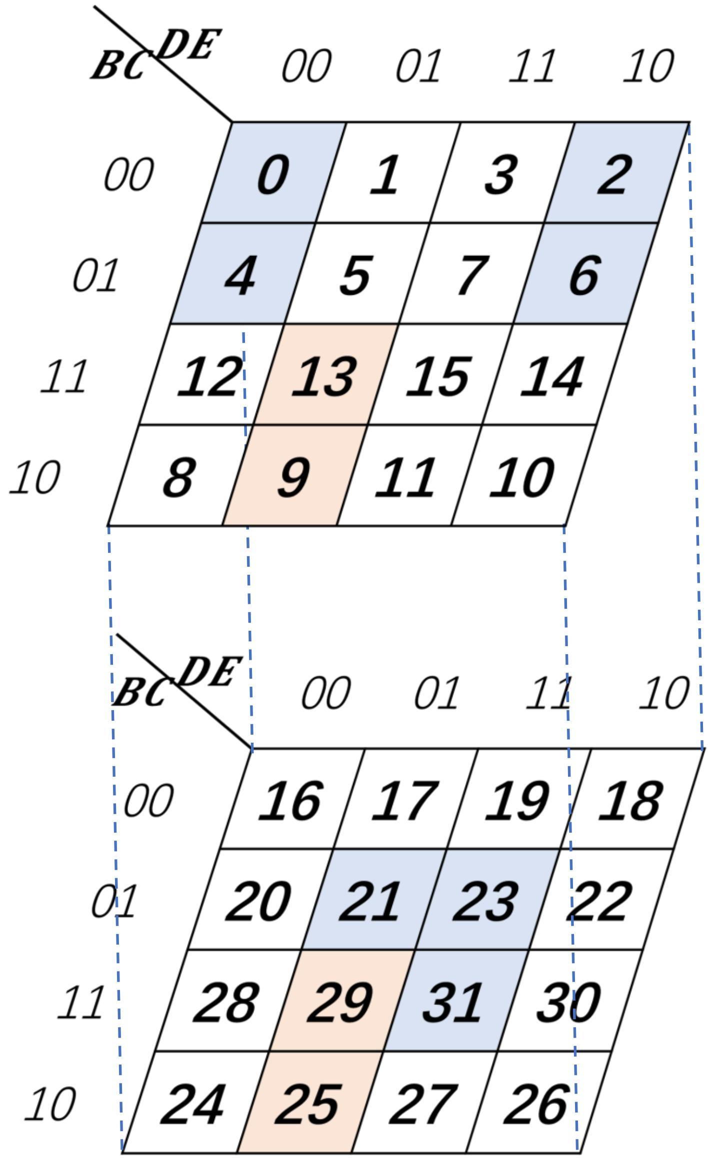
A \ BC	00	01	11	10
0	1			1
1	1	1		

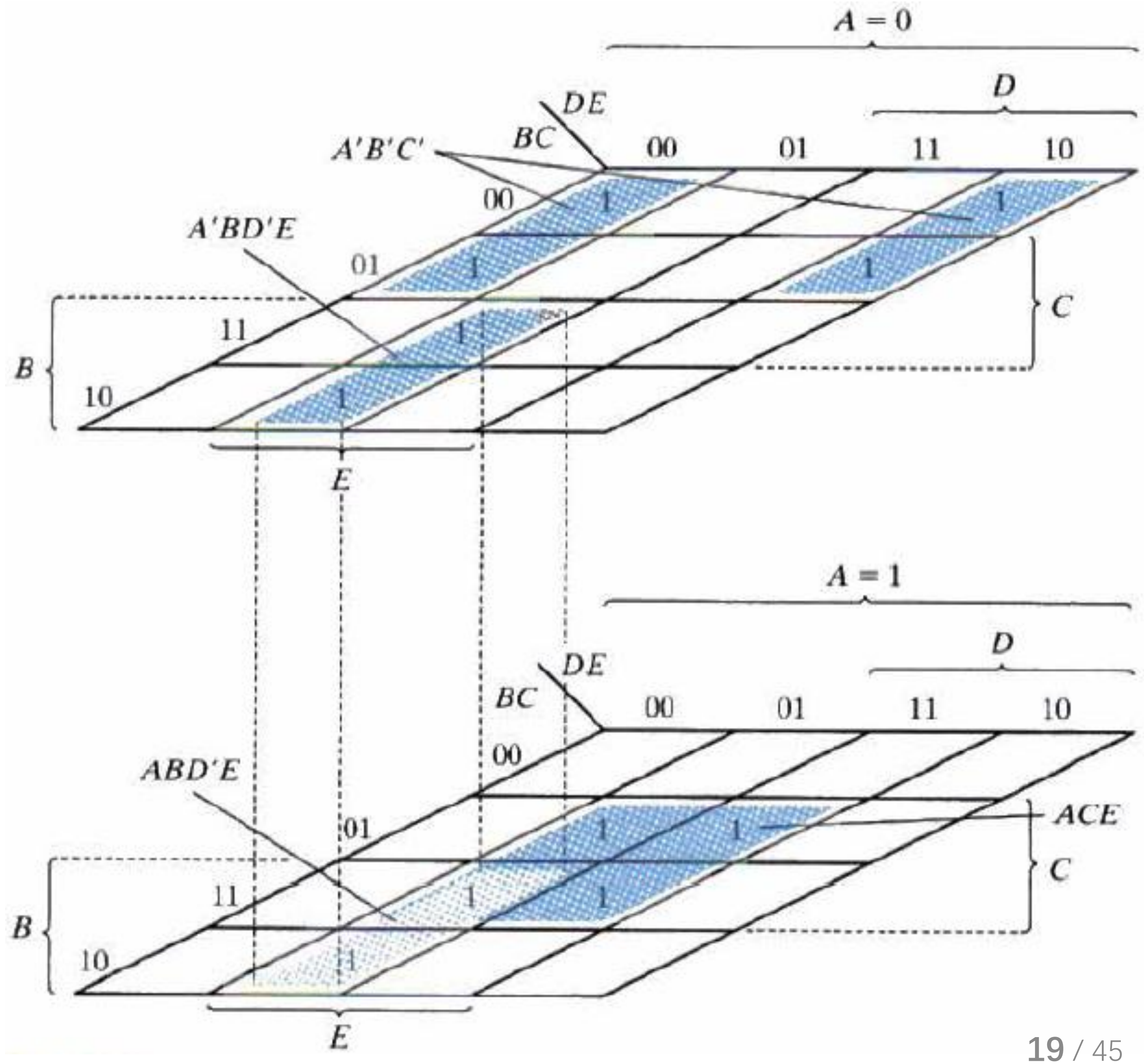
$\bar{B}\bar{C}$

5输入变量卡诺图

A=0

A=1



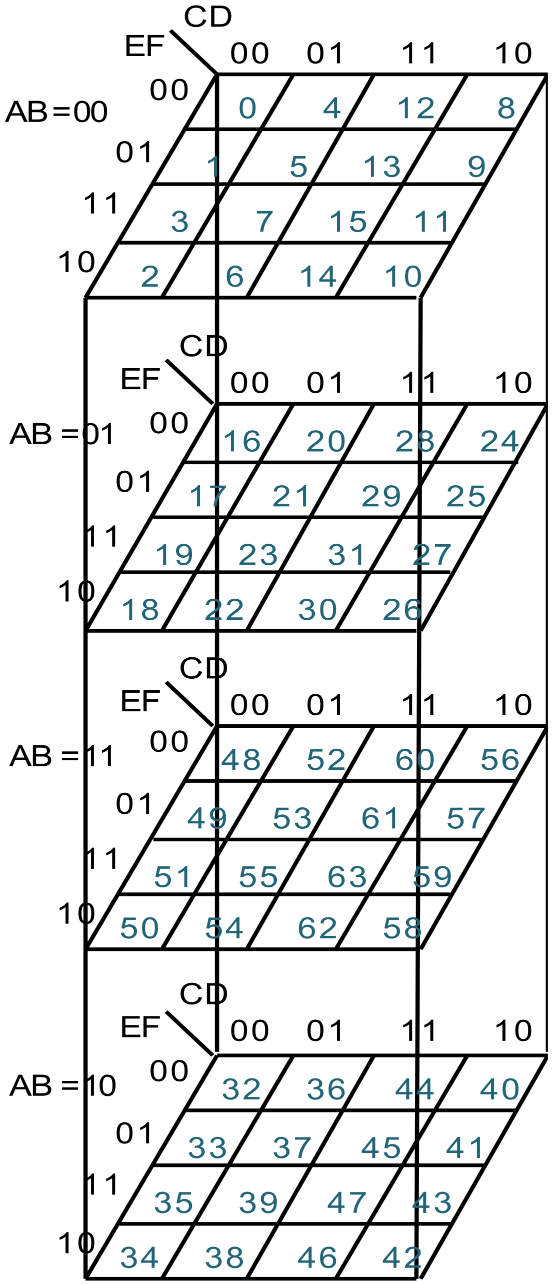


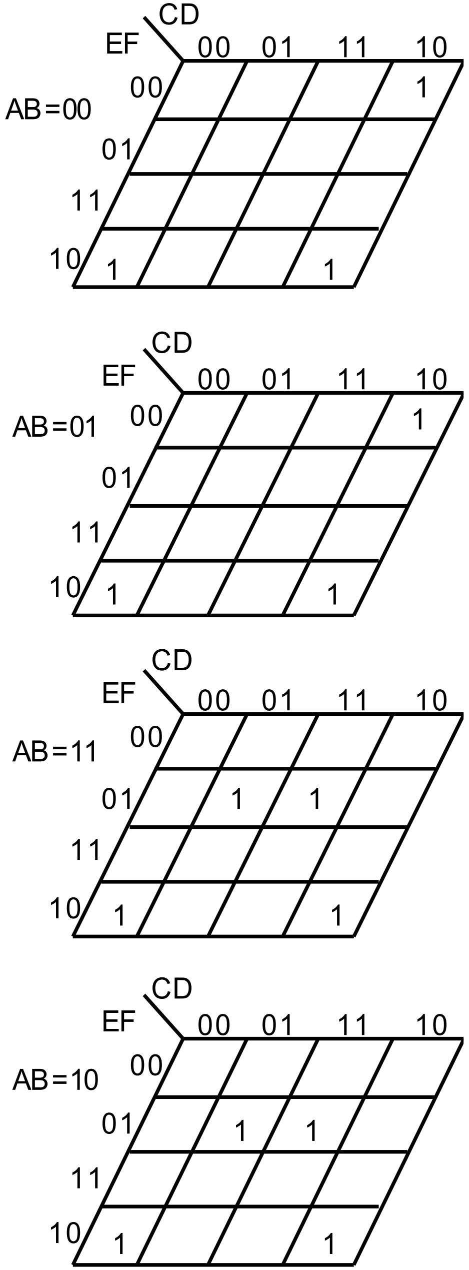
6输入变量卡诺图

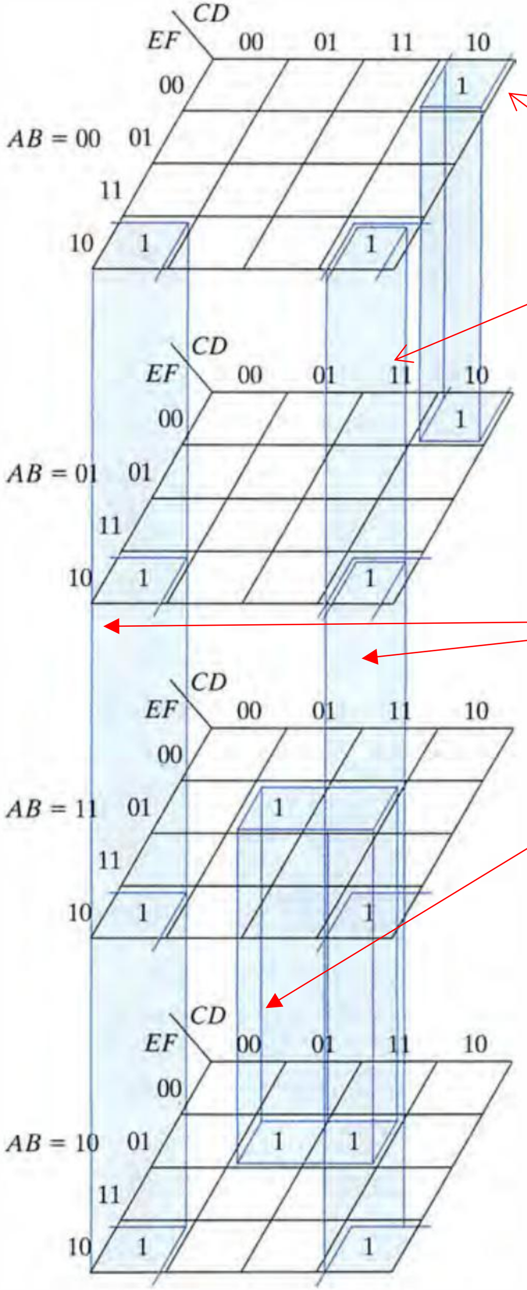
$$F(A,B,C,D,E,F) = \Sigma m\ (2,8,10,18,24,26,34,37,42,45,50,53,58,61)$$

ABC \ DEF	000	001	011	010	100	101	111	110
000				2				
001	8			10				
011	24			26				
010				18				
100				34		37		
101				42		45		
111				58		61		
110				50		53		

6输入变量卡诺图







$$F = \bar{D}E\bar{F} + AD\bar{E}F + \bar{A}C\bar{D}\bar{F}$$

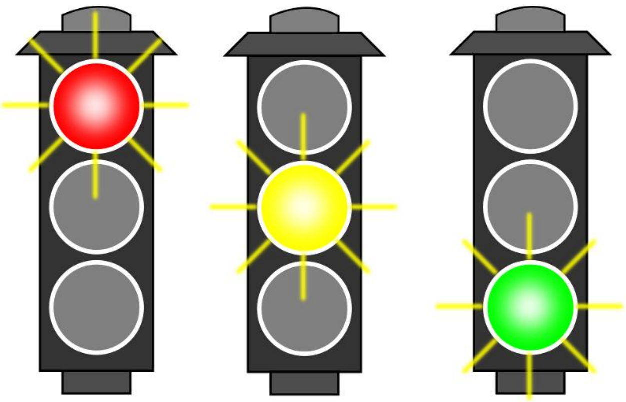
2

无关项

完全描述、非完全描述

- **完全描述逻辑函数**：对于输入变量的每一组取值，逻辑函数都有确定的值。
- **非完全描述逻辑函数**：对于输入变量的某些取值组合，逻辑函数值不确定(**d**)，

  即函数值可以为0，也可以为1，而不影响函数的功能。如，红绿交通灯。



假设：1-灯亮、0-灯灭

1-通行、0-停止

红灯 R	黄灯 Y	绿灯 G	通行 F
0	0	0	d
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	d
1	0	0	0
1	0	1	d
1	1	0	d
1	1	1	d

$$F=\sum m(1)+\sum d(0,3,5,6,7)$$

$R\backslash YG$	00	01	11	10
0	d	1	d	0
1	0	d	d	d

$$F=G$$

无关项 (don’t-care)

- 实际应用中，函数不是由确定的0或1变量组合规定的。
- 大多数情况下，我们不关心这些不确定项给函数值带来的影响。
- 这些不确定项 (d) 或 (X)称为：**无关项**。
- 无关项可以用于卡诺图的**进一步化简**。

化简 $Y(A,B,C,D)=\sum m(1,7,8)+\boldsymbol{d}(3,5,9,10,12,14,15)$

也可以写作： $Y=\bar{A}\bar{B}\bar{C}D+\bar{A}BCD+A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$

$\bar{A}\bar{B}CD+\bar{A}B\bar{C}D+AB\bar{C}\bar{D}+A\bar{B}\bar{C}D+ABCD+ABC\bar{D}+A\bar{B}C\bar{D}=0$

【解】这个逻辑函数已无可化简，但适当加入约束后还可以化简

$$Y=(\bar{A}\bar{B}\bar{C}D+\bar{A}\bar{B}CD)+(\bar{A}BCD+\bar{A}B\bar{C}D)+(A\bar{B}\bar{C}\bar{D}+AB\bar{C}\bar{D})+(ABC\bar{D}+A\bar{B}C\bar{D})$$

$$=(\bar{A}\bar{B}D+\bar{A}BD)+(A\bar{C}\bar{D}+AC\bar{D})$$

$$=\bar{A}D+A\bar{D}$$

AB \ CD	00	01	11	10
00		1	d	
01		d	1	
11	d		d	d
10	1	d		d

$$F\ (w,x,y,z) = \Sigma m(1,3,7,11,15)\ ,\ \ \boldsymbol{d}(w,x,y,z) = \Sigma m(0,2,5)$$

$F = yz + \overline{w}\overline{x}z$

wx \ yz	00	01	11	10
00		1	1	
01			1	
11			1	
10			1	

无关项简化了逻辑函数表达式。

wx \ yz	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01		1	1	
11			1	
10			1	

如果无关项处均为1

$F = yz + \overline{w}z + \overline{w}\overline{x}$

$F = yz + \overline{w}\overline{x}$

wx \ yz	00	01	11	10
00	d	1	1	d
01		d	1	
11			1	
10			1	

wx \ yz	00	01	11	10
00	d	1	1	d
01		d	1	
11			1	
10			1	

$F = yz + \overline{w}z$

【练习7】化简

$$\boldsymbol{Y(A,B,C,D)=\sum m(2,4,6,8)+d(10,11,12,13,14,15)}$$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00				1
01	1			1
11	d	d	d	d
10	1		d	d

$$Y=B\overline{D}+A\overline{D}+C\overline{D}$$

3

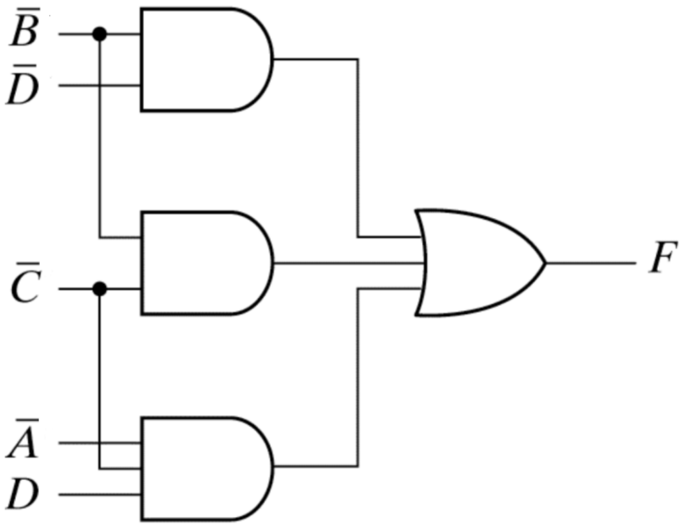
其它形式

2种形式的二级门电路

标准式1：**积之和**

① 在真值表上找 $F = 1$的项

② $F = \bar{B}\bar{D} + \bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{C}D$



标准式2：**和之积**

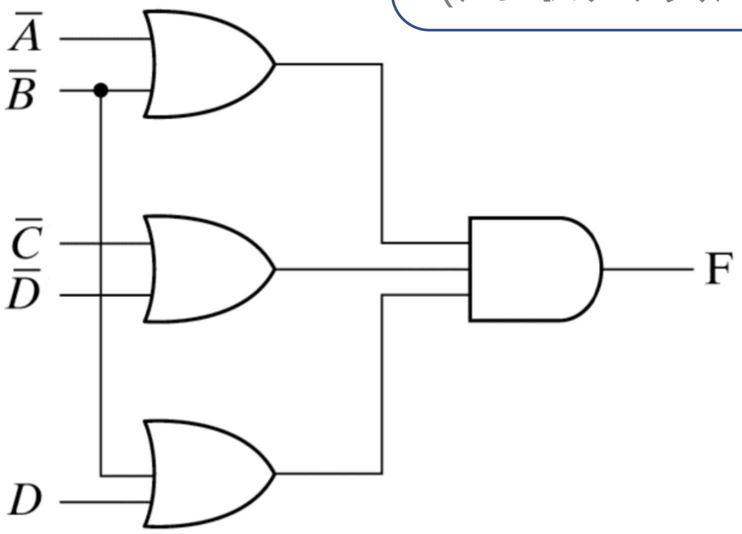
① 在真值表上找 $F = \mathbf{0}$的项，即 $\bar{F}$

② $\bar{F} = AB + CD + B\bar{D}$

③ $F = \bar{\bar{F}} = \overline{AB + CD + B\bar{D}}$ (与或非式)

$= (\bar{A} + \bar{B})(\bar{C} + \bar{D})(\bar{B} + D)$

(用**最大项**法可以直接化简得到)



AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	0	1

最大项法 $F(w,x,y,z)=\Sigma m(1,3,7,11,15)$，$\boldsymbol{d}=\Sigma m(0,2,5)$

$wx \backslash yz$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

d 都为0时:

$F=z(\bar{w}+y)(\bar{x}+y)$

$wx \backslash yz$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

d 都为1时:

$F=(\bar{w}+y)(\bar{w}+z)(\bar{x}+z)$

$wx \backslash yz$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

$F=z(\bar{w}+y)$

无关项简化了逻辑函数表达式。

用两次取反法 求 最简“或-与”表达式

$$F = A\bar{C} + AD + \bar{B}\bar{C} + \bar{B}D$$

卡诺图合并所有0最小项，再公式取反

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	1	0	1	1
11	1	0	1	1
10	0	0	0	0

$$\bar{F} = \bar{A}B + C\bar{D}$$

$$F = \bar{\bar{F}} = (A + \bar{B})(\bar{C} + D)$$

- F的卡诺图
- $\bar{F}$的化简 合并0项
- $\bar{F}$ 取反

$$F = (\bar{A} + D)(B + \bar{D})(A + B)$$

公式取反，卡诺图化简，公式再取反

$$\bar{F} = A\bar{D} + \bar{B}D + \bar{A}\bar{B}$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1		1	1
01	1			1
11	1			1
10	1		1	1

$$\bar{F} = \bar{B} + A\bar{D}$$

$$F = \bar{\bar{F}} = B\,(\bar{A} + D)$$

- $\bar{F}$的表达式
- $\bar{F}$的卡诺图
- $\bar{F}$的化简 合并1项
- $\bar{F}$ 取反

【练习5】化简 $F(x,y,z)=\sum(1,3,4,6)$

① 积之和的形式

$$F(x,y,z)=\sum m(1,3,4,6)$$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0		1	1	
1	1			1

$$F=\bar{x}z+x\bar{z}$$

② 和之积的形式

$$F(x,y,z)=\prod M(0,2,5,7)$$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	0			0
1		0	0	

$$\overline{F}=xz+\bar{x}\bar{z}$$

$$F=(\bar{x}+\bar{z})(x+z)$$

【练习6】化简 $(p+r)(\bar{p}+\bar{q})(\bar{q}+r)(\bar{p}+\bar{r})$

p \ qr	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	0	0	0

$$(p+r)(\bar{q}+r)(\bar{p}+\bar{r})$$

p \ qr	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	0	0	0

$$(p+r)(\bar{p}+\bar{q})(\bar{p}+\bar{r})$$

奇函数

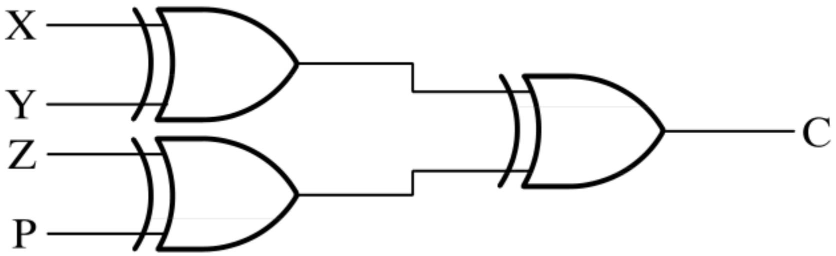
只有奇数个输入变量＝1时，输出值才＝1

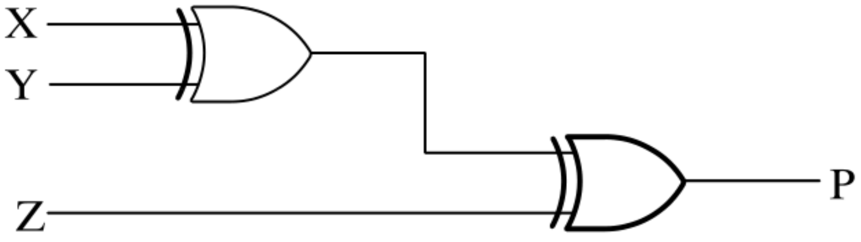
$$X \oplus Y = X\overline{Y} + \overline{X}Y$$

$\boxed{\text{相异为1}}$

$$X \oplus Y \oplus Z = (X\overline{Y} + \overline{X}Y)\overline{Z} + (XY + \overline{X}\,\overline{Y})Z$$

$$= X\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}Y\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}Z + XYZ$$





X \ YZ	00	01	11	10
0		1		1
1	1		1	

(a) X ⊕ Y ⊕ Z

三变量或三变量以上

的⊕运算都是奇函数。

AB \ CD	00	01	11	10
00		1		1
01	1		1	
11		1		1
10	1		1	

(b) A ⊕ B ⊕ C ⊕ D

教材P56，2.1e)

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BC\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D} + AB\overline{C}\,\overline{D} + ABCD$$

(e)

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

AB \ CD	00	01	11	10
00	**1**		**1**	
01		**1**		**1**
11	**1**		**1**	
10		**1**		**1**

$$Y = \overline{(A \oplus B)}\,\overline{(C \oplus D)} + (A \oplus B)(C \oplus D)$$

反函数、对偶式

$$F = \bar{x}z + x\bar{y}$$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0		1	1	
1	1	1		

反函数 $\overline{F}$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1

对偶 F'

$$F' = (\bar{x} + z)(x + \bar{y})$$
$$= \bar{x}\bar{y} + xz + \bar{y}z$$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	1	1		
1		1	1	

用卡诺图做运算

$F1$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0		1	1	
1	1	1		

$F2$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0			1	1
1	1			1

$F1 \cdot F2$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0			1	
1	1			

$F1 + F2$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0		1	1	1
1	1	1		1

用卡诺图做运算(含无关项)

$F1$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0		1	d	
1	1	1	d	

$F2$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0			1	1
1	1			1

$0+d=d \quad 1+d=1 \quad 0\cdot d=0 \quad 1\cdot d=d \quad d+d=d \quad d\cdot d=d \quad \bar{d}=d$

$F1\cdot F2$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0			d	
1	1			

$F1+F2$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0		1	1	1
1	1	1	d	1

4

多 输 出

【练习8】多输出函数设计最优化

$x_1x_2x_3$	y_1y_2
0 0 0	1 0
0 0 1	1 1
0 1 0	0 0
0 1 1	0 1
1 0 0	d d
1 0 1	0 1
1 1 0	0 1
1 1 1	1 0

$\boldsymbol{y_1}$

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0	1	1		
1	d		1	

$$y_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2 + x_1x_2x_3$$

$\boldsymbol{y_2}$

x_1 \ x_2x_3	00	01	11	10
0		1	1	
1	d	1		1

$$y_2 = \bar{x}_1x_3 + \bar{x}_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3$$

- **单输出函数**化简只须符合要求的逻辑形式达到最小覆盖即可。但
- **多输出函数**由于存在各个函数之间的相关性，需要考虑**公共项**！

【例】化简$F_1(a,b,c)=\Sigma m(2,3,7)$;

$$F_2(a,b,c)=\Sigma m(1,5,7)$$

a \ bc	00	01	11	10
0			1	1
1			1	

公共最小项是m_7

a \ bc	00	01	11	10
0		1		
1		1	1	

$$F_1=\bar{a}b+bc$$

$$F_1=\bar{a}b+abc$$

$$F_2=\bar{b}c+ac$$

$$F_2=\bar{b}c+abc$$

质蕴涵		m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7
F_1	$\bar{a}b$			V	V				
	bc				V				V
F_2	$\bar{b}c$		V				V		
	ac						V		V

【例】设计最优化

$x_1x_2x_3$	$f^1f^2f^3$
0 0 0	1 1 0
0 0 1	0 1 d
0 1 0	1 1 1
0 1 1	1 0 1
1 0 0	1 0 1
1 0 1	0 1 1
1 1 0	0 0 1
1 1 1	0 0 0

方案1

f^1

x_3 \ x_1x_2	00	01	11	10
0	1	1		1
1		1		

f^2

x_3 \ x_1x_2	00	01	11	10
0	1	1		
1	1			1

f^3

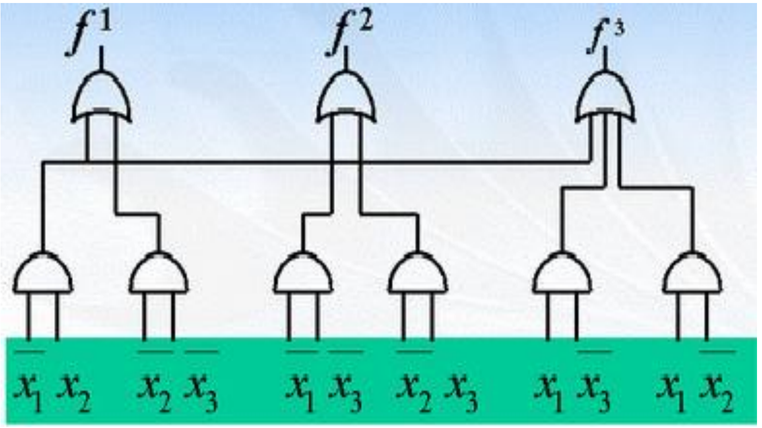
x_3 \ x_1x_2	00	01	11	10
0		1	1	1
1	d	1		1

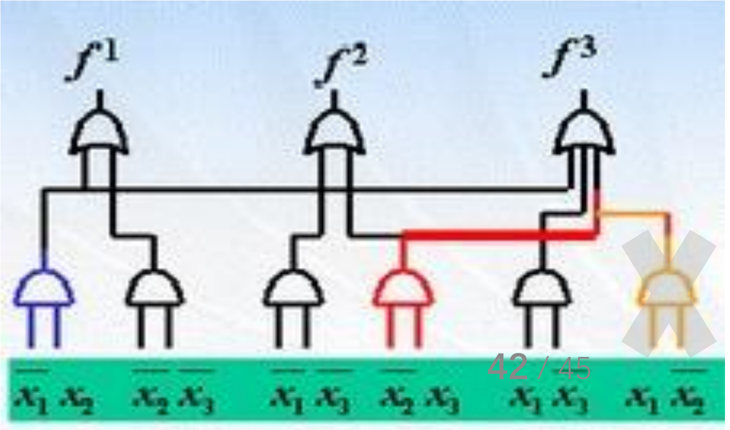
方案2

	00	01	11	10
0	1	1		1
1		1		

	00	01	11	10
0	1	1		
1	1			1

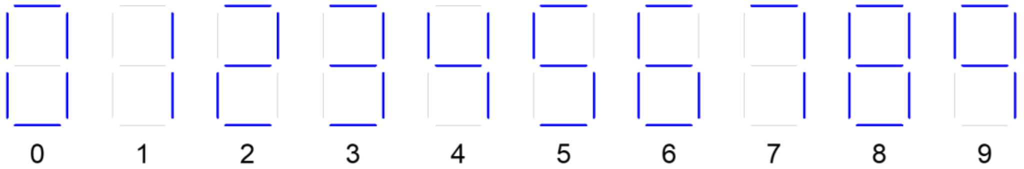
	00	01	11	10
0		1	1	1
1	d	1		1



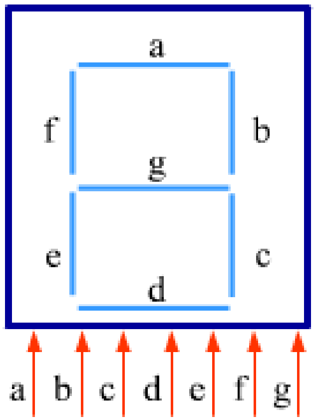


七段数码管BCD设计

	$x_4x_3x_2x_1$	$a\ b\ c\ d\ e\ f\ g$
0	0 0 0 0	1 1 1 1 1 1 0
1	0 0 0 1	0 1 1 0 0 0 0
2	0 0 1 0	1 1 0 1 1 0 1
3	0 0 1 1	1 1 1 1 0 0 1
4	0 1 0 0	0 1 1 0 0 1 1
5	0 1 0 1	1 0 1 1 0 1 1
6	0 1 1 0	1 0 1 1 1 1 1
7	0 1 1 1	1 1 1 0 0 0 0
8	1 0 0 0	1 1 1 1 1 1 1
9	1 0 0 1	1 1 1 1 0 1 1
	1 0 1 0	d d d d d d d
	… …	… …
	1 1 1 1	d d d d d d d



7段数码管：



$x_4x_3 \backslash x_2x_1$	00	01	11	10
00	1		1	1
01		1	1	1
11	d	d	d	d
10	1	1	1	d

$$a = x_2 + x_3x_1 + x_4 + \bar{x}_3\bar{x}_1$$

七段数码管BCD设计-2

x_4x_3 \ x_2x_1	00	01	11	10
00	1		1	1
01		1	1	1
11	d	d	d	d
10	1	1	1	d

x_4x_3 \ x_2x_1	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1		1	
11	d	d	d	d
10	1	1	d	d

单输出优化

$$\boldsymbol{a} = x_4 + x_3x_1 + x_2 + \bar{x}_3\bar{x}_1$$

$$\boldsymbol{b} = x_4 + \bar{x}_3 + x_2x_1 + \bar{x}_2\bar{x}_1$$

$$c = x_4 + x_3 + \bar{x}_2 + x_1$$

$$d = \bar{x}_3\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_1 + x_3\bar{x}_2x_1 + \bar{x}_3x_2$$

$$e = \bar{x}_3\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_1$$

$$f = x_4 + \bar{x}_2\bar{x}_1 + x_3\bar{x}_1 + x_3\bar{x}_2$$

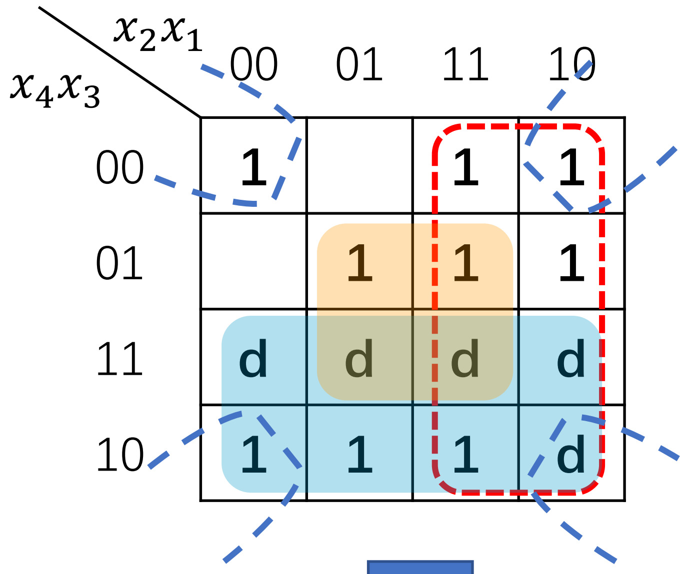
$$g = x_4 + \bar{x}_2x_1 + \bar{x}_3x_2 + x_3\bar{x}_1$$

如何同时兼顾7张卡诺图？

七段数码管BCD设计-3

$$a = x_4 + x_3x_1 + x_2 + \bar{x}_3\bar{x}_1$$

$$b = x_4 + \bar{x}_3 + x_2x_1 + \bar{x}_2\bar{x}_1$$



$$a = \boldsymbol{x_4} + \boldsymbol{x_2x_1} + \boldsymbol{\bar{x}_3\bar{x}_1} + \boldsymbol{x_3\bar{x}_2x_1} + \boldsymbol{x_3x_2\bar{x}_1}$$

$$b = \boldsymbol{\bar{x}_3x_1} + \boldsymbol{\bar{x}_3\bar{x}_1} + \boldsymbol{x_2x_1} + \bar{x}_2\bar{x}_1$$

$$c = \boldsymbol{\bar{x}_3x_1} + \boldsymbol{x_3\bar{x}_2x_1} + \bar{x}_2\bar{x}_1 + \boldsymbol{x_2x_1} + \boldsymbol{x_3x_2\bar{x}_1}$$

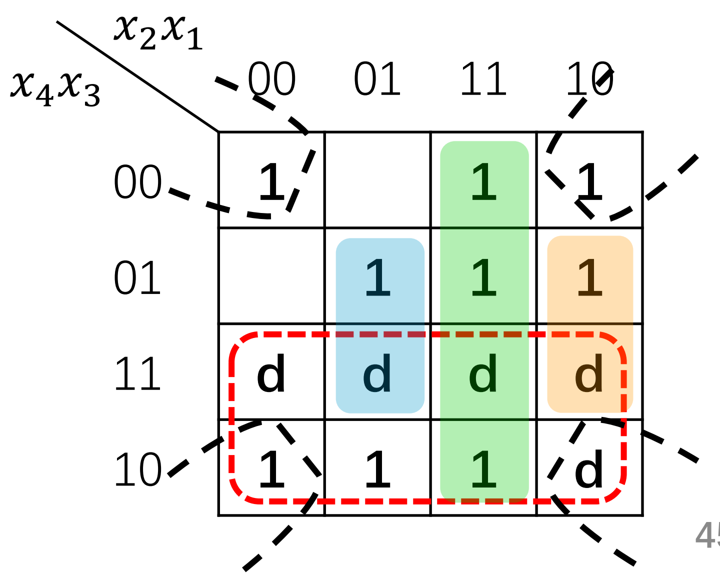
$$d = \bar{x}_3x_2 + \boldsymbol{x_3\bar{x}_2x_1} + \bar{x}_3\bar{x}_1 + \boldsymbol{x_3x_2\bar{x}_1}$$

$$e = \boldsymbol{\bar{x}_3\bar{x}_1} + \boldsymbol{x_3x_2\bar{x}_1}$$

$$f = \boldsymbol{x_3\bar{x}_2x_1} + \bar{x}_2\bar{x}_1 + \boldsymbol{x_3x_2\bar{x}_1} + \boldsymbol{x_4}$$

$$g = \boldsymbol{x_3x_2\bar{x}_1} + x_3\bar{x}_2 + \boldsymbol{x_4} + \bar{x}_3x_2$$

多输出优化



兼顾结果：独立乘积项由15个减少到9个！

卡诺图小 结

- **卡诺图：**格雷码编码、相邻可合并、首尾相邻、单元可重复使用、横竖皆可
- 卡诺图中，相邻的最小项可以合并，并消去取值不同的因子
- **相邻**：最小项相差一个变量
- 被合并的相邻小方块数目越大，得到的乘积项中包含的字母变量越少
- **蕴含、质蕴含、必要质蕴含**
- 卡诺图化简结果不唯一
- 不要超过5个自变量
- 充分利用无关项
- 多输出函数要充分利用公共项