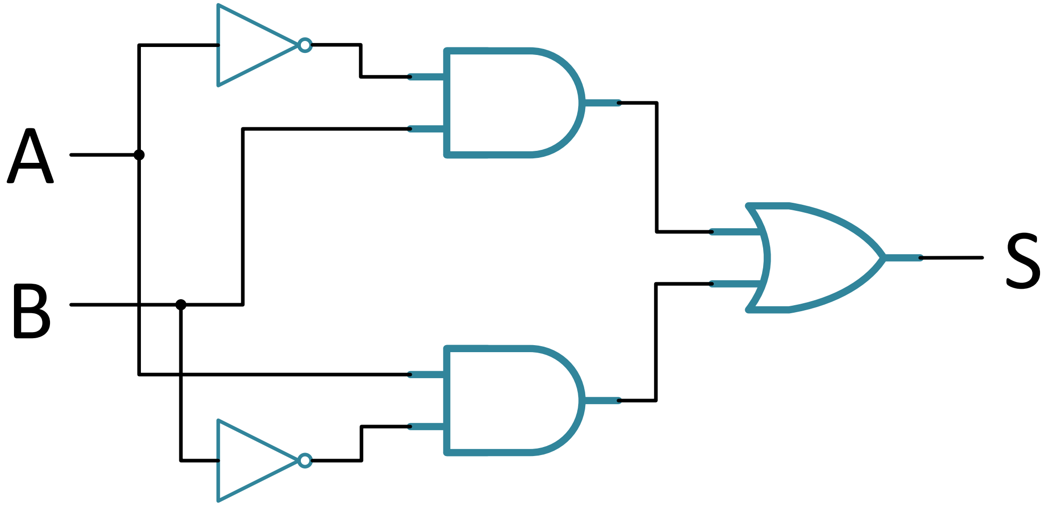
2. 逻辑代数



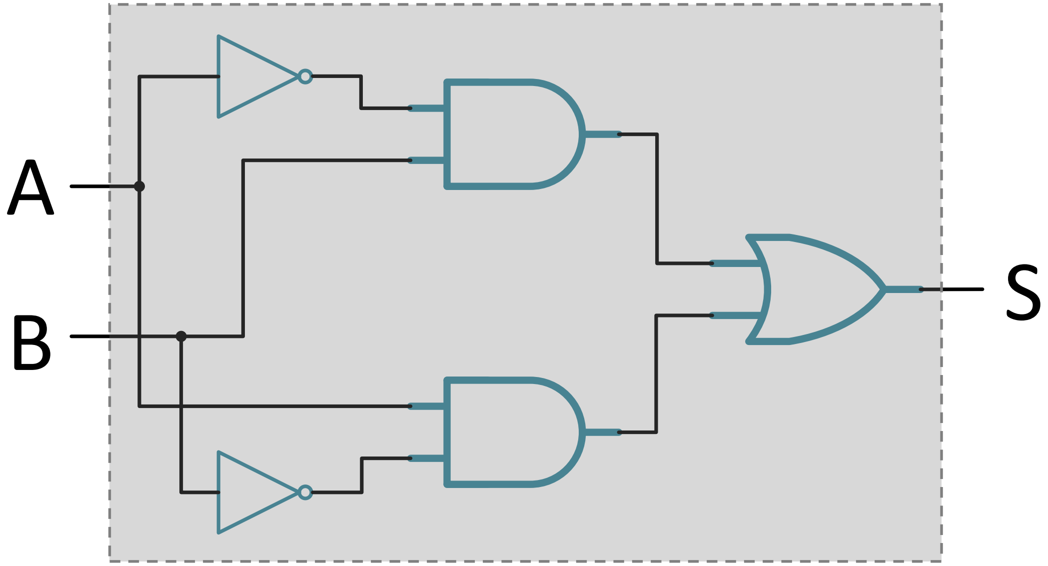
xgsun@fudan.edu.cn
孙晓光

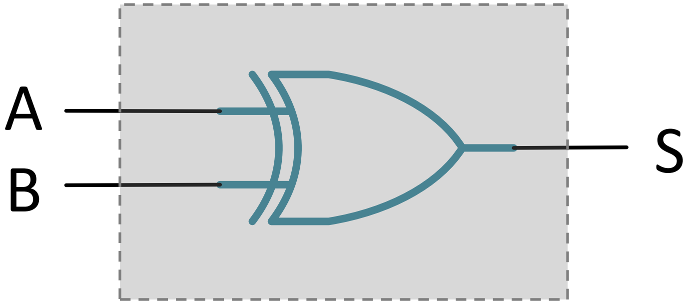
2024-9-8

1

逻 辑 门

逻辑电路，及其化简





逻辑函数：$S = F(A, B, C \cdots)$

1位二进制加法

$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}$

$0 + 0 = 0$

$0 + 1 = 1$

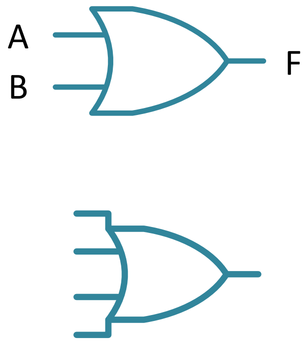
$1 + 0 = 1$

$1 + 1 = 10$

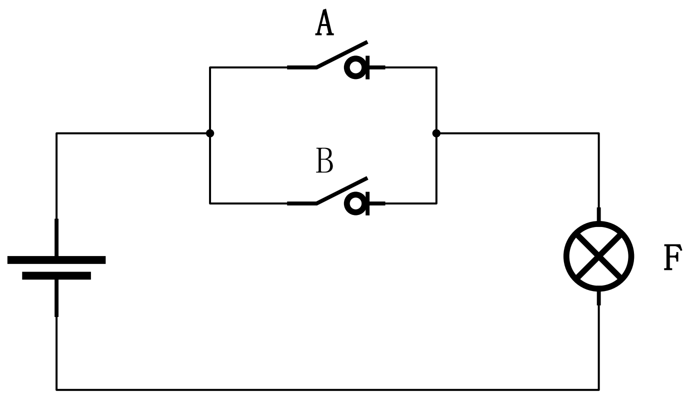
$$S = \bar{A}B + A\bar{B} = A \oplus B$$

基本逻辑运算：3种运算就可以表达所有的逻辑

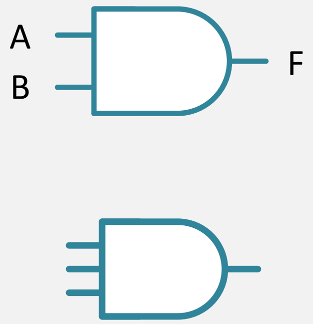
或运算



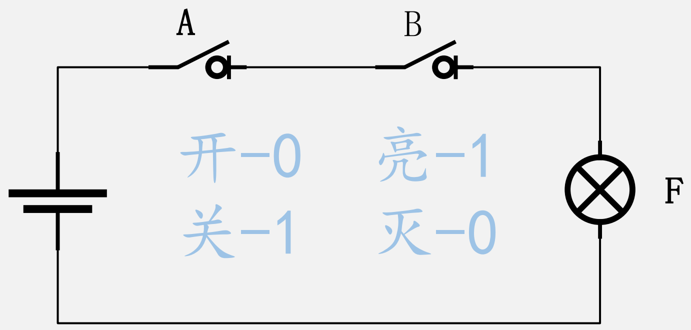
$$0+0=0$$
$$0+1=1$$
$$1+0=1$$
$$1+1=1$$



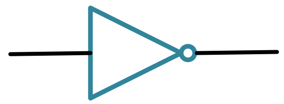
与运算



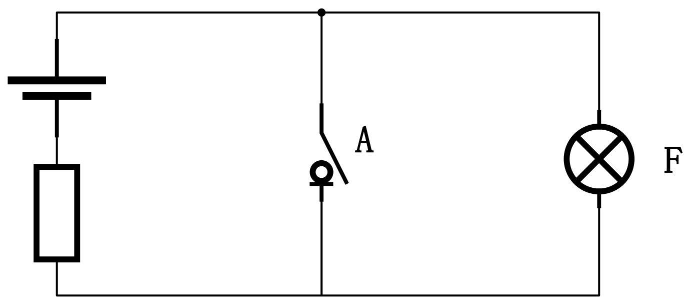
$$0\cdot 0=0$$
$$0\cdot 1=0$$
$$1\cdot 0=0$$
$$1\cdot 1=1$$



非运算



$$\bar{0}=1$$
$$\bar{1}=0$$



低 → 优先级 → 高

正逻辑、负逻辑

- **正逻辑**：高电平表示逻辑1，低电平表示逻辑0。
- **负逻辑**：高电平表示逻辑0，低电平表示逻辑1。

同一电路，采用哪种逻辑都可以，
不涉及电路本身结构与性能好坏；
但使同一电路具有不同的逻辑功能。

真值表

输入变量		输出变量
A	B	F
L	L	L
L	H	L
H	L	L
H	H	H

全部输入组合

输入输出电平关系

正逻辑：与门

A	B	F
0	0	**0**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**1**

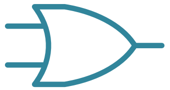
负逻辑：或门

A	B	F
1	1	**1**
1	0	**1**
0	1	**1**
0	0	**0**

$$F = A \cdot B$$

转化

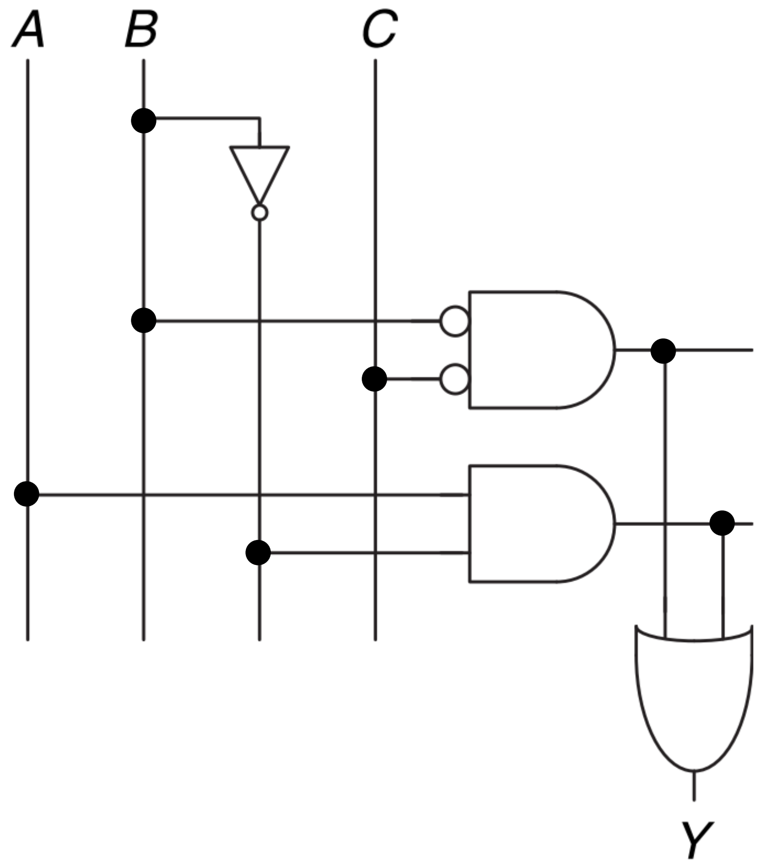
$$\overline{F} = \overline{A} + \overline{B}$$



电路(原理)图 schematic

用电路元件符号表示电路连接的图

- **输入**在原理图的**左边**（或 顶部）
- **输出**在原理图的**右边**（或 底部）
- 无论何时，门必须从**左**流向**右**
- 最好使用**直线**，而不使用拐角线
- **在有实心点的十字相交处相连**
- **在无实心点的十字相交处不相连**
- 在T型接头处相连(美国)



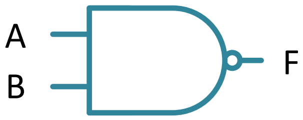
复合逻辑门

“与非”门

实现“与非”运算

功能的逻辑电路

$$F = \overline{A \cdot B \cdot C \cdots}$$



通用门

$$A \cdot B = \overline{\overline{A \cdot B} \cdot \overline{A \cdot B}}$$

$$A + B = \overline{\overline{A \cdot A} \cdot \overline{B \cdot B}}$$

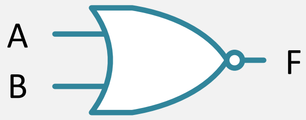
$$\bar{A} = \overline{A \cdot A}$$

“或非”门

实现“或非”运算

功能的逻辑电路

$$F = \overline{A + B + C \cdots}$$



通用门

一种可以**独自**实现所有逻辑函数的门

$$A \cdot B = \overline{\overline{A + A} + \overline{B + B}}$$

$$A + B = \overline{\overline{A + B} + \overline{A + B}}$$

$$\bar{A} = \overline{A + A}$$

“与或非”门

不常用

不经济

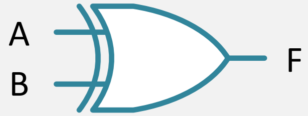
$$F = \overline{AB + CD + \cdots}$$

“异或”门

实现“异或”运算

功能的逻辑电路

$$F = A \oplus B$$
$$= \bar{A}B + A\bar{B}$$



有奇数个变量=1，则，运算结果=1；

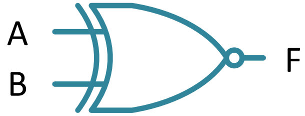
有偶数个变量=1，则，运算结果=0。

“同或”门

实现“同或”运算

功能的逻辑电路

$$F = A \odot B$$
$$= AB + \bar{A}\bar{B}$$

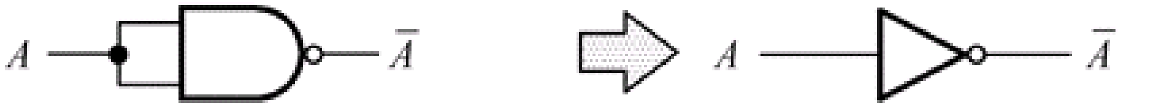


有奇数个变量=0，则，运算结果=0；

有偶数个变量=0，则，运算结果=1。

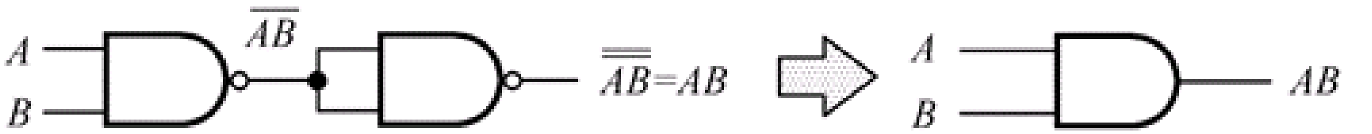
“与非门” 作为通用门 universal gate

$$F=\overline{A}+B=\overline{\overline{\overline{A}+B}}=\overline{A\cdot\overline{B}}=\overline{A\cdot\overline{B\cdot B}}$$



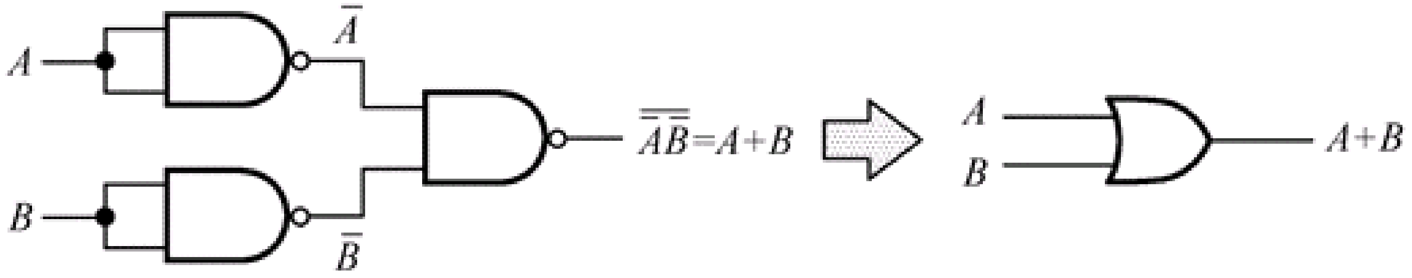
(a) 1 个与非门用作非门

$$\overline{A\cdot A}=\overline{A}$$



(b) 2 个与非门用作与门

$$\overline{\overline{A\cdot B}\cdot\overline{A\cdot B}}=A\cdot B$$

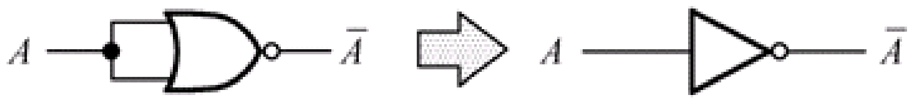


(c) 3 个与非门用作或门

$$\overline{\overline{A\cdot A}\cdot\overline{B\cdot B}}=A+B$$

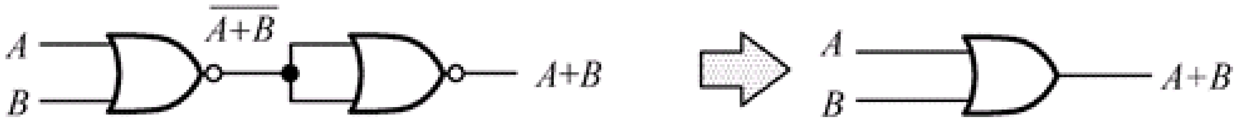
“或非门”作为通用门

$$F = \bar{A} + B = \overline{\overline{\bar{A} + B}} = \overline{\overline{\overline{A + A} + B} + \overline{\overline{A + A} + B}}$$



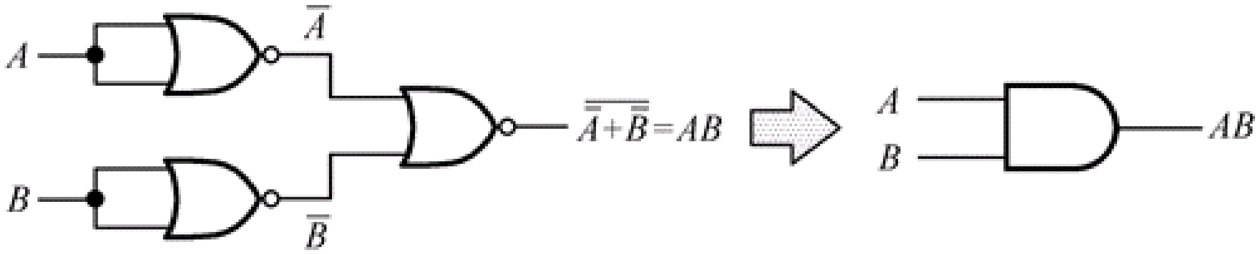
(a) 1 个或非门用作非门

$$\overline{A + A} = \bar{A}$$



(b) 2 个或非门用作或门

$$\overline{\overline{A + B} + \overline{A + B}} = A + B$$

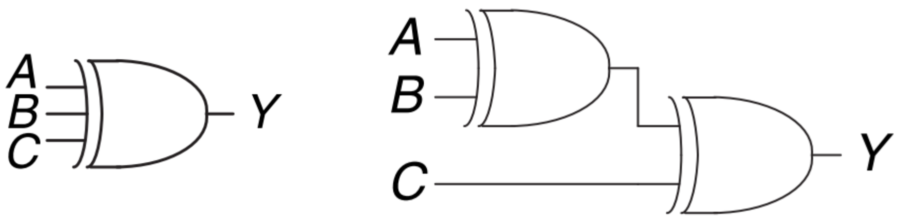


(c) 3 个或非门用作与门

$$\overline{\overline{A + A} + \overline{B + B}} = A \cdot B$$

异或

$A \oplus 0 = A$ $\quad$ $A \oplus A = 0$	$A \oplus B = B \oplus A$
$A \oplus 1 = \bar{A}$ $\quad$ $A \oplus \bar{A} = 1$	$A \oplus B \oplus C = (A \oplus B) \oplus C$



- 多个变量异或运算，可两两依次运算，也可用两两运算的结果再运算：

$$F = A \oplus B \oplus C \oplus D = [(A \oplus B) \oplus C] \oplus D = (A \oplus B) \oplus (C \oplus D)$$

- 多个变量异或运算的结果：取决于变量为1的个数：

$$F = A \oplus B \oplus C \oplus D \oplus \cdots = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{变量为1的个数是}\textbf{奇数} \\ \mathbf{0}, & \text{变量为1的个数是}\textbf{偶数} \end{cases}$$

异或、同或

互为**反函数**

$$\overline{\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}} = \overline{\bar{A}B + A\bar{B}}$$

$$= (\bar{A} + B)(A + \bar{B})$$

$$= AB + \bar{A}\bar{B}$$

$$= \boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{B}$$

又互为**对偶**

$$(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})' = (\bar{A} \cdot B \ + \ A \cdot \bar{B})'$$

$$= (\bar{A} + B) \cdot (A + \bar{B})$$

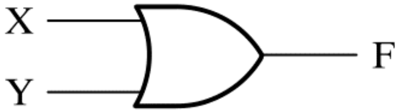
$$= AB + \bar{A}\bar{B}$$

$$= \boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{B}$$

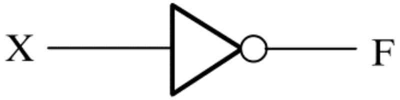
基本逻辑门

① AND 与门

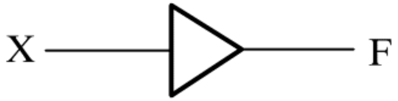
② OR 或门



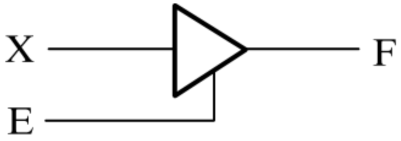
③ NOT (inverter) 非门



④ Buffer 缓冲器

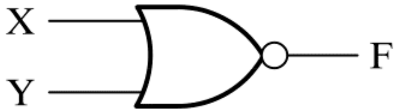


⑤ 3-State Buffer 三态门



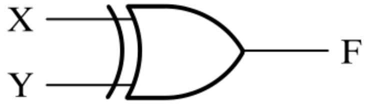
⑥ NAND 与非门

⑦ NOR 或非门



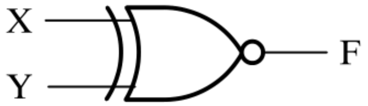
复杂逻辑门

❶ Exclusive-OR (XOR) 异或门



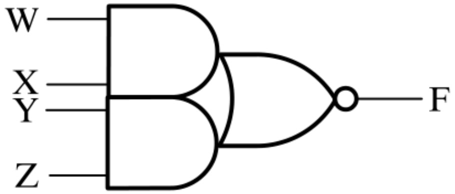
$F = X\bar{Y} + \bar{X}Y$
$= X \oplus Y$

② Exclusive-NOR (XNOR) 同或门



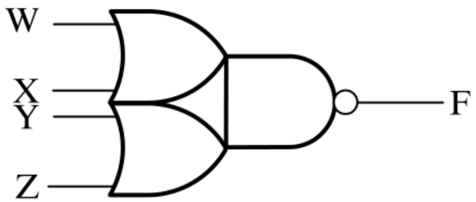
$F = XY + \bar{X}\bar{Y}$
$= \overline{X \oplus Y}$
$= X \odot Y$

③ AND-OR-INVERT (AOI) 与或非门



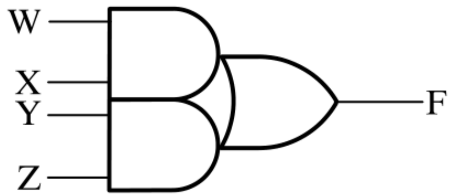
$F = \overline{WX + YZ}$

④ OR-AND -INVERT (OAI) 或与非门



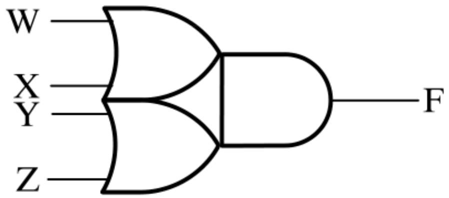
$F = \overline{(W + X)(Y + Z)}$

⑤ AND-OR (AO) 与或门



$F = WX + YZ$

⑥ OR-AND (OA) 或与门



$F = (W + X)(Y + Z)$

2

逻辑代数

逻辑代数：一个封闭的代数系统

由一个**逻辑变量集**，**常量** 0 和 1，“**或**”、“**与**”、“**非**” 三种基本运算构成。

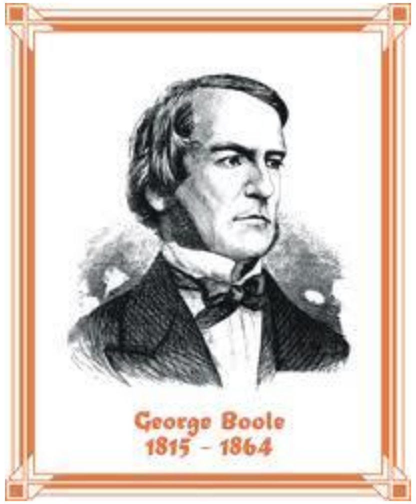
- **逻辑变量**：用字母表示其值可以变化的量。如：A、B…
  - 取值：0、1。 逻辑常量 0、1无大小、正负之分

- **逻辑运算**：与、或、非 ……
- **逻辑函数**：$F = f(A_1, A_2, \dots, A_n)$ 取值：0、1
  - 逻辑函数的**相等**：任意输入二者输出均相等

$$F_1 = f_1(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

$$F_2 = f_2(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

$$F_1 = F_2$$



爱尔兰 数学家
1849年创建

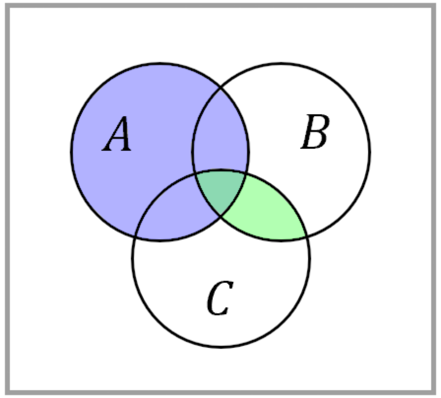
逻辑代数的**公理**

公理1: **0-1 律**	$A+0=A,\ \ A+1=1$	$A\cdot 0=0,\ \ A\cdot 1=A$
公理2: **互补律**	$A+\bar{A}=1$	$A\cdot\bar{A}=0$
公理3: **交换律**	$A+B=B+A$	$A\cdot B=B\cdot A$
公理4: **结合律**	$(A+B)+C=A+(B+C)$	$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$
公理5: **分配律**	$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$	$\boldsymbol{A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C)}$

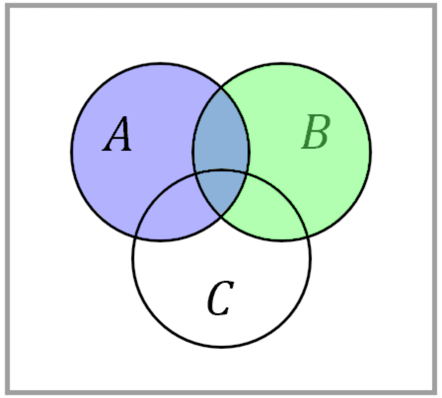
普通代数中没有

Venn Diagram

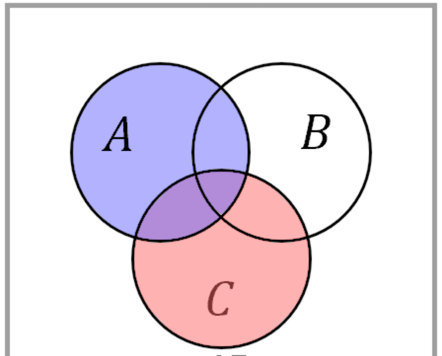
文氏图验证



=



与



逻辑代数的**定理**

定理1: **0-1律**	$0+0=0,\ 0+1=1$ $1+0=1,\ \mathbf{1+1=1}$	$0\cdot 0=0,\ 0\cdot 1=0$ $1\cdot 0=0,\ 1\cdot 1=1$
定理2: **重叠律**	$A+A=A$	$A\cdot A=A$
定理3: **摩根定理**	$\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}\cdot\overline{\boldsymbol{B}}$	$\overline{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{B}}$
定理4: **吸收律**	$A+A\cdot B=A$	$A\cdot(A+B)=A$
定理5: **并项律**	$A\cdot\bar{B}+A\cdot B=A$	$(A+\bar{B})\cdot(A+B)=A$
定理6: **消除律**	$A+\bar{A}\cdot B=A+B$	$A\cdot(\bar{A}+B)=A\cdot B$
定理7: **自反律**	$\bar{\bar{A}}=A$	

【提醒】**逻辑**运算，不是**算术**运算

- 没有定义**减法**：

  $A + B = A + C$ 不能 = 两端同时$-A$，导出： $B = C$

- 没有定义**除法**：

  $A \cdot B = A \cdot C$ 不能 = 两端同时$\div A$，导出： $B = C$

- 没有定义**乘方**：

  $A \cdot A \neq A^2$

- 允许提取**公因子**： $AB + AC = A(B + C)$

定理2: 等幂律 **证明**

公理1: **0-1 律**	$A+0=A$，$A+1=1$	$A\cdot 0=0$，$A\cdot 1=A$
公理2: **互补律**	$A+\bar{A}=1$	$A\cdot\bar{A}=0$
公理3: **交换律**	$A+B=B+A$	$A\cdot B=B\cdot A$
公理4: **结合律**	$(A+B)+C=A+(B+C)$	$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$
公理5: **分配律**	$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$	$\boldsymbol{A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C)}$

定理2 等幂律	$A+A=A$	$A\cdot A=A$

证： $A+A=(A+A)\cdot \mathbf{1}$ 1(右)

$=(A+A)\cdot(\boldsymbol{A+\bar{A}})$ 2(左)

$=A+(A\cdot\bar{A})$ 5(右)

$=A+0$ 2(右)

$=A$ 1(左)

证： $A\cdot A=A\cdot A+\mathbf{0}$ 1(左)

$=A\cdot A+\boldsymbol{A\cdot\bar{A}}$ 2(右)

$=A(A+\bar{A})$ 5(左)

$=A\cdot 1$ 2(左)

$=A$ 1(右)

完备证明法

证明：$(BC)+\bar{B}D+CD=BC+\bar{B}D$

B	C	D	$BC+\bar{B}D+CD$	$BC+\bar{B}D$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

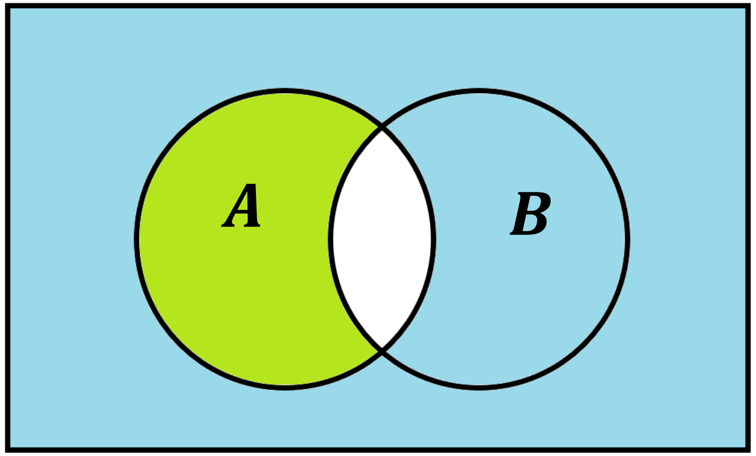
摩根定理 DeMorgan Theorems

定理6 摩根定理	$\overline{A+B}=\bar{A}\cdot\bar{B}$	$\overline{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}=\bar{\boldsymbol{A}}+\bar{\boldsymbol{B}}$


Augustus De Morgan (1806-1871)

【证】令$F=A\cdot B$，$G=\bar{A}+\bar{B}$，则，

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}$$
$$=A\cdot B+\bar{A}+\bar{B}$$
$$=(A+\bar{A}+\bar{B})(B+\bar{A}+\bar{B})$$
$$=(1+\bar{B})(1+\bar{A})=\mathbf{1}$$



$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}$$
$$=AB\cdot(\bar{A}+\bar{B})$$
$$=AB\bar{A}+AB\bar{B}=\mathbf{0}$$

A	B	$A\cdot B$	$\overline{A\cdot B}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A}+\bar{B}$
0	0	0	**1**	1	1	**1**
0	1	0	**1**	1	0	**1**
1	0	0	**1**	0	1	**1**
1	1	1	**0**	0	0	**0**

由公理2互补律有：$\overline{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{G}$

摩根定理的**应用**

与非门、非或门 等价性 验证

A	B	$\overline{AB}$	$\bar{A}+\bar{B}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

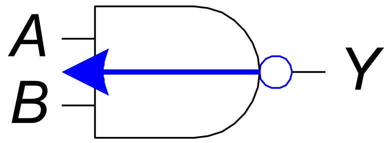
或非门、非与门 等价性验证

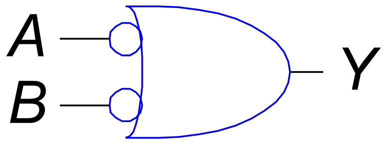
A	B	$\overline{A+B}$	$\bar{A}\,\bar{B}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

摩根定理 推气泡法

- $Y = \overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$

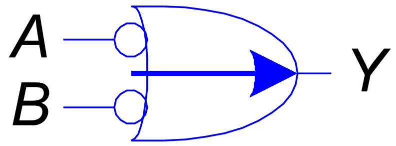
- **Backward:**

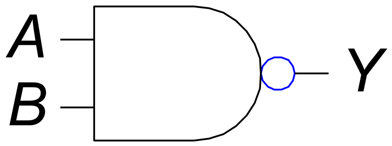




- $Y = \overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

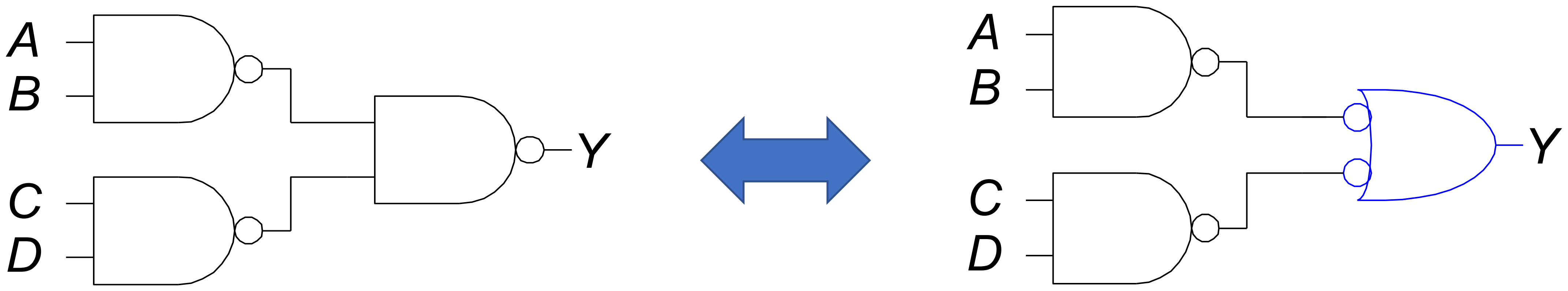
- **Forward:**





推气泡法

- 从输出端**反向**推气泡或从输入端**正向**推气泡，将**与门**换成**或门**，反之亦然。
- 从输出端推气泡**反向**到输入端，把气泡放置在门的输入端。
- 向后推所有门输入端的气泡，把气泡放在门的输出端。



$$Y = \overline{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}$$

$$Y = AB + CD$$

3个重要规则①

①代入规则	任何一个含有变量A的逻辑等式，如果 将所有出现A的位置都代之以同一个逻辑函数F，则等式仍然成立。

用途：可将公理、定理中的变量用任意函数代替，得到更多的等式。

【例】若 $A(B+C) = AB + AC$

则 $(A+D)(B+C) = (A+D)B + (A+D)C$

【例】因 $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$

则 $\overline{ABC} = \bar{A} + \overline{BC} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$

②反演规则	
③对偶规则	

3个重要规则②

②反演规则	如果将逻辑函数F表达式中所有的“•”变成“+”，“+”变成“•”，“1”变成“0”，“0”换成“1”，**原变量**变成**反变量**，**反变量**变成**原变量**，并保持原函数中的运算顺序不变，则所得到的新的函数为原函数F的**反函数**$\overline{F}$。

用途：求函数的**反函数**。

摩根定理	$\overline{A+B}=\bar{A}\cdot\bar{B}$	$\overline{A\cdot B}=\bar{A}+\bar{B}$	的推广

【例】若 $F=\bar{A}\cdot B+C\cdot\bar{D}$

则 $\bar{F}=(A+\bar{B})\cdot(\bar{C}+D)$

但 $\bar{F}\neq A+\bar{B}\cdot\bar{C}+D$

对偶式	如果将逻辑函数F表达式中所有的“•”变成“+”，“+”变成“•”，“1”变成“0”，“0”换成“1”，~~原变量变成反变量，反变量变成原变量~~，并保持原函数中的运算顺序不变，则所得到的新的函数为原函数F的**对偶式** F'。

3个重要规则③

③对偶规则	若两个逻辑函数表达式 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{G}$ (相等)，则其对偶式 $\boldsymbol{F'}=\boldsymbol{G'}$ (也相等)。

公理1：**0-1律**	$A+0=A$，$A+1=1$	$A\cdot 0=0$，$A\cdot 1=A$
公理2：**互补律**	$A+\bar{A}=1$	$A\cdot\bar{A}=0$
公理3：**交换律**	$A+B=B+A$	$A\cdot B=B\cdot A$
公理4：**结合律**	$(A+B)+C=A+(B+C)$	$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$
公理5：**分配律**	$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$	$\boldsymbol{A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C)}$
定理1：**0-1律**	$0+0=0$，$0+1=1$，$1+0=1$，$1+1=1$	$0\cdot 0=0$，$0\cdot 1=0$，$1\cdot 0=0$，$1\cdot 1=1$
定理2：**重叠律**	$A+A=A$	$A\cdot A=A$
定理3:**摩根定理**	$\overline{\boldsymbol{A+B}}=\boldsymbol{\bar{A}\cdot\bar{B}}$	$\overline{\boldsymbol{A\cdot B}}=\boldsymbol{\bar{A}+\bar{B}}$
定理4：**吸收律**	$A+A\cdot B=A$	$A\cdot(A+B)=A$
定理5：**消除律**	$A+\bar{A}\cdot B=A+B$	$A\cdot(\bar{A}+B)=A\cdot B$
定理6：**并项律**	$A\cdot B+A\cdot\bar{B}=A$	$(A+B)\cdot(A+\bar{B})=A$

对偶规则的应用

- 当**证明**一个逻辑等式困难时，可以通过证明其**对偶式**(相对容易)

【例】证明：$\boldsymbol{A+BC=(A+B)\cdot(A+C)}$

其对偶式：$A(B+C)$ $\quad\quad$ $AB+AC$

由乘法分配律：$A(B+C) \quad = \quad AB+AC$ $\quad\quad$ 由对偶规则：$\boldsymbol{A+BC=(A+B)\cdot(A+C)}$

- 当**或-与式化简**困难时，先转换为**对偶式**(与-或式)化简，再转换为**对偶式**(或-与式)

【例】化简：$\boldsymbol{F=(A+\bar{B})(B+C)(\bar{A}+C)}$

其对偶式：$F'=A\bar{B}+BC+\bar{A}C \quad\quad =A\bar{B}+(B+\bar{A})C=A\bar{B}+\overline{A\bar{B}}C=A\bar{B}+C$

再求对偶式：$\boldsymbol{F}=(F')'=(A\bar{B}+C)'=\boldsymbol{(A+\bar{B})\cdot C}$

$\boldsymbol{x+\bar{x}y=x+y}$

3

表达形式

逻辑函数表达式的**基本形式**

- 无论什么形式都可以变换成两种**基本形式**。

① **“与-或”** 表达式 Sum-Of-Products

$$F(A,B,C) = A + \bar{A}B + A\bar{B}C$$

$$= A + \bar{A}B$$

② **“或-与”** 表达式 Product-Of-Sums

$$F(A,B,C) = A(\bar{A} + B)(A + \bar{B} + C)$$

- 基本形式都**不唯一**。为了“唯一”，引入**标准形式**。

③ **标准** **“与-或”** 表达式

由若干**最小项**相"或"构成

$$F(A,B,C) = \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}C + ABC$$

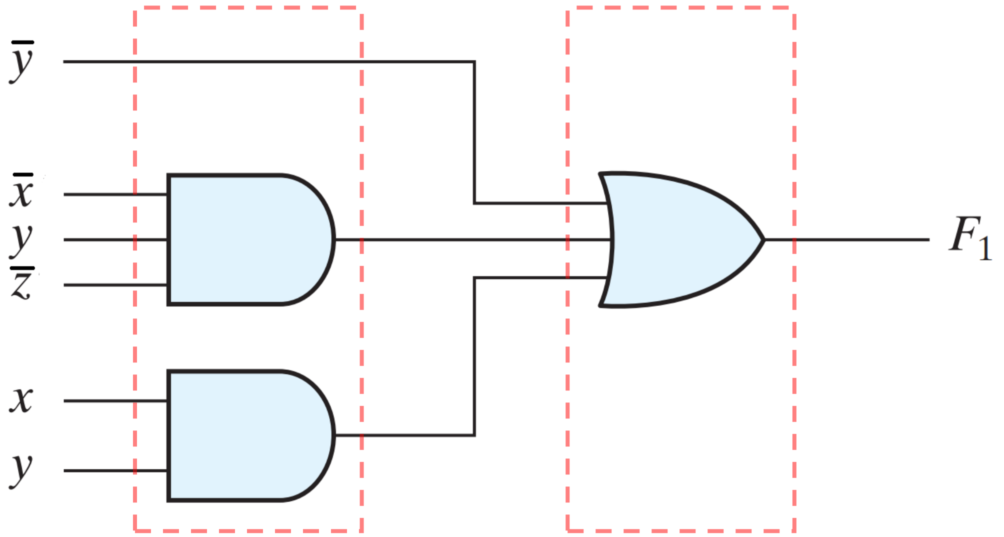
④ **标准** **“或-与”** 表达式

由若干**最大项**相"与"构成

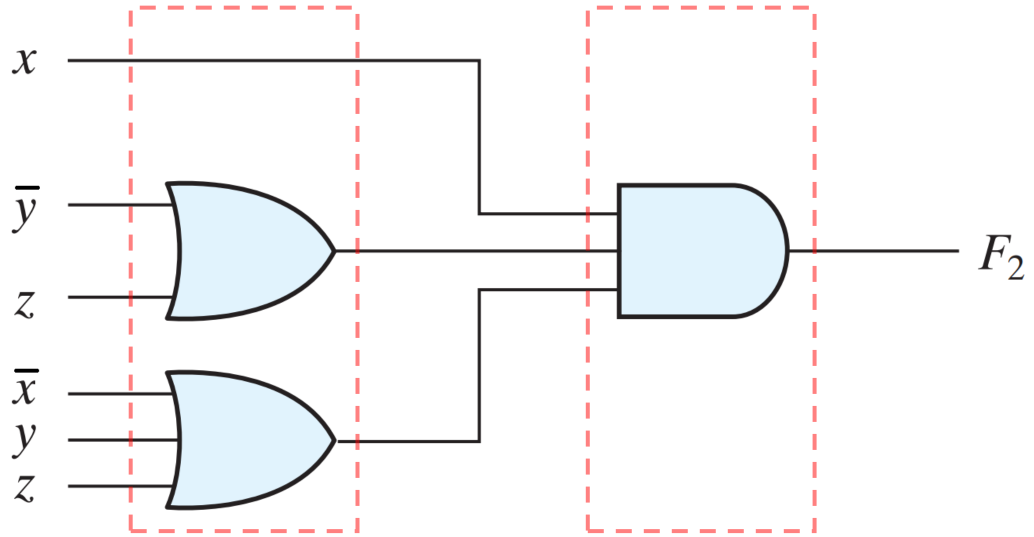
$$F(A,B,C) = (A + B + C)(A + \bar{B} + C)$$

“与-或” “或-与”

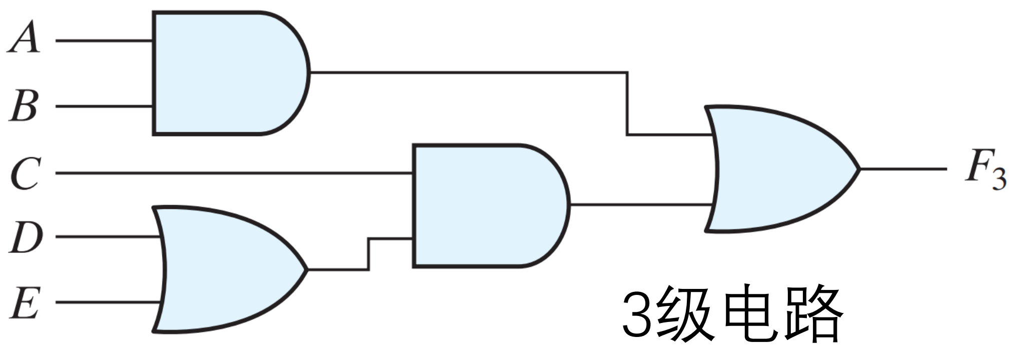
$$F_1 = \bar{y} + \bar{x}y\bar{z} + xy$$



$$F_2 = x(\bar{y} + z)(\bar{x} + y + \bar{z})$$

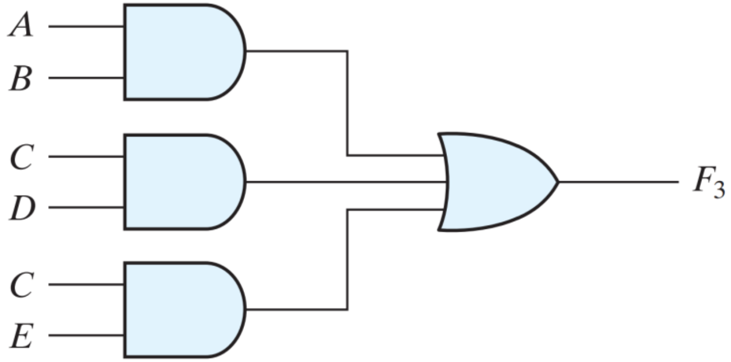


$$F_3 = AB + C(D + E)$$



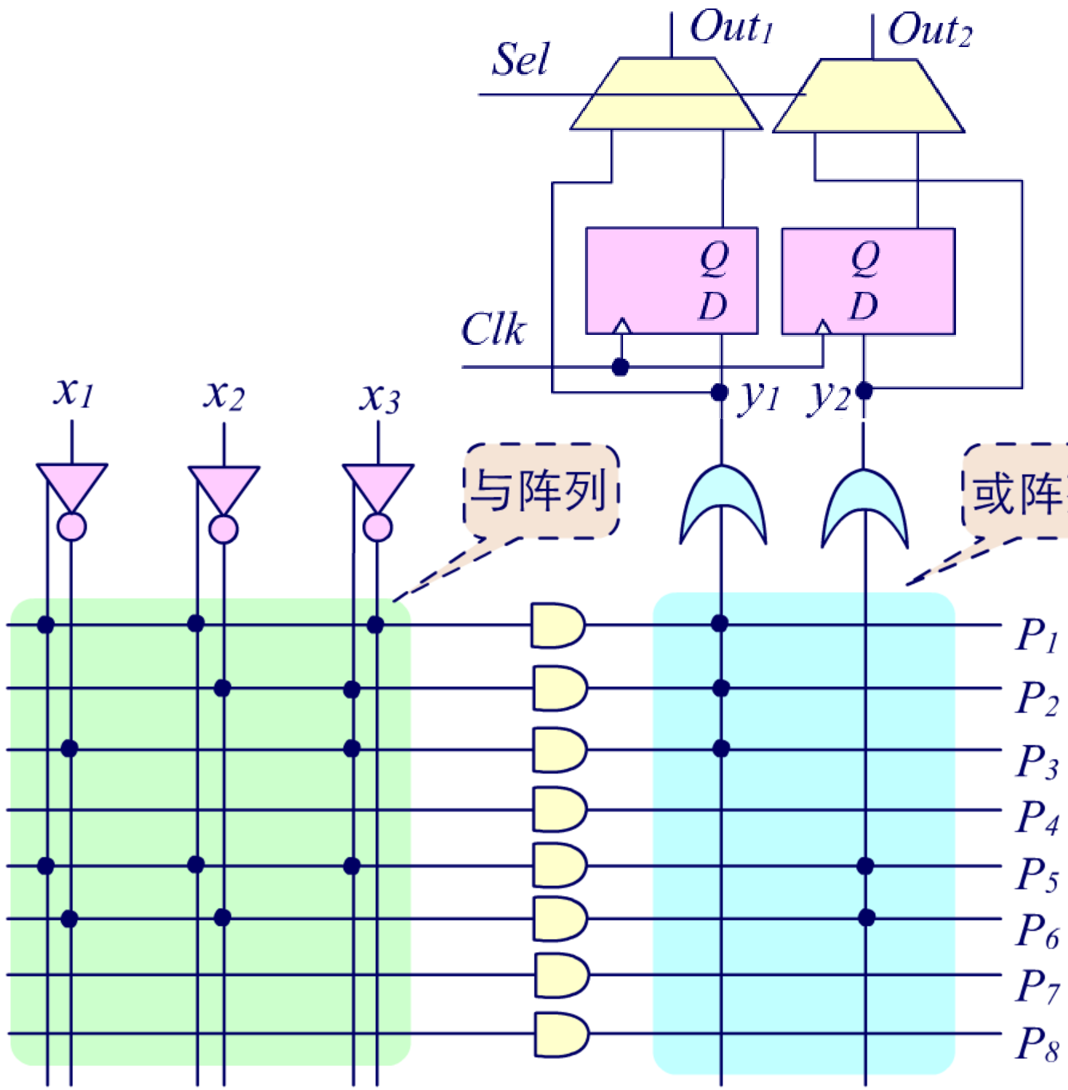
3级电路

$$= AB + CD + CE$$



GAL器件的原理图

GAL的雏形



时序电路

真值表 → 表达式

$$S = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B}$$

A	B	S
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**0**

当A=0且B=1时，S=1

当A=1且B=0时，S=1

假定：=1时用原变量

=0时用反变量

$$F = \bar{A} \cdot B \cdot C$$

$$G = \bar{F} = \overline{\bar{A} \cdot B \cdot C}$$

$$= A + \bar{B} + \bar{C}$$

A	B	C	F	G
0	0	0	**0**	**1**
0	0	1	**0**	**1**
0	1	0	**0**	**1**
0	1	1	**1**	**0**
1	0	0	**0**	**1**
1	0	1	**0**	**1**
1	1	0	**0**	**1**
1	1	1	**0**	**1**

最小项 minterm

- n个变量函数“**与项**”包含全部n个变量
- 每个变量都以**原变量**或**反变量**仅出现1次
- n个变量可以构成$\mathbf{2^n}$个最小项

编号	x	y	最小项
m_0	0	0	$\bar{x}\cdot\bar{y}$
m_1	0	1	$\bar{x}\cdot y$
m_2	1	0	$x\cdot\bar{y}$
m_3	1	1	$x\cdot y$

000　001　010　011　111

$$F(A,B,C)=\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}BC+\mathrm{ABC}$$
$$=m_0+m_1+m_2+m_3+m_7$$
$$=\sum m(0,1,2,3,7)$$

maxterm 最大项

- n个变量函数“**或项**”包含全部n个变量
- 每个变量都以**原变量**或**反变量**仅出现一次
- n个变量可以构成$\mathbf{2^n}$个最大项

编号	x	y	最大项
M_0	0	0	$x+y$
M_1	0	1	$x+\bar{y}$
M_2	1	0	$\bar{x}+y$
M_3	1	1	$\bar{x}+\bar{y}$

(0　0　0)(1　0　0)(1　1　1)

$$F(A,B,C)=(A+B+C)(\bar{A}+B+C)(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})$$
$$=M_0\cdot M_4\cdot M_7$$
$$=\prod M(0,4,7)$$

【例】用逻辑函数的**标准**式表示

- $F_1 = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} = m_0 + m_3 + m_4 = \Sigma m(0,3,4)$
- $F_2 = m_1 + m_2 + m_5 + m_6 + m_7 = \Sigma m(1,2,5,6,7)$

  $= \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz$
- $F_3 = (x + y + \bar{z})(x + \bar{y} + z)(\bar{x} + y + \bar{z})(\bar{x} + \bar{y} + z)(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})$

  $= M_1M_2M_5M_6M_7 = \prod M(1,2,5,6,7)$
- $F_4 = M_0M_3M_4 = \prod M(0,3,4) = (x + y + z)(x + \bar{y} + \bar{z})(\bar{x} + y + z)$

最小项、最大项

对于一个具有n个变量的逻辑问题，在输入变量的任意一种取值情况下，总有：

① 必有且仅有一个**最大项**的逻辑值为**0** $(x+y+z)$；

必有且仅有一个**最小项**的逻辑值为**1** $(x \cdot y \cdot z)$.

② 任意两个不同的**最小项**之积为0； $m_i \cdot m_j = 0$ $(i \neq j)$

任意两个不同的**最大项**之和为1. $M_i + M_j = 1$

③ 全体**最小项**之和为1；

全体**最大项**之积为0.

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1 \qquad \prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$$

x	y	z	最小项	标识	最大项	标识
0	0	0	$\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$	m_0	$x+y+z$	M_0
0	0	1	$\bar{x}\,\bar{y}\,z$	m_1	$x+y+\bar{z}$	M_1
0	1	0	$\bar{x}\,y\,\bar{z}$	m_2	$x+\bar{y}+z$	M_2
0	1	1	$\bar{x}\,y\,z$	m_3	$x+\bar{y}+\bar{z}$	M_3
1	0	0	$x\,\bar{y}\,\bar{z}$	m_4	$\bar{x}+y+z$	M_4
1	0	1	$x\,\bar{y}\,z$	m_5	$\bar{x}+y+\bar{z}$	M_5
1	1	0	$x\,y\,\bar{z}$	m_6	$\bar{x}+\bar{y}+z$	M_6
1	1	1	$x\,y\,z$	m_7	$\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}$	M_7

④ 下标相同的**最小项**和**最大项**互为**反函数**。 $m_i = \overline{M_i}$

同一逻辑问题，表达式之间的关系

① 一个逻辑函数与其反函数的逻辑表达之间，存在**互补**关系：

若$\boldsymbol{F = \Sigma m_i}$，则 $\boldsymbol{\bar{F} = \Pi M_i}$

② 一个逻辑函数的两种范式逻辑表达之间，存在以下关系：

若$\boldsymbol{F = \Sigma m_i}$，则 $\boldsymbol{F = \Pi M_j}$，其中 $i \neq j$ 。

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

【例】求$F(ABC) = \Sigma m(0,1,3,6,7)$，求$F$的**和之积**形式及其反函数 $\boldsymbol{\bar{F}}$。

【解】原函数 $F(ABC) = \Sigma m(0,1,3,6,7) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + AB\bar{C} + ABC$

根据关系① $\bar{F}(ABC) = \Pi M(0,1,3,6,7)$

$$= (A + B + C)(A + B + \bar{C})(A + \bar{B} + \bar{C})(\bar{A} + \bar{B} + C)(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$$

根据关系② $F(ABC) = \Pi M(2,4,5) = (A + \bar{B} + C)(\bar{A} + B + C)(\bar{A} + B + \bar{C})$

转换为：标准“**与-或**”表达式

方法1 由真值表直接写出最小项表达式。

$$Y = AB\bar{C} + BC$$

$$Y(A,B,C) = \Sigma m(3\,,6\,,7)$$

A	B	C	$AB\bar{C}$	BC	Y
0	0	0	0	0	**0**
0	0	1	0	0	**0**
0	1	0	0	0	**0**
0	1	1	0	1	**1**
1	0	0	0	0	**0**
1	0	1	0	0	**0**
1	1	0	1	0	**1**
1	1	1	0	1	**1**

转换为：标准“**与-或**”表达式

方法2

① 将给定的逻辑函数化为若干**乘积项之和**的形式（**积之和**）

② 利用公式 $A + \bar{A} = 1$ 将每个乘积项缺少的因子补全

$$
\begin{aligned}
Y &= AB\bar{C} + BC \\
&= AB\bar{C} + (A + \bar{A})BC \\
&= AB\bar{C} + ABC + \bar{A}BC \\
&= m_6 + m_7 + m_3
\end{aligned}
$$

$$Y(A, B, C) = \Sigma m(3,6,7)$$

【练习1】$F = A + \bar{B}C$ 转化为**标准与-或式**

- $F = A\,(B + \bar{B})\ + \bar{B}C$
  $= AB\ + A\bar{B} + \bar{B}C$
  $= AB(C + \bar{C})\ +\ A\bar{B}\,(C + \bar{C})\ +\ (A + \bar{A})\bar{B}C$
  $= ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$

  Note*: Remove Duplicates*

- $F\ = \bar{A}\bar{B}C\ + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + AB\bar{C} +\ ABC$
  $= m_1\ +\ m_4\ +\ m_5\ +\ m_6\ +\ m_7$

- $F(A,B,C)\ =\ \sum m(1,4,5,6,7)$

转换为：标准“**或-与**”表达式

方法1 由真值表直接写出最大项表达式。

$$Y = \bar{A}B + AC$$

$$Y(A,B,C) = \Pi M(0\ ,1\ ,4\ ,6)$$

A	B	C	$\bar{A}B$	AC	Y
0	0	0	0	0	**0**
0	0	1	0	0	**0**
0	1	0	1	0	**1**
0	1	1	1	0	**1**
1	0	0	0	0	**0**
1	0	1	0	1	**1**
1	1	0	0	0	**0**
1	1	1	0	1	**1**

转换为：标准“**或-与**”表达式

方法2

① 将给定的逻辑函数式化为若干多项式相乘的**或-与**（和之积）

② 利用公式 $x\bar{x}=0$ 将缺少的变量补齐

$$\boldsymbol{x+y\cdot z=(x+y)\cdot(x+z)}$$

$$\boldsymbol{Y=\bar{A}B+AC}$$

$$=(\bar{A}B+A)(\bar{A}B+C)$$

先转换为和之积

$$=\cancel{(A+\bar{A})}(A+B)(\bar{A}+C)(B+C)$$

$$=(A+B+C\bar{C})(\bar{A}+B\bar{B}+C)(A\bar{A}+B+C)$$

$$=\underline{(A+B+C)(A+B+\bar{C})}\underline{(\bar{A}+B+C)(\bar{A}+\bar{B}+C)}\ \underline{(A+B+C)(\bar{A}+B+C)}$$

$$=\boldsymbol{(A+B+C)(A+B+\bar{C})(\bar{A}+B+C)(\bar{A}+\bar{B}+C)}$$

$$=M_0M_1M_4M_6$$

$$Y(A,B,C)=\boldsymbol{\Pi}M(0,1,4,6)$$

【练习2】$F = xy + \bar{x}z$ 转化为**标准或-与式**

- $F = xy + \bar{x}z$

  $= (xy + \bar{x})(xy + z)$

  $= (x + \bar{x})(y + \bar{x})(x + z)(y + z)$

  $= (\bar{x} + y)(x + z)(y + z)$

$$\bar{x} + y = \bar{x} + y + z\bar{z} = (\bar{x} + y + z)(\bar{x} + y + \bar{z})$$

$$x + z = x + z + y\bar{y} = (x + y + z)(x + \bar{y} + z)$$

$$y + z = y + z + x\bar{x} = (x + y + z)(\bar{x} + y + z)$$

- $F = (x + y + z)(x + \bar{y} + z)(\bar{x} + y + z)(\bar{x} + y + \bar{z})$

  $= M_0M_2M_4M_5$

- $F(x, y, z) = \prod M(0,2,4,5)$

“与或” → “与或非”

【例】用与或非门实现函数 $F = A\bar{B} + B\bar{C} + C\bar{A}$

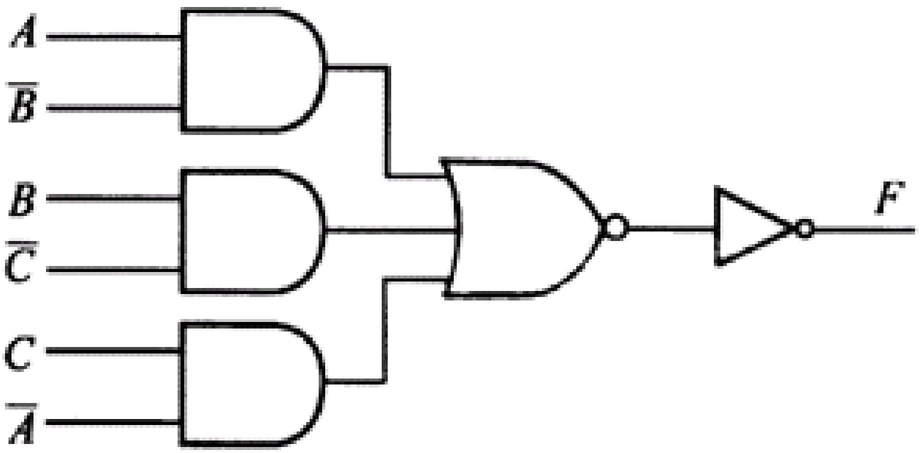
方法1：对F两次求反

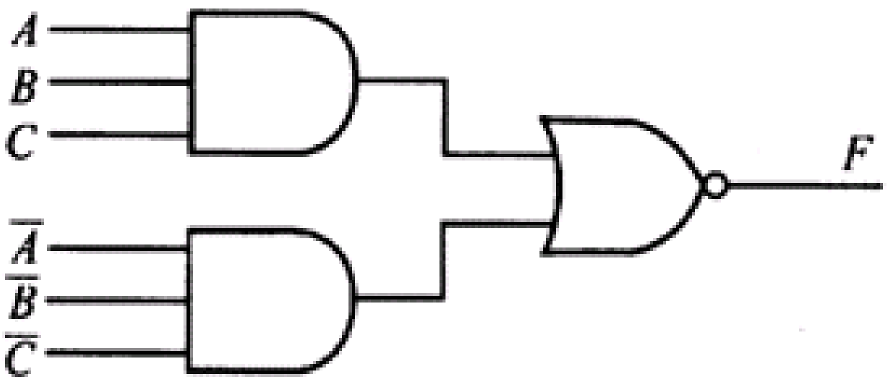
方法2：对$\bar{F}$一次求反

$$F = \overline{\overline{A\bar{B} + B\bar{C} + C\bar{A}}}$$

$$\bar{F} = \overline{A\bar{B} + B\bar{C} + C\bar{A}} = \cdots = ABC + \bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}$$

$$F = \bar{\bar{F}} = \overline{ABC + \bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}}$$



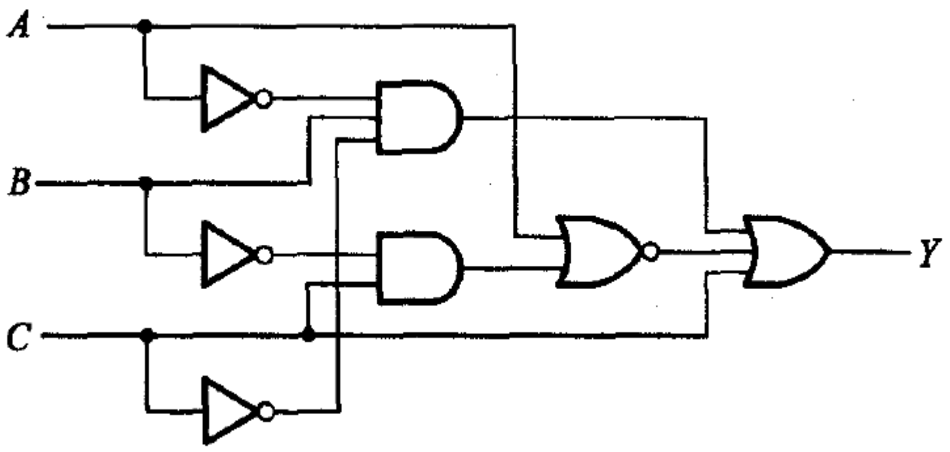


电路速度快因只经过2级门。

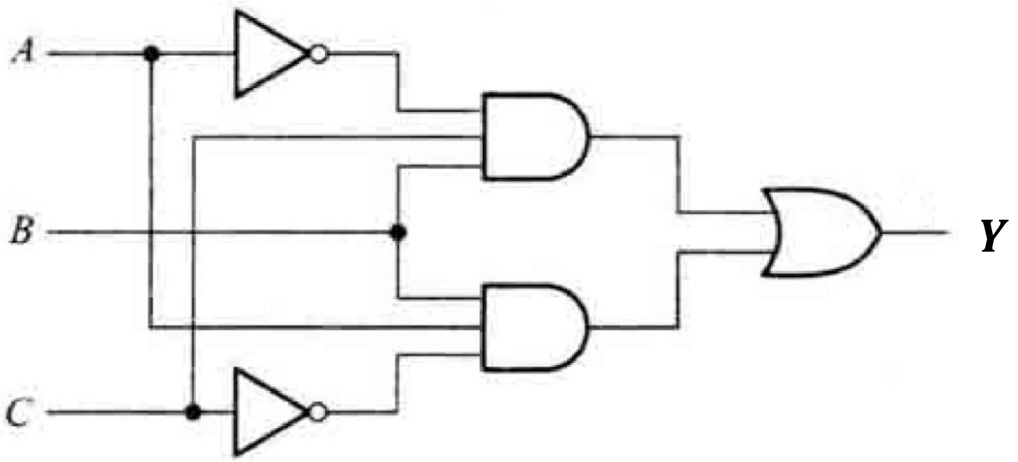
逻辑的表示方法

- 函数式 → 逻辑图

$$Y = \bar{A}B\bar{C} + \overline{A + \bar{B}C} + C$$



- 逻辑图 → 函数式



$$Y = \bar{A}BC + AB\bar{C}$$

① 函数式
② 真值表
③ 逻辑图
④ 波形图
⑤ 卡诺图
⑥ HDL

逻辑的表示方法

- **函数式 → 真值表**

$$Y = A + \bar{B}C + \bar{A}B\bar{C}$$

A	B	C	A	$\bar{B}C$	$\bar{A}B\bar{C}$	Y
0	0	0	0	0	0	**0**
0	0	1	0	1	0	**1**
0	1	0	0	0	1	**1**
0	1	1	0	0	0	**0**
1	0	0	1	0	0	**1**
1	0	1	1	1	0	**1**
1	1	0	1	0	0	**1**
1	1	1	1	0	0	**1**

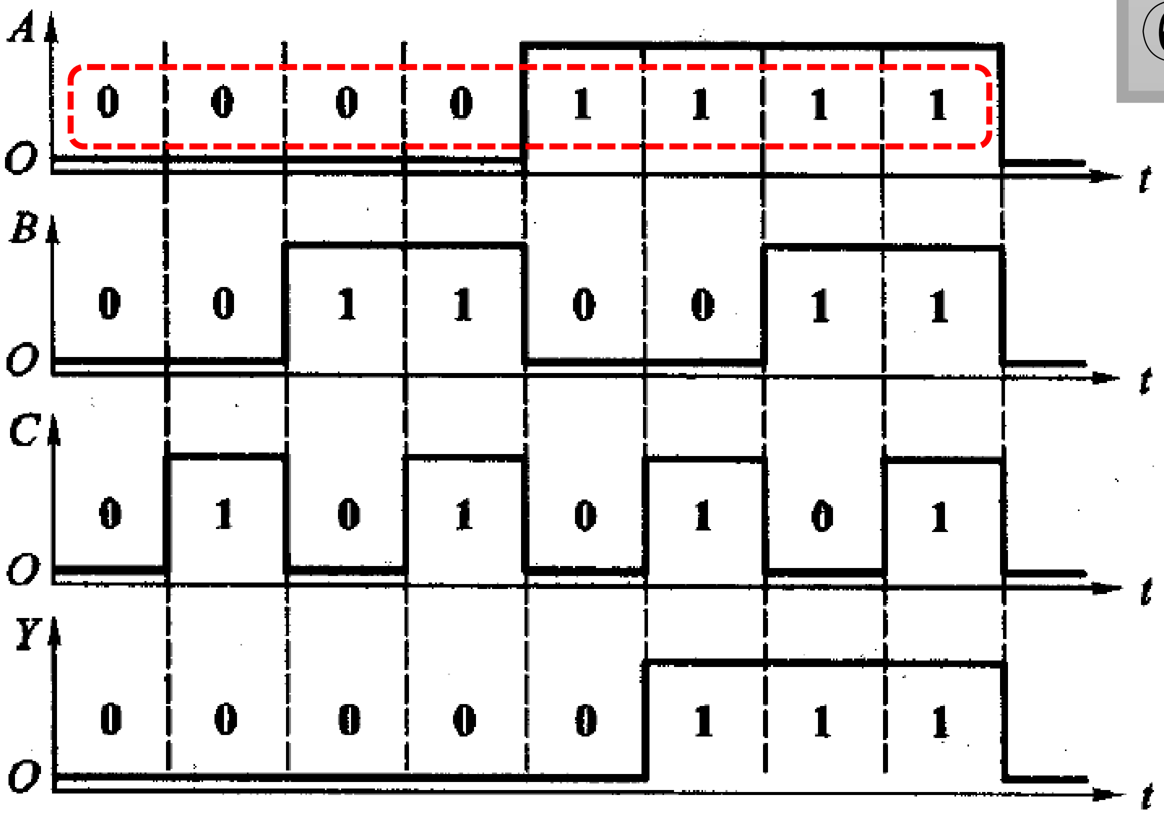
① 函数式
② 真值表
③ 逻辑图
④ 波形图
⑤ 卡诺图
⑥ HDL

逻辑的表示方法

- ① 函数式
- ② 真值表
- ③ 逻辑图
- ④ 波形图
- ⑤ 卡诺图
- ⑥ HDL

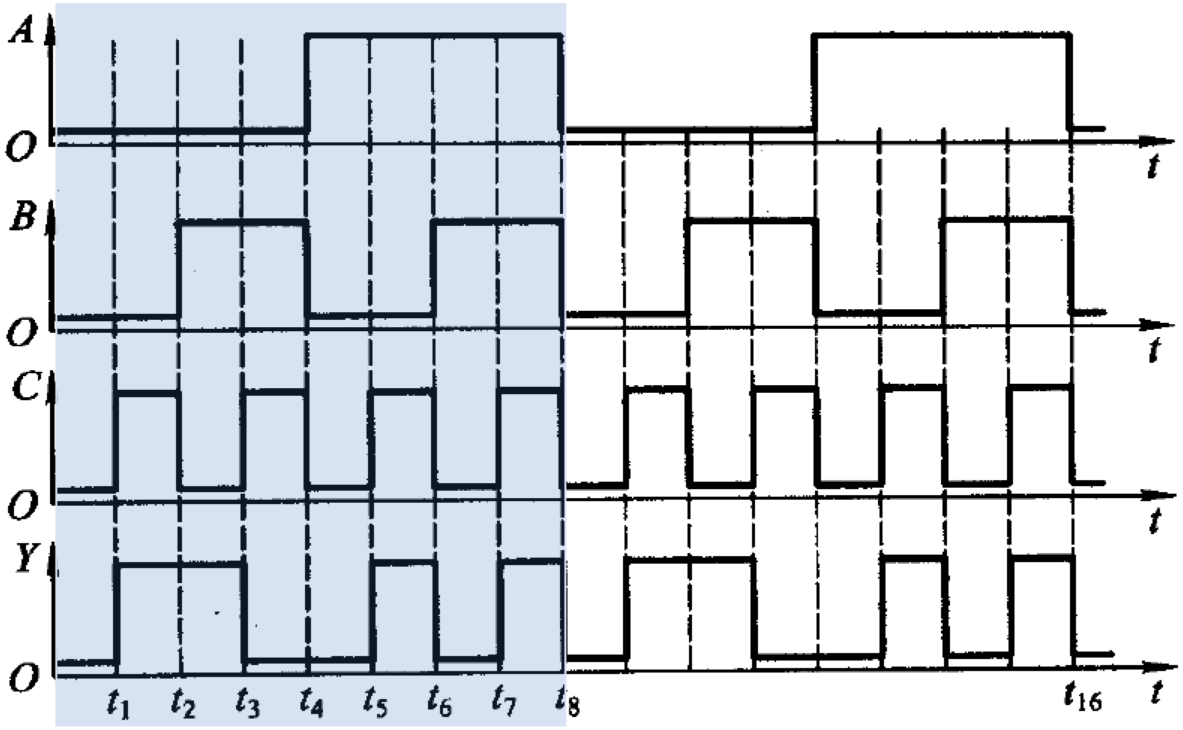
- **真值表 → 波形图**

A	B	C	Y
0	0	0	**0**
0	0	1	**0**
0	1	0	**0**
0	1	1	**0**
1	0	0	**0**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**



逻辑的表示方法

- 波形图 → 真值表



A	B	C	Y
0	0	0	**0**
0	0	1	**1**
0	1	0	**1**
0	1	1	**0**
1	0	0	**0**
1	0	1	**1**
1	1	0	**0**
1	1	1	**1**

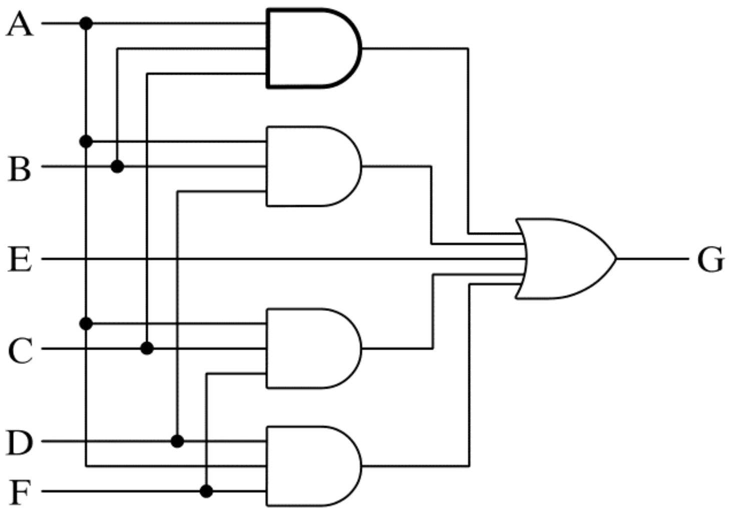
① 函数式
② 真值表
③ 逻辑图
④ 波形图
⑤ 卡诺图
⑥ HDL

4

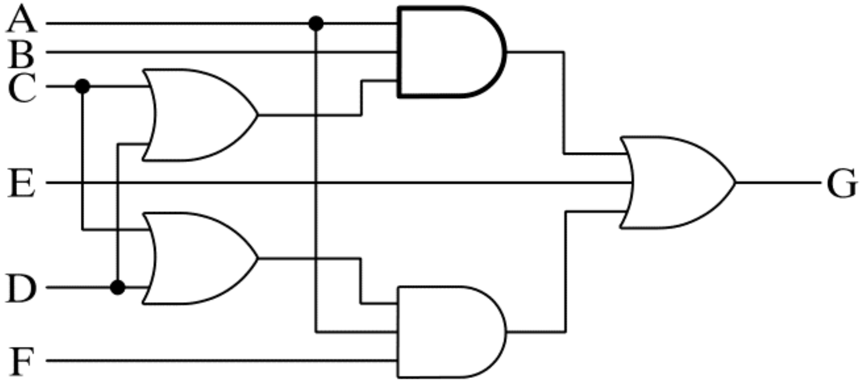
代 数 化 简

电路优化

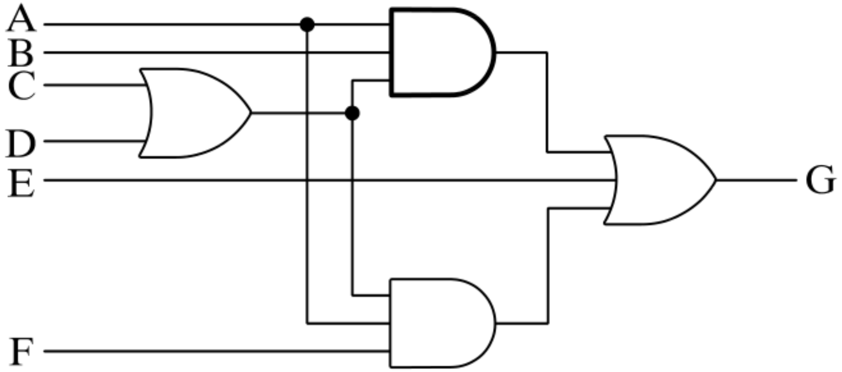
$$G = ABC + ABD + E + ACF + ADF$$



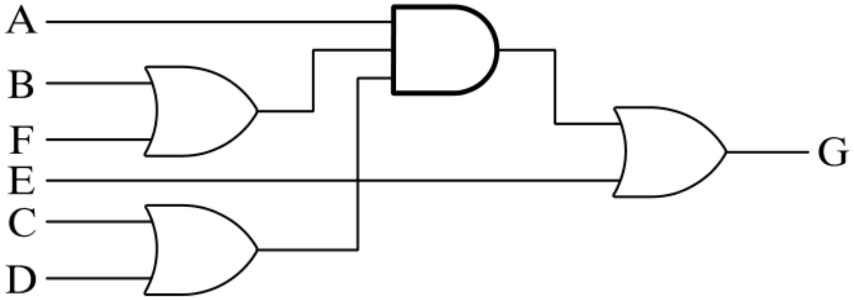
$$G = AB(C + D) + E + A(C + D)F$$



$$G = (AB + AF)(C + D) + E$$



$$G = A(B + F)(C + D) + E$$



化简的标准

逻辑函数表达式越简单，设计出来的相应逻辑电路也越简单。

最简“与-或”表达式的标准：

- 表达式中**“与”项**个数最少
- 每个“与”项中的**变量**个数最少

最简“或-与”表达式的标准：

- 表达式中**“或”项**个数最少
- 每个“或”项中的**变量**个数最少

【例】$F1 = A + \bar{A}B + AB$

$= A + B(A + \bar{A})$

$= A + B(1)$

$= A + B$

$F2 = (xy + w)(xy + z)$

$= xyxy + xyz + wxy + wz$

$= xy + xyz + wxy + wz$

$= xy(1 + z + w) + wz$

$= xy(1) + wz$

$= xy + wz$

化简逻辑函数

【例】$F3 = AB + \overline{A\bar{B} + C}$　　$F4 = (x\bar{y} + \bar{w}z)(w\bar{x} + y\bar{z})$

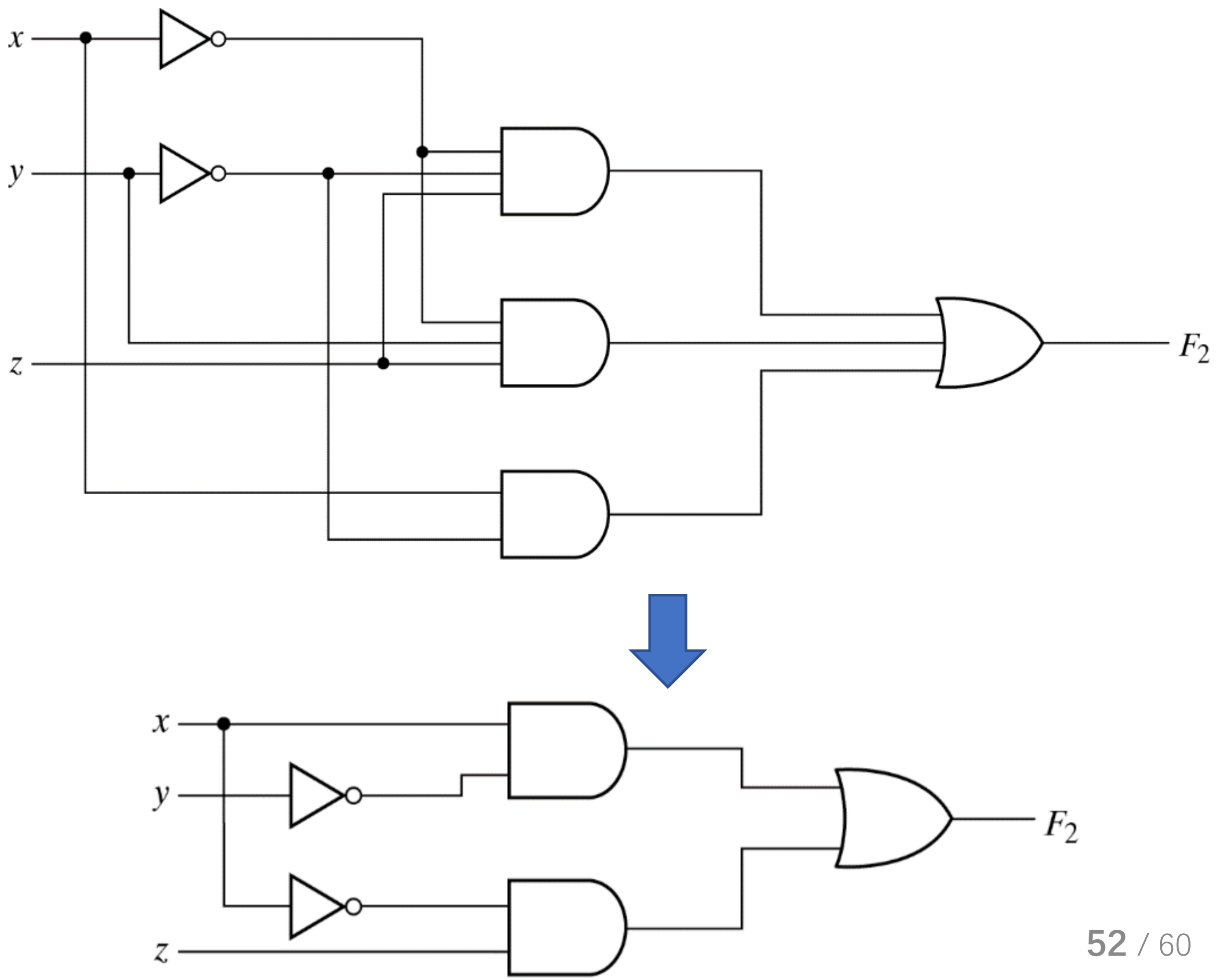
$$
\begin{aligned}
F3 &= AB + \overline{A\bar{B} + C} \\
&= AB + A(B\bar{C}) \\
&= AB + AB\bar{C} \\
&= AB(1 + \bar{C}) \\
&= AB(1) \\
&= AB
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F4 &= (x\bar{y} + \bar{w}z)(w\bar{x} + y\bar{z}) \\
&= x\bar{y}w\bar{x} + x\bar{y}y\bar{z} + \bar{w}zw\bar{x} + \bar{w}zy\bar{z} \\
&= \bar{y}w(x\bar{x}) + x\bar{z}(y\bar{y}) + z\bar{x}(w\bar{w}) + \bar{w}y(z\bar{z}) \\
&= \bar{y}w(0) + x\bar{z}(0) + z\bar{x}(0) + \bar{w}y(0) \\
&= 0 + 0 + 0 + 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

【练习3】

- 写出$F_2 = \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz + x\bar{y}$的真值表，画出逻辑门电路图。
- 化简F_2函数，写新函数出真值表，画出新函数的逻辑图。

x	y	z	$\boldsymbol{F_2}$
0	0	0	**0**
0	0	1	**1**
0	1	0	**0**
0	1	1	**1**
1	0	0	**1**
1	0	1	**1**
1	1	0	**0**
1	1	1	**0**



【练习4】化简下列逻辑函数

① $\boldsymbol{x(\overline{x}+y)} =$ $x\bar{x}+xy=xy$

② $\boldsymbol{x+\overline{x}y} =$ $(x+\bar{x})(x+y)=x+y$

③ $\boldsymbol{(x+y)(x+\overline{y})} =$ $xx+x\bar{y}+yx+y\bar{y}=x$

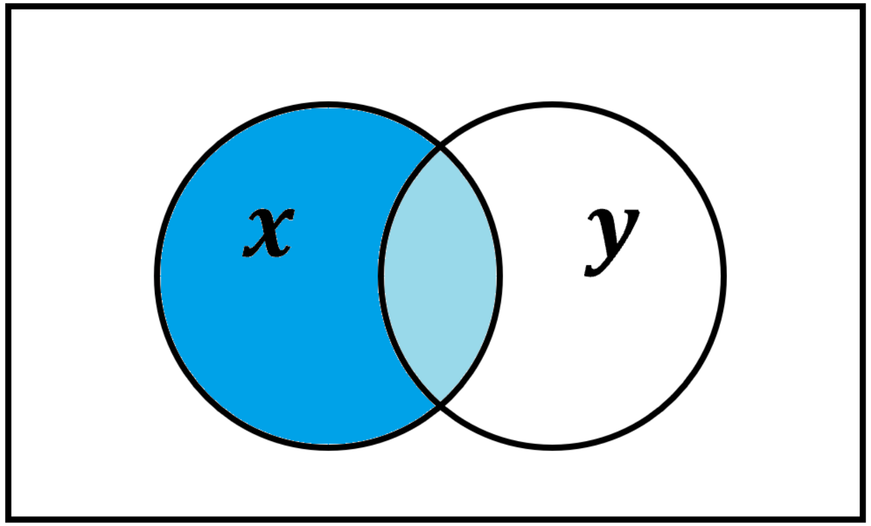
④ $\boldsymbol{xy+\overline{x}z+yz} =$ $xy+\bar{x}z+yz(x+\bar{x})=xy+\bar{x}z$

⑤ $\boldsymbol{(x+y)(\overline{x}+z)(y+z)} =$ $x\bar{x}+xz+yz+\bar{x}y$

$=(x+y)(\bar{x}+z)$

化简逻辑函数方法总结-1

1. 并项法： $xy + x\bar{y} = x$



$$F_1 = A\overline{\bar{B}CD} + A\bar{B}CD$$
$$= A$$

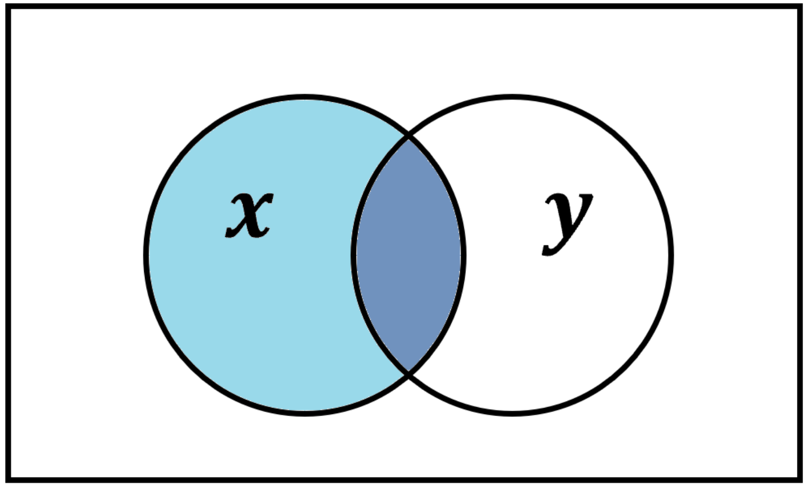
$$F_2 = A\bar{B} + ACD + \bar{A}\bar{B} + \bar{A}CD$$
$$= \bar{B} + CD$$

$$F_3 = \bar{A}B\bar{C} + A\bar{C} + \bar{B}\bar{C} = \bar{C}(\bar{A}B + A + \bar{B})$$
$$= \bar{C}(\bar{A}B + A + \bar{B}) = \bar{C}\left(\bar{A}B + \overline{\bar{A}B}\right) = \bar{C}$$

$$F_4 = B\bar{C}D + BC\bar{D} + B\bar{C}\bar{D} + BCD$$
$$= B$$

化简逻辑函数方法总结-2

2. **吸收法**：$x + xy = x$



$$F_1 = \left(\overline{\bar{A}B} + C\right)ABD + AD$$

$$= AD$$

$$F_2 = AB + AB\bar{C} + ABD + AB(\bar{C} + \bar{D})$$

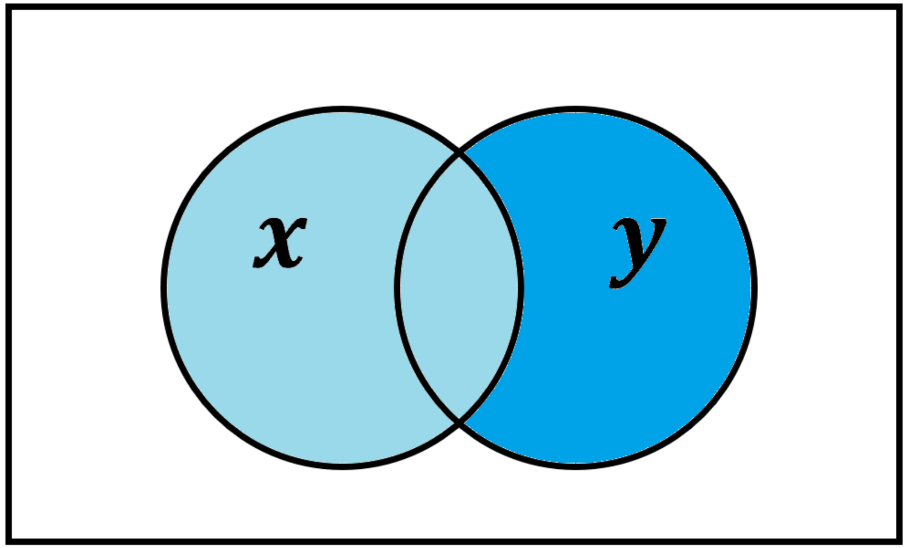
$$= AB$$

$$F_3 = A + \overline{\bar{\boldsymbol{A}} \cdot \overline{\boldsymbol{BC}}}\left(\bar{A} + \overline{\bar{B}\bar{C} + D}\right) + BC$$

$$= A + BC$$

化简逻辑函数方法总结-3

3. 消去法：$x + \bar{x}y = x + y$



$$F_1 = \bar{B} + ABC$$
$$= \bar{B} + AC$$

$$F_2 = A\bar{B} + B + \bar{A}B$$
$$= A + B$$

$$F_3 = AC + \bar{A}D + \bar{C}D$$
$$= AC + D$$

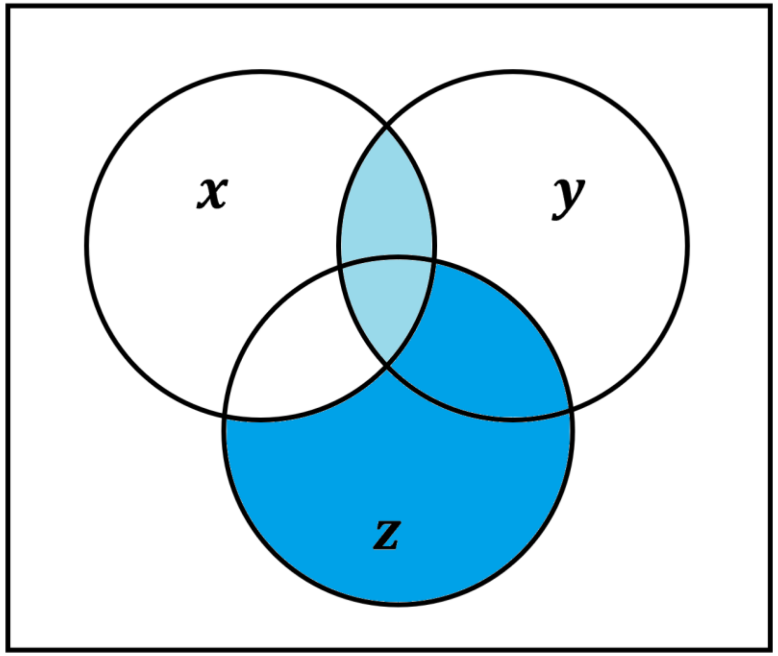
推导

$$x + \bar{x}y$$
$$= (x + \bar{x})(x + y)$$
$$= x + y$$

化简逻辑函数方法总结-4

4. 消项法：$xy+\bar{x}z+yz = xy+\bar{x}z$

$$xy+\bar{x}z+yzw = xy+\bar{x}z$$



$$\begin{aligned}F_1 &= AC+A\bar{B}+\overline{B+C}\\ &= AC+A\bar{B}+\bar{B}\bar{C}\\ &= AC+\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\\ &= AC+\bar{B}\bar{C}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_2 &= A\bar{B}C\bar{D}+\overline{A\bar{B}}E+\bar{A}C\bar{D}E\\ &= (A\bar{B})C\bar{D}+\overline{A\bar{B}}(E)+\bar{A}(C\bar{D})(E)\\ &= A\bar{B}C\bar{D}+\overline{A\bar{B}}E\end{aligned}$$

推导：

$$\begin{aligned}&xy+\bar{x}z+yz\\ &= xy+\bar{x}z+yz(x+\bar{x})\\ &= xy+\bar{x}z+xyz+\bar{x}yz\\ &= xy+\bar{x}z\end{aligned}$$

化简逻辑函数方法总结-5

5. 配项法： $\boldsymbol{x+x=x,\quad x+\overline{x}=1}$

$$F_1=\ \bar{A}B\bar{C}+\bar{A}BC+ABC$$
$$=(\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}BC)+(\bar{A}BC+ABC)=\bar{A}B+BC$$
$$=\bar{A}B(\bar{C}+C)+ABC=\bar{A}B+ABC$$
$$=B(\bar{A}+AC)=B(\bar{A}+C)=\bar{A}B+BC$$

$$F_2=A\bar{B}+\bar{A}B+B\bar{C}+\bar{B}C$$
$$=A\bar{B}+B\bar{C}+\bar{A}B(C+\bar{C})+(A+\bar{A})\bar{B}C$$
$$=A\bar{B}+B\bar{C}+\bar{A}BC+\bar{A}B\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}\bar{B}C$$
$$=(\boldsymbol{A\bar{B}}+A\bar{B}C)+(\boldsymbol{B\bar{C}}+\bar{A}B\bar{C})+(\boldsymbol{\bar{A}}B\boldsymbol{C}+\bar{A}\bar{B}C)$$
$$=A\bar{B}+B\bar{C}+\bar{A}C$$

化简 综合练习

$$\boldsymbol{Y = AC + \bar{B}C + B\bar{D} + C\bar{D} + A(B + \bar{C}) + \bar{A}BC\bar{D} + A\bar{B}DE}$$

$$= AC + \bar{B}C + B\bar{D} + C\bar{D} + AB + A\bar{C} + \bar{A}BC\bar{D} + A\bar{B}DE$$

$$= A + \bar{B}C + B\bar{D} + C\bar{D} + AB + \bar{A}BC\bar{D} + A\bar{B}DE$$

$$= A + \bar{B}C + B\bar{D} + C\bar{D} + \bar{A}BC\bar{D}$$

消因子法：$\boldsymbol{x + \bar{x}y = x + y}$

$$= A + \bar{B}C + B\bar{D} + C\bar{D} + BC\bar{D}$$

$$= A + C(\bar{B} + \bar{D} + B\bar{D}) + B\bar{D}$$

$$= A + C(\bar{B} + \bar{D}) + B\bar{D}$$

$$= A + \bar{B}C + C\bar{D} + B\bar{D}$$

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00			1	1
01	1			1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$$= A + \bar{B}C + B\bar{D} + \boldsymbol{C\bar{D}}$$

消项法：$\boldsymbol{xy + \bar{x}z} + yz = \boldsymbol{xy + \bar{x}z}$

$$= A + \bar{B}C + B\bar{D}$$

常用公式

基 本	$x + 0 = x$ $x + 1 = 1$ $x + x = x$ $x + \bar{x} = 1$	$\bar{\bar{x}} = x$	$x \cdot 0 = 0$ $x \cdot 1 = x$ $x \cdot x = x$ $x \cdot \bar{x} = 0$
重叠律	$x + x = x$		$x \cdot x = x$
交换律	$x + y = y + x$		$x \cdot y = y \cdot x$
结合律	$(x + y) + z = x + (y + z)$		$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
摩根定理	$\overline{\boldsymbol{x + y + z}} = \bar{\boldsymbol{x}} \cdot \bar{\boldsymbol{y}} \cdot \bar{\boldsymbol{z}}$		$\overline{\boldsymbol{x \cdot y \cdot z}} = \bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{y}} + \bar{\boldsymbol{z}}$
吸收律	$x + x \cdot y = x$		$x \cdot (x + y) = x$
分配律	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$		$\boldsymbol{x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)}$
其 它	$\boldsymbol{x + \bar{x}y = x + y}$ $\boldsymbol{xy + \bar{x}z + yzw = xy + \bar{x}z}$		