DeepL

订阅DeepL Pro以翻译大型文件。
欲了解更多信息，请访问www.DeepL.com/pro。

第一章

直接硬度法

1.1. 简介

直接刚度法（DSM）是一种解决静态确定或不确定结构的方法 ， 特别适合于计算机实现。它是将有限元方法（FEM）应用于自然离散系统，例如，作为一组在节点处连接的理想化元素的模型，而不是偏微分方程（PDE） 。因此，DSM将作为对有限 元素概念的温和介绍，如非结构化网格、装配和边界条件的应用，而不 偏微分方程的复杂性。

在本文中，我们将只考虑桁架结构中的DSM，其定义是由细长的线性弹性构件组成的结构 ，这些构件的端点由销钉连接（自由旋转，即不支持力矩），所有载荷（外部载荷和反作用力）施加在节点上。假设构件的重量可以忽略不计（相对于外部荷载而言）， 沿 ，具有恒定的面积和硬度，而且任何截面上的应力都是均匀的。假设结构由重量可忽略不计的 构件组成，并且只在其节点处受力，这意味着每个构件中的力是纯轴向的（纯压缩或拉伸，没有横向力），并且沿其长度方向恒定。 假设构件具有恒定的面积和硬度，意味着每个构件中的应变是恒定的， ，这又意味着轴向位移沿构件的长度线性变化。在本文的其余部分 ，我们将考虑图1.1中的桁架，以便具体说明。

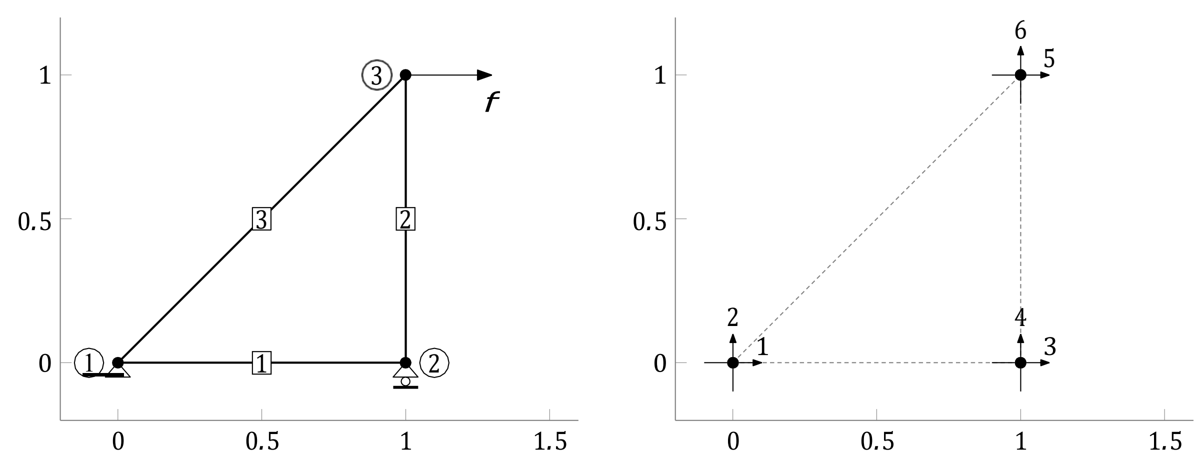

图1.1: *左图* ：有三个节点和元素的桁架结构，在节点3处有一个*X方向的*载荷，在节点1处有一个钉子（固定的X和Y位移）边界条件，在节点2处有一个垂直滚子（固定的Y位移）。节点和元素的编号显示在图中；节点编号包含在圆圈中，元素编号包含在矩形中。 *右图* ：全局自由度的编号。

1.2. 元素对全局方程的贡献

本节的目标是推导出每个元素的力和其节点在结构坐标系（X-Y）中的位移之间的关系。然而，力-位移关系最容易在一个与元素对齐的坐标系中推导出来。因此，我们考虑一个来自桁架的任意元素e，并引入一个坐标系（$\bar{x}$-$\bar{y}^e$），使得第一个坐标方向（$\bar{x}$）与杆件的轴线对齐（图1.2）。每个元素由两个局部节点组成，其编号与图1.1中的全局节点编号无关，为方便起见取为1，2。让θ_e，表示从水平面到元素轴的角度（逆时针），即$\bar{x}$-和x轴之间的角度。让$\bar{u}_1^e$，$\bar{u}_2^e$和$\bar{u}_3^e$，$\bar{u}_4^e$分别表示局部节点1和2在$\bar{x}$、$\bar{y}$方向的位移。同样，让$\bar{F}_1^e$和$\bar{F}_3^e$分别为局部节点1和2在$\bar{x}$-方向上的力。在$\bar{y}$-方向上的力是被有意排除在外，因为从第1.1节中的假设来看，构件中的力是纯轴向的。最后，我们将全局坐标系（x-y）中元素e的局部节点1的位移和力分别表示为(u_1^e, u_2^e)和(F_1^e, F_2^e)。类似地，位移和元素e的局部节点2在全局坐标系中的力分别为(u_3^e, u_4^e)和(F_3^e, F_4^e)。

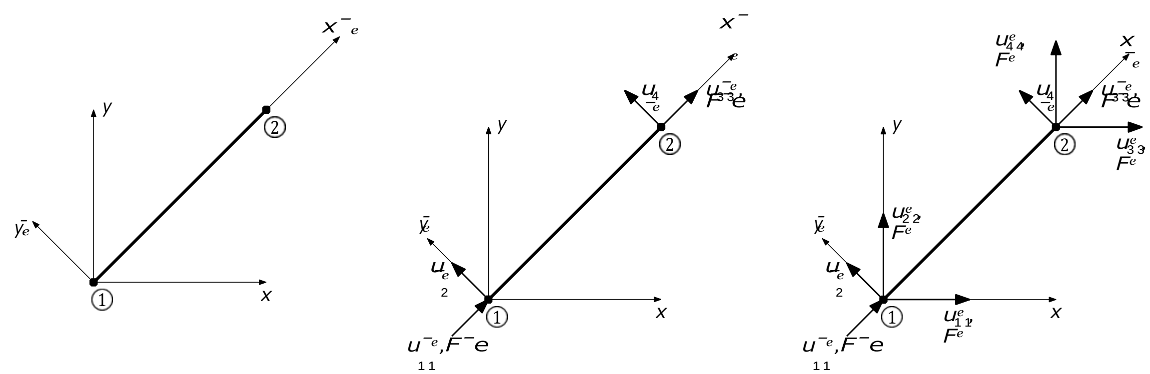

图1.2：图1.1中桁架中杆件2的局部和全局坐标系（*左*），元素坐标系中的力和位移（*中心*），以及全局坐标系中的力和位移（*右*）。

有了这个符号和第1.1节中的假设，元素中的（恒定）应变，定义为构件相对于其原始长度的长度变化，为

$$\bar{\epsilon}^e = \frac{\bar{u}_3^e - \bar{u}_1^e}{h_e}. \tag{1.1}$$

然后，根据胡克定律（线性弹性），将应力和应变（$\sigma = E\epsilon$）线性地联系起来，以及将应力定义为单位面积的力（$F = \sigma A$），我们可以得到

$$\begin{aligned} \bar{F}_1^e &= -\sigma^e A_e = -E_e A_e \epsilon^e = -\frac{E_e A_e}{h_e}\left(\bar{u}_3^e - \bar{u}_1^e\right) \\ \bar{F}_3^e &= \sigma^e A_e = E_e A_e \epsilon^e = \frac{E_e A_e}{h_e}\left(\bar{u}_3^e - \bar{u}_1^e\right) \end{aligned} \tag{1.2}$$

其中，A_e，E_e，$\bar{\epsilon}^e$，和σ^e分别是构件e的横截面积、硬度（杨氏模量）、应变和应力，所有这些都是沿其长度方向不变的，或者等效为矩阵形式的

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_1^e \\ \bar{F}_3^e \end{bmatrix} = \frac{E_e A_e}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1^e \\ \bar{u}_3^e \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

通过考虑$\bar{u}_3^e > \bar{u}_1^e$的情况，很容易验证符号的选择是否正确，也就是说，bar处于紧张状态，因此$\bar{F}_3^e$的方向是正确的，因此有一个正号，而$\bar{F}_1^e$应该是相反的，并且因此有一个负号。

在结束本节之前，我们将元素坐标系中的力和位移与全局坐标系联系起来，以便在下一节对元素进行全局装配。以下是旋转

矩阵将使一个矢量 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$，*顺时针*旋转 θ。

$$\boldsymbol{T}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

旋转矩阵的一个便利属性是它们是正交的，即 $\boldsymbol{T}(\theta)^T = \boldsymbol{T}(\theta)^{-1}$。让 $\boldsymbol{e}_i$ 和 $\bar{\boldsymbol{e}}_i^e$ 分别为与 x-y 和 $\bar{x}^e$-$\bar{y}^e$ 坐标轴对齐的单位向量。从 x-y 坐标系的配置来看，$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0)^T$，$\boldsymbol{e}_2 = (0, 1)^T$。然后，我们有这样的关系

$$\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{T}(\theta_e)\,\bar{\boldsymbol{e}}_i^e \tag{1.5}$$

从 $\bar{x}^e$-$\bar{y}^e$ 坐标系的定义来看。任何矢量 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ 在这些坐标系中得到

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 = \bar{v}_1\bar{\boldsymbol{e}}_1^e + \bar{v}_2\bar{\boldsymbol{e}}_2^e \tag{1.6}$$

其中 v_1, v_2 是 $\boldsymbol{v}$ 在 x-y 坐标系中的坐标，$\bar{v}_1, \bar{v}_2$ 是 $\boldsymbol{v}$ 在 $\bar{x}^e$-$\bar{y}^e$ 坐标系中的坐标。从上述坐标系之间的等价关系和（1.5），我们可以得出

$$\bar{v}_1\bar{\boldsymbol{e}}_1^e + \bar{v}_2\bar{\boldsymbol{e}}_2^e = v_1\boldsymbol{T}(\theta_e)\bar{\boldsymbol{e}}_1^e + v_2\boldsymbol{T}(\theta_e)\bar{\boldsymbol{e}}_2^e = \boldsymbol{T}(\theta_e)(v_1\bar{\boldsymbol{e}}_1^e + v_2\bar{\boldsymbol{e}}_2^e) \Rightarrow \bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{T}(\theta_e)\boldsymbol{v}. \tag{1.7}$$

因此，位移在坐标系之间的转移为

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1^e \\ \bar{u}_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_e & \sin\theta_e \\ -\sin\theta_e & \cos\theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \bar{u}_3^e \\ \bar{u}_4^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_e & \sin\theta_e \\ -\sin\theta_e & \cos\theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3^e \\ u_4^e \end{bmatrix}, \tag{1.8}$$

为方便起见，我们将其合并为一个矩阵方程

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1^e \\ \bar{u}_2^e \\ \bar{u}_3^e \\ \bar{u}_4^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_e & \sin\theta_e & 0 & 0 \\ -\sin\theta_e & \cos\theta_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_e & \sin\theta_e \\ 0 & 0 & -\sin\theta_e & \cos\theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \end{bmatrix}. \tag{1.9}$$

同样地，力的转移为

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_1^e \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_e & \sin\theta_e \\ -\sin\theta_e & \cos\theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \bar{F}_3^e \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_e & \sin\theta_e \\ -\sin\theta_e & \cos\theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_3^e \\ F_4^e \end{bmatrix}, \tag{1.10}$$

我们将其合并为一个单一的矩阵方程

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_1^e \\ 0 \\ \bar{F}_3^e \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_e & \sin\theta_e & 0 & 0 \\ -\sin\theta_e & \cos\theta_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_e & \sin\theta_e \\ 0 & 0 & -\sin\theta_e & \cos\theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \\ F_4^e \end{bmatrix}. \tag{1.11}$$

用零填充（1.3）中的元素方程

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_1^e \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{F}^e = \frac{E^e A^e}{h_e}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\bar{u}^e。 \tag{1.12}$$

并结合坐标系之间的转换(1.9)，(1.11)导致全局坐标系中元素位移和力之间的理想关系

$$\boldsymbol{F}^e = \boldsymbol{K}^e \boldsymbol{u}^e。 \tag{1.13}$$

其中$\boldsymbol{F}^e \in \mathbb{R}^4$是元素的力向量，$\boldsymbol{u}^e \in \mathbb{R}^4$是元素的位移向量。

$$\boldsymbol{F}^e = \begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \\ F_4^e \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}^e = \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

和元素stiffness矩阵为$\boldsymbol{K}^e \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

$$\boldsymbol{K}^e = \frac{E^e A^e}{L^e} \begin{bmatrix} \cos\theta_e & \sin\theta_e & 0 & 0 \\ -\sin\theta_e & \cos\theta_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_e & \sin\theta_e \\ 0 & 0 & -\sin\theta_e & \cos\theta_e \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_e & \sin\theta_e & 0 & 0 \\ -\sin\theta_e & \cos\theta_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_e & \sin\theta_e \\ 0 & 0 & -\sin\theta_e & \cos\theta_e \end{bmatrix}. \tag{1.15}$$

1.3. 全局方程的组装：平衡性

有了(1.13)中建立的全局坐标系中每个元素的节点位移和力的关系，我们就可以推导出全局系统的管理方程。由于这是一个静态结构（不是一个机构），每个节点必须处于平衡状态，也就是说，来自元素、外部载荷和反作用力作用于节点的力之和应该为零。图1.1中的桁架的每个节点的平衡导致了

$$\begin{aligned} R_1 &= F_1^1 + F_1^3 + r_1 = 0 \\ R_2 &= F_2^1 + F_2^3 + r_2 = 0 \\ R_3 &= F_3^1 + F_1^2 = 0 \\ R_4 &= F_4^1 + F_2^2 + r_4 = 0 \\ R_5 &= F_3^2 + F_3^3 - f = 0 \\ R_6 &= F_4^2 + F_4^3 = 0 \end{aligned} \tag{1.16}$$

其中，r_1，r_2是节点1的反作用力，r_4是节点2的反作用力，所有元素都被分配了局部节点号，使局部节点1对应于较小的全局节点号（图）。

图1.3）。方程写成这种扩展形式是为了强调全局方程只是对适当的元素方程（1.13）的求和，这一过程通常被称为*装配*。将元素贡献（1.13）代入平衡方程（1.16），可以得到整个结构的位移和力的相关系统

$$\begin{aligned} R_1 &= K_{11}^1 u_1^1 + K_{12}^1 u_2^1 + K_{13}^1 u_3^1 + K_{14}^1 u_4^1 + K_{11}^3 u_1^3 + K_{12}^3 u_2^3 + K_{13}^3 u_3^3 + K_{14}^3 u_4^3 - r_1 \\ R_2 &= K_{21}^1 u_1^1 + K_{22}^1 u_2^1 + K_{23}^1 u_3^1 + K_{24}^1 u_4^1 + K_{21}^3 u_1^3 + K_{22}^3 u_2^3 + K_{23}^3 u_3^3 + K_{24}^3 u_4^3 - r_2 \\ R_3 &= K_{31}^1 u_1^1 + K_{32}^1 u_2^1 + K_{33}^1 u_3^1 + K_{34}^1 u_4^1 + K_{11}^2 u_1^2 + K_{12}^2 u_2^2 + K_{13}^2 u_3^2 + K_{14}^2 u_4^2 \\ R_4 &= K_{41}^1 u_1^1 + K_{42}^1 u_2^1 + K_{43}^1 u_3^1 + K_{44}^1 u_4^1 + K_{21}^2 u_1^2 + K_{22}^2 u_2^2 + K_{23}^2 u_3^2 + K_{24}^2 u_4^2 - r_4 \\ R_5 &= K_{31}^2 u_1^2 + K_{32}^2 u_2^2 + K_{33}^2 u_3^2 + K_{34}^2 u_4^2 + K_{31}^3 u_1^3 + K_{32}^3 u_2^3 + K_{33}^3 u_3^3 + K_{34}^3 u_4^3 - f \\ R_6 &= K_{41}^2 u_1^2 + K_{42}^2 u_2^2 + K_{43}^2 u_3^2 + K_{44}^2 u_4^2 + K_{41}^3 u_1^3 + K_{42}^3 u_2^3 + K_{43}^3 u_3^3 + K_{44}^3 u_4^3。 \end{aligned} \tag{1.17}$$

接下来，我们通过将元素位移（每个元素的节点位移）与全局节点位移联系起来，强制执行节点位移的兼

容性。让$u_{2(i-1)+1}$, u_{2i} 是全局桁架结构中节点i的位移；见图1.1中全局自由度的编号。那么，在在节点i处相遇的每个元素的端部的位移必须等于$u_{2(i-1)+1}$, u_{2i}，由于引脚连接

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^1 = u_3^3, & u_3 &= u_3^1 = u_1^2, & u_5 &= u_3^2 = u_1^3 \\ u_2 &= u_2^1 = u_4^3, & u_4 &= u_4^1 = u_2^2, & u_6 &= u_4^2 = u_2^3 \end{aligned} \qquad (1.18)$$

。

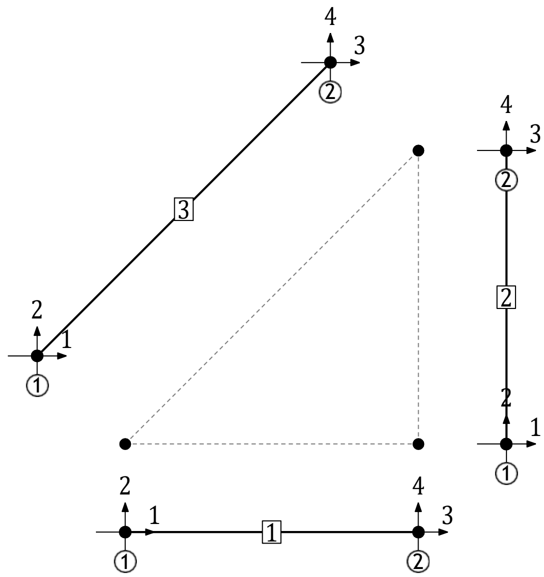

图1.3：标有局部节点和自由度的桁架结构。本地节点编号包含在圆圈中，全局元素编号在矩形中，编号的箭头标识了每个元素的本地自由度。

将这些兼容性条件代入(1.25)可以得到集合方程的最终形式，即强制执行平衡、节点位移的兼容性以及元素方程

$$
\begin{aligned}
R_1 &= (K^1_{11} + K^3_{11})u_1 + (K^1_{12} + K^3_{12})u_2 + K^1_{13}u_3 + K^1_{14}u_4 + K^3_{13}u_5 + K^3_{14}u_6 - r_1\\
R_2 &= (K^1_{21} + K^3_{21})u_1 + (K^1_{22} + K^3_{22})u_2 + K^1_{23}u_3 + K^1_{24}u_4 + K^3_{23}u_5 + K^3_{24}u_6 - r_2\\
R_3 &= K^1_{31}u_1 + K^1_{32}u_2 + (K^1_{33} + K^2_{11})u_3 + (K^1_{34} + K^2_{12})u_4 + K^2_{13}u_5 + K^2_{14}u_6\\
R_4 &= K^1_{41}u_1 + K^1_{42}u_2 + (K^1_{43} + K^2_{21})u_3 + (K^1_{44} + K^2_{22})u_4 + K^2_{23}u_5 + K^2_{24}u_6 - r_4\\
R_5 &= K^3_{31}u_1 + K^3_{32}u_2 + K^2_{31}u_3 + K^2_{32}u_4 + (K^2_{33} + K^3_{33})u_5 + (K^2_{34} + K^3_{34})u_6 - f\\
R_6 &= K^3_{41}u_1 + K^3_{42}u_2 + K^2_{41}u_3 + K^2_{42}u_4 + (K^2_{43} + K^3_{43})u_5 + (K^2_{44} + K^3_{44})u_6\text{。}
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

这可以紧凑地写成

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{f}) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}\text{。} \tag{1.20}$$

其中，残差（$\boldsymbol{R}$）、节点位移矢量（$\boldsymbol{u}$）和外力矢量（$\boldsymbol{f}$）为

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ 0 \\ r_4 \\ f \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

和硬度矩阵（$\boldsymbol{K}$）为

$$
K = \begin{bmatrix}
K^1_{11} + K^3_{11} & K^1_{12} + K^3_{12} & K^1_{13} & K^1_{14} & K^3_{13} & K^3_{14} \\
K^1_{21} + K^3_{21} & K^1_{22} + K^3_{22} & K^1_{23} & K^1_{24} & K^3_{23} & K^3_{24} \\
K^1_{31} & K^1_{32} & K^1_{33} + K^2_{11} & K^1_{34} + K^2_{12} & K^2_{13} & K^2_{14} \\
K^1_{41} & K^1_{42} & K^1_{43} + K^2_{21} & K^1_{44} + K^2_{22} & K^2_{23} & K^2_{24} \\
K^3_{31} & K^3_{32} & K^2_{31} & K^2_{32} & K^2_{33} + K^3_{33} & K^2_{34} + K^3_{34} \\
K^3_{41} & K^3_{42} & K^2_{41} & K^2_{42} & K^2_{43} + K^3_{43} & K^2_{44} + K^3_{44}
\end{bmatrix}. \tag{1.22}
$$

STI↵ness矩阵正是残差相对于节点坐标的导数，即：。

$$K \text{ ''} \frac{BR}{布}, \tag{1.23}$$

因此，也将被称为残差的*雅各布*矩阵（偏导矩阵）。

1.4. 全局方程的组装：连接

在这一节中，我们对上一节中介绍的组装程序进行了概括，它阐明了一个
这是组装硬度矩阵的一个方便的捷径。考虑一个有N个$_v$ 顶点和N个$_e$ 元素的d*维的*桁架。让$\boldsymbol{x}$ P R$^{d\hat{}N_v}$的*第j*列为*第j*个节点的坐标，⇥ P N$^{2\hat{}N_e}$为桁架的连通性，即⇥$_{je}$ 为元素e的局部节点j所对应的全局节点。最后定义⊼ N$^{2d\hat{}N_e}$为局部自由度到全局自由度的映射，即⊼$_{je}$ 为元素e的局部自由度 j所对应的全局自由度。
P

例1.1:图1.1中的桁架
对于图1.1中的桁架，定义该桁架的矩阵为

$$\boldsymbol{x} \text{ ''} \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}, \quad ⇥ \text{ ''} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad ⊼ \text{ ''} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \\ 4 & 6 & 6 \end{bmatrix}。 \tag{1.24}$$

从这些定义中不难看出，平衡条件可以紧凑地写为

$$R_i \text{ ''} \sum_{e \text{ ''}1}^{N_e} \sum_{j \text{ ''}1}^{2d} F_j^e b_{i⊼_{je}} ´ f_i。 \tag{1.25}$$

对于i '' 1,..., dN_v，其中R_i 是平衡残差，f_i 是对应于全局的外力。
i的自由度，F^e 是作用于$_j$元素e的局部自由度j（j '' 1,..., 2d）的力。
(e '' 1,..., N_e)，克朗克德尔塔函数(第二章的更多细节)被定义为

$$δ_{ab} \text{ ''} \begin{cases} 1, & 如果 a \text{ ''} b \\ 0, & 如果 a \neq b, \end{cases} \tag{1.26}$$

在一般系统（1.25）中使用（1.24）中的桁架定义来恢复（1.16）中的平衡系统。桁架结构的兼容性要求所有重合在一个节点的自由度必须由于销轴连接而相等。也就是说，元素e的*第j*个局部自由度必须等于相应的全局自由度 $u_{⊼_{je}}$。

$$u_j^e \text{ ''} u_{⊼_{je}} \sum_{s \text{ ''}1}^{dN_v} ÃÃÃÃ \quad , \tag{1.27}$$

对于局部自由度j '' 1,..., 2d和元素e '' 1,..., N_e，其中u^e 是局部自由度的 j
自由度，u_s (s '' 1,..., dN_v）是全局自由度，最后一个等式来自于一个简单的
特征。使用(1.24)中的桁架定义可以恢复(1.18)中的相容条件，其中的
(1.27)中的一般条件。

元素方程（1.13）采取矩阵-向量积的形式

$$F_j^e \text{ ''} \sum_{k \text{ ''}1}^{2d} K_{jk}^e u_k^e \tag{1.28}$$

对于局部自由度j '' 1,..., 2d，其中K^e (j, k '' 1,..., 2d) 是局部自由度的条目 jk
将元素方程（1.28）与全局兼容（1.25）结合起来 N_e 2d 2d

$$R_i \;"\; \ddot{Y}_{e\,"1}\ \ddot{Y}_{j\,"1}\ \ddot{Y}_{k}\ K^e_{jk} u^e_k \quad ´\ f_i \text{。} \qquad (1.29)$$

b_i

为全局自由度$i = 1, \ldots, dN_v$。通过用(1.27)中适当的全局自由度来替换局部自由度来强制执行相容性

$$0 = \sum_{e=1}^{N_e}\sum_{j=1}^{2d}\sum_{k=1}^{2d}\sum_{s=1}^{dN_v} K^e_{jk} u_s \, b_{i\tau_{je}} b_{s\tau_{ke}} - f_i \text{。} \tag{1.30}$$

在交换了求和的顺序后，治理方程简化为矩阵-向量乘积，如（1.20）所示

$$R_i = \sum_{s=1}^{dN_v}\left(\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{j=1}^{2d}\sum_{k=1}^{2d} K^e_{jk} b_{i\tau_{je}} b_{s\tau_{ke}}\right) u_s - f_i \text{。} \tag{1.31}$$

因此，我们可以明确地识别STI↵ness矩阵的条目为

$$K_{is} = \sum_{e=1}^{N_e}\sum_{j=1}^{2d}\sum_{k=1}^{2d} K^e_{jk} b_{i\tau_{je}} b_{s\tau_{ke}} \tag{1.32}$$

为$i, s = 1, \ldots, dN_v$。这个方程提出了一个构建全局（集合）sti↵ness矩阵的简单程序。1）使用（1.14）评估元素 sti↵ness 矩阵；2）填充全局 sti↵ness 的条目。

使用（1.32）的矩阵。

例1.2：全局刚度矩阵的条目，图1.1的桁架

我们使用（1.32）中的表达式来计算$K_{11}, K_{21}, K_{43}, K_{64}$。

$$K_{11} = \sum_{e=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} K^e_{jk} b_{1\tau_{je}} b_{1\tau_{ke}} = K^1_{11} + K^3_{11}$$

$$K_{21} = \sum_{e=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} K^e_{jk} b_{2\tau_{je}} b_{1\tau_{ke}} = K^1_{12} + K^3_{12}$$

$$K_{43} = \sum_{e=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} K^e_{jk} b_{4\tau_{je}} b_{3\tau_{ke}} = K^1_{43} + K^2_{21}$$

$$K_{64} = \sum_{e=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} K^e_{jk} b_{6\tau_{je}} b_{4\tau_{ke}} = K^2_{42}.$$

1.5. 位移边界条件

在我们解决桁架结构的节点位移之前的最后一项任务是应用位移的边界条件。这些条件也被称为基本或迪里切特边界条件。从图1.1中的桁架，我们知道节点1的x和y位移是零，节点2的y位移是零，即$u_1 = u_2 = u_4 = 0$。由于这些位移是*已知的*，我们不需要对它们进行求解，将从（1.20）的方程组中消除相应的方程。

考虑将全局自由度划分为有约束的（位移已知）和无约束的（位移未知）。让$\mathcal{I}_c$ 和 $\mathcal{I}_u$ 分别是将全局自由度划分为受限自由度和非受限自由度的指数集。然后我们将这种划分应用于节点位移，得到未知位移的矢量为$\boldsymbol{u}_u = \boldsymbol{u}|_{\mathcal{I}_u}$和已知的位移为$\boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{u}|_{\mathcal{I}_c}$，其中$\boldsymbol{u}_\mathcal{I}$是矢量$\boldsymbol{u}$对$\mathcal{I}$中的指数的限制。我们类似地定义$\boldsymbol{f}_c$, $\boldsymbol{f}_u$, $\boldsymbol{K}_{cc}$, $\boldsymbol{K}_{uc}$, $\boldsymbol{K}_{cu}$, $\boldsymbol{K}_{uu}$，其中，例如，$\boldsymbol{K}_{uc}$的结果是将$\boldsymbol{K}$的行限制在$\mathcal{I}_u$的指数上，将列

限制在$\mathcal{I}_c$的指数上。在图1.1的桁架中，这些量被定义为。$\mathcal{I}_u = \{3, 5, 6\}$, $\mathcal{I}_c = \{1, 2, 4\}$。

$$\boldsymbol{u}_u = \begin{bmatrix} u_3 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_c = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_u = \begin{bmatrix} 0 \\ f \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_c = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_4 \end{bmatrix}。 \tag{1.33}$$

和

$$\boldsymbol{K}_{uu} = \begin{bmatrix} K_{33} & K_{35} & K_{36} \\ K_{53} & K_{55} & K_{56} \\ K_{63} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K}_{uc} = \begin{bmatrix} K_{31} & K_{32} & K_{34} \\ K_{51} & K_{52} & K_{54} \\ K_{61} & K_{62} & K_{64} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_{cu} = \begin{bmatrix} K_{13} & K_{15} & K_{16} \\ K_{23} & K_{25} & K_{26} \\ K_{43} & K_{45} & K_{46} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K}_{cc} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{24} \\ K_{41} & K_{42} & K_{44} \end{bmatrix}. \tag{1.34}$$

请注意，$\boldsymbol{u}_u$（未知节点位移）和$\boldsymbol{f}_c$（反作用力）都是*未知的*，而$\boldsymbol{u}_c$（规定位移）和$\boldsymbol{f}_u$（外部载荷）是已知的。这种情况总是存在的，因为只要位移是已知的，就会有一个来自边界条件的未知反作用力，只要位移是未知的（即没有位移边界条件），就会有一个已知的力。对于更复杂的边界条件，如弹性地基，位移是未知的，力是作为未知位移的函数给出的。

在重新安排了方程和变量的顺序后，我们可以写出

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_u \\ \boldsymbol{u}_c \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_u \\ \boldsymbol{f}_c \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{uu} & \boldsymbol{K}_{uc} \\ \boldsymbol{K}_{cu} & \boldsymbol{K}_{cc} \end{bmatrix} \tag{1.35}$$

，(1.20)中的治理方程变为

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{uu} & \boldsymbol{K}_{uc} \\ \boldsymbol{K}_{cu} & \boldsymbol{K}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_u \\ \boldsymbol{u}_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_u \\ \boldsymbol{f}_c \end{bmatrix} \tag{1.36}$$

这个方程组的扩展导致了两个不同的系统：一个是节点位移的系统 $\boldsymbol{R}_u(\boldsymbol{u}_u; \boldsymbol{u}_c, \boldsymbol{f}_u) = 0$，另一个是反作用力$\boldsymbol{R}_c(\boldsymbol{f}_c; \boldsymbol{u}_u, \boldsymbol{u}_c) = 0$。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_u(\boldsymbol{u}_u; \boldsymbol{u}_c, \boldsymbol{f}_u) &= \boldsymbol{K}_{uu}\boldsymbol{u}_u + \boldsymbol{K}_{uc}\boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{f}_u = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R}_c(\boldsymbol{f}_c; \boldsymbol{u}_u, \boldsymbol{u}_c) &= \boldsymbol{K}_{cu}\boldsymbol{u}_u + \boldsymbol{K}_{cc}\boldsymbol{u}_c - \boldsymbol{f}_c = \boldsymbol{0}。 \end{aligned} \tag{1.37}$$

分号符号用于区分方程组中的主要变量（未知数）（分号左侧）和*数据*或已知量。

1.6. 全球系统的解决方案

最后，桁架问题的解决简化为（1.37）中方程组的解决。由于方程是线性的，未知节点位移被定义为

$$\boldsymbol{u}_u = \boldsymbol{K}_{uu}^{-1}(\boldsymbol{f}_u - \boldsymbol{K}_{uc}\boldsymbol{u}_c). \tag{1.38}$$

这个解决方案与$\boldsymbol{u}_c$ 中规定的位移相结合，就得到了整个桁架结构的位移，并完成了分析。根据这些信息，可以计算出力、应力、应变或任何其他感兴趣的量。如果需要反作用力，将$\boldsymbol{u}_u$代入（1.37）中的$\boldsymbol{R}_c$，得到

$$\boldsymbol{f}_c = \boldsymbol{K}_{cu}\boldsymbol{K}_{uu}^{-1}(\boldsymbol{f}_u - \boldsymbol{K}_{uc}\boldsymbol{u}_c) + \boldsymbol{K}_{cc}\boldsymbol{u}_c 。 \tag{1.39}$$

这种对（1.20）中的全局系统施加边界条件并依次求解（1.38）和（1.39）中的结果系统的过程被称为*静态凝结*。

作为最后的说明，读者应始终将$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$解释为线性系统$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的解。而不是对矩阵$\boldsymbol{A}$*进行*显式反转，后者不稳定，耗费时间和资源，而且会破坏

稀疏性。直接求解器（如LU因子化）或迭代求解器（如共轭梯度）都可以用来解决DSM（或FEM）中出现的线性系统。在这门课上，我们将使用MATLAB的 反斜线函数，它使用的是直接方法。

1.7. 与有限元方法的联系

如第1.1节所述，直接强度法是将有限元方法应用于由物理规律导出的自然离散系统。因此，DSM和FEM有许多共同的特点，如从元素贡献中装配全局方程，根据网格的连通性执行兼容性，通过静态凝结应用Dirichlet边界条件，并使用直接或迭代求解器解决所产生的方程组。通过从直接静态方法开始，我们能够避免偏微分方程的复杂化，以及在引入上述有限元的关键步骤的同时将其重新表述为弱形式。正如我们将看到的，将有限元法应用于偏微分方程将简单地导致我们产生不同的元素方程，但其余步骤（装配、兼容、边界条件、求解）将是相同的。

1.8. 摘要

我们总结一下本章的关键点。

1) 直接硬度法被介绍为类似于有限元法的方法，适用于自然离散问题，如桁架结构的变形。

2) DSM包含许多与FEM相同的成分：元素对全局系统的贡献、兼容性、全局系统的组装、基本边界条件的执行。

3) 桁架元素的元素贡献是通过转换到与每个元素对齐的本地坐标系而得出的。

4) 通过引入全局自由度并要求所有重合的局部自由度相等来强制执行连接元素的位移之间的兼容性。

5) 每个节点的平衡被用来推导出一个结合所有元素贡献的全局系统。

6) 位移边界条件是通过将自由度划分为受限和非受限，并使用静态冷凝法推导出非受限自由度的管理方程来实施的。

7) 引入了节点、连通性和局部到整体自由度映射的概念，并用于推导出以元素 sti↵ness 矩阵为基础的集合 sti↵ness 矩阵的条目的明确表达。