1976 年以前，所有的加密方法都是同一种模式：

（1）甲方选择某一种加密规则，对信息进行加密；

（2）乙方使用同一种规则，对信息进行解密。

由于加密和解密使用同样规则（简称"密钥"），这被称为"对称加密算法"（Symmetric-key algorithm）。

这种加密模式有一个最大弱点：甲方必须把加密规则告诉乙方，否则无法解密。保存和传递密钥，就成了最头疼的问题。

1976 年，两位美国计算机学家Whitfield Diffie 和 Martin Hellman，提出了一种崭新构思，可以在不直接传递密钥的情况下，完成解密。这被称为"Diffie-Hellman密钥交换算法"。这个算法启发了其他科学家。人们认识到，加密和解密可以使用不同的规则，只要这两种规则之间存在某种对应关系即可，这样就避免了直接传递密钥。

这种新的加密模式被称为"非对称加密算法"。

（1）乙方生成两把密钥（公钥和私钥）。公钥是公开的，任何人都可以获得，私钥则是保密的。

（2）甲方获取乙方的公钥，然后用它对信息加密。

（3）乙方得到加密后的信息，用私钥解密。

如果公钥加密的信息只有私钥解得开，那么只要私钥不泄漏，通信就是安全的。

1977 年，三位数学家Rivest、Shamir 和 Adleman 设计了一种算法，可以实现非对称加密。这种算法用他们三个人的名字命名，叫做RSA算法。从那时直到现在，RSA算法一直是最广为使用的"非对称加密算法"。毫不夸张地说，只要有计算机网络的地方，就有RSA算法。

这种算法非常可靠，密钥越长，它就越难破解。根据已经披露的文献，目前被破解的最长 RSA 密钥是 768 个二进制位。也就是说，长度超过 768 位的密钥，还无法破解（至少没人公开宣布）。因此可以认为，1024 位的 RSA 密钥基本安全，2048 位的密钥极其安全。

下面进入正题，解释 RSA 算法的原理。先介绍要用到的四个数学概念，你可以看到，RSA 算法并不难，只需要一点数论知识就可以理解。

一、互质关系

如果两个正整数，除了 1 以外，没有其他公因子，我们就称这两个数是互质关系（coprime）。比如，15 和 32 没有公因子，所以它们是互质关系。这说明，不是质数也可以构成互质关系。

关于互质关系，不难得到以下结论：

1. 任意两个质数构成互质关系，比如 13 和 61。

2. 一个数是质数，另一个数只要不是前者的倍数，两者就构成互质关系，比如 3 和 10。

3. 如果两个数之中，较大的那个数是质数，则两者构成互质关系，比如 97 和 57。

4. 1 和任意一个自然数是都是互质关系，比如 1 和 99。

5. p 是大于 1 的整数，则 p 和 p-1 构成互质关系，比如 57 和 56。

6. p 是大于 1 的奇数，则 p 和 p-2 构成互质关系，比如 17 和 15。

二、欧拉函数

请思考以下问题：

任意给定正整数 n，请问在小于等于 n 的正整数之中，有多少个与 n 构成互质关系？（比如，在 1 到 8 之中，有多少个数与 8 构成互质关系？）

计算这个值的方法就叫做欧拉函数，以φ(n)表示。在 1 到 8 之中，与 8 形成互质关系的是 1、3、5、7，所以 φ(n) = 4。

φ(n) 的计算方法并不复杂，但是为了得到最后那个公式，需要一步步讨论。

第一种情况

如果 n=1，则 φ(1) = 1 。因为 1 与任何数（包括自身）都构成互质关系。

第二种情况

如果 n 是质数，则 φ(n)=n-1 。因为质数与小于它的每一个数，都构成互质关系。比如 5 与 1、2、3、4 都构成互质关系。

第三种情况

如果 n 是质数的某一个次方，即 n = p^k (p 为质数，k 为大于等于 1 的整数)，则

$$\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$$

比如 φ(8) = φ(2^3) =2^3 - 2^2 = 8 -4 = 4。

这是因为只有当一个数不包含质数 p，才可能与 n 互质。而包含质数 p 的数一共有 p^(k-1) 个，即 1×p、2×p、3×p、...、p^(k-1)×p，把它们去除，剩下的就是与 n 互质的数。

上面的式子还可以写成下面的形式：

$$\phi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k(1 - \frac{1}{p})$$

可以看出，上面的第二种情况是 k=1 时的特例。

第四种情况

如果 n 可以分解成两个互质的整数之积，

$$n = p1 \times p2$$

则

$$\varphi(n) = \varphi(p1p2) = \varphi(p1)\varphi(p2)$$

即积的欧拉函数等于各个因子的欧拉函数之积。比如，$\varphi(56)=\varphi(8\times7)=\varphi(8)\times\varphi(7)=4\times6=24$。

这一条的证明要用到"中国剩余定理"，　这里就不展开了，只简单说一下思路：如果a与p1互质(a<p1)，b与p2 互质(b<p2)，c与p1p2 互质(c<p1p2)，则 c与数对 (a,b) 是一一对应关系。由于a的值有φ(p1)种可能，b的值有φ(p2)种可能，则数对 (a,b) 有φ(p1)φ(p2)种可能，而c的值有φ(p1p2)种可能，所以φ(p1p2)就等于φ(p1)φ(p2)。

第五种情况

因为任意一个大于 1 的正整数，都可以写成一系列质数的积。

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$$

根据第 4 条的结论，得到

$$\phi(n) = \phi(p_1^{k_1})\phi(p_2^{k_2})\dots\phi(p_r^{k_r})$$

再根据第 3 条的结论，得到

$$\phi(n) = n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\dots(1-\frac{1}{p_r})$$

这就是欧拉函数的通用计算公式。比如，1323 的欧拉函数，计算过程如下：

$$\phi(1323) = \phi(3^3 \times 7^2) = 1323(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{7}) = 756$$

三、欧拉定理

欧拉函数的用处，在于欧拉定理。"欧拉定理"指的是：

如果两个正整数 a 和 n 互质，则 n 的欧拉函数 φ(n) 可以让下面的等式成立：

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 (mod\ n)$$

也就是说，a 的 φ(n)次方被 n 除的余数为 1。或者说，a 的 φ(n)次方减去 1，可以被 n 整除。比如，3 和 7 互质，而 7 的欧拉函数 φ(7)等于 6，所以 3 的 6 次方（729）减去 1，可以被 7 整除（728/7=104）。

欧拉定理的证明比较复杂，这里就省略了。我们只要记住它的结论就行了。

欧拉定理可以大大简化某些运算。比如，7 和 10 互质，根据欧拉定理，

$$7^{\phi(10)} \equiv 1\,(mod\,10)$$

已知 φ(10) 等于 4，所以马上得到 7 的 4 倍数次方的个位数肯定是 1。

$$7^{4k} \equiv 1\,(mod\,10)$$

因此，7 的任意次方的个位数（例如 7 的 222 次方），心算就可以算出来。

欧拉定理有一个特殊情况。

假设正整数 a 与质数 p 互质，因为质数 p 的 φ(p)等于 p-1，则欧拉定理可以写成

$$a^{p-1} \equiv 1\,(mod\;p)$$

这就是著名的费马小定理。它是欧拉定理的特例。

欧拉定理是 RSA 算法的核心。理解了这个定理，就可以理解 RSA。

四、模反元素

还剩下最后一个概念：

如果两个正整数 a 和 n 互质，那么一定可以找到整数 b，使得 ab-1 被 n 整除，或者说 ab 被 n 除的余数是 1。

$$ab \equiv 1\,(mod\;n)$$

这时，b就叫做a的"模反元素"。

比如，3 和 11 互质，那么 3 的模反元素就是 4，因为 (3 × 4)-1 可以被 11 整除。显然，模反元素不止一个， 4 加减 11 的整数倍都是 3 的模反元素 {...,-18,-7,4,15,26,...}，即如果 b 是 a 的模反元素，则 b+kn 都是 a 的模反元素。

欧拉定理可以用来证明模反元素必然存在。

$$a^{\phi(n)} = a \times a^{\phi(n)-1} \equiv 1\,(mod\;n)$$

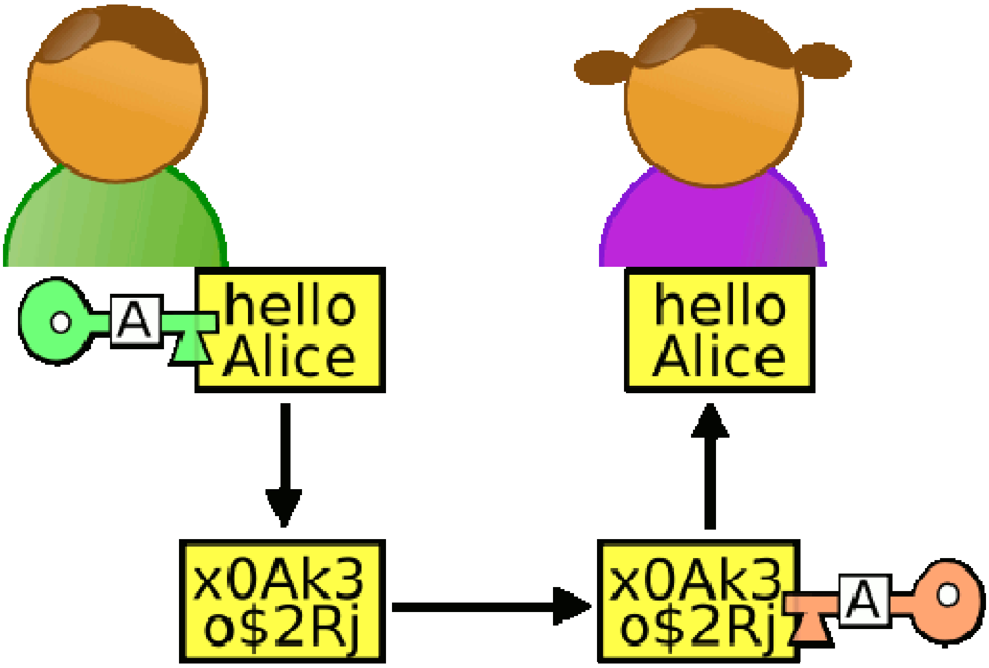
可以看到，a 的 φ(n)-1 次方，就是 a 的模反元素。

RSA 算法涉及的数学知识，就是上面这些，下来介绍公钥和私钥到底是怎么生成的。

==

五、密钥生成的步骤

我们通过一个例子，来理解RSA算法。假设爱丽丝要与鲍勃进行加密通信，她该怎么生成公钥和私钥呢？



第一步，随机选择两个不相等的质数 p 和 q。

爱丽丝选择了 61 和 53。（实际应用中，这两个质数越大，就越难破解。）

第二步，计算 p 和 q 的乘积 n。

爱丽丝就把 61 和 53 相乘。

$$n = 61 \times 53 = 3233$$

n 的长度就是密钥长度。3233 写成二进制是 110010100001，一共有 12 位，所以这个密钥就是 12 位。实际应用中，RSA 密钥一般是 1024 位，重要场合则为 2048 位。

第三步，计算 n 的欧拉函数 φ(n)。

根据公式：

$$\varphi(n) = (p-1)(q-1)$$

爱丽丝算出 φ(3233)等于 60×52，即 3120。

第四步，随机选择一个整数 e，条件是 $1< e < \varphi(n)$，且 e 与 φ(n) 互质。

爱丽丝就在 1 到 3120 之间，随机选择了 17。

第五步，计算 e 对于 φ(n)的模反元素 d。

所谓"模反元素"就是指有一个整数d，可以使得ed被φ(n)除的余数为 1。

$$ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$$

这个式子等价于

$$ed - 1 = k\varphi(n)$$

于是，找到模反元素 d，实质上就是对下面这个二元一次方程求解。

$ex + \varphi(n)y = 1$

已知 e=17, φ(n)=3120，

$17x + 3120y = 1$

这个方程可以用"扩展欧几里得算法"求解，此处省略具体过程。总之，爱丽丝算出一组整数解为 (x,y)=(2753,-15)，即 d=2753。

至此所有计算完成。

第六步，将 n 和 e 封装成公钥，n 和 d 封装成私钥。

在爱丽丝的例子中，n=3233，e=17，d=2753，所以公钥就是 (3233,17)，私钥就是（3233, 2753）。

实际应用中，公钥和私钥的数据都采用ASN.1格式表达（实例）。

六、RSA 算法的可靠性

回顾上面的密钥生成步骤，一共出现六个数字：

p

q

n

φ(n)

e

d

这六个数字之中，公钥用到了两个（n 和 e），其余四个数字都是不公开的。其中最关键的是 d，因为 n 和 d 组成了私钥，一旦 d 泄漏，就等于私钥泄漏。

那么，有无可能在已知 n 和 e 的情况下，推导出 d？

（1）$ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$。只有知道 e 和 φ(n)，才能算出 d。

（2）$\varphi(n)=(p-1)(q-1)$。只有知道 p 和 q，才能算出 φ(n)。

（3）n=pq。只有将 n 因数分解，才能算出 p 和 q。

结论：如果 n 可以被因数分解，d 就可以算出，也就意味着私钥被破解。

可是，大整数的因数分解，是一件非常困难的事情。目前，除了暴力破解，还没有发现别的有效方法。维基百科这样写道：

"对极大整数做因数分解的难度决定了 RSA 算法的可靠性。换言之，对一极大整数做因数分解愈困难，RSA 算法愈可靠。

假如有人找到一种快速因数分解的算法，那么 RSA 的可靠性就会极度下降。但找到这

样的算法的可能性是非常小的。今天只有短的 RSA 密钥才可能被暴力破解。到 2008 年为止，世界上还没有任何可靠的攻击 RSA 算法的方式。

只要密钥长度足够长，用 RSA 加密的信息实际上是不能被解破的。"

举例来说，你可以对 3233 进行因数分解（61×53），但是你没法对下面这个整数进行因数分解。

12301866845301177551304949

58384962720772853569595334

79219732245215172640050726

36575187452021997864693899

56474942774063845925192557

32630345373154826850791702

61221429134616704292143116

02221240479274737794080665

351419597459856902143413

它等于这样两个质数的乘积：

33478071698956898786044169

84821269081770479498371376

85689124313889828837938780

02287614711652531743087737

814467999489

×

36746043666799590428244633

79962795263227915816434308

76426760322838157396665112

79233373417143396810270092

798736308917

事实上，这大概是人类已经分解的最大整数（232 个十进制位，768 个二进制位）。比它更大的因数分解，还没有被报道过，因此目前被破解的最长 RSA 密钥就是 768 位。

七、加密和解密

有了公钥和密钥，就能进行加密和解密了。

（1）加密要用公钥 (n,e)

假设鲍勃要向爱丽丝发送加密信息 m，他就要用爱丽丝的公钥 (n,e) 对 m 进行加密。这里需要注意，m 必须是整数（字符串可以取 ascii 值或 unicode 值），且 m 必须小于 n。

所谓"加密"，就是算出下式的 c：

$$m^e \equiv c \pmod{n}$$

爱丽丝的公钥是 (3233, 17)，鲍勃的 m 假设是 65，那么可以算出下面的等式：

$$65^{17} \equiv 2790 \pmod{3233}$$

于是，c 等于 2790，鲍勃就把 2790 发给了爱丽丝。

（2）解密要用私钥(n,d)

爱丽丝拿到鲍勃发来的 2790 以后，就用自己的私钥(3233, 2753) 进行解密。可以证明，下面的等式一定成立：

$$c^d \equiv m \pmod{n}$$

也就是说，c 的 d 次方除以 n 的余数为 m。现在，c 等于 2790，私钥是(3233, 2753)，那么，爱丽丝算出

$$2790^{2753} \equiv 65 \pmod{3233}$$

因此，爱丽丝知道了鲍勃加密前的原文就是 65。

至此，"加密--解密"的整个过程全部完成。

我们可以看到，如果不知道 d，就没有办法从 c 求出 m。而前面已经说过，要知道 d 就必须分解 n，这是极难做到的，所以 RSA 算法保证了通信安全。

你可能会问，公钥(n,e) 只能加密小于n的整数m，那么如果要加密大于n的整数，该怎么办？有两种解决方法：一种是把长信息分割成若干段短消息，每段分别加密；另一种是先选择一种"对称性加密算法"（比如DES），用这种算法的密钥加密信息，再用RSA公钥加密DES密钥。