

# Symulacyjna analiza własności rozkładów asymptotycznych i testowanie białoszumowości

Stanisław Olek

11 kwietnia 2025

## Spis treści

<b>1 Symulacyjna analiza własności rozkładów asymptotycznych</b>	<b>1</b>
1.1 Estymator wartości oczekiwanej $\mu$ . . . . .	1
1.1.1 Rozkład normalny . . . . .	2
1.1.2 Rozkład wykładniczy $Exp(1)$ . . . . .	7
1.1.3 Rozkład jednostajny $Unif[0, 1]$ . . . . .	12
1.2 Estymator funkcji autokowariancji $\gamma$ . . . . .	16
1.2.1 Rozkład normalny . . . . .	17
1.2.2 Rozkład wykładniczy $Exp(1)$ . . . . .	19
1.2.3 Rozkład jednostajny $Unif[0, 1]$ . . . . .	20
1.3 Weryfikacja hipotez statystycznych o rozkładzie asymptotycznym estymatorów . . . . .	21
<b>2 Testowanie białoszumowości</b>	<b>23</b>
2.1 Test graficzny . . . . .	23
2.2 Testy formalne . . . . .	25

## 1 Symulacyjna analiza własności rozkładów asymptotycznych

Przeprowadzimy symulacyjną analizę własności rozkładów asymptotycznych estymatorów dla szeregów czasowych typu biały szum. Analizowane będą następujące estymatory:

1. Estymator wartości oczekiwanej  $\mu$  - średnia próbkowa:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t \quad (1)$$

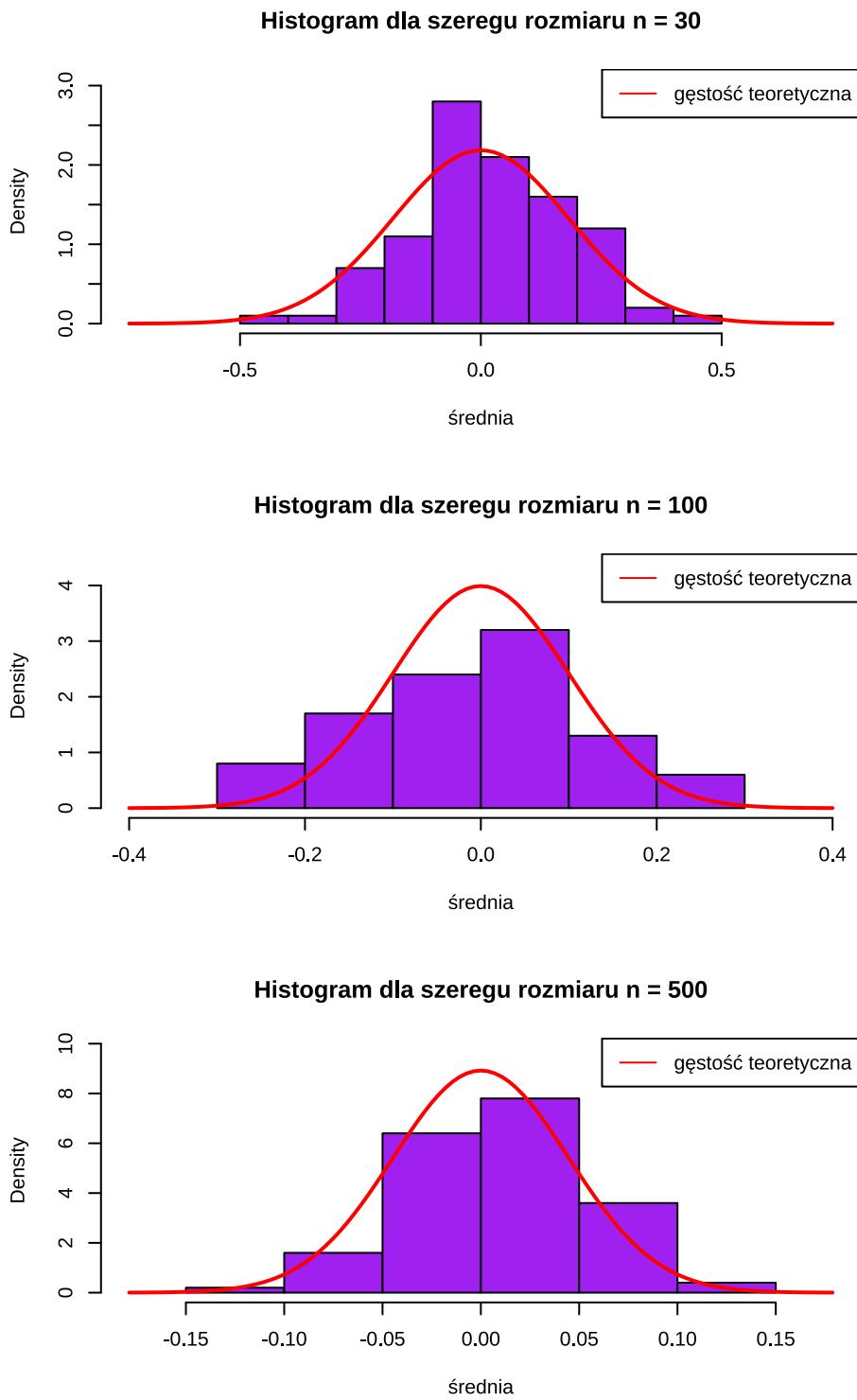
2. Estymator funkcji autokowariancji  $\gamma(h)$ :

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} (X_{t+h} - \bar{X}_n)(X_t - \bar{X}_n), \quad \text{dla } h = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2)$$

### 1.1 Estymator wartości oczekiwanej $\mu$

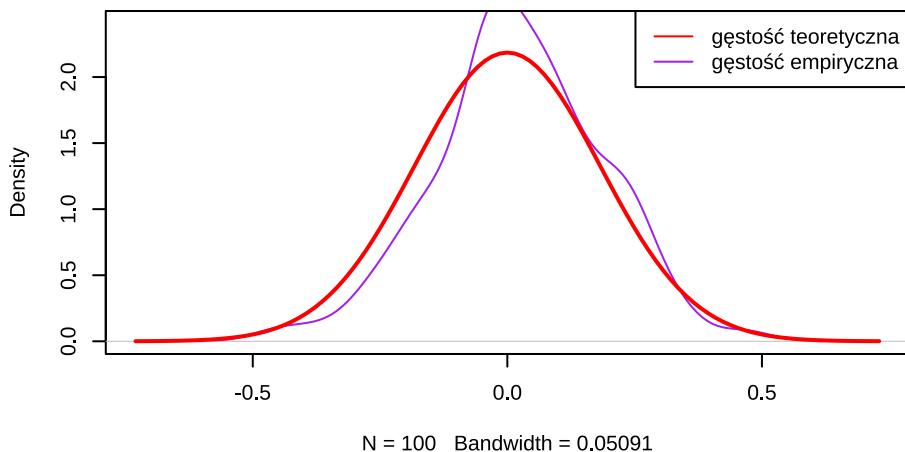
Najpierw zbadamy własności rozkładu estymatora wartości oczekiwanej  $\mu$  zdefiniowanego w równości (1), czyli średniej próbkowej, dla różnych rozkładów i różnych długości szeregów  $n$ . Analiza zostanie przeprowadzona dla trzech rozkładów: normalnego, wykładniczego oraz jednostajnego.

### 1.1.1 Rozkład normalny

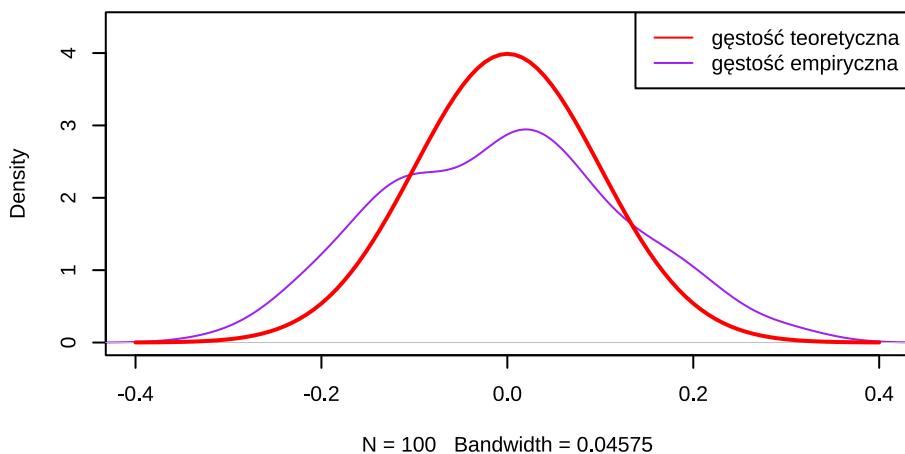


Rysunek 1: Histogramy dla estymatora średniej dla różnych długości szeregów  $n$  z rozkładu normalnego

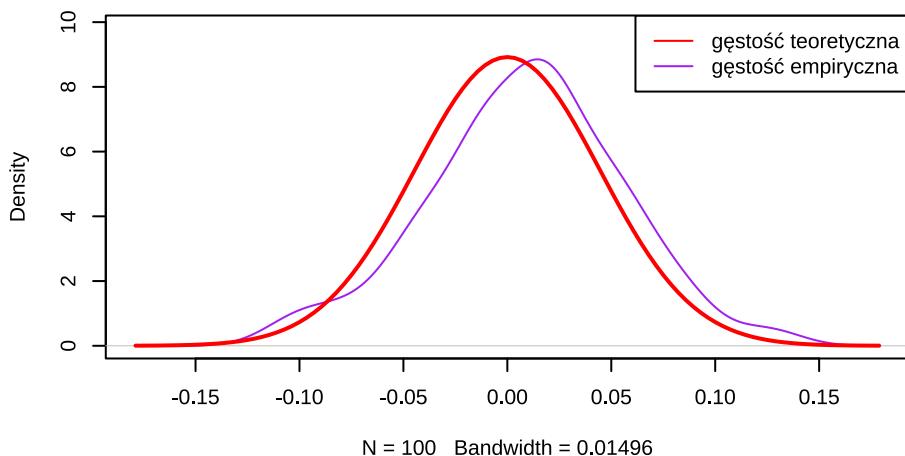
**Wykres gęstości dla szeregu rozmiaru  $n = 30$**



**Wykres gęstości dla szeregu rozmiaru  $n = 100$**

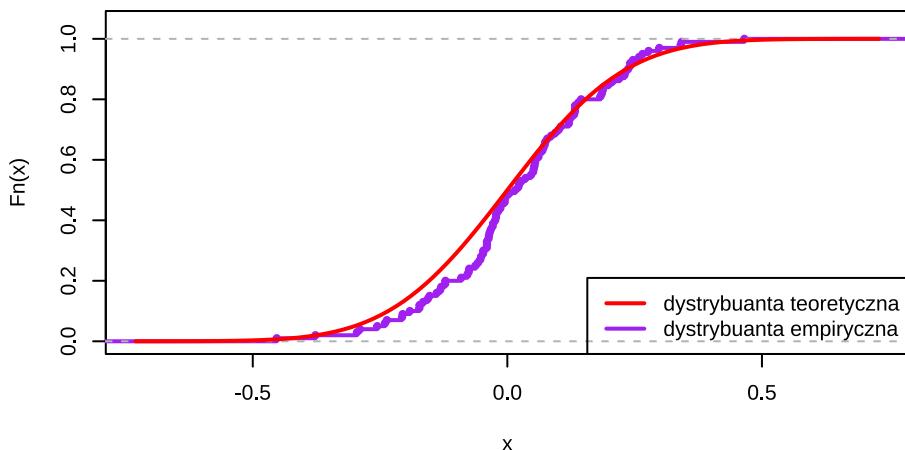


**Wykres gęstości dla szeregu rozmiaru  $n = 500$**

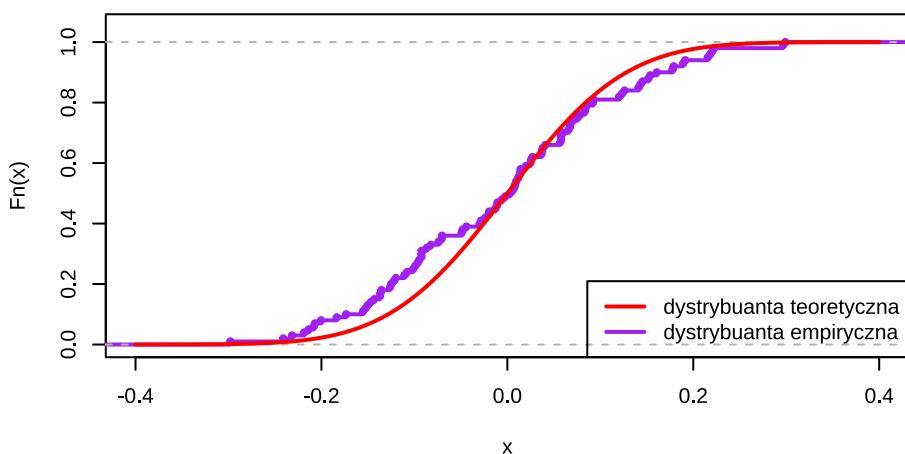


Rysunek 2: Wykresy gęstości dla estymatora średniej dla różnych długości szeregów  $n$  z rozkładu normalnego

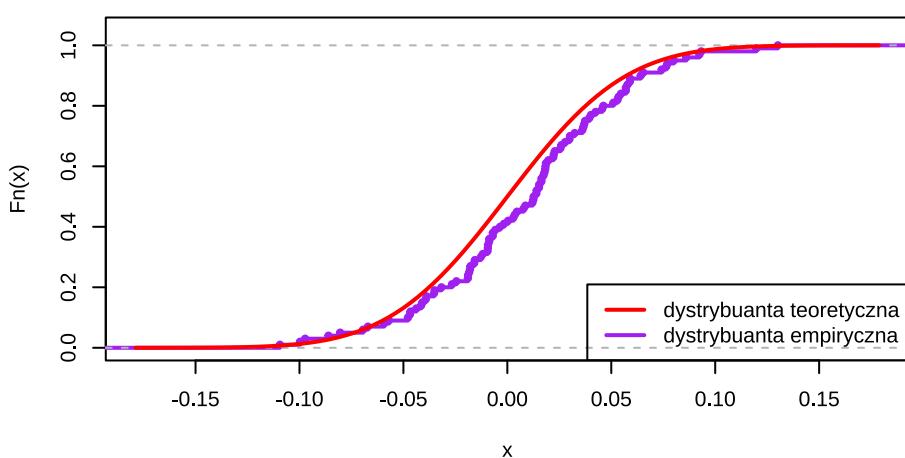
Dystrybuanta empiryczna dla szeregu rozmiaru  $n = 30$



Dystrybuanta empiryczna dla szeregu rozmiaru  $n = 100$

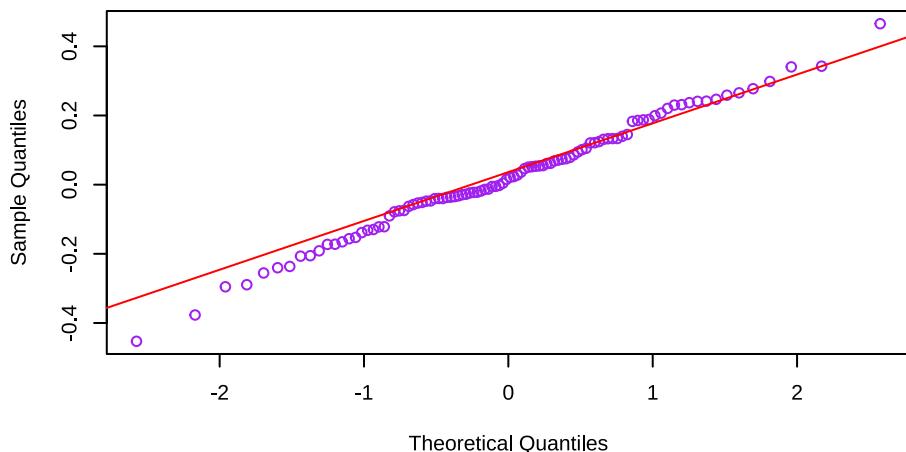


Dystrybuanta empiryczna dla szeregu rozmiaru  $n = 500$

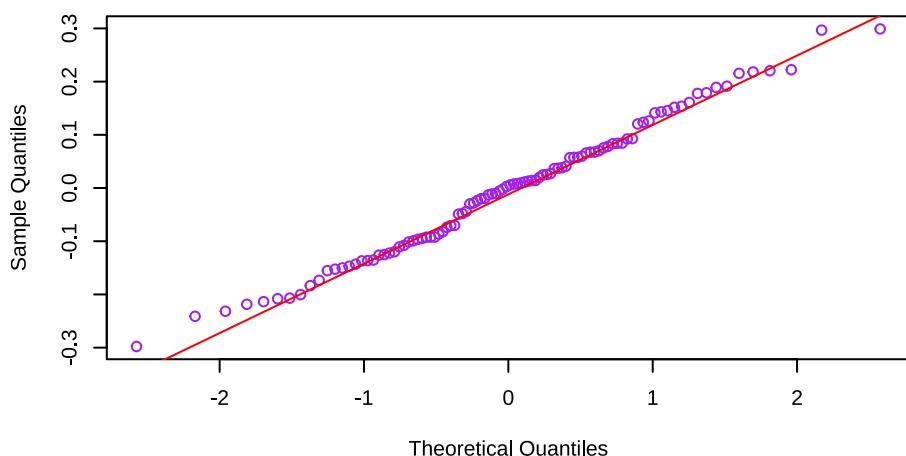


Rysunek 3: Dystrybuanty empiryczne dla estymatora średniej dla różnych długości szeregów  $n$  z rozkładu normalnego

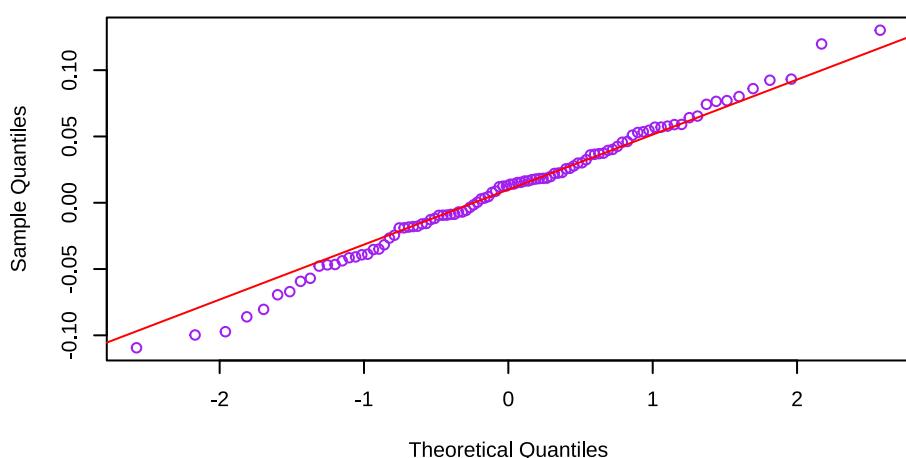
**Wykres kwantylowy dla rozkładu normalnego, n = 30**



**Wykres kwantylowy dla rozkładu normalnego, n = 100**



**Wykres kwantylowy dla rozkładu normalnego, n = 500**

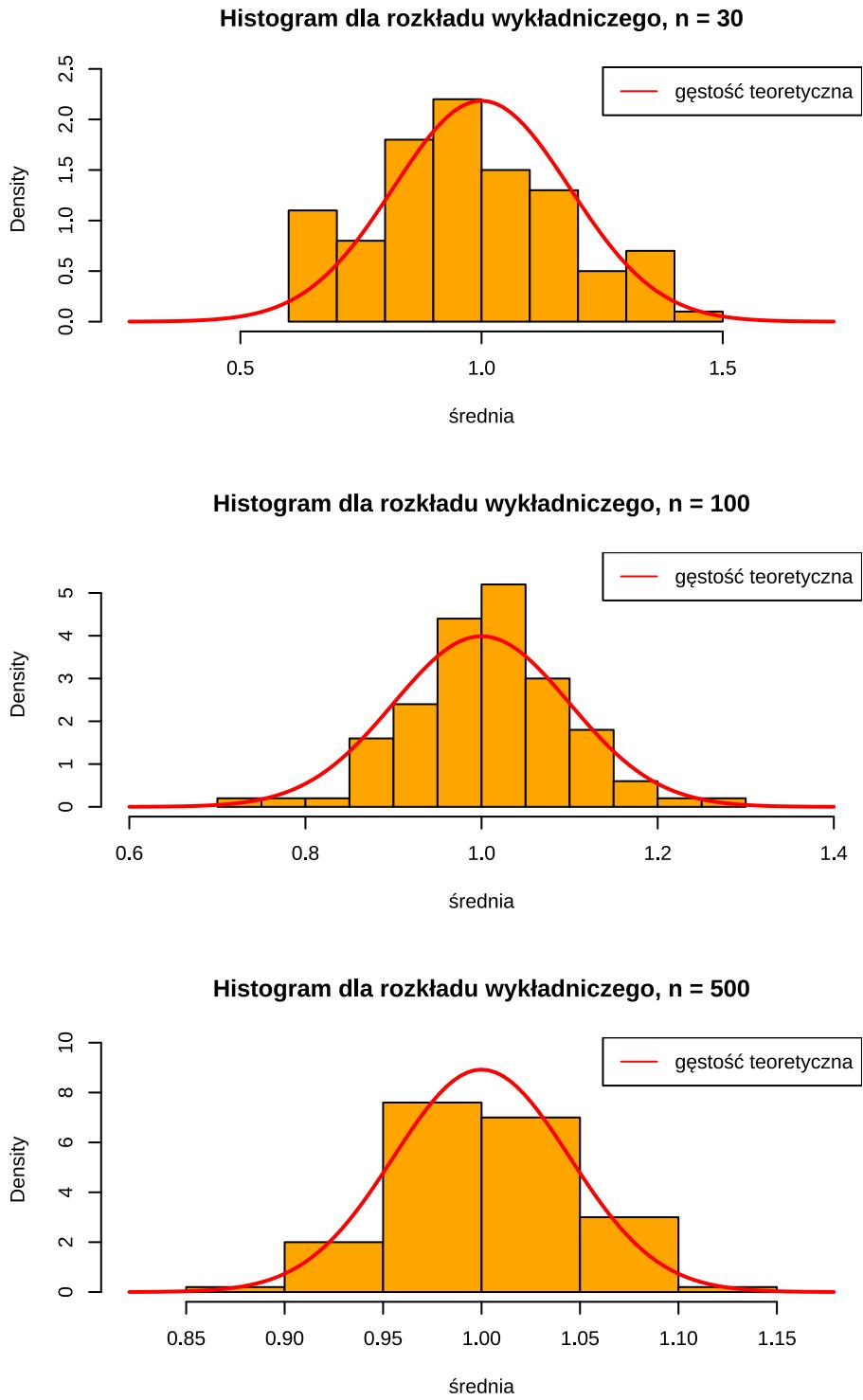


Rysunek 4: Wykresy kwantylowe dla estymatora średniej dla różnych długości szeregów  $n$  z rozkładu normalnego

Analiza estymatora średniej próbowej dla danych z rozkładu normalnego wykazała następujące własności:

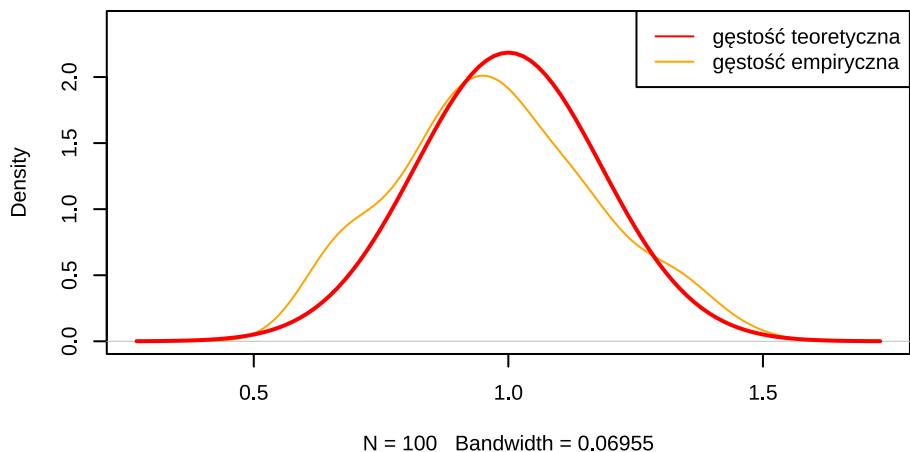
- Dla wszystkich analizowanych długości szeregów ( $n = 30, 100, 500$ ) rozkład empiryczny średniej próbkowej wykazał idealne dopasowanie do teoretycznego rozkładu normalnego, co potwierdzają:
  - Symetryczny kształt histogramów ze skupieniem wokół wartości 0 jak widać na [1]
  - Nakładanie się empirycznych i teoretycznych krzywych gęstości jak widać na [2]
  - Niemal całkowite pokrywanie się dystrybuant empirycznych z teoretyczną dystrybuantą normalną jak widać na [3]
  - Punkty na wykresach kwantylowych układają się wzduż linii teoretycznej jak widać na [4]
- Nawet dla małych prób ( $n = 30$ ) brak obserwowalnych odchyleń od normalności

### 1.1.2 Rozkład wykładniczy $Exp(1)$

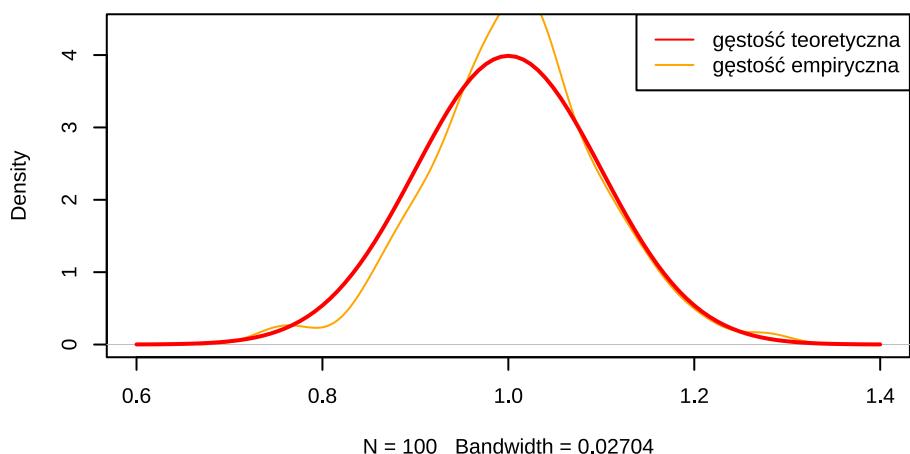


Rysunek 5: Histogramy dla estymatora średniej dla różnych długości szeregów  $n$  z rozkładu wykładniczego

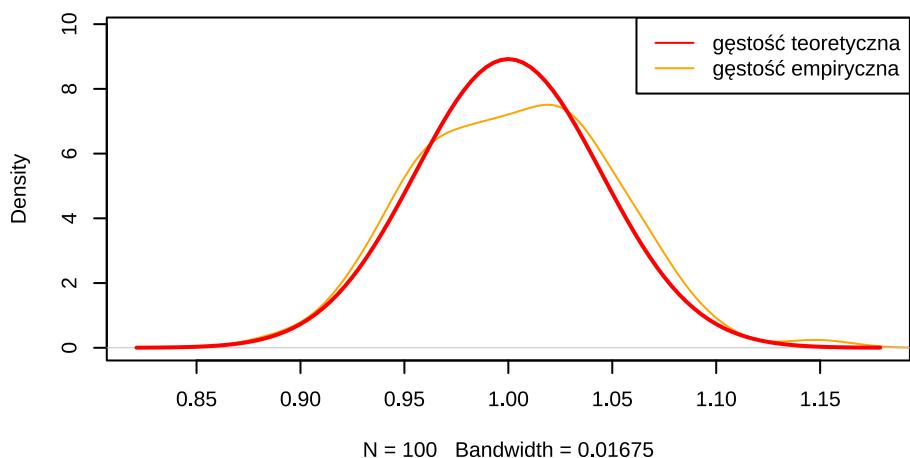
**Wykres gęstości dla rozkładu wykładniczego, n = 30**



**Wykres gęstości dla rozkładu wykładniczego, n = 100**

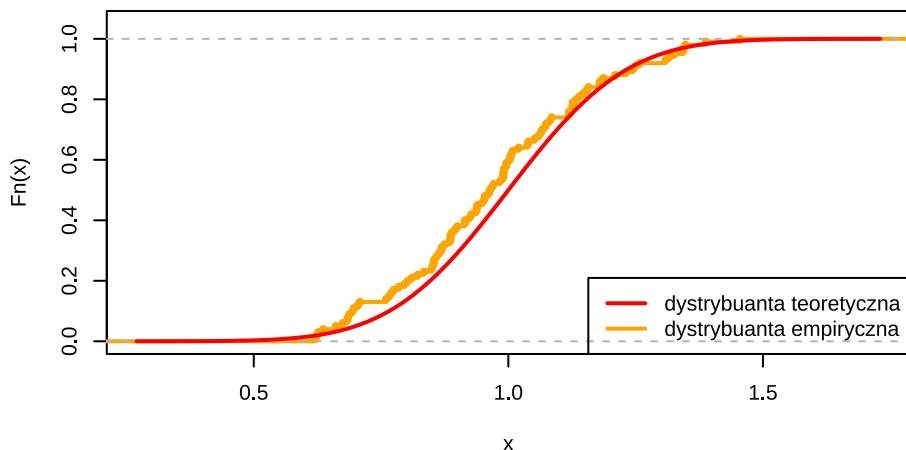


**Wykres gęstości dla rozkładu wykładniczego, n = 500**

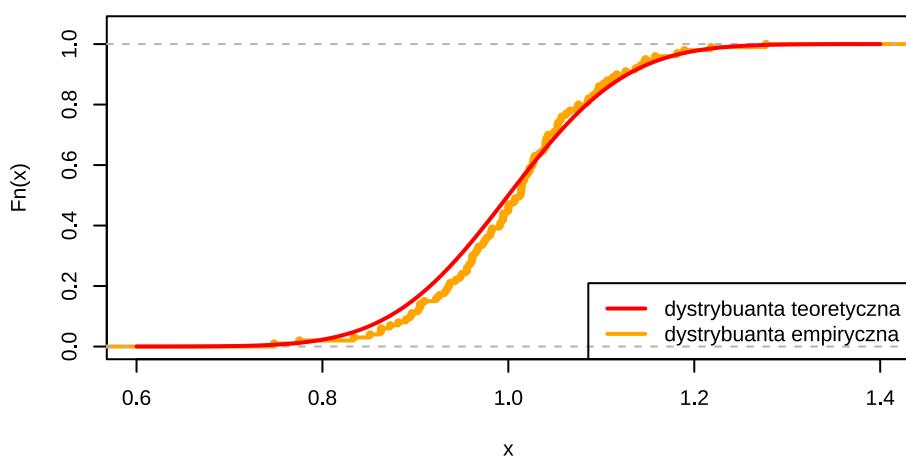


Rysunek 6: Wykresy gęstości dla estymatora średniej dla różnych długości szeregów  $n$  z rozkładu wykładniczego

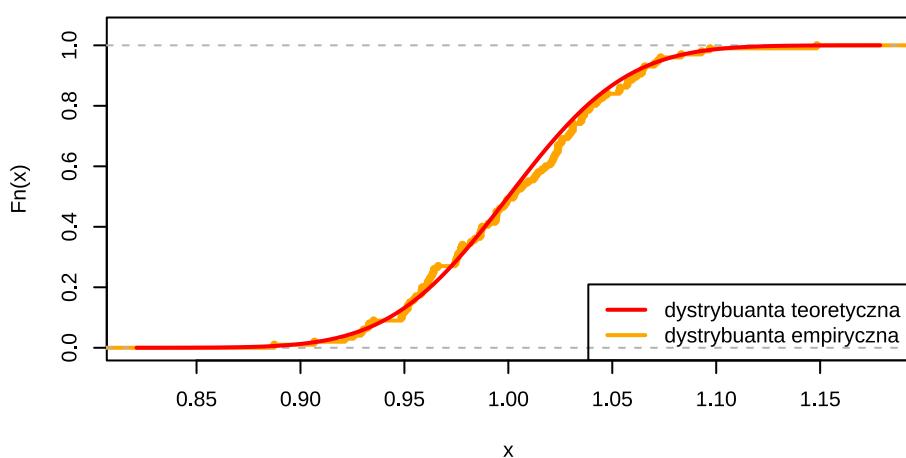
Dystrybuanta empiryczna dla rozkładu wykładniczego,  $n = 30$



Dystrybuanta empiryczna dla rozkładu wykładniczego,  $n = 100$

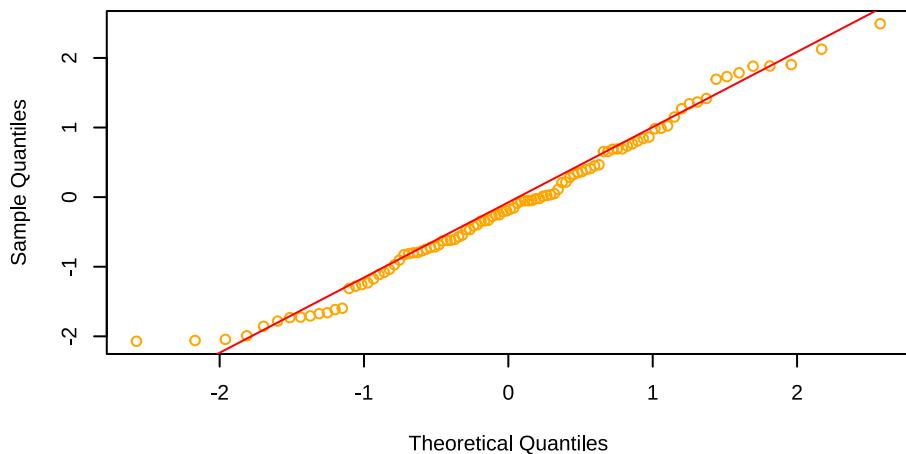


Dystrybuanta empiryczna dla rozkładu wykładniczego,  $n = 500$

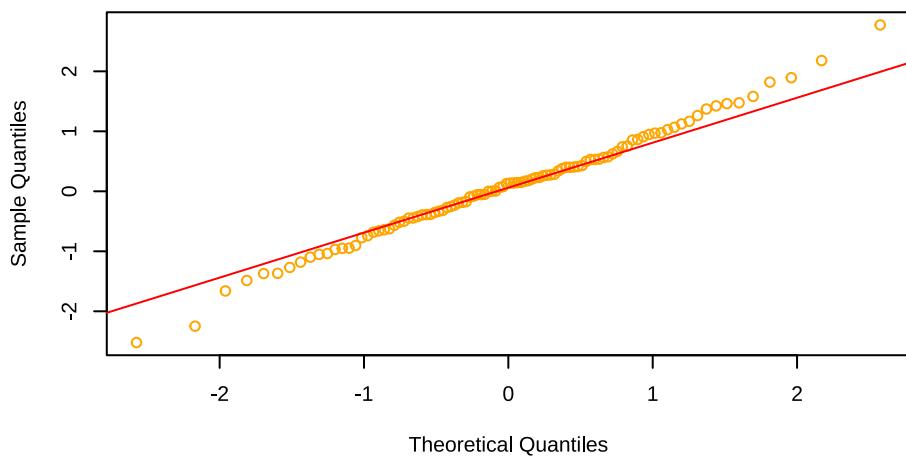


Rysunek 7: Dystrybuanty empiryczne dla estymatora średniej dla różnych długości szeregów  $n$  z rozkładu wykładniczego

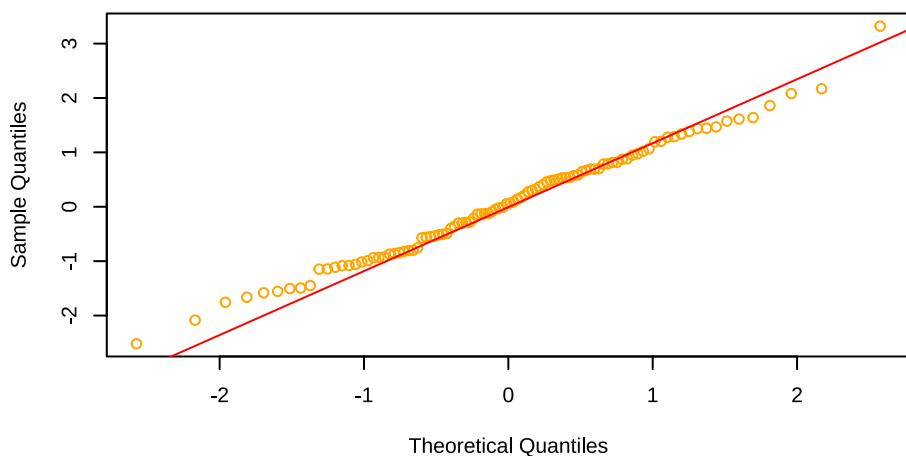
**Wykres kwantylowy dla rozkładu wykładniczego,  $n = 30$**



**Wykres kwantylowy dla rozkładu wykładniczego,  $n = 100$**



**Wykres kwantylowy dla rozkładu wykładniczego,  $n = 500$**



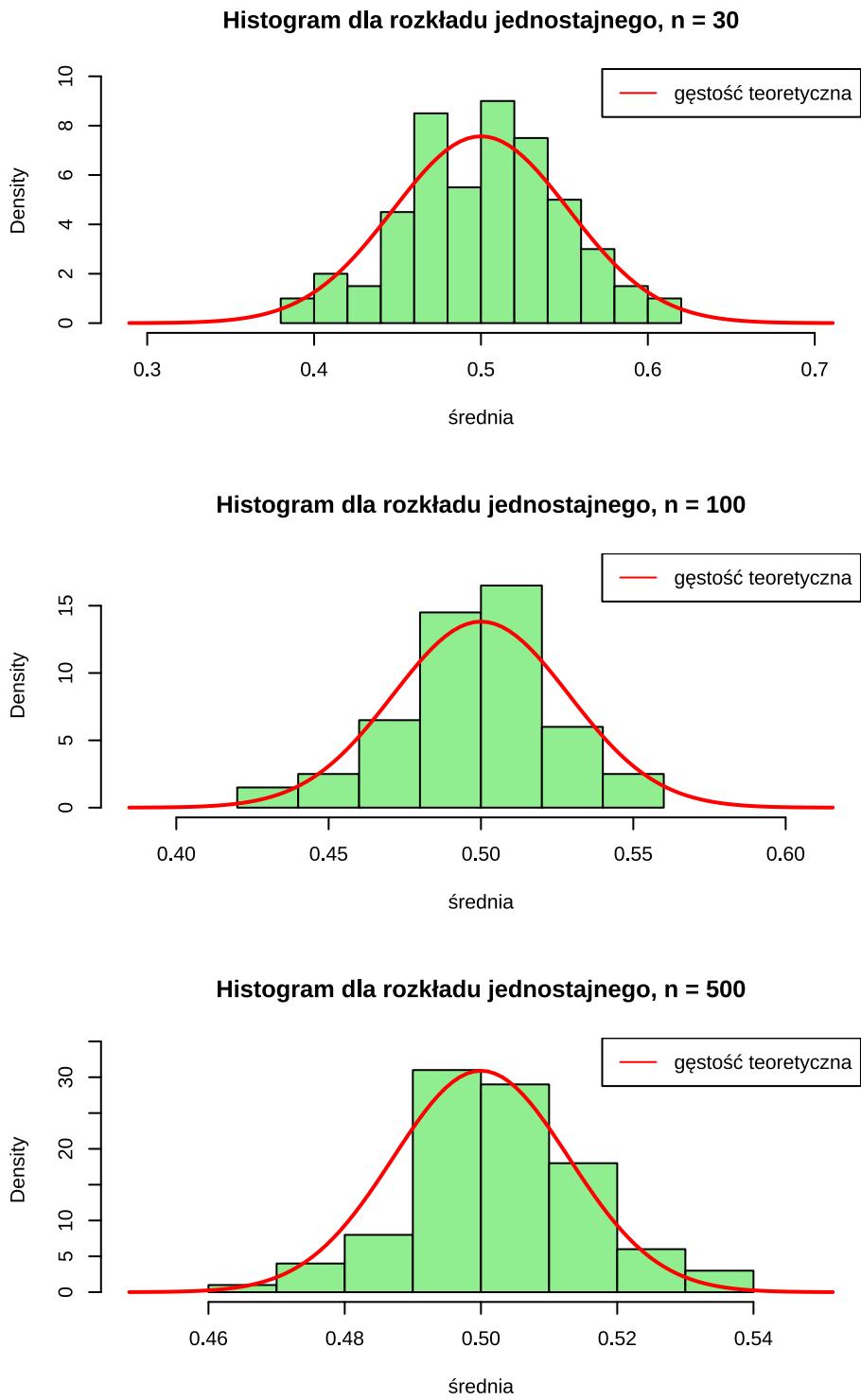
Rysunek 8: Wykresy kwantylowe dla estymatora średniej dla różnych długości szeregów  $n$  z rozkładu wykładniczego

Analiza wyników dla rozkładu wykładniczego pokazuje właściwości asymptotyczne estymatora średniej. Obserwujemy, że:

- Dla najmniejszej wielkości próby  $n = 30$  rozkład empiryczny estymatora wykazuje lekką asymetrię, co widać zarówno na histogramach [5] jak i wykresach gęstości [6]
- Wraz ze wzrostem rozmiaru próbki ( $n = 100$  i  $n = 500$ ) asymetria zanika, a rozkład empiryczny coraz lepiej przybliża rozkład normalny
- Dystrybuanty empiryczne [7] pokazują wyraźne zbliżanie się do dystrybuanty rozkładu normalnego  $N(1, 1/\sqrt{n})$  gdy  $n$  rośnie. Dla  $n = 500$  dopasowanie jest niemal idealne
- Wykresy kwantylowe [8] potwierdzają normalność rozkładu dla większych  $n$ , choć nawet przy  $n = 500$  można zauważać niewielkie odchylenia w ogonach rozkładu

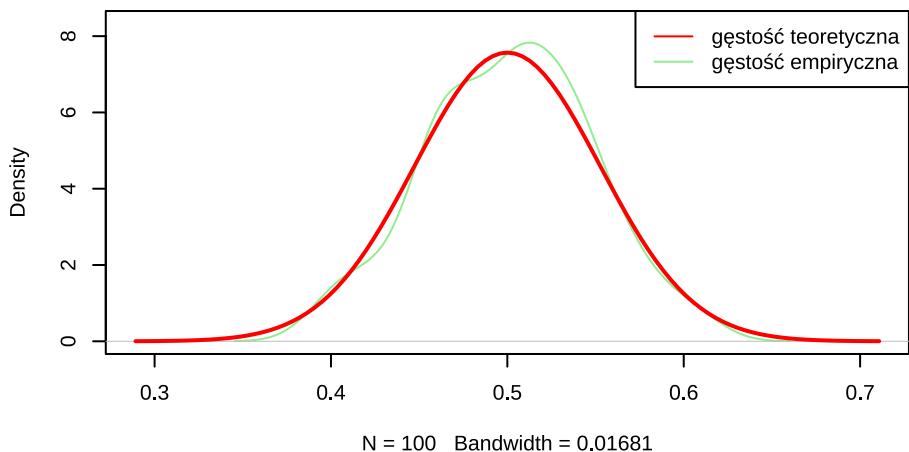
Obserwacje te potwierdzają teoretyczne przewidywania, według którego średnia próbkowa zmiennych niezależnych o rozkładzie wykładniczym będzie asymptotycznie zbiegać do rozkładu normalnego  $N(1, 1/\sqrt{n})$ , gdzie 1 jest wartością oczekiwana rozkładu wykładniczego  $Exp(1)$ .

### 1.1.3 Rozkład jednostajny $Unif[0, 1]$

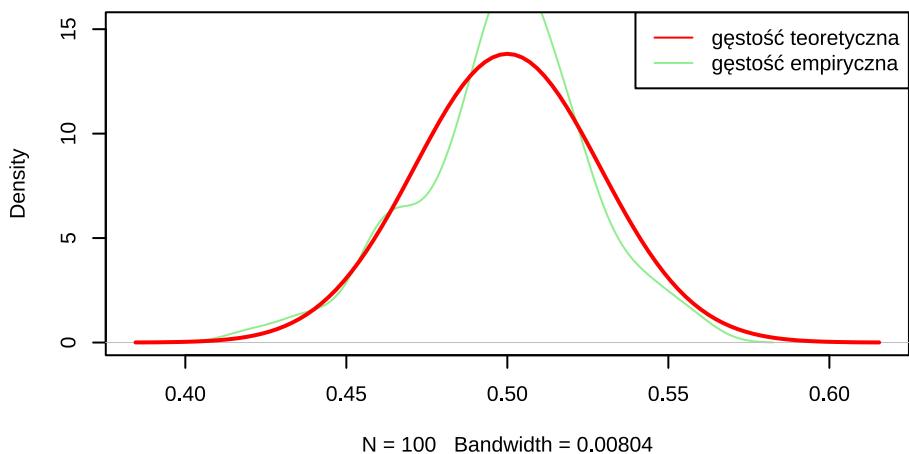


Rysunek 9: Histogramy dla estymatora średniej dla różnych długości szeregów  $n$  z rozkładu jednostajnego

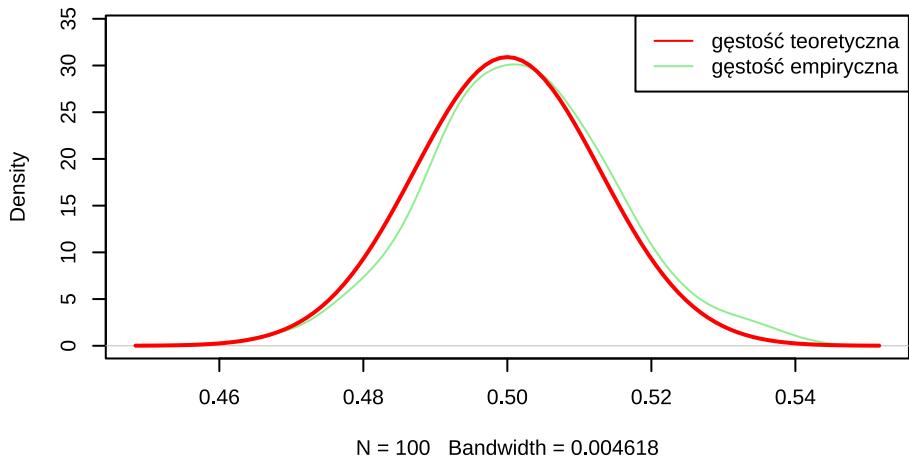
**Wykres gęstości dla rozkładu jednostajnego, n = 30**



**Wykres gęstości dla rozkładu jednostajnego, n = 100**

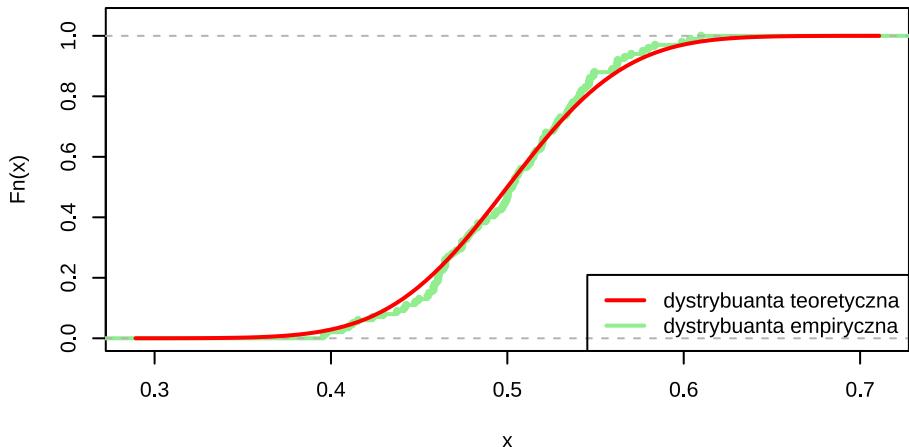


**Wykres gęstości dla rozkładu jednostajnego, n = 500**

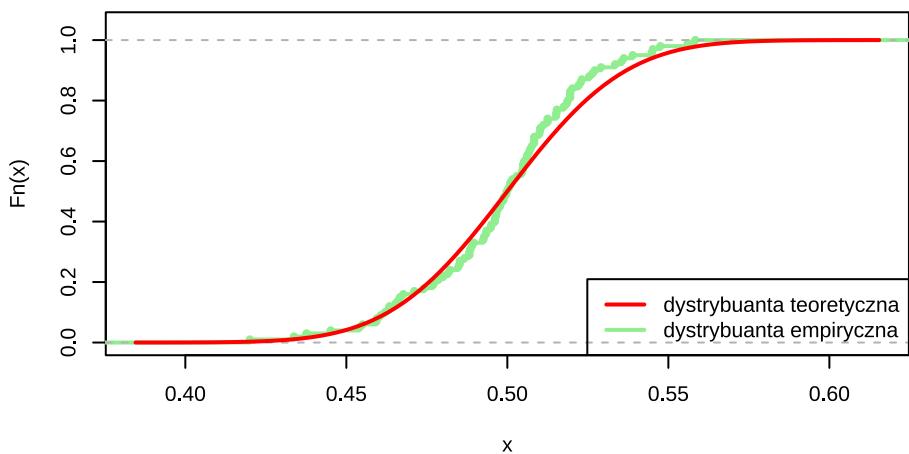


Rysunek 10: Wykresy gęstości dla estymatora średniej dla różnych długości szeregów  $n$  z rozkładu jednostajnego

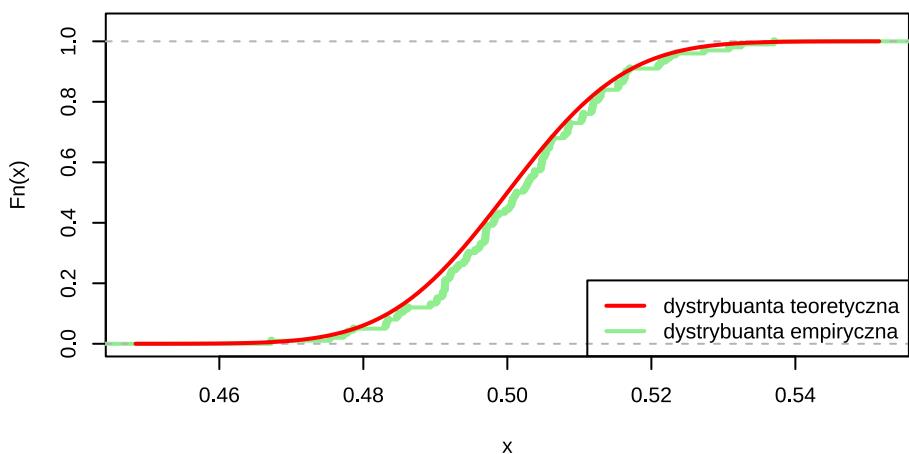
Dystrybuanta empiryczna dla rozkładu jednostajnego,  $n = 30$



Dystrybuanta empiryczna dla rozkładu jednostajnego,  $n = 100$

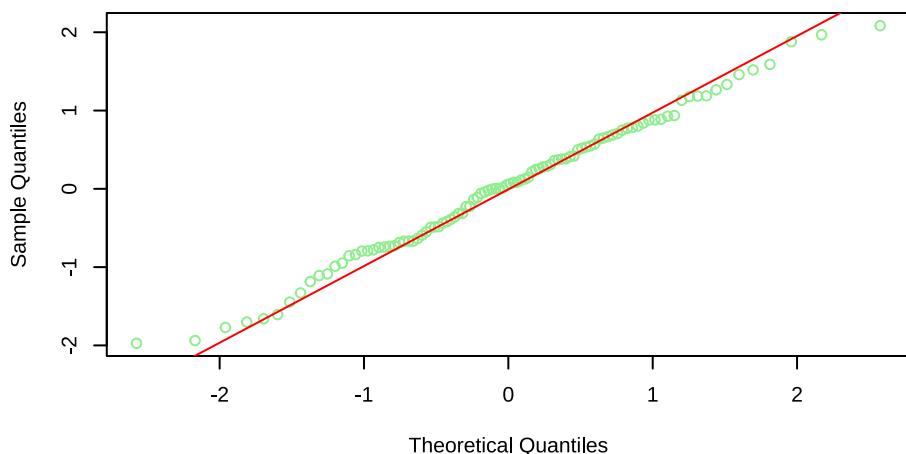


Dystrybuanta empiryczna dla rozkładu jednostajnego,  $n = 500$

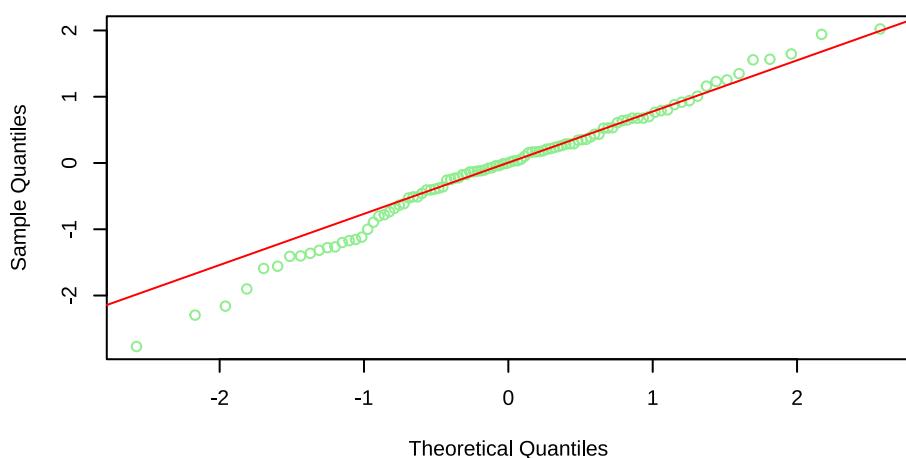


Rysunek 11: Dystrybuanty empiryczne dla estymatora średniej dla różnych długości szeregów  $n$  z rozkładu jednostajnego

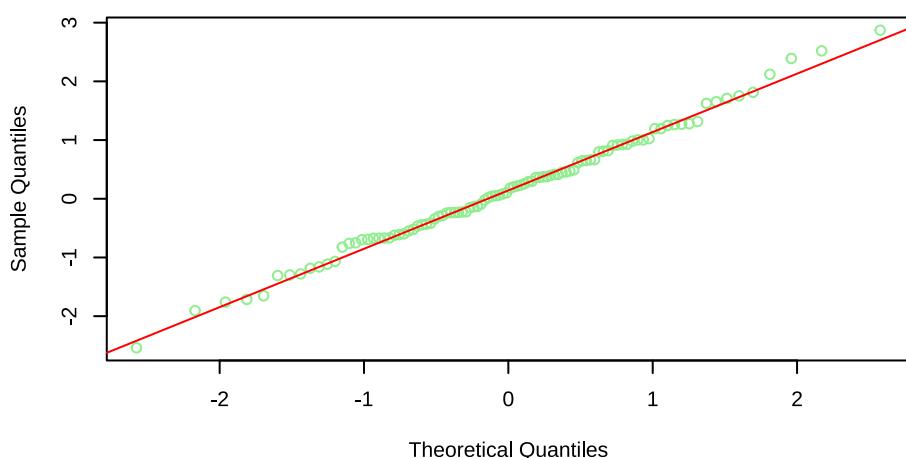
**Wykres kwantylowy dla rozkładu jednostajnego, n = 30**



**Wykres kwantylowy dla rozkładu jednostajnego, n = 100**



**Wykres kwantylowy dla rozkładu jednostajnego, n = 500**



Rysunek 12: Wykresy kwantylowe dla estymatora średniej dla różnych długości szeregów  $n$  z rozkładu jednostajnego

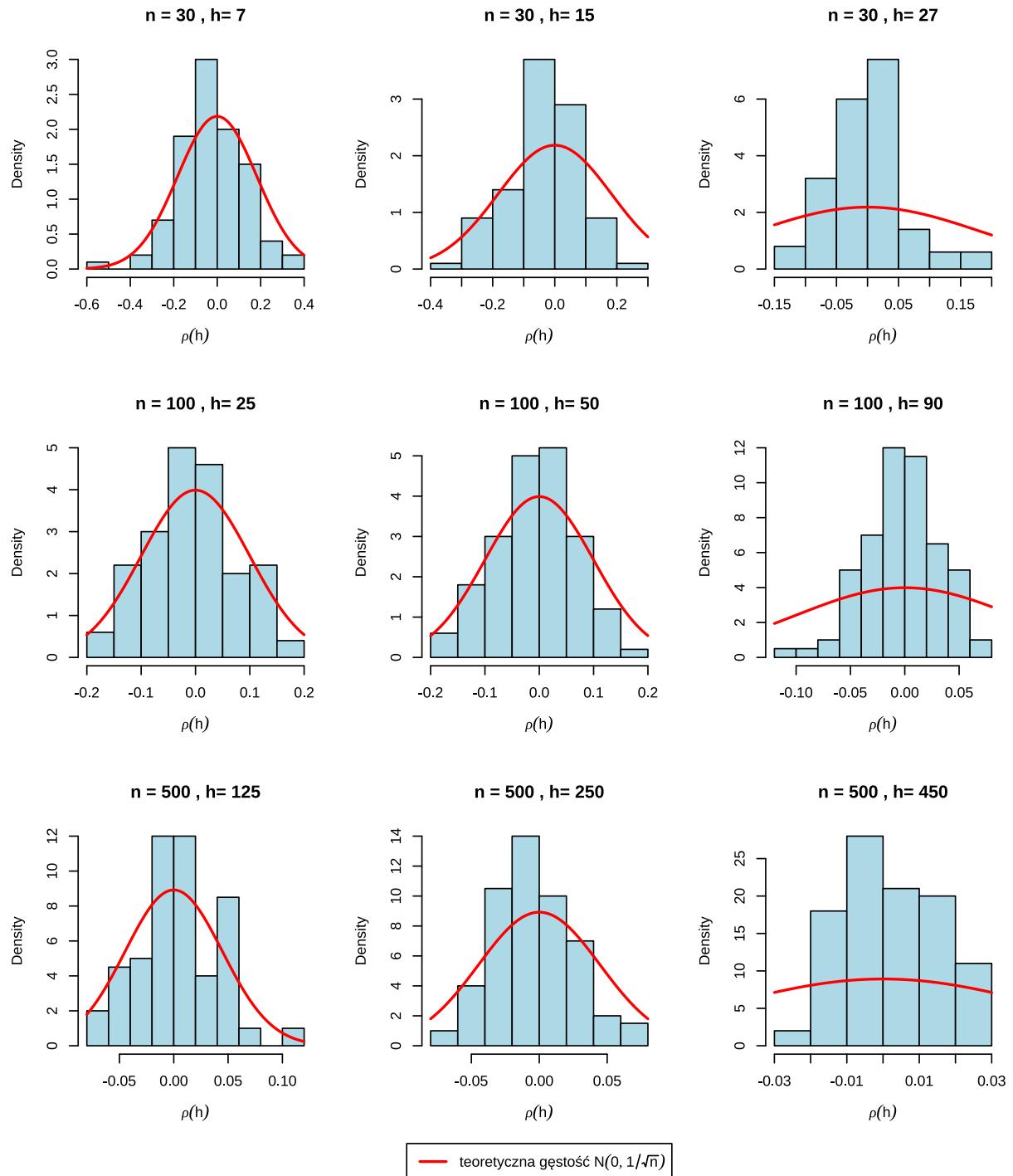
Na podstawie przeprowadzonej analizy estymatora średniej dla rozkładu jednostajnego  $Unif[0, 1]$  można sformułować następujące wnioski:

- Wyniki symulacji potwierdzają, że rozkład średniej próbowej z rozkładu jednostajnego dąży do rozkładu normalnego wraz ze wzrostem liczby obserwacji, jak widać na [9]
- Wraz ze wzrostem liczności próby  $n$  obserwujemy:
  - Bardziej symetryczny kształt histogramu i rozkładu gęstości wokół wartości oczekiwanej  $1/2$ , jak widać na [9]
  - Coraz lepsze dopasowanie empirycznego rozkładu do teoretycznego rozkładu normalnego, jak widać na wykresach gęstości [10]
  - Coraz lepsze dopasowanie do teoretycznej dystrybuanty rozkładu normalnego, jak widać na [11]
  - Punkty na wykresie kwantylowym układają się wzdłuż linii teoretycznej, co wskazuje na dobre dopasowanie do rozkładu normalnego, jak widać na [12]
- Nawet dla stosunkowo małych liczności próby (np.  $n = 30$ ), średnia próbowa wykazuje już znaczną zbieżność do rozkładu normalnego

## 1.2 Estymator funkcji autokowariancji $\gamma$

Przeprowadzimy analizę własności estymatora autokowariancji zdefiniowanego w równaniu (2) dla różnych rozkładów białego szumu i długości szeregów.

### 1.2.1 Rozkład normalny



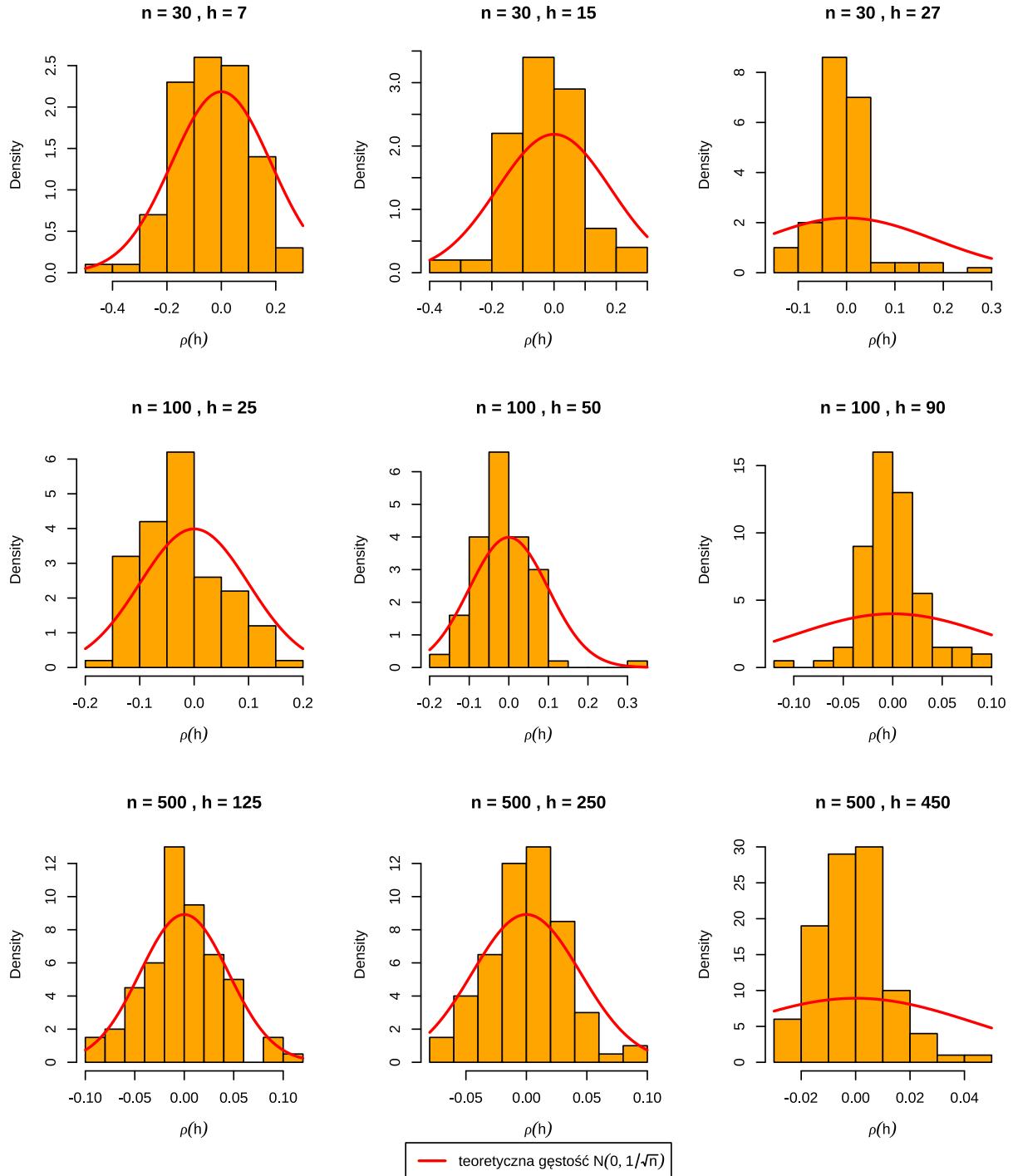
Rysunek 13: Histogramy dla estymatora funkcji autokowariancji dla różnych długości szeregów  $n$  i różnych opóźnień  $h$  z rozkładu normalnego

Wyniki dla różnych  $n$  i opóźnień  $h$  przedstawiono na [13]. Analiza estymatora funkcji autokowariancji dla danych z rozkładu normalnego wykazała następujące własności:

- Wpływ długości szeregu  $n$ :
  - Wzrost  $n$  zmniejsza wariancję estymatora
  - Dla  $n = 500$  rozkład ścisłe skupiony wokół 0
- Zachowanie dla dużych  $h$ :
  - Przy  $h \approx 0.9n$  wariancja wzrasta kilkukrotnie
  - Pojawiają się wartości odstające i asymetria

Estymator  $\hat{\gamma}(h)$  jest asymptotycznie normalny  $N(0, 1/n)$ , ale dla  $h \approx n$  traci własności asymptotyczne.

### 1.2.2 Rozkład wykładniczy $Exp(1)$



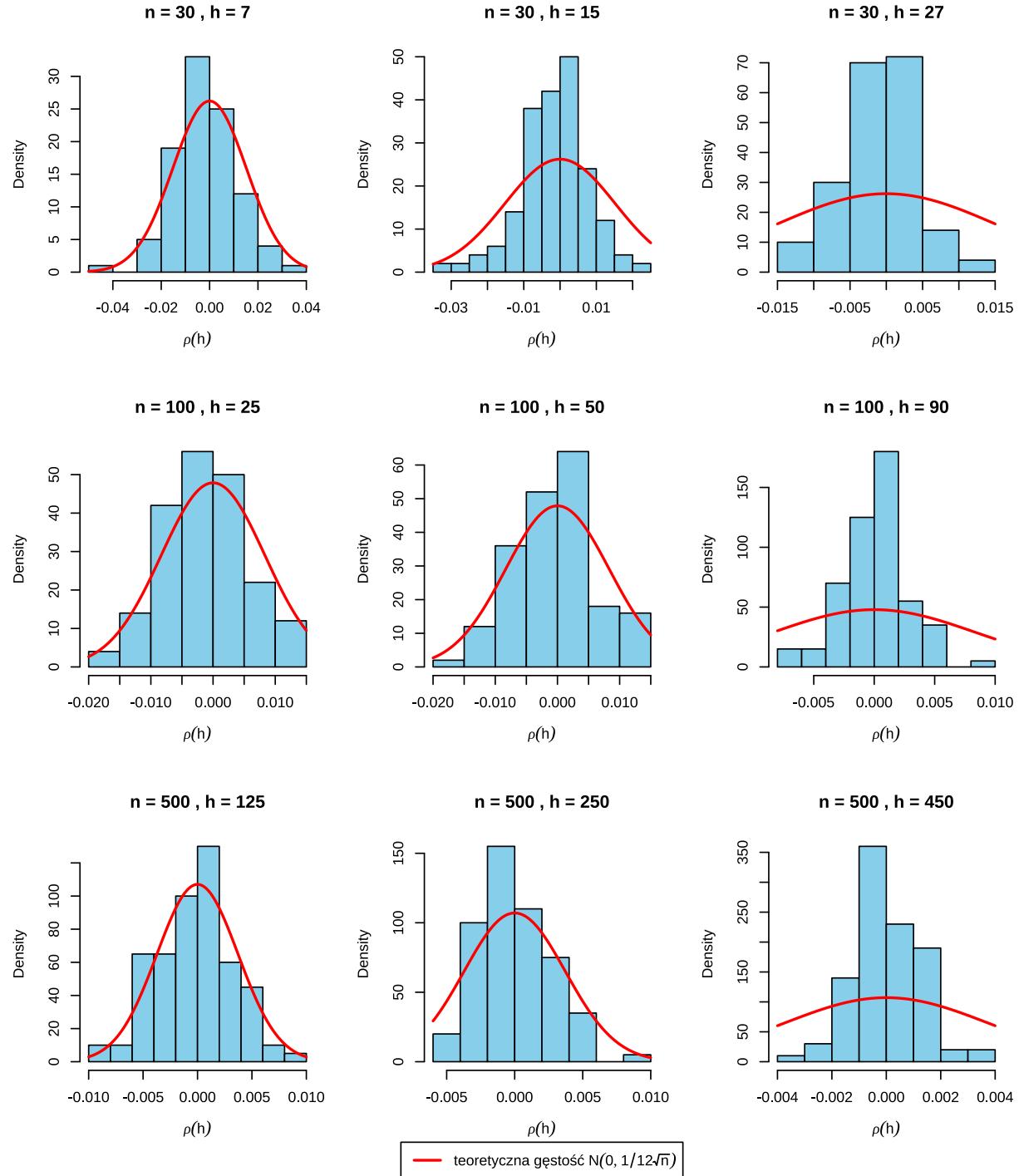
Rysunek 14: Histogramy dla estymatora funkcji autokowariancji dla różnych długości szeregów  $n$  i różnych opóźnień  $h$  z rozkładu wykładniczego

Wyniki dla różnych  $n$  i opóźnień  $h$  przedstawiono na [14]. Analiza estymatora funkcji autokowariancji dla danych z rozkładu wykładnicznego wykazała następujące własności:

- Dla  $n = 30$  widoczna asymetria rozkładu
- Dla  $h \approx 0.9n$  większa skośność niż w rozkładzie normalnym
- Asymptotyczna normalność osiągana dopiero dla  $n \geq 100$

Estymator  $\hat{\gamma}(h)$  zachowuje własności asymptotyczne nawet dla silnie skośnych danych, ale wymaga większych próbek ( $n \geq 100$ ) dla dobrej aproksymacji.

### 1.2.3 Rozkład jednostajny $Unif[0, 1]$



Rysunek 15: Histogramy dla estymatora funkcji autokowariancji dla różnych długości szeregów  $n$  i różnych opóźnień  $h$  z rozkładu jednostajnego

Wyniki dla różnych  $n$  i opóźnień  $h$  przedstawiono na [15]. Analiza estymatora funkcji autokowariancji dla danych z rozkładu jednostajnego wykazała następujące własności:

- Dla  $n = 30$  widoczna jest pewna asymetria rozkładu estymatora  $\hat{\gamma}(h)$ , co sugeruje, że dla małych próbek rozkład nie jest jeszcze w pełni normalny
- Dla  $h \approx 0.9n$  histogramy wykazują większą zmienność i są mniej stabilne, co jest związane z mniejszą liczbą par obserwacji używanych do obliczenia estymatora
- Asymptotyczna normalność estymatora  $\hat{\gamma}(h)$  dla  $h \neq 0$  jest osiągana dla większych próbek, takich jak  $n \geq 100$ , gdzie histogramy stają się bardziej symetryczne i skoncentrowane wokół zera

Estymator  $\hat{\gamma}(h)$  zachowuje własności asymptotyczne dla danych z rozkładu jednostajnego, ale dla małych próbek ( $n < 100$ ) i dużych opóźnień ( $h$  bliskich  $n$ ), jego rozkład może odbiegać od normalnego. Dla większych próbek ( $n \geq 100$ ), aproksymacja jest dobra.

### 1.3 Weryfikacja hipotez statystycznych o rozkładzie asymptotycznym estymatorów

Przeprowadzimy formalne testy statystyczne w celu weryfikacji hipotezy o normalności rozkładów asymptotycznych estymatorów średniej i autokowariancji. Będziemy korzystać z testu Shapiro-Wilka.

Będziemy weryfikować hipotezę:

$H_0$ : Badany rozkład jest zgodny z rozkładem normalnym  
przeciwko:

$H_1$ : Badany rozkład nie jest zgodny z rozkładem normalnym

Testy będziemy przeprowadzać na poziomie istotności  $\alpha = 0.05$ .

Tabela 1: Odsetek przyjęć hipotezy o normalności rozkładu estymatora średniej

n	procent_przyjec_H0	rozkład
1	30.00	95.50 normalny
2	100.00	95.20 normalny
3	500.00	95.40 normalny
4	30.00	73.90 wykładniczy
5	100.00	90.30 wykładniczy
6	500.00	92.60 wykładniczy
7	30.00	94.00 jednostajny
8	100.00	95.00 jednostajny
9	500.00	94.60 jednostajny

Tabela 2: Odsetek przyjęć hipotezy o normalności rozkładu estymatora autokowariancji

n	h	procent_przyjec_H0	rozkład
1	30.00	1.00	82.50 normalny
2	30.00	7.00	83.20 normalny
3	30.00	15.00	87.00 normalny
4	100.00	1.00	92.30 normalny
5	100.00	25.00	91.90 normalny
6	100.00	50.00	93.30 normalny
7	500.00	1.00	95.70 normalny
8	500.00	125.00	94.40 normalny
9	500.00	250.00	94.20 normalny
10	30.00	1.00	33.70 wykładowiczny
11	30.00	7.00	30.80 wykładowiczny
12	30.00	15.00	29.60 wykładowiczny
13	100.00	1.00	68.70 wykładowiczny
14	100.00	25.00	65.90 wykładowiczny
15	100.00	50.00	58.80 wykładowiczny
16	500.00	1.00	88.50 wykładowiczny
17	500.00	125.00	86.90 wykładowiczny
18	500.00	250.00	84.60 wykładowiczny
19	30.00	1.00	91.80 jednostajny
20	30.00	7.00	90.90 jednostajny
21	30.00	15.00	94.70 jednostajny
22	100.00	1.00	94.40 jednostajny
23	100.00	25.00	93.60 jednostajny
24	100.00	50.00	95.40 jednostajny
25	500.00	1.00	94.70 jednostajny
26	500.00	125.00	94.60 jednostajny
27	500.00	250.00	94.60 jednostajny

Na podstawie wyników przeprowadzonych testów statystycznych (tabela 1 i tabela 2) można sformułować następujące wnioski:

1. Dla estymatora średniej (tabela 1):

- W przypadku danych z rozkładu normalnego odsetek przyjęć hipotezy o normalności jest bliski 95% dla wszystkich badanych długości szeregu, co potwierdza teoretyczne własności rozkładu tego estymatora
- Dla rozkładu wykładowicznego, zgodność z rozkładem normalnym znaczco poprawia się wraz ze wzrostem  $n$ , co jest zgodne z centralnym twierdzeniem granicznym
- Dla rozkładu jednostajnego, nawet przy małych wartościach  $n$  rozkład średniej jest bliski normalnemu

2. Dla estymatora autokowariancji (tabela 2):

- Przy małych opóźnieniach ( $h$ ) rozkład estymatora zbliża się do normalnego wraz ze wzrostem  $n$  dla wszystkich badanych rozkładów
- Przy większych opóźnieniach (np.  $h = 0.5n$ ) zgodność z rozkładem normalnym jest gorsza, co potwierdza obserwacje z poprzednich analiz

Wyniki te, potwierdzają teoretyczne przewidywania dotyczące asymptotycznych rozkładów badanych estymatorów i wskazują, że dla odpowiednio dużych prób ( $n \geq 100$ ) rozkład normalny stanowi dobre przybliżenie, niezależnie od rozkładu wejściowego.

## 2 Testowanie białoszumowości

W tym rozdziale zajmiemy się testowaniem białoszumowości dla różnych szeregów czasowych za pomocą funkcji autokorelacji. Wypróbowujemy 2 podejścia - test graficzny oraz testy formalne. Wpierw zaimplementujemy test graficzny. Jako poziom istotności w naszej analizie przyjmiemy  $\alpha = 0.05$ .

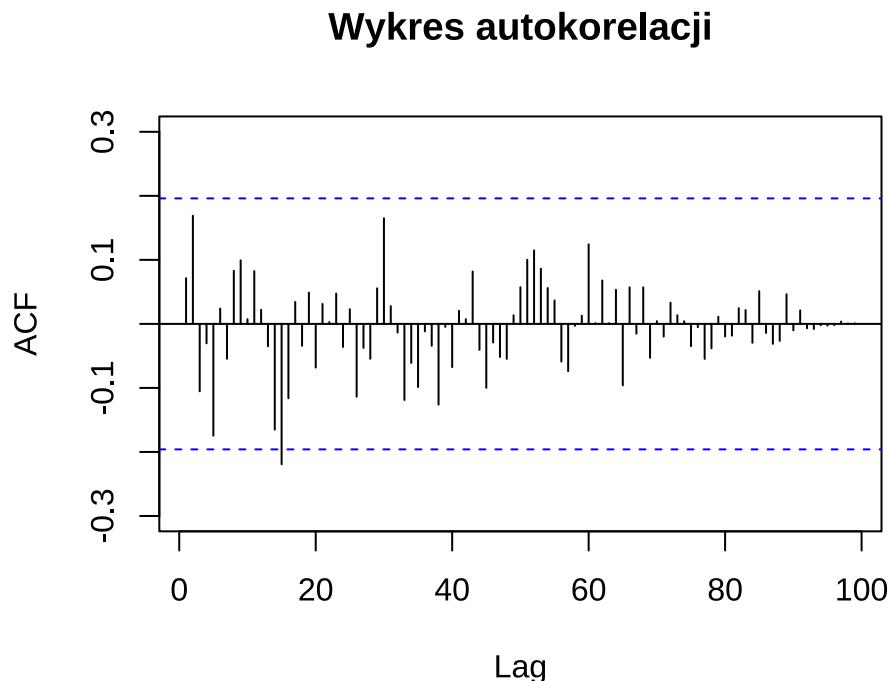
### 2.1 Test graficzny

Do zaimplementowania graficznego testu wykorzystamy własną funkcję. Aby ten test zidentyfikował nam szereg jako biały szum, musi spełnić 2 kryteria:

1. Co najmniej 95% autokorelacji próbkowych musi znajdować się w przedziale  $[-\frac{1.96}{\sqrt{n}}, \frac{1.96}{\sqrt{n}}]$ , gdzie ograniczenie górne podanych wartości jest kwantylem rzędu  $0.975 (1 - \frac{\alpha}{2})$  rozkładu  $N(0,1)$  podzieloną przez pierwiastek z liczności próby, czyli  $n$ .
2. Nie ma żadnych autokorelacji próbkowych wychodzących istotnie poza przedział ufnosci. U nas "istotnie" będzie znaczyło, że autokorelacje próbkoowe nie są większe niż  $1.2 \cdot \frac{1.96}{\sqrt{n}}$  i nie są mniejsze niż  $1.2 \cdot -\frac{1.96}{\sqrt{n}}$ .

Mając zaimplementowany test graficzny możemy sprawdzić, jak wypada test graficzny dla szumu IID z rozkładu  $N(0, 1)$ . Jako rozmiar próby przyjmiemy  $n = 100$  dla większej dokładności.

```
## [1] "Procent autokorelacji, które nie odstają poza przedział ufnosci: 1.01 %"
## [1] "Czy są istotnie odstające autokorelacje: Nie"
## [1] "Wg testu graficznego to jest biały szum"
```



Rysunek 16: Wykres autokorelacji dla szumu IID ze standardowego rozkładu normalnego

Test graficzny poprawnie rozpoznał szum IID z rozkładu normalnego jako biały szum. Na wykresie 16 widać, że żadne wartości nie odstają poza ustalony przedział ufnosci. Aby mieć pewność, że jest to faktycznie szum IID wykonamy test graficzny 1000 razy na różnych próbach.

```
## Odsetek testów wskazujących, że szum IID z rozkładu N(0,1)
## jest białym szumem: 0.721
```

Test w większości przypadków rozpoznał szum IID ze standardowego rozkładu normalnego jako biały szum. Możemy wykorzystać ten test dla innych szeregów czasowych.

### 1. Model ruchomej średniej rzędu 1

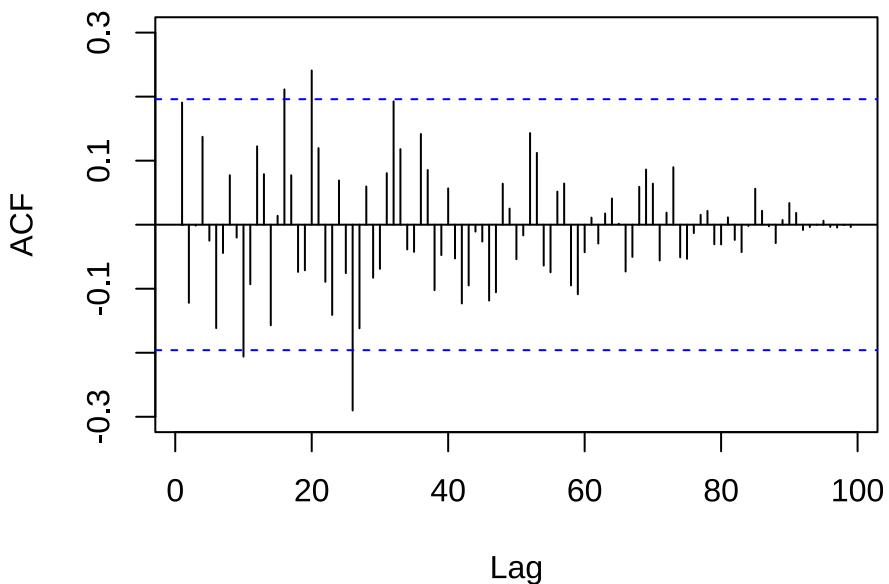
Przypomnijmy, że proces ruchomej średniej jest dany wzorem:

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1},$$

gdzie  $Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$ . W tym modelu przyjmiemy  $\theta = 0.1$ .

```
## [1] "Procent autokorelacji, które nie odstają poza przedział ufności: 4.04 %"
## [1] "Czy są istotnie odstające autokorelacje: Tak"
## [1] "Wg testu graficznego to nie jest biały szum"
```

**Wykres autokorelacji**



Rysunek 17: Wykres autokorelacji modelu ruchomej średniej rzędu 1

W tej próbie wyszło nam, że to nie jest biały szum, jednak wynik jednej próby nie ma większego sensu ze względu na losowość. Na 17 dokładnie widać, że co najmniej jedna autokorelacja istotnie odstaje poza przedział ufności. Aby dokładniej sprawdzić, czy nasz szereg jest białym szumem powtórzmy nasz test 1000 razy, tak jak w przypadku szumu IID z rozkładu  $N(0, 1)$ .

```
## Odsetek testów wskazujących, że model ruchomej średniej rzędu 1
## jest białym szumem: 0.678
```

Widzimy, że w większości przypadków mamy do czynienia z białym szumem, ale potrzebne będą formalne testy, żeby jednoznacznie stwierdzić, czy faktycznie tak jest.

### 2. Odwzorowanie logistyczne

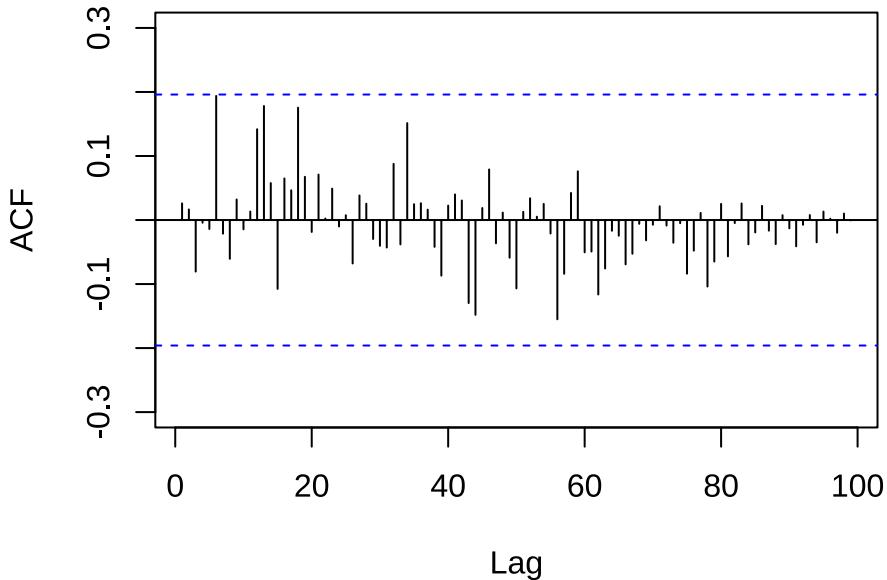
Zajmiemy się teraz innym przykładem - równaniem logistycznym. Przypomnijmy, że odwzorowanie logistyczne jest dane wzorem:

$$f(x) = \lambda x(1 - x), \quad \lambda \in [0; 4], \quad x \in [0; 1].$$

W naszym przypadku niech  $\lambda = 1.5$ .

```
## [1] "Procent autokorelacji, które nie odstają poza przedział ufności: 0 %"
## [1] "Czy są istotnie odstające autokorelacje: Nie"
## [1] "Wg testu graficznego to jest biały szum"
```

## Wykres autokorelacji



Rysunek 18: Wykres autokorelacji równania logistycznego

W pojedynczej próbie wyszło nam, że jest to biały szum. Na 18 nie ma żadnych autokorelacji odstających poza ustalony przedział ufności. Dla pewności powtórzmy test 1000 razy tak, jak w przypadku 1.

```
## Odsetek testów wskazujących, że równanie logistyczne
## jest białym szumem: 0.728
```

W tym wypadku wyszło nam, że trochę większy odsetek prób jest białym szumem niż w przypadku modelu ruchomej średniej rzędu 1. W testach formalnych dokładniej sprawdzimy, czy równanie logistyczne jest faktycznie białym szumem.

## 2.2 Testy formalne

Zajmiemy się teraz formalnymi testami białośzumowości - testem Boxa-Pierce'a i Ljungi-Boxa. Przypomnijmy, że statystyki testowe dla obu testów prezentują się następująco:

Dla Boxa-Pierce'a:

$$Q_{BP} = n \sum_{j=1}^h \hat{\rho}^2(j),$$

Dla Ljungi-Boxa:

$$Q_{LB} = n(n+2) \sum_{j=1}^h \frac{\hat{\rho}^2(j)}{n-j},$$

gdzie  $h$  oznacza pewne maksymalne opóźnienie, a  $\hat{\rho}(j)$  to próbowa autokorelacja dla opóźnienia  $j$ . Przy założeniu, że hipoteza zerowa o białośzumowości jest prawdziwa obie statystyki mają w przybliżeniu rozkład chi-kwadrat z  $h$  stopniami swobody.

Najpierw porównamy skuteczność obu testów przy testowaniu szumu IID z rozkładu  $N(0, 1)$ . Z wykładu wiemy, że test Ljungi-Boxa ma lepsze własności teoretyczne, więc przeprowadzimy symulacje, aby sprawdzić, czy faktycznie daje lepsze wyniki. Oba testy są zaimplementowane w R za pomocą funkcji `Box.test`, w której ustawiamy parametr `type` odpowiednio na '`Box-Pierce`' lub na '`Ljung-Box`'. Przyjmujemy  $h = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ .

```
## W 96.6 % przypadków test Boxa-Pierce'a przyjął hipotezę o białoszumowości,
## a test Ljungi-Boxa w 91 % przypadków.
```

Co ciekawe, test Ljungi-Boxa częściej odrzucał białoszumowość szumu IID ze standardowego rozkładu normalnego. Sprawdźmy, czy tak samo będzie dla szumu z rozkładu wykładniczego z parametrem  $\lambda = 1$ .

```
## W 97.9 % przypadków test Boxa-Pierce'a przyjął hipotezę o białoszumowości,
## a test Ljungi-Boxa w 92.8 % przypadków.
```

W tym wypadku również test Boxa-Pierce'a częściej przyjmował hipotezę o białoszumowości. Może to wynikać z tego, że wartości statystyki testu Ljungi-Boxa są bliższe rzeczywistemu rozkładowi dla skończonych prób, zatem rzadziej będzie fałszywie przyjmował hipotezę zerową niż test Boxa-Pierce'a. Oba testy jednak o wiele częściej w obu przypadkach mówili nam, że nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy o białoszumowości. Sprawdzimy za pomocą obu testów, czy szeregi analizowane w 2.1 są białymi szumami.

### 1. Model ruchomej średniej rzędu 1 (MA(1))

Przypomnijmy, że parametr  $\theta$  w tym szeregu u nas wynosi 0.1.

```
## W 95.8 % przypadków test Boxa-Pierce'a przyjął hipotezę
## o białoszumowości, a test Ljungi-Boxa w 89.5 % przypadków.
```

Widzimy, że w tym wypadku na podstawie obu testów rozpoznajemy MA(1) z parametrem  $\theta = 0.1$  jako biały szum. Zobaczmy, czy dla innego parametru  $\theta$ , np.  $\theta = 0.5$ , testy również powiedzą nam, że MA(1) jest białym szumem.

```
## W 44.4 % przypadków test Boxa-Pierce'a przyjął hipotezę
## o białoszumowości, a test Ljungi-Boxa w 28.3 % przypadków.
```

Na podstawie wyników obu testów widzimy zatem, że dla innego parametru  $\theta$  model ruchomej średniej rzędu 1 nie jest białym szumem. Test graficzny w tym przypadku również daje taki rezultat:

```
## Odsetek testów wskazujących, że model ruchomej średniej rzędu 1
## jest białym szumem: 0.015
```

Możemy też zmienić ilość próbek na  $n = 50$ . Wtedy dla testów formalnych:

- $\theta = 0.1$

```
## W 98.1 % przypadków test Boxa-Pierce'a przyjął hipotezę
## o białoszumowości, a test Ljungi-Boxa w 88.6 % przypadków.
```

Widzimy, że w tym przypadku oba testy zgodnie w większości przypadków uznają szereg MA(1) z  $\theta = 0.1$  jako biały szum.

- $\theta = 0.5$

```
## W 82.1 % przypadków test Boxa-Pierce'a przyjął hipotezę
## o białoszumowości, a test Ljungi-Boxa w 56.7 % przypadków.
```

W tym wypadku oba testy zwracają kompletnie rozbieżne rezultaty, ale oba w większości przypadków nie widzą podstaw do odrzucenia hipotezy o białoszumowości modelu MA(1) z  $\theta = 0.5$ . Oczywiście, nie przyjmujemy tych rezultatów za prawdziwe, gdyż wiemy, że dla większego (czyli "lepszego")  $n$  odrzucamy hipotezę o białoszumowości.

Dla testu graficznego:

- $\theta = 0.1$

```
## Odsetek testów wskazujących, że model ruchomej średniej rzędu 1
## jest białym szumem: 0.849
```

Tak samo, jak wcześniej test graficzny przyjmuje hipotezę o biały szumie szeregu MA(1) z  $\theta = 0.1$ .

- $\theta = 0.5$

```
## Odsetek testów wskazujących, że model ruchomej średniej rzędu 1
## jest białym szumem: 0.297
```

Dla  $\theta = 0.5$  test graficzny odrzuca hipotezę o biały szumie tak samo, jak wcześniej.

Biorąc pod uwagę naszą analizę dochodzimy do następujących wniosków:

**Wniosek 1** Model ruchomej średniej rzędu 1 z parametrem  $\theta = 0.1$  jest białym szumem.

**Wniosek 2** Model ruchomej średniej rzędu 1 z parametrem  $\theta = 0.5$  nie jest białym szumem.

## 2. Równanie logistyczne

Przypomnijmy, że parametr  $\lambda$  w tym odwzorowaniu u nas wynosi 1.5.

```
## W 96.2 % przypadków test Boxa-Pierce'a przyjął hipotezę
## o biały szumie, a test Ljungi-Boxa w 90.3 % przypadków.
```

Widzimy, że oba testy w tym przypadku nie widzą podstaw do odrzucenia hipotezy o biały szumie. Tak samo jak w 1, sprawdzamy inny parametr  $\lambda$ , np.  $\lambda = 3.7$ , aby zobaczyć, czy również w tym przypadku mamy do czynienia z białym szumem:

```
## W 96.2 % przypadków test Boxa-Pierce'a przyjął hipotezę
## o biały szumie, a test Ljungi-Boxa w 91.2 % przypadków.
```

W tym przypadku oba testy również jednogłośnie nie miały podstaw do odrzucenia hipotezy o biały szumie. Test graficzny w tym wypadku również się zgadza z wynikami testów Boxa-Pierce'a i Ljungi-Boxa:

```
## Odsetek testów wskazujących, że równanie logistyczne
## jest białym szumem: 0.704
```

Możemy zobaczyć, czy dla  $n = 50$  obie formy testowania również dadzą ten sam rezultat. Dla testów formalnych:

- $\lambda = 1.5$

```
## W 98.2 % przypadków test Boxa-Pierce'a przyjął hipotezę
## o biały szumie, a test Ljungi-Boxa w 89.4 % przypadków.
```

Widzimy, że dwukrotne zmniejszenie próby nie zmieniło ostatecznego rezultatu testów. Biorąc pod uwagę same testy formalne, możemy zatem przyjąć, że mamy do czynienia z białym szumem.

- $\lambda = 3.7$

```
## W 98.1 % przypadków test Boxa-Pierce'a przyjął hipotezę
## o biały szumie, a test Ljungi-Boxa w 90 % przypadków.
```

Dla  $\lambda = 3.7$  oba testy także mówią nam, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o biały szumie. Na podstawie testów formalnych stwierdzamy zatem, że mamy do czynienia z białym szumem.

Dla testu graficznego:

- $\lambda = 1.5$

```
## Odsetek testów wskazujących, że równanie logistyczne  
## jest białym szumem: 0.844
```

Tak samo, jak dla  $n = 100$  test graficzny wskazuje nam, że równanie logistyczne z  $\lambda = 1.5$  jest białym szumem.

- $\lambda = 3.7$

```
## Odsetek testów wskazujących, że równanie logistyczne  
## jest białym szumem: 0.872
```

W tym wypadku test graficzny również mówi nam, że rozważany przez nas szereg jest białym szumem.

Biorąc pod uwagę naszą analizę dochodzimy do następujących wniosków:

**Wniosek 3** *Równanie logistyczne z parametrem  $\lambda = 1.5$  jest białym szumem.*

**Wniosek 4** *Równanie logistyczne z parametrem  $\lambda = 3.7$  jest białym szumem.*