Najcenejše popolno prirejanje v polnem dvodelnem grafu

5.1.2017

1 Ideja projekta ter opis problema

Ideja našega projekta je primerjati dva pristopa k reševanju problema iskanja najcenejšega popolnega prirejanja v uteženem polnem dvodelnem grafu. Prvi pristop bo z uporabo Madžarske metode, kot reševanje linearnega programa in drugi pristop z reševanjem celoštevilskega linearnega programa- CLP. V nadaljevanju bomo napisali oba programa za reševanje našega problema, pridobili podatke (grafe) s pomočjo generiranja in iskanja realnih problemov, ki se jih da reševati s pomočjo te metode ter primerjali učinkovitost teh dveh metod.

Utežen polni dvodelen graf $G = (V, E)$ je graf, za katerega velja, da med poljubnima vozliščema tega grafa obstaja povezava, ki je utežena (s pozitivno ceno) in da lahko množico vozlišč zapišemo kot $V = X \cup Y$, kjer sta X in Y disjunktni podmnožici množice V in za vsako povezavo $e \in E$ velja da ima eno krajišče v X ter drugo v Y.
Najcenejše popolno prirejanje v uteženem polnem dvodelnem grafu $G = (V, E)$ je množica povezav $M \subset E$, kjer povezave iz M nimajo skupnih krajišč v grafu G, sočasno zajamemo v množico M vsa vozlišča grafa G (velja $M = V$) ter je vsota uteži minimalna.

2 Madžarska metoda

Madžarska metoda je optimizacijski algoritem, s pomočjo katerega v dvodelnem grafu iščemo največje prirejanje in najmanjše pokritje. Leta 1955 jo je razvil in objavil Harold Kuhn in jo poimenoval "madžarska metoda", saj algoritem temelji na delih madžarskih matematikov. Kasneje jo je dopolnil James Munkres, zato je ta metoda znana tudi pod imenom Kuhn-Munkres algoritem. Časovna zahtevnost prvotnega algoritma je $O(n^4)$, a so njegovo zahtevnost kasneje zmanjšali na $O(n^3)$.

Z madžarsko metodo z utežmi iščemo najcenejše popolno prirejanje v polnem uteženem grafu G. Ves čas računamo z matriko cen povezav $C \in R^{n \times n}$.

2.1 Postopek reševanja

1. Od elementov vsake vrstice matrike C odštejemo najmanjši element tiste vrstice. Od elementov vsakega stolpva matrike C odštejemo najmanjši element tistega stolpca.
2. Če v matriki C lahko izberemo n ničel, tako da je v vsaki vrstici in vsakem stolpcu natanko ena, končamo. Izbrane ničle določajo najcenejše prirejane v G.
   Sicer poiščemo najmanjšo množico vrstic in stolpcev (skupaj manj kot n), ki pokrijejo vse ničle v matriki C.
3. Naj bo ε najmanjši nepokriti element matrike C. Vse nepokrite elemente zmanjšamo za ε. Vse dvakrat pokrite elemente povečamo za ε. Ostale elemente pustimo nespremenjene. Vrnemo se na korak 2.

3 Formulacija problema s CLP

Imamo graf $G = (V, E)$, kjer w_e predstavlja nenegativno ceno povezave e ter $\delta(v)$ označuje množico povezav, ki gredo v vozlišče $v \in V$.
Spremenljivka x_e pokaže vrednost 1 natanko tedaj, ko je povezava e izbrana v najcenejšem popolnem prirejanju grafa G, sicer je njena vrednost enaka 0.

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum\nolimits_{e \in E} w_e x_e, && (1)\\
\text{p.p.} \quad & \sum\nolimits_{e \in \delta(v)} x_e = 1 \quad \forall v \in V && (2)\\
& x_e \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E && (3)\\
& && (4)
\end{aligned}
$$