

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

OPERACIJSKE RAZISKAVE

Najcenejše popolno prirejanje v polnem dvodelnem grafu

Avtorji:

Dejan GAŠPARIČ
Teja RUPNIK
Marko JORDAN

Mentorja:

prof. dr. Sergio CABELLO
asist. dr. Janoš VIDALI

23. februar 2017

1 Ideja projekta ter opis postopka

Ideja našega projekta je poiskati najcenejše popolno prirejanje v uteženem polnem dvodelnem grafu. Polni dvodelni graf $G = (V, E)$ je graf, za katerega velja, da obstajata X in Y taka, da je $V = X \cup Y$, kjer sta X in Y disjunktna, hkrati pa za vsak par vozlišč iz X in Y obstaja povezava med njima ($E \subseteq X \times Y$).

Najcenejše popolno prirejanje v uteženem polnem dvodelnem grafu $G = (V, E)$ je množica povezav $M \subseteq E$, kjer povezave iz M nimajo skupnih krajišč v grafu G , sočasno je tudi vsako vozlišče krajišče neke povezave v množici M , vsota uteži pa je minimalna.

Za reševanje problema iskanja najcenejšega popolnega prirejanja v uteženem polnem dvodelnem grafu bomo uporabili dva pristopa. Prvi pristop bo z uporabo **madžarske metode** (angl. *Hungarian method*), kot drugi pristop pa bomo reševali **celoštevilski linearni program** (angl. *integer linear programming*, v nadaljevanju ILP).

2 Madžarska metoda

2.1 Opis

Vhod: nenegativna matrika W uteži $n \times n$, ki predstavlja uteži med posameznimi vozlišči. Element matrike $w[i, j]$ iz i -te vrstice in j -tega stolpca predstavlja utež povezave med x_i in y_j , kjer velja $x_i \in X, y_j \in Y$.

Izhod: najcenejše popolno uteženo prirejanje grafa, ki ga predstavlja zgornja matrika, skupaj z utežmi povezav in vrednostjo prirejanja.

Algoritem, ki smo ga naredili, sicer v času $O(n^3)$ vrne najcenejše popolno uteženo prirejanje v polnem dvodelnem uteženem grafu, toda bistvena v njem je metoda, ki deluje za največje popolno uteženo prirejanje v polnem dvodelnem uteženem grafu. Ker iščemo najcenejše uteženo prirejanje, metoda pa dela za največje, delamo z negativno matriko originalne matrike, vrednost najcenejšega prirejanja pa je tako na koncu enaka nasprotni vrednosti največjega prirejanja (največje prirejanje je namreč v negirani matriki isto kot najcenejše prirejanje v originalni). Tehnično gledano sama metoda na koncu vrne zgolj povezave prirejanja, tako da je vrednosti in uteži (kar je skupaj s povezavami izhod celotnega algoritma) potrebno računati oz. iskati posebej z običajno for zanko.

Metoda v osnovi deluje tako: začnemo s prirejanjem M , ki je prazno, in grafom, za katerega povezave veljajo kasneje omenjene določene lastnosti.

Potem v vsakem koraku povečamo (v splošnem lahko le spremenimo, ne nujno povečamo) prirejanje M za eno povezavo, dokler prirejanje ni popolno. Natančneje, v vsakem koraku gradimo drevo, ki ga v začetku sestavlja prosto vozlišče $u \in X$, v splošnem, vendar ne vedno, nekaj povezav iz prirejanja (lahko tudi vse) in ustrezne povezave med vozlišči, da imamo še vedno drevo. Na koncu postopka gradnje drevesa pa dobimo še prosto vozlišče $y \in Y$ in ustrezno povezavo. Takrat lahko v drevesu najdemo povečujočo pot $u - y$ in tedaj povečamo M . Tekom gradnje drevesa se lahko zgodi, da moramo spremeniti zgoraj omenjeni graf, ki ga sicer ne rišemo, da dobimo nove povezave.

Natančnejši opis:

Definiramo $l : V \rightarrow R$, da za vsak par x, y velja : $l(x) + l(y) \geq w(x, y)$ (*). Tedaj rečemo, da je l dopusten. Sedaj si oglejmo graf, ki ga sestavljajo povezave, za katere v zgornji neenakosti velja enakost.

Velja: če najdemo v tem grafu popolno prirejanje M , potem je to prirejanje tudi največje uteženo prirejanje originalnega grafa. Res, naj bo M' neko popolno prirejanje originalnega grafa in naj $w(M')$ predstavlja vrednost prirejanja M' .

Potem velja:

$$w(M') = \sum_{x, y \in M'} w(x, y) \leq \sum_{x, y \in M'} (l(x) + l(y)) = \sum_{v \in V} l(v) = w(M) \quad (**)$$

Torej je M optimalna rešitev.

Naj bo: $\forall x \in X, l(x) = \max_{y \in Y} \{w(x, y)\}$ in $l(y) = 0, \forall y \in Y$ (***)

Potem očitno velja (*).

Definirajmo še $N_l(x)$ kot sosede elementa x v grafu, ki ga določajo enakosti v (*), in $N_l(S) = \bigcup_{x \in S} N_l(x), S \subseteq X$.

Z E_l pa označimo graf, v katerem so zgolj povezave, za katere vozlišča v (*) velja enakost.

2.2 Psevdokoda metode

1. Definirajmo prazno prirejanje M in nek dopusten l .
2. While M ni popoln:
 - Najdi prosto vozlišče $u \in X$.
 - Naj bo $S = [u], T = []$
3. If $N_l(S) = T$:

- $a_l = \min_{x \in S, y \notin T} \{l(x) + l(y) - w(x, y)\}$

$$\bullet \quad l'(v) = \begin{cases} l(v) - a_l & , \text{ if } v \in S \\ l(v) + a_l & , \text{ if } v \in T \\ l(v) & , \text{ sicer} \end{cases}$$

4. if $N_l(S) \neq T$: izberi $y \in N_l(S) - T$

4.1. Če y ni v prirejanju M , je $u - y$ povečujoča pot. Povečaj M in pojdi v 2.

4.2. Če je y v prirejanju, torej obstaja nek z iz X , da je povezava $z - y$ v prirejanju, povečaj drevo in dodaj z v S in y v T . Pojdi v 3.

Očitna lastnost 3. faze je še:

- Če je $(x, y) \in E_l$ za $x \in S$, $y \in T$, potem je $(x, y) \in E_{l'}$
- Če je $(x, y) \in E_l$ za $x \notin S$, $y \notin T$, potem je $(x, y) \in E_{l'}$
- Obstaja tudi $(x, y) \in E_{l'}$ za neke $x \in S$, $y \notin T$

2.3 Komentar psevdokode

V 1. fazi definirajmo l kot v $(***)$.

2. faza je glavni del algoritma. Če M ni popoln, mora obstajati prosto vozlišče u iz X . Dodamo ga v množico S , ki bo naša množica vozlišč iz X , ki smo jih že obiskali. T naj bo prazna množica, zanjo pa sicer velja, da bo naša množica vozlišč iz Y , ki smo jih že obiskali.

Preskočimo zaenkrat 3. fazo in si oglejmo 4. fazo.

V 4. fazi najprej najdemo nek y , ki je povezan z nekim elementom iz S v grafu E_l , pa ga še nismo obiskali, torej ni v T . Potem se vprašamo, če je ta y morda že v prirejanju. Če je (faza 4.2.), dodamo y v T , kajti y smo ravnokar obiskali, element z iz X , s katerim je bil y povezan v prirejanju M , pa dodamo v S . Ker y ni bil prost in nismo mogli najti povečujoče poti, postopek ponovimo, zato gremo v fazo 3.

Če pa je y prost (faza 4.1.), imamo povečujočo pot $u - y$ v drevesu. Povečamo M in gremo v fazo 2.

Sedaj si oglejmo še fazo 3: če je množica sosedov $N_l(S)$ enaka T , v fazi 4. ne bomo mogli najti novega vozlišča. Zato moramo spremeniti graf, da dobimo nove povezave in posledično nova vozlišča v $N_l(S)$, ki jih nato lahko izberemo v naslednji fazi.

Česar pa psevdokoda ne opisuje, je natančen opis gradnje drevesa. Gradimo tako: v 2. fazi najprej dodamo vozlišče u . Ko v 4. fazi dodamo vozlišče y , vedno dodamo v drevo povezavo, preko katere smo iz S prišli do y . Izberemo eno povezavo (lahko bi jih bilo več), da imamo spet drevo. Če je y prost, v grafu obstaja povečujoča pot $u - y$, na podlagi katere povečamo M . Če pa y ni prost, pa je potrebno v graf dodati še povezavo $z - y$, kjer je $z - y$ povezava v prirejanju M .

Omenimo še, da ko spreminjamo l v 3. fazi, nato vedno delamo s tem istim l , dokler ga ponovno ne spremenimo. Ob vsaki spremembi l in torej ob vsaki spremembi grafa pa vedno velja, da se vse povezave v drevesu ohranijo, saj so tudi v spremenjenem grafu. Ravno tako se ohranijo povezave prirejanja. To je ključno, saj to pomeni, da se vsaka sprememba prirejanja, ki se lahko zgodi le glede na trenutni l , še vedno nanaša na graf, za katerega veljajo enakosti v (*), torej še vedno velja (**).

Za vsak y , ki ni v T , definirajmo še: $slack_y = \min_{x \in S} \{l(x) + l(y) - w(x, y)\}$

$Slack_y$ določimo oz. spremenimo v fazi 4.2. Zanj porabimo $O(n)$ časa. V 3. fazi pa nato zgolj poiščemo najmanjše število in pripadajoče y , kar vzame spet $O(n)$ časa. V 3. fazi torej ne iščemo celotnega minimuma povsem od začetka (to je namreč $O(n^2)$).

Celotna zahtevnost metode: 2. faza se izvede n -krat (izbrati prosto vozlišče, določiti S , T ter dodati u v drevo pa je $O(n)$), v 4. fazi, ki se izvaja glede na 2. fazo, bomo največ $O(n)$ -krat potrebovali, da najdemo prosto vozlišče y . Tedaj spremenimo $slack_y$, S , $N_l(S)$, T in drevo, kar vzame $O(n)$. Skupaj torej $O(n) \times O(n) \times O(n) = O(n^3)$. Če je potrebno še spremeniti graf v 3. fazi, najdemo minimum in vozlišča, ki ta minimum dajo, v $O(n)$, ravno tako pa spremenimo l in $slack_y$ v $O(n)$. Skupaj torej spet $O(n^3)$ (3. faza se najprej zgodi v odvisnosti od 2. faze, potem pa še glede na fazo 4.2). Vse skupaj pa potem znaša $O(n^3) + O(n^3) = O(n^3)$.

Celoten algoritem sicer definira in uporablja še nekatere funkcije, kot npr. bfs in funkcijo, s katero povečamo prirejanje. Ravno tako na koncu povezavam prirejanja dodamo še uteži in izračunamo vrednost prirejanja. Temu navkljub se časovna zahtevnost ne spremeni. Bfs je v tem primeru $O(n)$ (za skoraj vsaki dodani vozlišči dodamo le dve povezavi), funkcija, s katero povečamo pot, pa je ravno tako $O(n)$. Ker izvajamo ti dve funkciji le ob vsaki spremembi prirejanja, torej n -krat, dobimo skupaj še dodatnih $O(n^2)$. Računanje vrednosti prirejanja in dodajanje uteži je $O(n)$. Določitev negativne matrike originalne matrike, definiranje praznega slovarja M in računanje začetnega dopustnega l kot v (**), kar se vse zgodi povsem na začetku, pa je $O(n^2)$. Celoten algoritm je torej $O(n^3)$.

3 ILP

3.1 Opis metode

Naj nenegativna $n \times n$ matrika W predstavlja uteži povezav med posameznimi vozlišči. Element matrike iz i -te vrstice in j -tega stolca, to je $w[i, j]$, predstavlja utež povezave med x_i in y_j , kjer velja $x_i \in X, y_j \in Y$.

Definiramo:

$$x[i, j] = \begin{cases} 1 & , \text{če je povezava } x_i - y_j \text{ v prirejanju} \\ 0 & , \text{sicer} \end{cases}$$

Zapišemo:

- (1) $\min \sum_{i,j=1}^n w[i, j]x[i, j]$
- (2) p.p. $\sum_{i=1}^n x[i, j] = 1 \quad \forall j \in [n]$
- (3) $\sum_{j=1}^n x[i, j] = 1 \quad \forall i \in [n]$
- (4) $x[i, j] \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in n \times n$

Razlaga:

1. Minimiziramo torej skupno ceno prirejanja.
2. Prvi in drugi pogoj nam zagotavljata, da ima vsako vozlišče natanko eno povezavo v prirejanju.
3. Tretji pogoj nam zagotavlja, da je x ali 0 ali 1

3.2 Algoritem

Zapišemo algoritem za ILP.

Vhod: zgoraj omenjena matrika W .

Izhod: najcenejše popolno uteženo prirejanje grafa, ki ga predstavlja zgornja matrika, torej povezave, ki so v najcenejšem prirejanju in vrednost prirejanja.

```

def MinWeightedMatching(A):
    n = A.ncols()
    p = MixedIntegerLinearProgram(maximization=False)
    x = p.new_variable(binary=True)

    p.set_objective(sum(sum(A[i, j]*x[i, j]
    for j in range(n)) for i in range(n)))

    for i in range(n):
        p.add_constraint(sum(x[i, j] for j in range(n)) == 1)
        p.add_constraint(sum(x[j, i] for j in range(n)) == 1)

    teza = p.solve()
    prirejanje = p.get_values(x)

    resitev = [i for i, j in prirejanje.items() if j == 1]

    return(resitev, teza)

```

4 Primerjava metod

Obe metodi smo med seboj tudi primerjali na naključno generiranih matrikah različnih velikosti, kjer nas je predvsem zanimala časovna zahtevnost v odvisnosti od vhodnih podatkov.

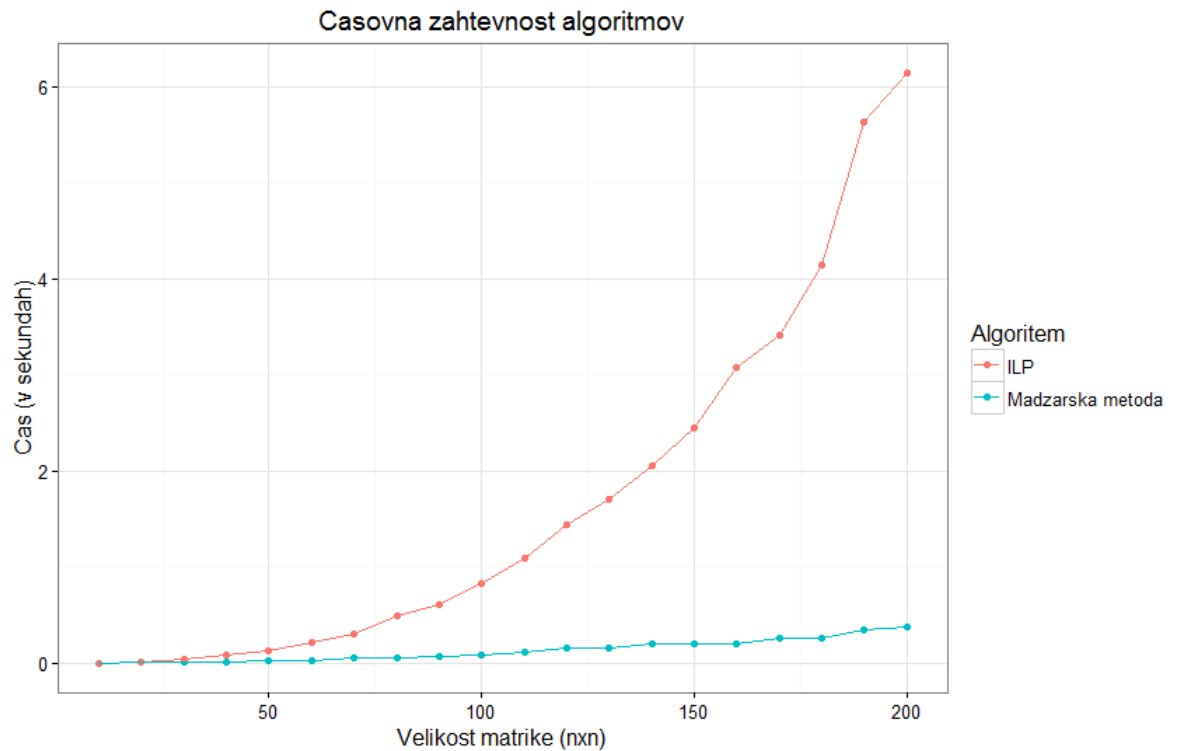
Generirali smo matrike s pomočjo naslednje kode ter si zapisovali čas izvajanja za določeno velikost (n predstavlja velikost matrike ($n \times n$), elementi matrike so pa celoštevilski in iz intervala $[h, k]$, zadnja vrstica nam poda čas izvajanja v sekundah, kjer ponovi izvajanje 10 krat ter vzame povprečen čas izvajanja):

```

for n in range(10,201,10):
    h = 0
    k = 100
    A = Matrix(
        [[(int(random()*(k-h+1))+h) for j in range(n)] for i in range(n)])
    %timeit(repeat=10, seconds=True) madzarska_metoda(A)

```

Potem smo v programu R-Studio vstavili podatke izračunanih časov, naredili tabelo ter na enem grafu prikazali čase izvajanja algoritmov v odvisnosti od vhodnih podatkov (matrike velikosti $n \times n$), kot prikazuje naslednja slika:



Kot je videti iz slike sta pri manjših razsežnostih (do 20×20) časa madžarske metode in ILP-ja precej podobna, ko pa velikost matrike večamo, se pa čas računanja s pomočjo ILP-ja močno poveča v primerjavi z madžarsko metodo. Taki rezultat smo lahko tudi pričakovali, saj vemo, da ima madžarska metoda časovno zahtevnost $O(n^3)$, medtem ko je ILP v splošnem NP-težek. Torej je za matrike velikih razsežnosti vsekakor pametno uporabljati algoritem za madžarsko metodo, čeprav je pisanje algoritma kar dolgotrajno v primerjavi z ILP formulacijo, vendar je izvedba bistveno hitrejša.

Literatura

- [1] <http://www.cse.ust.hk/~golin/COMP572/Notes/Matching.pdf>
- [2] <https://www.topcoder.com/community/data-science/data-science-tutorials/minimum-cost-flow-part-three-applications/>