# Skupina 3 - Problem stabilnih porok

Avtorji: Valentina Pucer, Vesna Zupanc, Jure Lah

## Problem stabilnega ujemanja

Problem stabilnega ujemanja je problem iskanja stabilnega prirejanja na dveh enako velikih množicah, kjer so za vsak element dane urejene preference. Prirejanje je preslikava elementov iz ene množice v drugo množico. Prirejanje ni stabilno, če:

1. obstaja element $A$ v prvi množici, ki preferira nek element $B$ iz druge množice pred trenutnim elementom in
2. tudi $B$ preferira $A$ pred elementom, kateremu je trenutno prirejen.

Z drugimi besedami je prirejanje stabilno, če ne obstaja nobeno prirejanje $(A, B)$, da bi bila $A$ in $B$ na boljšem kot trenutno.

## Uporaba

Algoritmi za iskanje rešitev problema stabilnega ujemanja imajo v realnem življenju več različnih uporab. Najbolj znana med njimi je razporeditev diplomantov medicine v bolnišnice, kot prvo zaposlitev.
Pomembna uporaba stabilnega ujemanja je tudi pri določanju uporabnikov strežnikom v večjih internetnih sistemih. Milijarde uporabnikov dostopajo do spletnih strani, videov in ostalih storitev na internetu, kar zahteva določanje posameznega uporabnika enemu (potencialnemu) izmed mnogih strežnikov po svetu, ki ponujajo to storitev. Vsak uporabnik preferira strežnike, ki so mu dovolj blizu, da omogočajo hitrejši odgovor za določeno storitev. Na drugi strani strežnik preferira tiste uporabnike, ki so zanj cenejši.

## Problem stabilnih porok

Kot že pove naslov, smo za našo nalogo izbrali problem stabilnih porok. V tem problemu imamo $n$ moških in $n$ žensk, kjer vsi po preferencah rangirajo pripadnike nasprotnega spola. Cilj je poročiti moške in ženske tako, da ni nobenega para, kjer bi oba imela raje drug drugega kot trenutne partnerje. Ko takih parov ni, pravimo, da je nabor porok stabilen.

!Opomba: Prirejanje je lahko le med moškim in žensko.

**Poroke so stabilne**: Naj bosta Ana in Bor oba zaročena, vendar ne drug z drugim. Ob zaključku algoritma ne obstaja možnost, da oba preferirata drug drugega pred svojim trenutnim partnerjem. Če Bor preferira Ano pred svojo trenutno partnerko, potem jo je moral zaprositi preden je zaprosil trenutno partneko. Če je Ana sprejela zaroko, a se na koncu z njim ni poročila, pomeni, da ga je zamenjala za nekoga boljšega. Če pa ga je zavrnila, je že bila z nekom boljšim.

D. Gale in L. S. Shapley sta l. 1962 dokazala, da je vedno mogoče rešiti problem stabilnih porok tako, da so vse poroke stabilne, za poljubno enako število žensk in moških ter predstavila algoritem, ki to stori.

## Naš problem

Naša naloga je sprogramirati algoritem, ki reši problem, torej izračuna stabilno ujemanje ter ima polinomsko zahtevnost in napisati metodo z nastavkom problema v celoštevilkem linearnem programu, ki nam prav tako da rešitev. Na koncu bomo obe metodi primerjali. Za algoritem s polinomsko zahtevnostjo smo si izbrali kar Gale-Shapleyev algoritem, ki je na kratko opisan v nadaljevanju.

### Gale - Shapleyev algoritem

Podanih imamo $n$ moških in $n$ žensk. Vsak/-a izmed njih je ocenil/-a vse osebe nasprotnega spola tako, da jim je podelil/-a vsa števila od 1 do $n$ v vrstnem redu padajoče všečnosti.

Algoritem poteka v t.i. krogih. Vsak od njih sestoji iz dveh delov: dejanj moških ter dejanj žensk:

- Vsak moški "prosi za roko"žensk po padajočem redu všečnosti.
  - Ko se zaroči, preneha s prošnjami.
  - Če zaročenka razdre zaroko, nadaljuje s prošnjami od tam naprej, kjer je ostal.
- Vsaka ženska čaka na ponudbo nekega snubca.
  - Sprejme prvo ponudbo, ki jo dobi.
  - Če je že zaročena z moškim m, snubi pa jo boljši moški $m'$, razdre zaroko z $m$ in se zaroči z $m'$.

Vsaka sprememba zaročenca ženske poveča njeno zadovoljstvo. Vsaka sprememba zaročenke moškega zmanjša njegovo zadovoljstvo. Ta proces se ponavlja dokler niso vsi zaročeni.

**Časovna zahtevnost** tega algoritma je $O(n^2)$, torej je to polinomska zahtevnost.

Algoritem zagotavlja, da na koncu ni moškega in ženske, ki nista zaročena, saj jo je on sigurno zaprosil za roko v nekem trenutku (ker moški na koncu zaprosi vsako žensko, če je to potrebno) in ker je zaprošena, mora biti z nekom zaročena tudi ona (lahko tudi z drugim, saj ga lahko zamenja za boljšega).

## Načrt dela

Kot smo že omenili zgoraj, bomo za reševanje problema uporabili opisan algoritem in celoštevilski linearni program ter ju primerjali.