

6. naloga: Enačbe hoda

Gašper Jalen 28181038

1 Navodilo

Za opis najpreprostejših fizikalnih procesov uporabljamo navadne diferencialne enačbe, ki povezujejo vrednosti spremenljivk sistema z njihovimi časovnimi spremembami. Tak primer je na primer enačba za časovno odvisnost temperature v stanovanju, ki je obdano s stenami z neko toplotno prevodnostjo in določeno zunanjo temperaturo. V najpreprostejšem primeru ima enačba obliko

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{zun}}) \quad (1)$$

z analitično rešitvijo

$$T(t) = T_{\text{zun}} + e^{-kt} (T(0) - T_{\text{zun}}) .$$

Enačbam, ki opisujejo razvoj spremenljivk sistema y po času ali drugi neodvisni spremenljivki x , pravimo *enačbe hoda*. Pri tej nalogi bomo proučili uporabnost različnih numeričnih metod za reševanje enačbe hoda oblike $dy/dx = f(x, y)$, kot na primer (1). Najbolj groba prva inačica, tako imenovana osnovna Eulerjeva metoda, je le prepisana aproksimacija za prvi odvod $y' \approx (y(x+h) - y(x))/h$, torej

$$y(x+h) = y(x) + h \left. \frac{dy}{dx} \right|_x . \quad (2)$$

Diferencialno enačbo smo prepisali v diferenčno: sistem spremljamo v ekvidistantnih korakih dolžine h . Metoda je večinoma stabilna, le groba: za večjo natančnost moramo ustrezno zmanjšati korak. Za red boljša ($\mathcal{O}(h^3)$), t.j. lokalna natančnost drugega reda) je simetrizirana Eulerjeva (ali sredinska) formula, ki sledi iz simetriziranega približka za prvi odvod, $y' \approx (y(x+h) - y(x-h))/2h$. Računamo po shemi

$$y(x+h) = y(x-h) + 2h \left. \frac{dy}{dx} \right|_x , \quad (3)$$

ki pa je praviloma nestabilna. Želeli bi si pravzaprav nekaj takega

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2} \left[\left. \frac{dy}{dx} \right|_x + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x+h} \right] , \quad (4)$$

le da to pot ne poznamo odvoda v končni točki intervala (shema je implicitna). Pomagamo si lahko z iteracijo. Zapišimo odvod kot:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_x = f(x, y)$$

ter

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad y_n = y(x_n)$$

Heunova metoda ($\mathcal{O}(h^3)$ lokalno) je približek idealne formule z:

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \quad (5)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1})] \quad (6)$$

Izvedenka tega je nato Midpoint metoda (tudi $\mathcal{O}(h^3)$ lokalno):

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (7)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}h k_1\right) \quad (8)$$

$$y_{n+1} = y_n + h k_2 \quad (9)$$

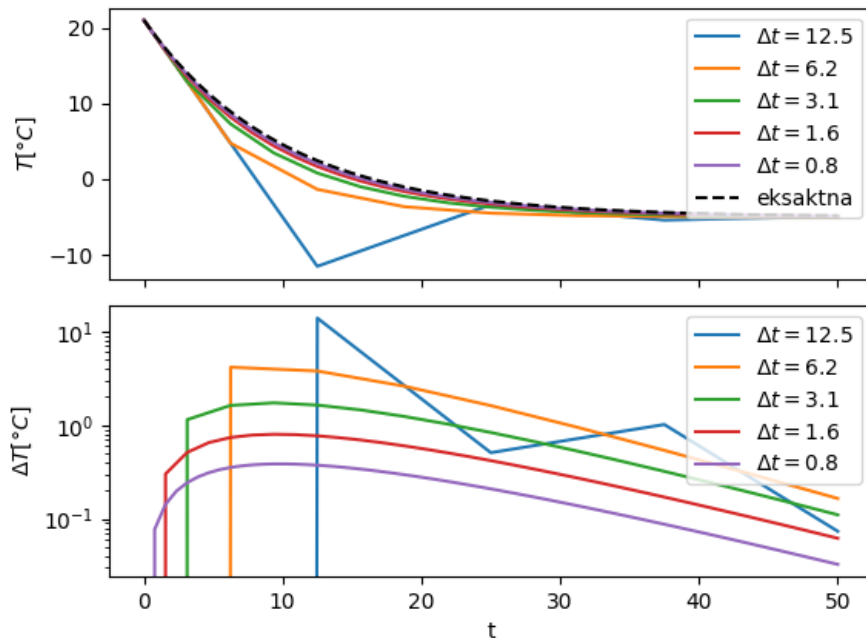
Le-to lahko potem izboljšamo kot modificirano Midpoint metodo itd. . .

V praksi zahtevamo natančnost in numerično učinkovitost, ki sta neprimerno boljši kot pri opisanih preprostih metodah. Uporabimo metode, zasnovane na algoritmih prediktor-korektor, metode višjih redov iz družine Runge-Kutta (z adaptivnimi koraki), ali ekstrapolacijske metode. Brez dvoma ena najbolj priljubljenih je metoda RK4,

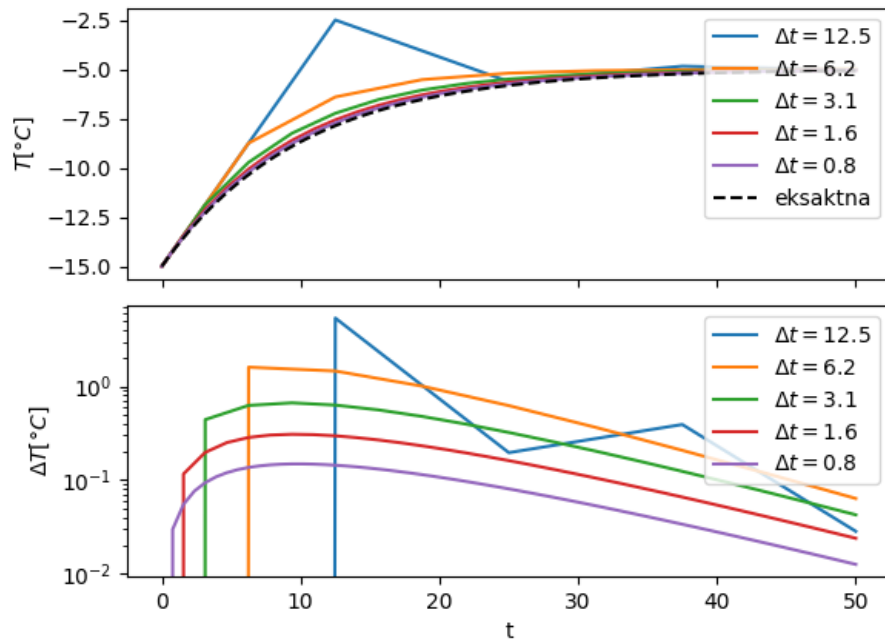
$$\begin{aligned} k_1 &= f(x, y(x)) , \\ k_2 &= f\left(x + \frac{1}{2}h, y(x) + \frac{h}{2}k_1\right) , \\ k_3 &= f\left(x + \frac{1}{2}h, y(x) + \frac{h}{2}k_2\right) , \\ k_4 &= f(x + h, y(x) + h k_3) , \\ y(x + h) &= y(x) + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + \mathcal{O}(h^5) . \end{aligned} \quad (10)$$

2 Natančnost metod

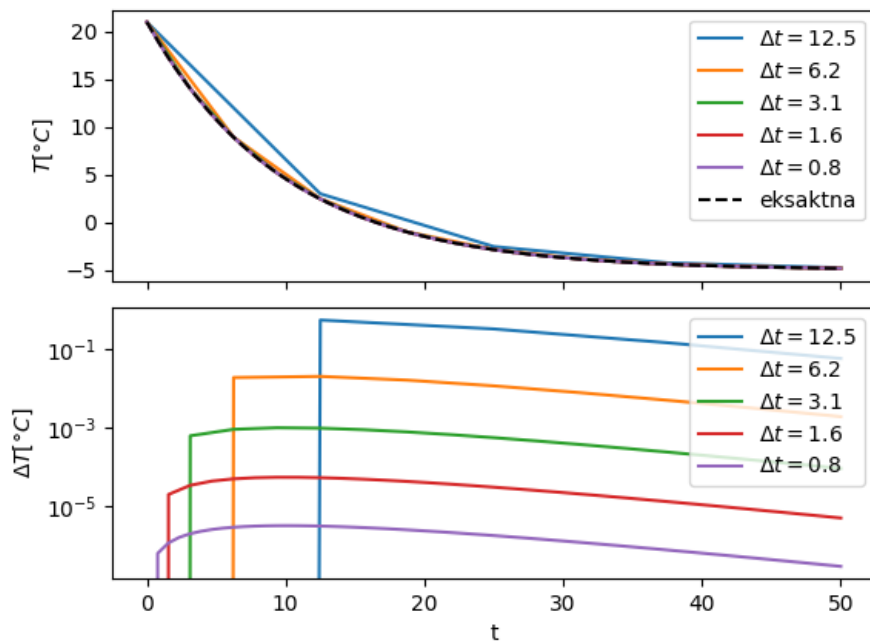
Pri nalogi sem reševal problem toplotnega prevajanja z vsemi metodami v dokumentu `diffeq_tsint.py` dostopnem na spletni učilnici. Sprva sem primerjal dve znani metodi in sicer Eulerjevo in RK4 metodo, ter preveril kakšno natančnost dosežeta v primerjavi z analitično, pri dve različnih notranjih temperaturah. Zunanja temperaturo sem imel skozi celotno nalogo nastavljeno na -5°C .



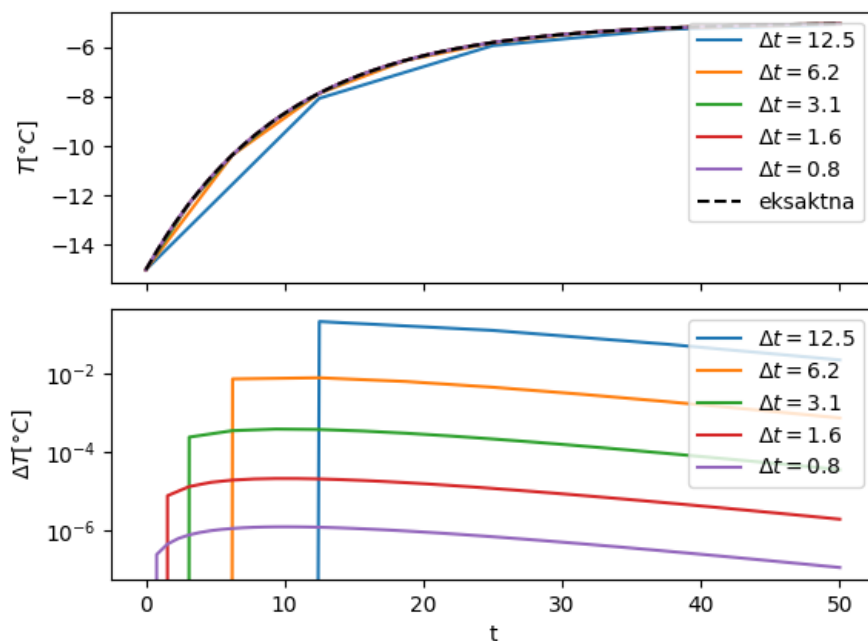
Slika 1: Sprememba temperature stanovanja z Eulerjevo metodo pri začetni notranji temperaturi 21°C , za različne dolžine korakov in pripadajoče velikost napake v primerjavi z analitično rešitvijo.



Slika 2: Sprememba temperature stanovanja z Eulerjevo metodo pri začetni notranji temperaturi -15°C , za različne dolžine korakov in pripadajoče velikost napake v primerjavi z analitično rešitvijo.

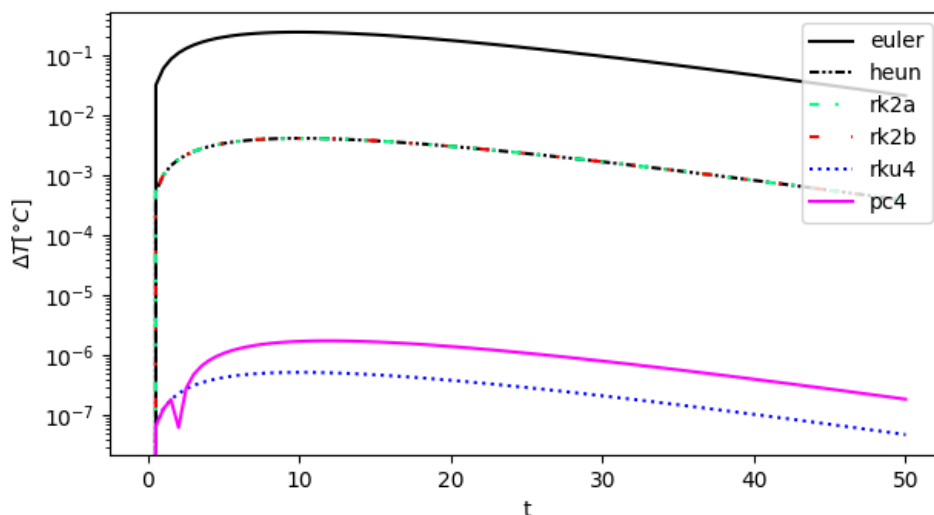


Slika 3: Sprememba temperature stanovanja z RK4 metodo pri začetni notranji temperaturi 21°C , za različne dolžine korakov in pripadajoče velikost napake v primerjavi z analitično rešitvijo.



Slika 4: Sprememba temperature stanovanja z RK4 metodo pri začetni notranji temperaturi -15°C , za različne dolžine korakov in pripadajoče velikost napake v primerjavi z analitično rešitvijo.

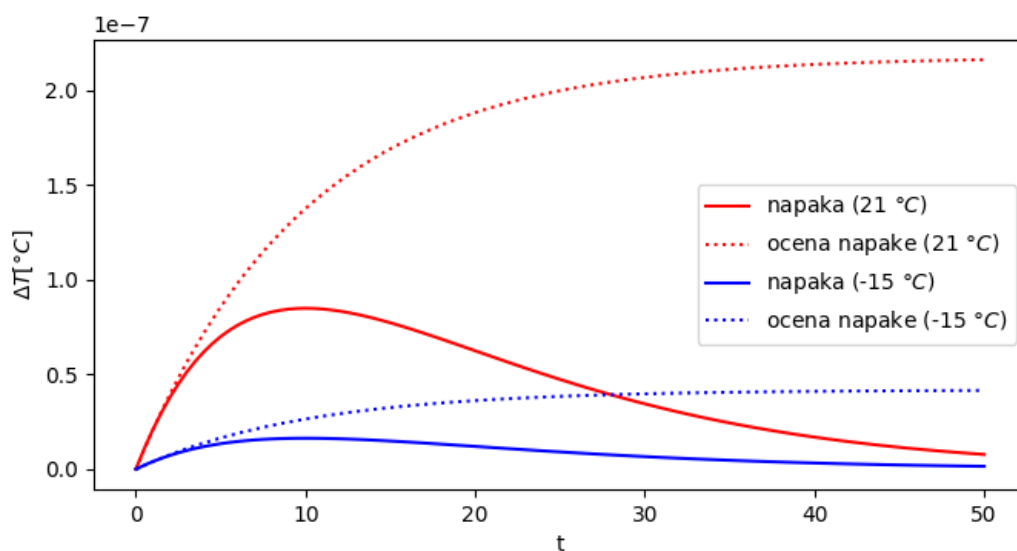
Pri primerjavi metod pričakovano opazimo precej večjo natančnost metode RK4, za iste dolžine korakov. RK4 za izračun naslednjega približka namreč izračuna odvod na 4 mestih, namesto na enem kot pri Eulerjevi. Sta pa obe metodi stabilni tudi za dokaj velike korake, kljub zelo slabemu ujemanju z rešitvijo pri Eulerjevi.



Slika 5: Primerjava natančnosti različnih metod pri začetni temperaturi 21°C dolžini koraka 0.5 .

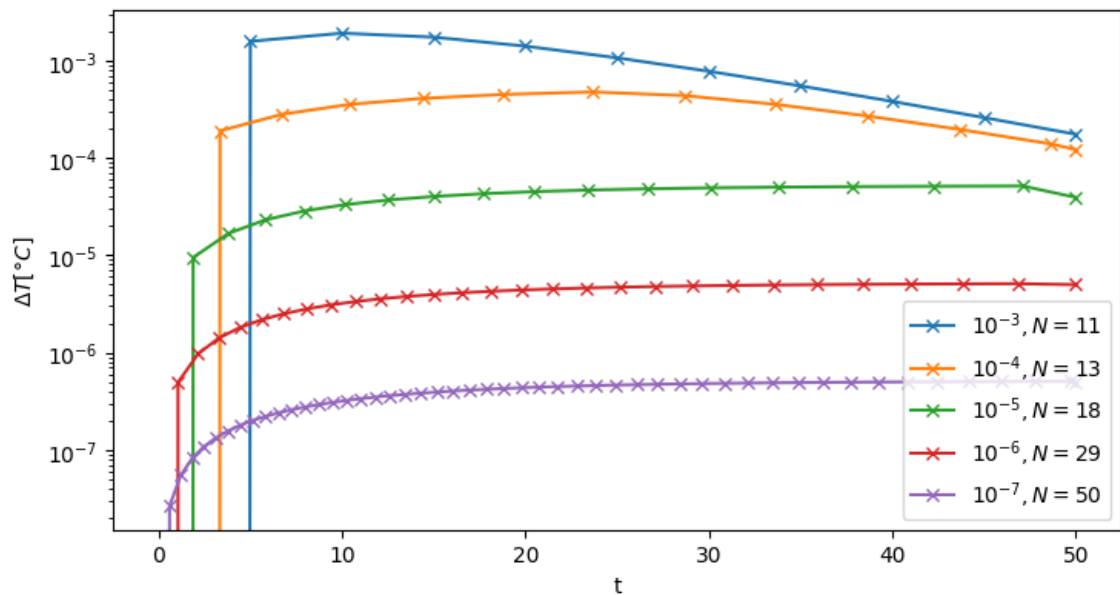
Na zgornjem grafu smo primerjali napake še za 4 druge metode in sicer Heunovo (Heun), RK2 (dve podobni metodi rk2a in rk2b) in Adams-Bashfort-Moultonov prediktor-korekt (pc4). Prve tri so si po natančnosti zelo podobne, saj izračunajo odvod na dveh mestih, kar jih po natančnosti umešča med Eulerja in RK4. Metoda pc4, sprva izračuna 3 korake s štirimi evaluacijami odvoda, naprej pa le še z dvema, kar malo zmanjša natančnost v primerjavi z RK4, a je še vedno bistveno uspešnejša kot RK2 metode.

Dodatno sem si pogledal še metodo RK45, ki poleg izračunov vrednosti rešitve poda tudi oceno napake na določenem koraku. Pri tem lahko primerjamo pravo napako z vsoto vseh napak na korakih, ki jih funkcija opravi do določenega časa (seštevamo napake na korkakih).



Slika 6: Izračunana (točna) napaka metode RK45 primerjana z oceno napake, ki jo metoda poda, za dve začetni notranji T (21°C in -15°C) in dolžino koraka 0.5.

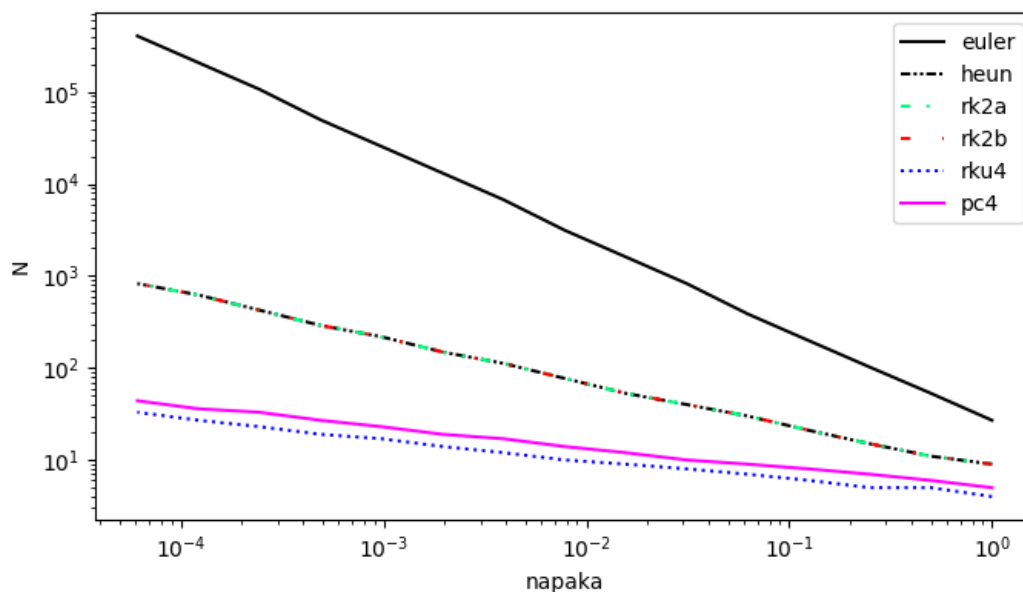
Prav tako se od ostalih razlikuje metoda Runge-Kutta-Fehlberg (rkf), saj pri njej določimo natančnost in ne koraka, metoda pa na to prilagaja korak.



Slika 7: Napaka rkf pri določeni natančnosti koraka za začetno temperaturo 21°C . N označuje število korakov, ki so se izvedli.

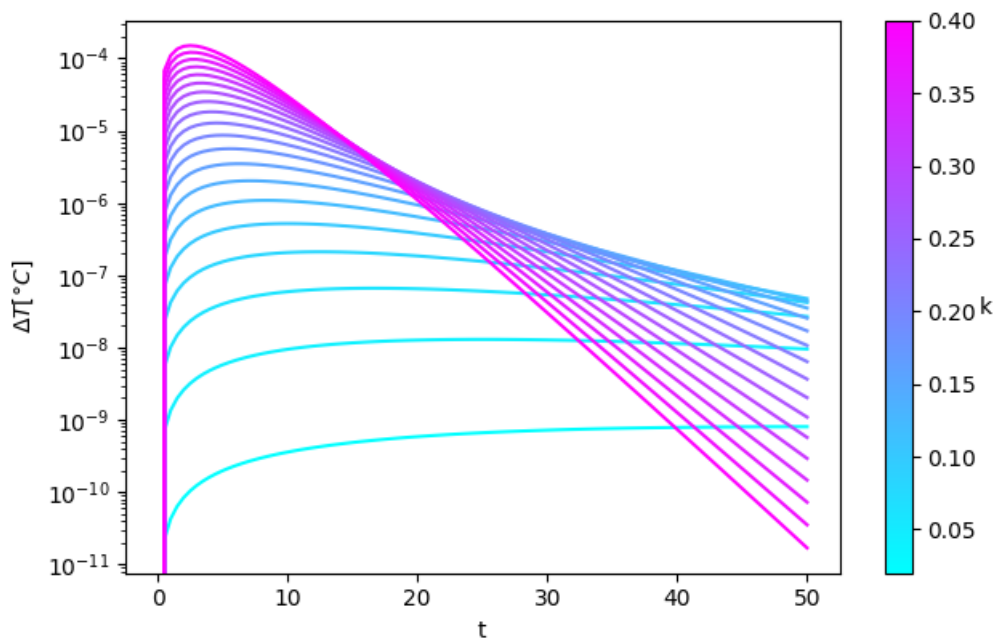
2.1 Število korakov

Poleg samih natančnosti metod sem si pogledal tudi število potrebnih korakov, da doseženo neko natančnost. Pri tem sem določil neko maksimalno odstopanje od eksaktne rešitve in nato preizkušal z različnimi števili korakov. Začel sem z dvema korakoma nato pa povečeval korake najprej po 1 nato pa sem število korakov N povečal za $0.1 \times N$. Ko sem dosegel želeno natančnost sem s postopkom prenehal in za rezultat vzel kar trenutno vrednost N -ja, čeprav to ni čisto natančno. Vseeno je to dobro nakazalo ustrezne odvisnosti. Pri vseh metodah narašča logaritem števila korakov enakomerno z logaritmom napake. Metode tipa RK2 so se ponovno izkazale za isto uspešne, z Eulerjevo metodo pa je visoke natančnosti seveda precej težko doseči.



Slika 8: Število korakov potrebnih za doseg določene natančnosti, pri začetni temperaturi 21°C .

2.2 Napaka v odvisnosti od k



Slika 9: Napaka RK4 za različne vrednosti k, pri začetni temperatur 21°C .

Odvisnost napake sem prikazal še za različne vrednosti k za metodo RK4. Napaka ob majhnih časih raste s parametrom k, ob večjih časih pa je za večje vrednosti k manjša. Tako obnašanje se mi zdi pričakovano, saj bi predvidel da je napaka ob hitri spremembi temperature večja kot pri asimptotskem približevanju.

3 Komentar

Menim, da sem z nalogo ustrezno prikazal posamezne natančnosti metod, s katerimi se sicer večinoma še nisem srečal. Res je, da pogosto uporabljam že vgrajene funkcije iz raznih knjižnic, a se včasih tudi poznavanje osnovnih metod izkaže za uporabno. Predvsem ko nas za nek problem zanima le končno stanje, predvidevam, da lahko pride v upoštevanje tudi Euler. Presenetljivo večjih težav z reševanjem nisem imel, k čemur sta verjetno pripomogla že napisana koda in uporaba že znanih oblik grafov.